А.В.Шитиков

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В нашей работе [1] получены определяющие уравнения для упругопластических сред при конечных деформациях, обеспечивающие независимость разбиения полных деформаций на упругие и пластические и тензора напряжений от пути деформирования в упругой области. При этом понятии скорости пластической деформации и объективной производной тензора по времени не постулировались. Для замыкания системы уравнений при активном нагружении использовался принцип Мизеса и вводилось определение скорости пластической деформации, которое предлагалось использовать для записи кинетических уравнений параметров истории. Однако при конечных деформациях применение принципа Мизеса представляется недостаточно обоснованным, в частности, в силу существования различных возможностей введения понятия скорости пластической деформации.

В данной работе получена замкнутая система реологических уравнений для упругопластического тела при конечных деформациях из вариационного принципа. Эта система включает в себя уравнения для определения тензора внутренних переменных и получена без введения понятия скорости пластической деформации.

Пусть внутренняя энергия на единицу массы $U = U(E, G, S, \varkappa)$ зависит от G - метрического тензора полных деформаций, E -тензора упругих деформаций, S - энтропии единицы массы и некоторого тензора внутренних переменных X, определение которого дадим ниже. Обозначения всех величин, если это не оговорено специально, совпадают с обозначениями в работе [1]. Ссылки на формулы из этой работы даются двойной нумерацией. Внутри поверхности нагружения $\varphi(E, G, S, \varkappa) = 0$ тензоры G и E удовлетворяют уравнениям (см. (1.6), [2])

$$\dot{G} + G \cdot W + W^T \cdot G = 0, \quad W = \frac{\partial V}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\dot{E} + E \cdot W - R \cdot E = 0, \tag{2}$$

где V - вектор скорости перемещений; точка вверху означает материальную производную $\dot{(\cdot)} = V \cdot \partial(\cdot)/\partial x + \partial(\cdot)/\partial t$, антисимметричный тензор R определяется условием симметрии тензора $\dot{}$ (см. (1.8)).

Естественно предположить, что закон изменения симметричного тензора второго ранга $\varkappa$ в упругой области совпадает с законом изменения тензора пластических деформаций P (см. (1.1) и (1.9)), т.е. сводится к таким же ортогональным преобразованиям

$$\varkappa^{\cdot} = R \cdot \varkappa - \varkappa \cdot R \; . \tag{3}$$

Это уравнение обеспечивает независимость тензора $\varkappa$ от пути разгрузки и удовлетворяет требованию объективности, т.е. является инвариантным относительно жестких вращений. Покажем это. Пусть переход во вращающуюся систему координат описывается ортогональным тензором Q

$$dx' = Q \cdot dx \; , \qquad Q \cdot Q^{T} = I \tag{4}$$

Используя закон изменения тензора дисторсии $A = \partial x_0 / \partial x$ при переходе во вращающуюся систему координат $A = A' \cdot Q$ где $A' = \partial x_0 / \partial x'$, и уравнение (1.16) $A^{\cdot} + A' \cdot W = 0$, получим $(A')^{\cdot} + A' \cdot W = 0$, где

$$W' = Q \cdot W \cdot Q^{T} + Q^{\cdot} \cdot Q^{T} \; . \tag{5}$$

Из выражений (5) и (1.8) вытекает закон преобразования тензора R

$$R' = Q \cdot R \cdot Q^{T} + Q^{\cdot} \cdot Q^{T} \; . \tag{6}$$

Используя это равенство, получаем

$$(\varkappa')^{\cdot} + \varkappa' \cdot R' - R' \cdot \varkappa' = Q \cdot (\varkappa^{\cdot} + \varkappa \cdot R - R \cdot \varkappa) \cdot Q^{T} \; , \tag{7}$$

где $\varkappa' = Q \cdot \varkappa \cdot Q^{T}$, что и доказывает объективность уравнения (3). Аналогично показывается объективность уравнения (1), (2).

Закон сохранения энергии для случая безмоментной среды и отсутствия массовых сил можно представить в виде

$$\rho U^{\cdot} = \sigma \cdot\cdot W^{T} - I \cdot\cdot \partial q / \partial x \; , \tag{8}$$

где σ - тензор напряжений Коши, ρ - плотность среды, q - вектор потока тепла.

Через свободную энергию $F(E, G, T, \varkappa) = U - TS$

(T - абсолютная температура; здесь функция не совпадает с аналогичной в работе [1], т.к. там $F=F(E,P,T)$) уравнение (8) можно записать в виде

$$TS^{\cdot}+F_{æ}\cdot\cdot(æ^{\cdot}+æ\cdot R-R\cdot æ)+\frac{1}{\rho}(I\cdot\cdot\frac{\partial q}{\partial x})=D;\ S=-\frac{\partial F}{\partial T};\tag{9}$$

$$D=\frac{1}{\rho}\,\sigma\cdot\cdot W^{T}-F_{G}\cdot\cdot G^{\cdot}-F_{E}\cdot\cdot E^{\cdot}+E_{æ}\cdot\cdot(æ\cdot R-R\cdot æ)\tag{10}$$

Здесь $F_{æ}=\partial F/\partial æ$, $F_{E}=\partial F/\partial E$, $F_{G}=\partial F/\partial G$ - симметричные тензоры второго ранга. D имеет смысл мощности диссипации на единицу массы, которая складывается из мощности внутренних источников тепла ($TS^{\cdot}+\rho^{-1}I\cdot\cdot\partial q/\partial x$) и добавки $F_{æ}\cdot\cdot(æ^{\cdot}+æR-R\cdot æ)$, имеющей смысл энергии, затрачиваемой в единицу времени на перестройку внутренней структуры единицы массы элемента. Таким образом, мы постулировали возможность введения такого тензора, что данная энергия выражается указанным способом. Это можно рассматривать как определение тензора $æ$.

Обе эти составляющие мощности диссипации механической энергии экспериментально ранее определялись и отмечалось, что известные варианты теории течения при конечных деформациях неадекватно описывают такой процесс [3].

Условие $D=0$ при любых процессах внутри поверхности нагружения определяет связь тензора σ с параметрами состояния $E,G,T,æ$.

Условие экстремальности функционала $\int_{t_1}^{t_2}D\,dt$ позволяет получить уравнения для E, T, $æ$ в активной области.

Пусть элемент среды разгружается, тогда с помощью (1.3) и (1.8) выражение (10) для мощности диссипации преобразуем к виду

$$D=[\rho^{-1}(\sigma-\sigma_1)+2(G\cdot F_G+E\cdot F_E+æ\cdot F_{æ})^{a}]\cdot\cdot W^{T},\tag{11}$$

$$\sigma_1=-\rho\{E\cdot F_E+2G\cdot F_G+2(J_1J_2-J_3)^{-1}[\varphi^{a}\cdot(J_1^2E-J_1E^2)+E\cdot\varphi^{a}\cdot E^2]\}^{c},\tag{12}$$

$$\varphi^{a}=-(2æ\cdot F_{æ}+E\cdot F_E)^{a}.\tag{13}$$

где J_1, J_2, J_3 - инварианты тензора E.

$$J_1=I\cdot\cdot E,\quad J_2=\frac{1}{2}(J_1^2-E\cdot\cdot E),\quad J_3=\frac{1}{3}(I\cdot\cdot E^3+\frac{1}{2}J_1^3-\frac{3}{2}J_1E\cdot\cdot E).\tag{14}$$

Индексы c и a означают симметричную и антисимметричную части тензора соответственно. Поскольку условие $D=0$ должно выполняться при любых скоростях деформации W, то

$$\sigma=\sigma_1(E,G,T,\varkappa);\quad (G\cdot F_G+E\cdot F_E+\varkappa\cdot F_\varkappa)^a=0. \tag{15}$$

Здесь мы учли требования симметрии тензора σ. С помощью последнего соотношения из (13) имеем $\varphi=EF_E+2G\cdot F_G$, так что производные свободной энергии по компонентам тензора $\varkappa$

исключаются из выражения для σ. Требование равенства нулю напряжений при отсутствии упругих деформаций ($E=I$) и стандартной температуре ($T=T_0$) приводит к условию

$$\varphi^c_{E\to I,\,T\to T_0}=0.$$

Используя тождество Кейли-Гамильтона $E^3-J_1E^2+J_2E-J_3I=0$, выражение (12) для тензора напряжений можно преобразовать к виду, аналогичному приведенному в работе [1]:

$$\sigma=-\rho(J_1J_2-J_3)^{-1}[(J_1^2+J_2)E\cdot\bar{F}_E\cdot E+J_1J_3\bar{F}_E+E^2\cdot\bar{F}_E\cdot E^2- \tag{16}$$

$$-J_3(E\cdot\bar{F}_E+\bar{F}_E\cdot E)-J_1(E\cdot\bar{F}_E\cdot E^2+E^2\cdot\bar{F}_E\cdot E)];$$

$$\bar{F}_E=\partial\bar{F}/\partial E=F_E+E^{-1}\cdot G\cdot F_G+F_G\cdot G\cdot E^{-1}. \tag{17}$$

Формула (16) полностью совпадает с формулой (1.13) при замене в последней $F\to\bar{F}$, причем $\bar{F}=F(E,P,T,\varkappa)\equiv F(E,E\cdot P\cdot E,T,\varkappa)$.

Рассмотрим процесс активного нагружения. Полагая, что связь напряжений с деформациями (15) справедлива и в этом случае, из (1), (10) имеем

$$D=-F_E\cdot\cdot(\dot{E}+E\cdot W-R\cdot E). \tag{18}$$

Уравнение для E, $\varkappa$ и T найдем из требований максимума функционала $\int_{t_1}^{t_2}D(t)dt$ на любом отрезке времени активного процесса при условиях

$$\tau=T\dot{S}+F_\varkappa\cdot\cdot(\dot{\varkappa}+\varkappa\cdot R-R\cdot\varkappa)+\frac{1}{\rho}\left(I\cdot\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\right)-D=0; \tag{19}$$

$$\bar{\varphi}(E,G,T,\varkappa)\equiv\varphi(E,G,S(E,G,T,\varkappa),\varkappa)=0; \tag{20}$$

$$(E\cdot W-R\cdot E)^a=0. \tag{21}$$

Равенство (21) определяет связь (1.8) тензора R с E и Его включение в перечень условий позволяет избежать достаточно громоздкого дифференцирования тензора R (E, W) по компонентам тензора E .

Таким образом, требуется найти безусловный экстремум функционала Лагранжа $\int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt$, где

$$L(t) = D - \lambda\bar{\varphi} - \nu\tau - \Lambda \cdot\cdot (E\cdot W - R\cdot E), \tag{22}$$

Λ - антисимметричный тензор второго ранга. Варьирование производится по переменным E, $\varkappa$, T, R , считая G, W и $\partial q/\partial x$ заданными функциями времени.

Ограничимся в данной работе случаем изотермического процесса, тогда

$$L = -F_E \cdot\cdot (\dot{E} + E\cdot W - R\cdot E) - \lambda\bar{\varphi} - \Lambda\cdot\cdot(E\cdot W - R\cdot E), \tag{23}$$

а условие $\tau = 0$ определяет приток тепла в элемент, необходимый для поддержания заданной температуры.

E, $\varkappa$, Λ должны удовлетворять уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial \varkappa} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial R} = 0; \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{E}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial E} = 0. \tag{25}$$

Если при варьировании функционала считать, что по переменным E концы закреплены $E(t_1) = E_1$, $E(t_2) = E_2$, а по $\varkappa$ - свободны, то условия трансверсальности не возникают.

Рассмотрим условие $\partial L/\partial\varkappa = 0$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varkappa\,\partial E_{ij}} (\dot{E} + E\cdot W - R\cdot E)_{ij} + \lambda\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\varkappa} = 0. \tag{26}$$

Это уравнение определяет упругие деформации в активной области, если тензор четвертого ранга $\partial^2 F/\partial\varkappa\partial E$ не равен нулю тождественно, т.е. в разложении свободной энергии имеется зависимость от смешанных инвариантов E и $\varkappa$ Можно считать, что в этом случае

$$\varkappa = \varkappa(F_E, E, G, T).$$

Используя последнее соотношение, перейдем от функции нагружения $\bar{\varphi}(E, G, T, \varkappa)$ к функции

$$\varphi_1(E, G, T, F_E) = \bar{\varphi}(E, G, T, \varkappa(F_E, E, G, T)). \tag{27}$$

Тогда $\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\varkappa}=\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial F_E}\right)_{ij}\dfrac{\partial(F_E)_{ij}}{\partial\varkappa}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial\varkappa\,\partial E_{ij}}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial F_E}\right)_{ij}$,

и уравнение (26) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varkappa\,\partial E_{ij}}\left(\overset{\bullet}{E}+E\cdot W-R\cdot E+\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial F_E}\right)_{ij}=0,$$

откуда имеем уравнение для $\bar{E}$ при активном нагружении

$$\overset{\bullet}{E}+E\cdot W-R\cdot E+\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial F_E}=0. \qquad (28)$$

Поскольку уравнение (2) удовлетворяет принципу объективности, то и (28) удовлетворяет этому принципу.

Уравнение (25) с учетом (27), (28) дает

$$\overset{\bullet}{F_E}-[W\cdot(F_E+\Lambda)-(F_E+\Lambda)\cdot R]^C-\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial E}=0. \qquad (29)$$

Используя (5), (6), нетрудно показать объективность этого уравнения.

Наконец, из условия $\partial L/\partial R=0$ получим уравнение для определения Λ

$$\Lambda\cdot E+E\cdot\Lambda=F_E\cdot E-E\cdot F_E\quad, \qquad (30)$$

совпадающее по структуре с (1.7). Его решение имеет вид

$$\Lambda=(J_1J_2-J_3)^{-1}[(F_E\cdot E-E\cdot F_E)J_1^2+(E^2\cdot F_E-F_E\cdot E^2)J_1-$$
$$-E^2\cdot F_E\cdot E+E\cdot F_E\cdot E^2]. \qquad (31)$$

Уравнения (1), (28) - (30) в совокупности позволяют проследить изменение переменных G, E, $\varkappa$ при заданных скоростях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-16921).

Литература

1. Шитиков А.В., Быковцев Г.И. Конечные деформации упругопластических сред//ДАН. 1990. Т.311. N 1. С. 59-62.

2. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.

3. Chrysochoos A. Bilan Energetique en elastoplasticite grand deformation//C.R.Acad. Sci. 1985. ser.2. V.300. N 20. P.985-990.

С.А.Новокрещенов,
А.С.Чуркин,
Н.И.Ульяшин

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА НЕКОНТРОЛИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ИНЕРЦИОННЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Прогнозирование переходных процессов в любом металлургическом агрегате с целью его автоматического управления невозможно без оценки и моделирования динамики изменения неконтролируемых возмущений. Однако к настоящему времени характер влияния неконтролируемых возмущений, прогнозирование переходных процессов, вызванных их действием, изучены весьма слабо. Для многих металлургических процессов этот вопрос практически не изучен.

Проведенные нами исследования на доменных печах позволили установить, что характер влияния неконтролируемых возмущений зависит от типа действующих возмущений и способов совершенствования технологии процесса.

Изменение теплового режима нижней зоны доменной печи, а следовательно, и выходных показателей плавки за счет неконтролируемых возмущений связано с процессами газификации углерода кокса в области прямого восстановления оксидов железа и диоксидов кремния. При квазиустановившемся дутьевом режиме и составе комбинированного дутья переходные процессы, связанные с изменением условий равновесия реакции газификации углерода кокса, могут быть вызваны действием неконтролируемых возмущений двух типов: изменением отношения железа к углероду (например, неконтролируемые изменения химического