I. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Л.С.Чебыкин

УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Данная работа посвящена исследованию достаточных условий асимптотической устойчивости решений начально-краевой (смешанной) задачи общего вида для полулинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Известные к настоящему времени результаты по нахождению достаточных (коэффициентных) условий устойчивости систем в частных производных по Ляпунову относятся только лишь к задаче Коши (начальной задаче) для некоторых классов линейных систем [1,2]. Что же касается смешанных задач, то известные нам результаты исследований устойчивости связаны с рассмотрением специального случая так называемых "распадающихся краевых условий", причем условия устойчивости даются в терминах спектра линейного неограниченного оператора в функциональном банаховом пространстве [3].

Целью настоящей работы является отыскание достаточных условий асимптотической устойчивости, выраженных в терминах матричных коэффициентов рассматриваемой смешанной задачи.

Постановка задачи исследования

Рассмотрим полулинейную систему дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, u) \quad . \qquad (1)$$

где $A(x)$ - вещественная квадратная матрица порядка n ; $b(x,u)$ - вещественный n -мерный вектор: $u(x,t)$ - искомая n -векторнозначная функция, определенная на множестве (полосе) $\Pi = [0,1]\times[0,+\infty]$. Под начально-краевой (смешанной) задачей для системы (1) понимается задача отыскания в заданной полосе $\Pi \subset R^2$ такого решения $u(x,t): \Pi \to R^n$ системы (1), которое удовлетворяет заданному начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (2)$$

и краевому условию вида

$$Pu(0,t)+Qu(1,t)=0, \quad 0\leqslant t<+\infty \qquad (3)$$

Здесь P и Q - заданные вещественные квадратные матрицы n -го порядка, которые мы будем предполагать неособыми.

В основных результатах данной работы используется классическое решение этой смешанной задачи.

Классическим решением смешанной задачи вида (1)-(3) на множестве Π назовем функцию $u(x,t)\in C^1(\Pi)$ (т.е. имеющую непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ 1-го порядка в полосе Π), удовлетворяющую системе (1), начальному (2) и краевому (3) условиям (в обычном смысле, т.е. поточечно).

В качестве основного функционального пространства B, по норме которого оценивается близость решений смешанной задачи, в данной работе выбрано пространство $C([0,1], R^n)$ непрерывных на отрезке [0,1] n-векторнозначных функций $v(\cdot)\equiv\{v(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ с нормой

$$\|v(\cdot)\|_{C[0,1]}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|v(x)\| \text{ где } \|v(x)\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|v_k(x)|.$$

С точки зрения функционального анализа искомое решение $u(x,t)$ исходной смешанной задачи (1)-(3) в каждый фиксированный момент времени $t\geqslant 0$ можно рассматривать как элемент $u(\cdot,t)$ выбранного основного функционального пространства B.

Смешанную задачу (1)-(3) назовем корректной (точнее, корректно разрешимой) на некотором функциональном множестве D и прямоугольнике $\Pi_T=[0,1]\times[0,T]$ (где $0<T<+\infty$), если:

1) для каждой начальной функции $u_0(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, из множества D существует решение $u(x,t)$ смешанной задачи в произвольном конечном прямоугольнике Π_T;

2) это решение является единственным;

3) оно непрерывно зависит от начальных данных.

Последнее требование означает следующее.

Для любого наперед заданного промежутка времени [0,T] и любого действительного положительного числа E найдется такое действительное положительное число δ, зависящее от ε и T ($\delta=\delta(\varepsilon,T)$), что выполняется следующее условие: если начальные функции $u_0^1(\cdot)$,

$u_0^{(2)}(\cdot) \in D$ отличаются по норме пространства B меньше, чем на δ $(\|u_0^{(1)}(\cdot) - u_c^{\varepsilon}(\cdot)\|_B < \delta$, то соответствующие этим начальным условиям решения смешанной задачи $u^{(1)}(\cdot, t)$ и $u^{(2)}(\cdot, t)$ в любой момент времени $t \in [0, T]$ различаются между собой по норме пространства B меньше, чем на ε $(\|u^{(1)}(\cdot,t) - u^{(2)}(\cdot,t)\|_B < \varepsilon$. Здесь $\|\cdot\|_B$ означает норму в пространстве B . Функциональное множество D , участвующее в формулировке корректности, предполагается всюду плотным в основном функциональном пространстве . Отметим, что если речь идет о корректности классической смешанной задачи вида (1)-(3), то в качестве пространства и многообразия выбираются соответственно указанное ранее функциональное пространство $C([0,1], R^n)$ и такое его подмножество, элементы которого $v(\cdot)$ удовлетворяют требованиям: $v(x) \in C^1[0,1], Pv(0) + Qv(1) = 0$ и некоторому дополнительному "условию согласования", которое будет приведено ниже в лемме 1, устанавливающей достаточные условия корректной разрешимости классической смешанной задачи.

Пусть $\tilde{u}(\cdot) = \{\tilde{u}(x), 0 \leq x \leq 1\}$ - некоторое стационарное (установившееся) решение рассматриваемой классической смешанной задачи (1)-(3). Заметим, что функция $\tilde{u}(\cdot)$ является гладким решением так называемой "периодической краевой задачи" вида

$$\frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = -A^{-1}(x)\, B(x, \tilde{u}(x)) \quad (0 \leq x \leq 1),$$
$$P\tilde{u}(0) + Q\tilde{u}(1) = 0 \tag{4}$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

Введем понятие асимптотической устойчивости стационарного решения $\tilde{u}(\cdot)$ корректно поставленной смешанной задачи.

Определение. Стационарное решение $\tilde{u}(\cdot)$ корректно поставленной смешанной задачи (1)-(3) называется асимптотически устойчивым, если:

1) оно устойчиво в смысле Ляпунова, т.е. для любого наперед заданного положительного числа ε ($\forall \varepsilon > 0$) найдется такое положительное число δ , зависящее от ε ($\exists \delta(\varepsilon) > 0$), что выполняется следующее требование - для любой начальной функции $u_0(\cdot)$, удовлетворяющей неравенству $\|u_0(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_B < \delta$ и принадлежащей функциональному многообразию D , соответствующее ей решение $u(\cdot, t)$ смешанной задачи при всех $0 \leq t < +\infty$ удовлетворяет неравенству

$$(\forall u_0(\cdot) \in D, \|u_0(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_B < \delta \Rightarrow \|u(\cdot, t) - \tilde{u}\|_B < \varepsilon \quad \forall t \geq 0);$$

2) существует такое положительное число h, что для всех начальных функций $u_0(\cdot)$ из D, удовлетворяющих неравенству $\|u_0(\cdot)-\tilde{u}(\cdot)\|_B \leq h$, соответствующие решения $u(\cdot,t)$ $(0\leq t\leq+\infty)$ смешанной задачи обладают свойством $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-\tilde{u}(\cdot)\|_B=0$

$$(\exists h>0 \mid \forall u_0(\cdot)\in D,\ \|u_0(\cdot)-\tilde{u}(\cdot)\|_B<h \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-\tilde{u}(\cdot)\|_B=0).$$

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы найти достаточные условия асимптотической устойчивости стационарного решения $\tilde{u}(\cdot)$ корректно поставленной смешанной задачи вида (1)-(3), т.е. такие условия, которые выражены в терминах матричных коэффициентов A (x), в (x,u), P, Q смешанной задачи и гарантируют свойство асимптотической устойчивости рассматриваемого решения $\tilde{u}(\cdot)$.

Об условиях корректной разрешимости классической смешанной задачи

Лемма 1. Пусть для смешанной задачи (1)-(3) выполнены следующие требования:

1) $\det A(x)\neq 0\ \forall x\in[0,1]$, а элементы матрицы A (x) дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке [0,1] (т.е. $A(x)\in C^2[0,1]$);

2) для каждого $x\in[0,1]$ матрица A (x) имеет действительные собственные значения $\mu_i(x)$, $i\in\overline{1,n}$, и эти собственные значения различны между собой при любом $x\in[0,1]$ (т.е. $\mu_i(x)\neq\mu_j(x)$ при $i\neq j$ $\forall x\in[0,1]$);

3) $\det P\neq 0$, $\det Q\neq 0$;

4) элементы начальной n-векторнозначной функции $u_0(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке [0,1] (т.е. $u_0(x)\in C^1[0,1]$) и вместе со своими производными подчиняются так называемым первому и второму "условиям согласования" [5]:

$$Pu_0(0)+Qu_0(1)=0, \tag{5}$$

$$PA(0)u_0'(0)+QA(1)u_0'(1)+Pb(0,u_0(0))+Qb(1,u_0(1))=0; \tag{6}$$

5) векторнозначная функция $b(x,u)$ определена и непрерывна на множестве $[0,1]\times R^n$, а также имеет на этом множестве непрерывную частную производную по x $\dfrac{\partial b(x,u)}{\partial x}$ (т.е. $b(x,u)\in C([0,1]\times R^n)$, $\dfrac{\partial b(x,u)}{\partial x}\in C([0,1]\times R^n)$);

6) для каждого $x\in[0,1]$ элементы матрицы Якоби $\dfrac{\partial b(x,u)}{\partial u}=\dfrac{\partial b_i(x;u)}{\partial u_j}$ существуют и непрерывны в R^n

(т.е. $\forall x \in [0,1]$ $\frac{\partial b(x,u)}{\partial u} \in C(R^n)$);

7) частная производная $\frac{\partial b(x,u)}{\partial x}$ при каждом $x \in [0,1]$ и в каждой ограниченной замкнутой области $\bar{G} \in R^n$ удовлетворяет условию Липшица по U следующего вида:

$$\left\| \frac{\partial b(x,u^{(1)})}{\partial x} - \frac{\partial b(x,u^{(2)})}{\partial x} \right\|_{R^n} \leqslant M \| u^{(1)} - u^{(2)} \|_{R^n} \tag{7}$$

для любых $u^{(1)}, u^{(2)} \in \bar{G}$; где $M = M(\bar{G})$ - некоторое положительное число.

Тогда смешанная задача (1)-(3) имеет классическое решение U (x,t) на всем прямоугольнике $\Pi_T = [0,1] \times [0,T]$. Это решение U (x,t), $(x,t) \in \Pi_T$, единственно (при фиксированном $u_0(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$) и непрерывно зависит от начальных данных.

Сформулированная лемма дает достаточные условия корректной разрешимости классической смешанной задачи для полулинейной системы.

Доказательство леммы 1 основано на преобразовании исходной системы (1) к специальному "диагональному" виду, последующем погружении преобразованной смешанной задачи в операторную форму задачи из работы Аболиня В.Э., Мышкиса А.Д. [5] (путем надлежащего задания операторной части системы и операторов в граничных условиях) и, наконец, на применении результатов вышеуказанной работы [5] и их подходящей конкретизации.

Формулировка основного результата

Теорема 1 (основная). Пусть для смешанной задачи (1)-(3) выполнены следующие условия:

1) достаточные условия корректности 1-7 из леммы 1;

2) матрица A (x) является симметрической, т.е. $A^T(x) = A(x)$ при всех $x \in [0,1]$;

3) для каждого $x \in [0,1]$ матрица A (x) является отрицательно определенной, т.е. $A(x) < 0$ $\forall x \in [0,1]$;

4) справедливо неравенство

$$\int_0^1 \mu_m(G(x))dx > \ell n \|P^{-1}Q\|^2 \quad . \tag{8}$$

где $\mu_m(G(x))$ - наименьшее собственное значение симметрической матрицы

$$G(x) = A^{-1}(x)B(x) + (A^{-1}(x)B(x))^T, \tag{9}$$

$$B(x) = \frac{\partial B(x,u)}{\partial u}\Big|_{u=\tilde{u}(x)}, \qquad (10)$$

а $\|P^{-1}Q\|$ - евклидова норма соответствующей матрицы $P^{-1}Q$. Тогда рассматриваемое стационарное решение $\tilde{U}(\cdot)$ смешанной задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво в пространстве $C([0,1], R^n)$ на начальном многообразии D, т.е. существует такое $h > 0$, что для любой начальной функции $U_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяющей условию 4 леммы 1, а также неравенству $\|U_0(\cdot) - \tilde{U}(\cdot)\|_{C[0,1]} < h$, существует при всех $t > 0$ единственное классическое решение U (x, t), (x, t) $\in \Pi$ смешанной задачи (1)-(3), обладающее свойством устойчивости в смысле Ляпунова и удовлетворяющее соотношению

$$\lim_{t \to +\infty} \|U(\cdot, t) - \tilde{U}(\cdot)\|_{C[0,1]} = 0. \qquad (11)$$

Сформулированная теорема и дает достаточные условия асимптотической устойчивости стационарного решения $\tilde{U}(\cdot)$ корректно поставленной смешанной задачи, выраженные в терминах матричных коэффициентов рассматриваемой задачи и собственных значений связанной с ними симметрической матрицы $G(x)$. Заметим, что требование (условие) 2 теоремы 1, по существу, не является дополнительным ограничением, т.к. условия корректности содержат требования действительности и различности собственных значений $\mu_i(x)$ матрицы A (x), что в свою очередь позволяет диагонализировать эту матрицу.

Схема доказательства основной теоремы

Доказательство теоремы 1 выполняется поэтапно в результате последовательного установления следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия леммы 1 о корректной разрешимости классической смешанной задачи, а также следующие дополнительные требования:

- для каждого $x \in [0, 1]$ матрица A (x) имеет отрицательные собственные значения, т.е. $\mu_i(A(x)) < 0 \quad \forall x \in [0,1], \; i \in \overline{1,n}$;
- спектр $\sigma(\mathcal{A})$ линейного неограниченного оператора $\mathcal{A}: D \to C[0, 1]$ вида $\mathcal{A}v = A(x)\frac{dv}{dx} + B(x)v$ с областью определения D (многообразие описано ранее) лежит внутри левой полуплоскости, т.е.

$$\sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} \mathrm{Re}\,\lambda \leq -\gamma, \qquad (12)$$

где $\gamma = 0$ - некоторая константа.

Тогда рассматриваемое стационарное решение $\tilde{U}(\cdot)$ корректно поставленной классической смешанной задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво в пространстве $C([0,1],R^n)$ на начальном многообразии D (в указанном в теореме 1 смысле).

Лемма 3. Если все корни λ_k уравнения

$$\det[P+QU(1;\lambda)]=0 \qquad (13)$$

имеют отрицательные действительные части, т.е. удовлетворяют неравенству $Re\lambda_k<0$, и справедливы требования 1-3, 5, 6 леммы 1, а также неравенство $\mu_i(A(x))<0 \quad \forall x\in[0,1],\ i\in\overline{1,n}$, то гарантируется выполнение основного условия (12) леммы 2. Здесь $U(1;\lambda)$- матрица монодромии для вспомогательной линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (с параметром λ) вида

$$\frac{dU}{dx}=A^{-1}(x)[\lambda E-B(x)]U, \qquad (14)$$

т.е. $U(1;\lambda)=U(x;\lambda)|_{x=1}$, где $U(x;\lambda)$ - нормированная фундаментальная матрица системы (14).

Лемма 4. Пусть выполнены все условия леммы 1 и неравенство $\mu_i(A(x))<0 \quad \forall x\in[0;1],\ i\in\overline{1,n}$. Предположим также, что удовлетворяется следующее требование: для любого комплексного параметра λ с $Re\lambda\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^1\mu_M(D^H(x;\lambda))dx<-\ln\|P^{-1}Q\|, \qquad (15)$$

где $\mu_M(D^H(x;\lambda))$ - наибольшее собственное значение эрмитовой матрицы.

$$D^H(x;\lambda)=\frac{1}{2}[D(x;\lambda)+D^*(x;\lambda)], \qquad (16)$$

при этом

$$D(x;\lambda)=A^{-1}(x)[\lambda E-B(x)],\quad B(x)=\frac{\partial b(x,u)}{\partial u}\Big|_{u=\hat{u}(x)}. \qquad (17)$$

Тогда стационарное решение $\hat{u}(\cdot)$ классической смешанной задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво в пространстве $C([0,1],R^n)$.

Обоснование сформулированных лемм 2,3,4 проводится с использованием метода линеаризации, с привлечением аппарата теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [6,7].

При дополнительном предположении, что матрица A (x) является симметрической, из утверждения леммы 4 следует справедливость основной теоремы 1.

Конкретизация условий основной теоремы

Дальнейшим шагом в конкретизации представленных в теореме 1 условий устойчивости является следующий результат, доставляющий достаточные условия асимптотической устойчивости, которые гарантируют выполнение требований основной теоремы 1.

Теорема 2. Пусть для смешанной задачи (1)-(3) выполнены условия 1, 2, 3 основной теоремы 1, а также следующие требования:

1) $\|P^{-1}Q\| \leqslant 1$ (18)

2) симметрическая матрица $G(x)$, задаваемая соотношениями (9), (10), является положительно определенной для всех $x \in [0,1]$, т.е.

$$G(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0, 1]. \tag{19}$$

Тогда стационарное решение $\tilde{U}(\cdot)$ корректно поставленной смешанной задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво в пространстве $C([0,1], R^n)$.

Заметим, что условия $A(x) \leqslant 0$, $G(x) \geqslant 0$ последней теоремы на основе критерия Сильвестра [8] можно представить в виде алгебраических неравенств, связывающих непосредственно коэффициенты рассматриваемой системы (1).

Литература

1. Жестков С.В. Об устойчивости по Ляпунову задачи Коши для линейных систем в частных производных//Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. N 4. С.706-709.

2. Жестков С.В. Об экспоненциальной устойчивости задачи Коши для линейных систем в частных производных//Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. N 6. С.1079-1081.

3. Елтышева Н.А. О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости//Математ. сб. 1988. Т.135 (177). Вып.2. С.186-209.

4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

5. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости//Математ.сб. 1960. Т.50 (92). Вып.4. С.423-492.

6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

7. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференци-

альных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
8. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

М.Б. Верников

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

На протяжении длительного времени нами исследовались различные вопросы симплектической дифференциальной геометрии. В настоящей работе мы хотим систематизировать полученные нами в различное время результаты.

Так как большинство их опубликовано, то мы не будем приводить полных формулировок и тем более доказательств, отсылая читателя к указанным публикациям.

Можно выделить следующие основные направления нашего исследования: теорию множеств лагранжевых подпространств линейного симплектического пространства; теорию подмногообразий аффинно-симплектического пространства; введение на симплектическом многообразии согласованной с его симплектической структурой линейной связности; теорию пространств симплектической связности.

Теория множеств лагранжевых подпространств линейного симплектического пространства

В наших работах изучается симплектическое пространство над полем действительных чисел (R).

Определение 1. Линейное пространство над полем R называется симплектическим, если на нем задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма, т.е. задано отображение $q: V \times V \to R$, удовлетворяющее условиям билинейности, невырожденности $(q(\vec{x}, V)=0 \Rightarrow \vec{x}=0)$ и кососимметричности $(q(\vec{x}, y) = -q(\vec{y}, \vec{x}))$.

Вместо $q(\vec{x}, \vec{y})$ условимся писать (x, y), называя значение формы $q(\vec{x}, \vec{y})$ скалярным произведением $\vec{x}$ на $\vec{y}$. В силу невырожденности симплектическое пространство конечной размерности является четкомерным, через $SV_{2n}(R)$ обозначим $2n$ - мерное симплектическое пространство над полем R.