ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 372.851.2

Е. В. Громова,
И. С. Сафуанов

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA В ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЮ ФУНКЦИИ

Аннотация. Представленное в статье исследование посвящено проблемам изучения в школе одного из базовых математических понятий – понятия функции. Вопросы восприятия, трактовки и употребления неоднозначного понятия функции уже давно находятся в поле зрения отечественных и зарубежных ученых, так как функциональная линия является центральной в математике и экспериментальных работах по моделированию реальных жизненных ситуаций. Поскольку трудности интерпретации функций осложняют процесс усвоения учащимися соответствующих разделов школьного курса математики, авторы статьи фокусируют свое внимание на особенностях восприятия школьниками понятия функции, возможностях использования в учебном процессе различных примеров применения функций в повседневной жизни и на развитии способностей учащихся интегрировать и применять варианты данного понятия. Все эти взаимоувязанные между собой аспекты методики и практики преподавания рассматриваются через призму деятельностного подхода, где инструментом часто выступают компьютерные технологии.

Чтобы помочь учащимся овладеть концептуальным пониманием функций как объектов, которые можно включать в новые математические контексты и конструкции (вычисление корней, подстановку выражений вместо переменных, изменение параметров, выяснение непрерывности, вычисление пределов, производных, первообразных, решение практических задач и т. д.), предлагается цикл специальных упражнений, разработанных на основе теории APOS («Action–Process–Object–Schema» – «Действие–Процесс–Объект–Схема») и системы компьютерной алгебры Geogebra. Описываются примеры заданий, подтверждающие наглядность программы, целесообразность и эффективность ее применения в педагогической практике.

Ключевые слова: функция, обучение с помощью компьютера, деятельностный подход, математическая программа Geogebra, теория APOS («Действие – Процесс – Объект – Схема»).

Abstract. The research is devoted to teaching one of the basic mathematical concepts – the function – in the secondary school. Regarded as the key instrument of mathematics and experimental modeling, the notion of function including its perception, interpretation and application have always been under the scrutiny of Russian and foreign scientists. The authors focus their attention on specificity of students' perception of the above concept, integrated in teaching process, and provide several examples of functions, applied in different spheres of everyday life, in order to develop students' operational skills and competences related to mathematical functions. All the interrelated aspects of teaching methods and practices are considered on the basis of activity approach and information technologies.

The paper recommends a series of particular exercises, based on the APOS theory (Action – Process – Object – Scheme), along with the Geogebra courseware to help students master their conceptual understanding of mathematical function, and its operational options in various mathematical contexts (e.g. calculating the roots, estimating the limits and derivatives, changing the parameters, solving practical problems, etc). The assignment samples demonstrate visibility of the courseware and effectiveness of its application in practical teaching.

Keywords: function, e-learning, activity approach, Geogebra mathematical courseware, APOS theory (Action – Process – Object – Scheme).

Проблемы, связанные с восприятием, трактовкой и употреблением неоднозначного понятия функции, уже давно находятся в поле внимания отечественных и зарубежных научных исследований. Интерес к этим вопросам не удивителен, так как функциональная линия является центральной в математике и экспериментальных работах по моделированию реальных жизненных ситуаций. И учебные программы математических дисциплин, и огромное количество научных изысканий в области математики сосредоточены на аспектах приложения числовых функций и поискам взаимосвязи между их различными представлениями. Примером последних является публикация Дубинского и Харела [6]. Трудности интерпретации понятия функции описаны во многих источниках, посвященных вопросам графического представления информации [7, 8]. Положения некоторых работ строятся на историческом, эпистемологическом и когнитивном анализах понятия функции [9, 10, 11, 12].

Наше исследование сфокусировано на трех основных линиях:

- восприятие учащимися понятия функции и основные психологические проблемы этого восприятия;
- пути преодоления затруднений, обусловленных многообразием определений понятия функции как в школьном, так и в вузовском курсах математики;
- использование компьютерных технологий в преодолении этих затруднений.

Мы попытались установить связи между восприятием школьниками понятия функции, различными примерами функций и способностями учащихся интегрировать и применять варианты данного понятия. Эти связи образуют модель, объединяющую три основных компонента: определение функции, примеры ее использования в повседневной жизни и различные способы анализа функций. Модель рассматривается через призму деятельностного подхода, где в качестве инструмента часто выступают компьютерные технологии. Их использование при введении и усвоении понятия функции удобно потому, что данное понятие относится к абстрактным и, как показывает опыт, с большим трудом воспринимается учащимися: функция видится им как некая формула, и они не могут до конца прочувствовать ее суть [1]. Компьютерная графика усиливает наглядность изучаемых объектов и понятий, особенно абстрактных, и предоставляет учащимся возможность увидеть их не только статично, но и в динамике, а в нашем случае еще изучать, исследовать функции и их свойства при помощи интерактивных моделей.

Нами был разработан цикл упражнений на базе системы компьютерной алгебры Geogebra. Упражнения составлены с целью помочь учащимся в овладении концептуальным пониманием функций как объектов, которые можно включать в новые математические контексты и конструкции (при вычислении корней, подстановке выражений вместо переменных, изменении параметров, выполнении арифметических операций над функциями, построении обратных и сложных функций, исследовании функций, выяснении непрерывности, вычислении пределов, производных, первообразных, решении практических задач).

Внедрение системы динамической алгебры Geogebra в процесс обучения математике дает новые возможности не только учащимся, но и преподавателям. Что делает Geogebra привлекательной для освоения понятия функции? Во-первых, в отличие от многих других эта программа проста в использовании, не требует долговременной подготовки и изучения принципов ее работы. Во-вторых, благодаря тому, что в данном программном продукте переплетены алгебраическая и геометрическая концепции, при объяснении, например, дифференцирования функций можно рассмотреть понятие производной функции как с точки зрения алгебры, так и геометрического смысла. Кроме того, программа за счет команд встроенного языка обладает богатыми возможностями оперирования функциями (построения графиков, вычисления корней, экстремумов, интегралов и т. д.).

Методы нашей работы во многом схожи с концепцией APOS, разработанной группой ученых во главе с Э. Дубинским [7] и названной «Действие – Процесс – Объект – Схема» (Action – Process – Object – Schema). Согласно принципам APOS, действие представляет собой физическую или умственную трансформацию объектов для получения других объектов. Процесс выкристаллизовывается из действий в том случае, когда человек проявляет способность отображать и сознательно контролировать их. Процесс инкапсулируется в объект в случае, если «индивид обретает осведомленность о всеобщности процесса, осознает, что преобразования способны обеспечить некий результат, и способен планировать такие преобразования. Схемы интегрируются в данную теорию как структурные организации действий, процессов и объектов» [8]. Схема представляет собой конечный результат процесса структуризации. В своих работах Э. Дубинский отмечает, что схема – не линейный набор элементов, а циклическая взаимообратная система.

Объекты охватывают весь спектр математических понятий: числа, переменные, функции и топологические пространства, векторы, векторные пространства и т. д. Каждое из них может быть построено отдельно в какой-то момент или в ходе его математического развития. Далее действия должны быть интериоризированы, т. е. в сознании человека должны построиться внутренние ментальные структуры, связанные с действиями. Интериоризированное действие и есть процесс. Интериоризация позволяет «ощущать» действие, комбинировать его с другими действиями. Например, учащийся может интериоризировать нахождение производной функции и успешно использовать то же действие по отношению к множеству других функций с помощью разных методов, которым в основном учат в школьном курсе математике. Если процесс интериоризирован, учащийся может преобразовать его, чтобы решить задачи, в которых дана функция и необходимо найти другую функцию, чьей производной является заданная в задаче. Здесь уже речь идет о процессе интегрирования, тоже сначала являющийся действием, которое потом должно быть интериоризировано в процесс.

Динамический процесс может быть свернут (инкапсулирован) в статический объект, который участвует в новых действиях и при необходимости может развернуться в процесс или даже действие (см., например, [5, с. 20]). Инкапсуляция – аналог «тематизации процесса» по Ж. Пиаже [3, с. 94].

Интериоризация обоих видов процессов, дифференциации и интегрирования, – необходимое условие для понимания основной теоремы алгебры.

Другой способ создания новых процессов – это объединение двух или нескольких уже существующих процессов. В добавление к нему процессы можно преобразовывать в действия. Множество функций следует рассматривать как объекты, а так как функции изначально представляют из себя процессы, то учащиеся должны инкапсулировать их в эти объекты [8]. Таким образом, схема, состоящая из действий и объектов, – циклическая и взаимообратная система.

Приведем примеры заданий, подтверждающие наглядность программы Geogebra и целесообразность ее применения в ключе деятельностного подхода и на основе теории APOS. Тема «Преобразование графиков функций» изучается в курсе 8-го класса общеобразовательной школы, и к началу ее изучения, согласно учебнику А. Г. Мордковича [2], учащиеся знакомы уже с тремя функциями: линейной $y = kx + m$, квадратичной $y = kx^2$ и обратной пропорциональностью $y = \frac{k}{x}$.

Для изучения параграфа «Как построить график функции $y = f(x + l)+m$, если известен график функции $y = f(x)$» упомянутого выше учебного комплекта нами были взяты за основу функции $y = x$, $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$.

Восьмиклассникам предлагается преобразовать графики функции, зависящие от трех параметров a, l и m. У учащихся есть возможность, поставив галочку напротив интересующей их функции, рассмотреть каждую из них в отдельности и, меняя значения параметров с помощью ползунков справа, пронаблюдать, какие преобразования происходят при этом с графиком (рис. 1).

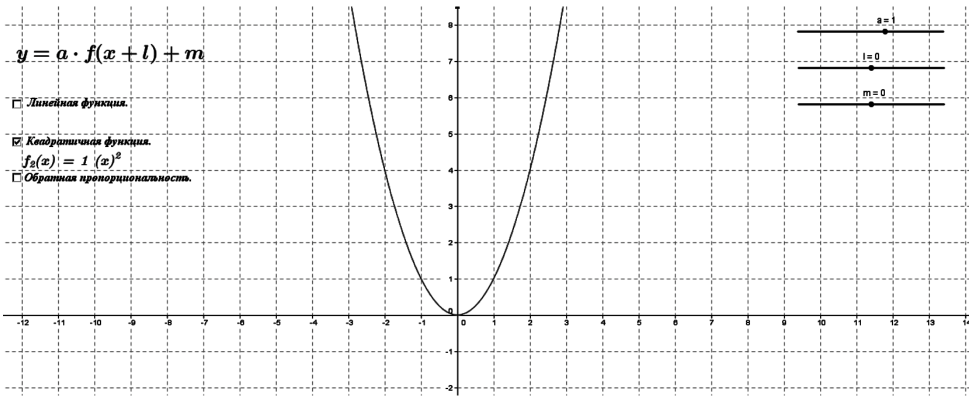

Рис. 1. Преобразование графика квадратичной функции

Первое задание заключается в выяснении, на что влияет каждый из параметров, в нашем случае меняющийся в пределах от –5 до 5. Вначале предлагается менять параметры по одному и поочередно для каждой функции. При преобразовании графика на координатной плоскости остается образ изначальных функций $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ и $f_3 = \sqrt{x}$, чтобы учащимся было легче обнаружить зависимость между параметрами и изменениями графиков (рис. 2). На данном этапе реализуются первые два компонента теории APOS: после неоднократного выполнения однотипных действий над графиками функций они в сознании учащихся интериорезируются в процессы.

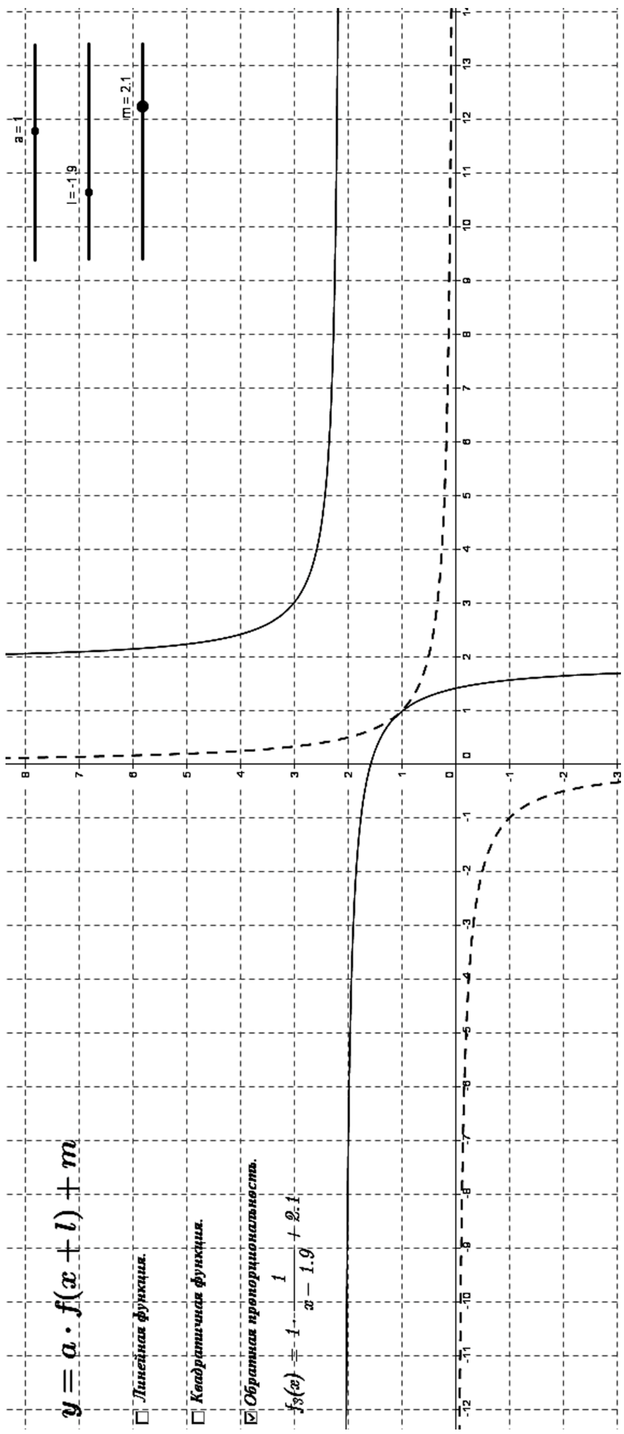

Рис. 2. Преобразование графика обратной пропорциональности

После этого учащиеся должны заполнить таблицу на основе своих наблюдений:

№	Функция (название, уравнение)	График функции (название, схематическое изображение)	Влияние коэффициента a	Влияние коэффициента l	Влияние коэффициента m
1.					
2.					
3.					

Переход к следующему этапу – Object – происходит, когда учащиеся самостоятельно провели анализ и функции и их графики стали представлять для них некоторые объекты со своим набором свойств, возможностями и способами преобразований.

Для закрепления полученных навыков школьники письменно отвечают на следующие вопросы:

1. Рассмотреть любую из трех функций и выяснить, как влияет на график параметр a, когда:

a. $|a| > 1$

b. $0 < |a| < 1$

c. $a < 0$

d. $a = 0$

2. Рассмотреть любую из трех функций и выяснить, как влияет на график параметр l, когда:

a. $l > 0$

b. $l < 0$

c. $l = 0$

3. Рассмотреть любую из трех функций и выяснить, как влияет на график параметр m, когда:

a. $m > 0$

b. $m < 0$

c. $m = 0$

4. Для данных функций, опишите преобразования, которые произойдут с графиком базовой функции $f(x)$.

a. $f(x) = x^2$; $h(x) = 3(x - 4)^2 + 2$

b. $f(x) = x$; $g(x) = -(x - 1) - 3$

c. $f(x) = \sqrt{x}$; $t(x) = 2,5\sqrt{x+5} - 5$

5. Для данных преобразований запишите уравнения функций:

a. График квадратичной функции $f(x) = x^2$ отображен относительно оси x, перемещен вверх на две единицы и влево на четыре.

b. График функции $f_3(x) = \sqrt{x}$ смещен вправо на три единицы, вверх на пять единиц.

В заключение учащимся предлагается самостоятельно сформулировать алгоритм построения графика функции $y = a \cdot f(x + l) + m$, например:

1) перейти к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -l$ и $y = m$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l, m)$;

2) к новой системе координат привязать график функции $y = f(x)$ [6];

3) построить в новой системе координат график функции $y = af(x)$.

При продолжении изучения темы «Преобразование графиков функций» мы предлагаем выполнить еще одно упражнение, которое выходит за рамки школьной программы алгебры 8-го класса, но целесообразно для объяснения учащимся на факультативных занятиях. Данное упражнение касается темы «Построение графиков функций $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = f(x) : g(x)$».

Первая часть упражнения направлена на интериорезацию действий в процессы. Покажем часть заданий, которые даются учащимся на бланках для самостоятельной работы и анализа.

1. Используя уравнения данных двух функций $f(x) = |x|$ и $g(x) = |x + 1|$, записать уравнения следующих функций:

a) $h(x) = f(x) + g(x)$

b) $k(x) = f(x) - g(x)$

c) $l(x) = f(x) \cdot g(x)$

d) $m(x) = f(x) : g(x)$

2. Найти значения функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $l(x)$, $m(x)$ при значении аргумента, равном 0; 3; 5; –2; –7; 10.

3. Проанализировать полученные результаты.

После этого учитель помогает учащимся сформулировать алгоритм построения графика методом алгебраических операций.

Далее предлагается построить график функции $y = h(x)$ по следующему алгоритму:

1) построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$;

2) найти суммы ординат точек графиков этих функций при одних и тех же значениях аргумента (так как сумма линейных функций есть линейная функция, то достаточно найти суммы ординат угловых точек, т. е. при $x = 0$ и $x = -1$, и по одной точке при $x > 0$ и $x < -1$;

3) построить график функции $y = h(x)$.

При построении графика функции $y = k(x)$ достаточно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = -g(x)$, и искомый график строится как сумма этих функций. «При умножении (делении) надо предварительно переводить отрезки (ординаты) в числа, а потом, перемножая (деля) эти числа, наносить на плоскость соответствующие им точки. При делении следует помнить, что $y = g(x)$ не должно обращаться в нуль» [4, с. 20]. На данном этапе арифметические действия сложения, умножения и деления функций в сознании учащихся формируются в ментальные объекты «сумма», «произведение» и «частное двух функций».

После рассмотрения алгебраических способов сложения, умножения и деления функций рекомендуется перейти к разбору геометрических способов, которые дают учащимся «представление о новых для них примерах использования простейших геометрических преобразований» [4]. Для изучения данного метода учащимся предлагается очередное упражнение, сделанное в программе Geogebra.

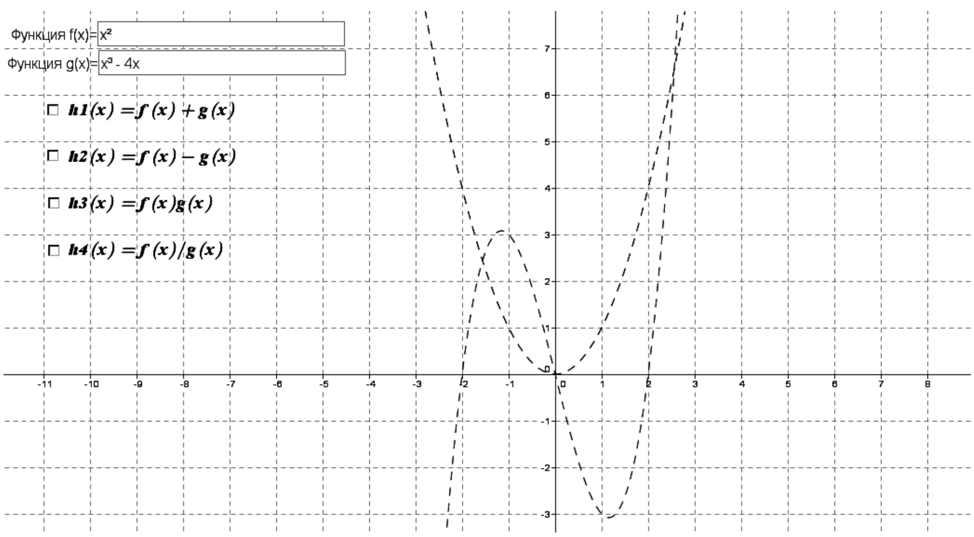

Рис. 3. Операции над функциями

На «полотне» (рабочем поле программы) в левом верхнем углу даны два поля для ввода (рис. 3), чтобы учащиеся сами могли ввести нужные им функции $f(x)$ и $g(x)$. В нашем случае уже введены уравнения функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 - 4x$ и построены их графики. Ниже определены функции суммы, разности, произведения и частного данных функций, графики которых можно посмотреть, поставив напротив галочку (рис. 4). Они необходимы для последующей самопроверки после того, как учащиеся выполнят задания.

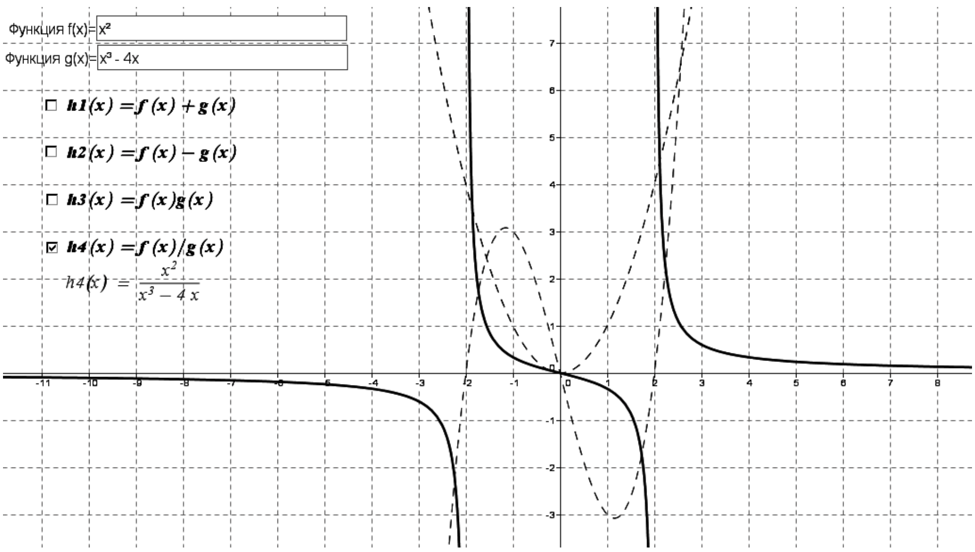

Рис. 4. Частное двух функций

Разберем графический способ сложения на примере поочередного построения графиков функций $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = f(x) : g(x)$ в данном файле Geogebra.

Пример 1. Для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 - 4x$ постройте график функции $y = f(x) + g(x)$.

1) на оси *Ox* постройте произвольную точку *M* и проведите через нее вертикаль *MN*;

2) через произвольную точку *A*, принадлежащую графику $y = g(x)$, проведите вертикаль; точку ее пересечения с графиком функции $y = f(x)$ назовите *B*;

3) постройте отрезок *AM*;

4) опустите перпендикуляр из точки B на прямую MN, основание перпендикуляра обозначьте K;

5) через точку К проведите прямую, параллельную прямой MA, до ее пересечения с прямой AB. Точка пересечения – точка графика функции $y = f(x) + g(x)$ (рис. 5);

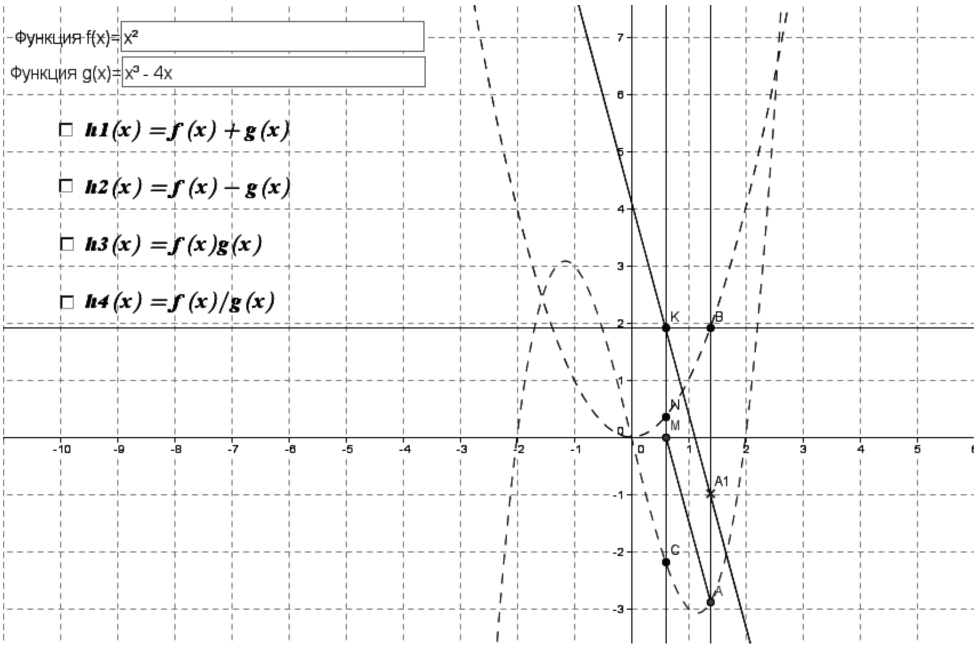

Рис. 5. Построение графика суммы двух функций

6) для точки A_1 выберите команду «оставлять след» и начните перемещать точку A вдоль графика функции $y = g(x)$. Поставьте галочку напротив $h(x) = f(x) + g(x)$ и проверьте сходство появившегося графика и следа точки A (рис. 6).

Доказательство того, что точка A_1 является искомой, учащимся предлагается выполнить самостоятельно, основываясь на принципе алгебраического способа, признаках равенства треугольников и свойствах параллельности прямых. Далее можно рассмотреть для этих же функций геометрический способ умножения и деления функций, но это целесообразнее сделать после прохождения темы «Подобие треугольников», так как доказательство того, что

A_1 – искомая, строится на основе подобия соответствующих треугольников.

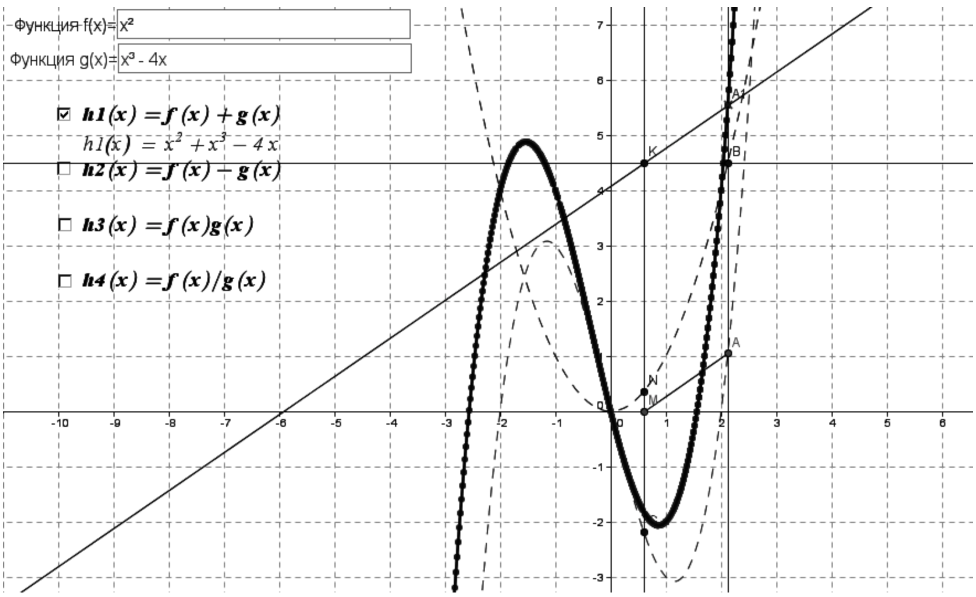

Рис. 6. График суммы двух функций

Пример 2. Для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 - 4x$ постройте график функции $y = f(x) \cdot g(x)$:

1) на графике функции $y = g(x)$ отметьте произвольную точку A и проведите через нее вертикаль до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Точку пересечения назовите буквой B;

2) через точку A проведите горизонталь до ее пересечения с прямой $x = 1$. Точку пересечения назовите M_1;

3) проведите прямую OM_1;

4) через точку B проведите горизонталь до ее пересечения с биссектрисой первого (третьего) координатного угла. Точку пересечения назовите M_2;

5) через точку M_2 проведите вертикаль до ее пересечения с прямой OM_1. Точку пересечения назовите M_3;

6) через точку M_3 проведите горизонталь до ее пересечения с прямой AB. Точка A_1 – точка пересечения прямых – точка графика $y = f(x) \cdot g(x)$ (рис. 7);

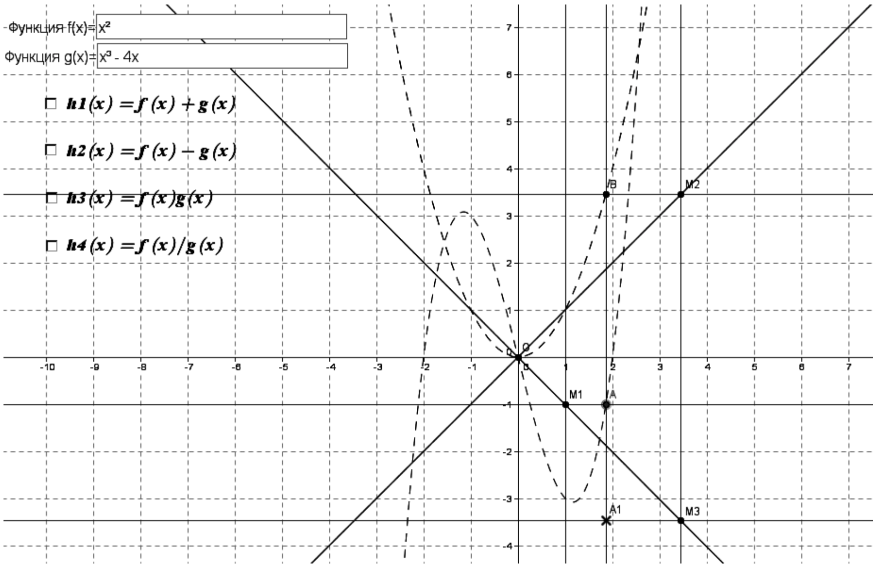

Рис. 7. Построение графика произведения двух функций

7) для точки A_1 выберите команду «оставлять след» и начните перемещать точку A вдоль графика функции $y = g(x)$. Поставьте галочку напротив $h_3(x) = f(x) \cdot g(x)$ и проверьте сходство появившегося графика и следа точки A (рис. 8).

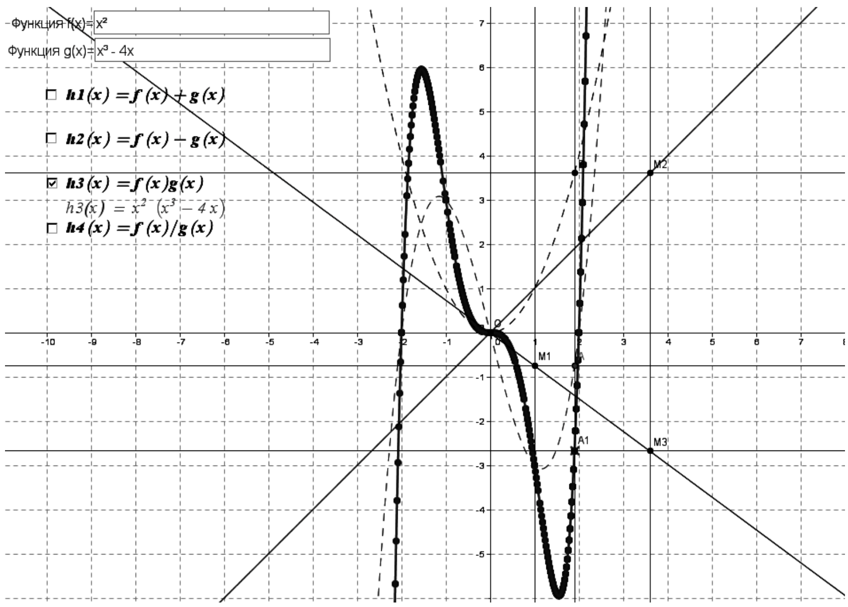

Рис. 8. График произведения двух функций

Пример 3. Для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 - 4x$ постройте график функции $y = f(x) : g(x)$:

1) через произвольную точку A, принадлежащую графику функции $y = g(x)$, проведите горизонталь до ее пересечения с прямой $x = 1$. Точку пересечения назовите M_1;

2) через точку A проведите вертикаль. Точку ее пересечения с графиком функции $y = f(x)$ назовите B;

3) проведите прямую OM_1;

4) через точку B проведите горизонталь до ее пересечения с прямой OM_1. Точку пересечения назовите M_2;

5) через точку M_2 проведите вертикаль до пересечения с прямой $y = x$. Точку пересечения назовите M_2;

6) A_1 – точка пересечения прямой AB с горизонталью, проведенной через M_2 – точку графика функции $y = f(x) : g(x)$ (рис. 9);

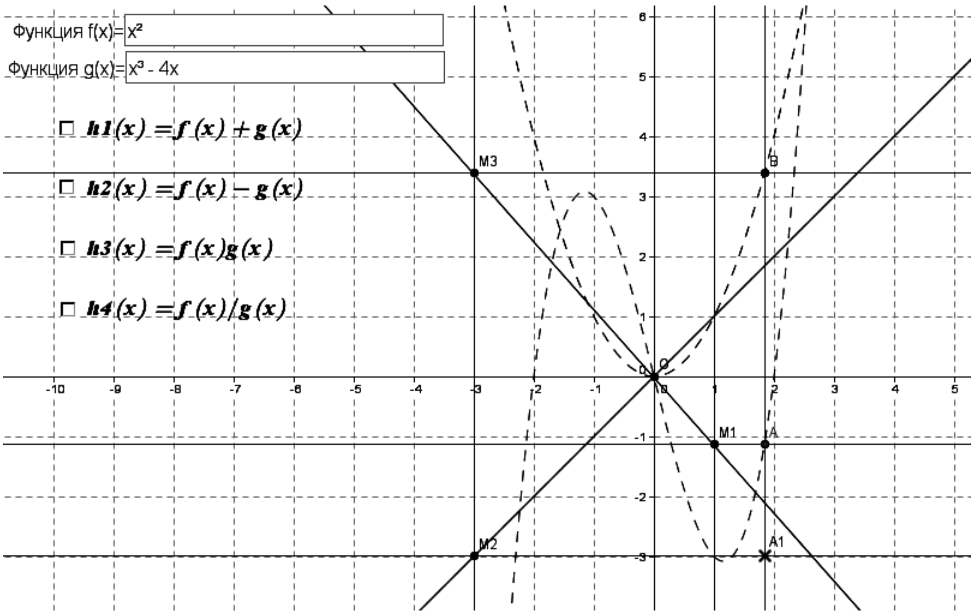

Рис. 9. Построение графика частного двух функций

7) для точки выберите команду «оставлять след» и начните перемещать точку вдоль графика функции $y = g(x)$. Поставьте галочку напротив $h_4(x) = f(x) : g(x)$ и проверьте сходство появившегося графика и следа точки A (рис. 10).

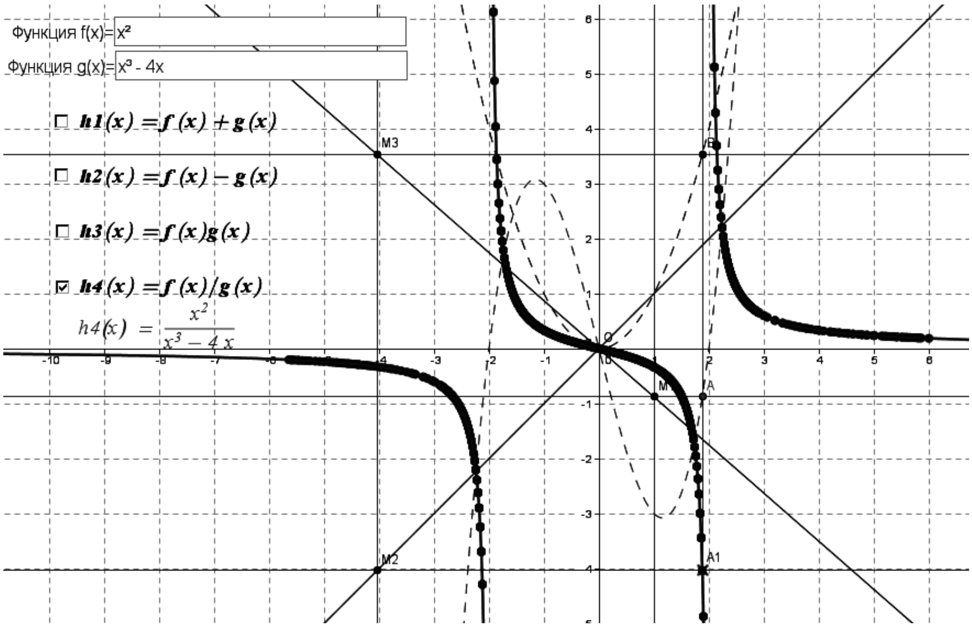

Рис. 10. Результат построения графика частного двух функций

Рассматривая в ходе выполнения описанных и подобных упражнений в системе алгебраический и геометрический способы сложения, умножения и деления функций, мы полностью реализуем теорию «Действие – Объект – Процесс – Схема» Э. Дубинского. Часть разработанных нами заданий предназначена для факультативных занятий, во время которых происходит более глубокое изучение функции как объекта. В старших классах (10–11-х) это достигается через изучение свойств функций (монотонность, четность, непрерывность и др.), дифференцирование и интегрирование, что является предметом следующего этапа нашего эксперимента.

Хотя в настоящее время исследование еще не закончено, но по итогам анализа его промежуточных результатов можно сделать вывод, что предлагаемый нами цикл упражнений весьма эффективен. В дальнейшем планируется уделить особое внимание развитию у учащихся навыков работы как с элементарными функциями, так и более сложными конструкциями.

Статья рекомендована к публикации
д-ром пед. наук, проф. В. А. Федоровым

Литература

1. Громова Е. В., Сафуанов И. С. Обучение понятию функции в основной школе с помощью компьютерных технологий // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». 2013. № 1. С. 91–98.

2. Мордкович А. Г. Алгебра. 8-й кл.: учебник для общеобразовательных учреждений. Москва: Мнемозина, 2005. Ч. 1. 223 с.

3. Пиаже Ж. Психогенез знаний и его эпистемологическое значение Семиотика / сост., вступ. ст. и общ. ред. Ю. С. Степанова. Москва: Радуга, 1983. С. 90–101.

4. Ромашкова Е. В. Функции и графики в 8–11-х классах. Москва: ИЛЕКСА, 2011. 171 с.

5. Шварц А. Ю. Роль чувственных представлений в овладении математическими понятиями: автореф. дис. … канд. психолог. наук. Москва: МГУ, 2011. 36 с.

6. Dubinsky Ed. & Harel G. The Nature of the Process Conception of Function // The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagog. United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 85–107.

7. Dubinsky Ed. & Lewin P. Reflective Abstraction and Mathematics Education. The Genetic Decomposition of Induction and Compactness // The Journal of mathematical behavior. 1986. № 5. P. 55–92.

8. Dubinsky Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking // Mathematics Education Library. V. 11. 1991. P. 95–126.

9. Sfard A. Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification-The Case of Function / Harel G. and Ed. Dubinsky (Eds.) // The Concept of Function Aspects of Epistemology & Pedagogy. United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 59–84.

10. Sierpinska A. On understanding the notion of function / G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.) // The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 25–58.

11. Tall D. & Vinner S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity // Educational Studies in Mathematics. Vol. 12. 1981. P. 151–169.

12. Vinner S. & Dreyfus T. Images and definitions for the concept of function // Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 20. 1989. P. 356–366.

10. Gromova, E. V., Safuanov, I. S. Teaching of the concept of function at Comprehensive School with the use of computer technologies // *Vestnik MGPU. Series «Informatics and Informatization of Education»*. № 1. 2013. P. 91–98. (in Russian)

11. Mordkovich A. G. Algebra. 8th Grade. Part 1: School textbook // M.: Mnemozina, 2005. 223 p. (In Russian)

12. Piaget, J. The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance // *Massimo Piattelli-Palmarini (ed.), Language and Learning: The Debate Between Jean Piaget and Noam Chomsky. Harvard University Press*, 1980. P. 1–23.

13. Romashkova E. V. Functions and their Graphs in Grades 8–11. M.: Ilexa, 2011. 171 p. (In Russian)

14. Shvarts, A. Yu. *The role of sensual representations in the mastering mathematical concepts. Annotaion of Ph.D. Thesis.* M.: MGU, 2011. 36 p. (in Russian).

15. Dubinsky Ed. & Harel G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function // G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagog.* United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 85–107.

16. Dubinsky Ed. Reflective Abstraction and Mathematics Education. The Genetic Decomposition of Induction and Compactness [Текст] / Ed. Dubinsky, P. Lewin // *The Journal of mathematical behavior.* 1986. № 5. P. 55–92.

17. Dubinsky, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking // *Mathematics Education Library.* V. 11. 1991. P. 95–126.

18. Sfard A. Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification-The Case of Function // G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*). United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 59–85.

19. Sierpinska A. On understanding the notion of function // G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 25–58.

20. Tall D., Vinner S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity // *Educational Studies in Mathematics, 12*, 1981. P. 151–169.

21. Vinner S., Dreyfus T. Images and definitions for the concept of function // *Journal for Research in Mathematics Education.* 1989. № 20. P. 356–366.

References

1. Gromova E. V., Safuanov I. S. Teaching of the concept of function at Comprehensive School with the use of computer technologies. *Vestnik MGPU. Series «Informatics and Informatization of Education».* [Bulleten of the MSPU. Seria «Computer and Information education»]. 2013. № 1. P. 91–98. (In Russian)

2. Mordkovich A. G. Algebra. 8-j kl. Ch. 1. [Algebra. 8th Grade. Part 1]. Moscow: Mnemozina, 2005. 223 p. (In Russian)

3. Piaget J. The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance. *Massimo Piattelli-Palmarini (ed.), Language and Learning: The Debate Between Jean Piaget and Noam Chomsky. Harvard University Press*, 1980. P. 1–23. (In Russian)

4. Romashkova E. V. *Funkcii i grafiki v 8–11-h klassah.* [Functions and their Graphs in Grades 8–11]. Moscow: Ilexa, 2011. 171 p. (In Russian)

5. Shvarts A. Yu. Rol' chuvstvennyh predstavlenij v ovladenii matematicheskimi ponjatijami. [The role of sensual representations in the mastering mathematical concepts. Cand.diss.] Moscow: MGU, 2011. 36 p. (In Russian).

6. Dubinsky Ed. & Harel G. The Nature of the Process Conception of Function / G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagog.* United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 85–107. (Translated from English)

7. Dubinsky Ed. Reflective Abstraction and Mathematics Education. The Genetic Decomposition of Induction and Compactness / Ed. Dubinsky, P. Lewin. *The Journal of mathematical behavior.* 1986. № 5. P. 55–92. (Translated from English)

8. Dubinsky Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *Mathematics Education Library.* V. 11. 1991. P. 95–126.

9. Sfard A. Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification-The Case of Function / G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy.* United States of America: Mathematical Association of America. 1992. P. 59–85. (Translated from English)

10. Sierpinska A. On understanding the notion of function / G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* United States of America: Mathematical Association of America, 1992. P. 25–58. (Translated from English)

11. Tall D. & Vinner S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics.* V. 12. 1981. P. 151–169. (Translated from English)

12. Vinner S. & Dreyfus T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education.* V. 20. 1989. P. 356–366. (Translated from English)