альных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
8. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

М.Б. Верников

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

На протяжении длительного времени нами исследовались различные вопросы симплектической дифференциальной геометрии. В настоящей работе мы хотим систематизировать полученные нами в различное время результаты.

Так как большинство их опубликовано, то мы не будем приводить полных формулировок и тем более доказательств, отсылая читателя к указанным публикациям.

Можно выделить следующие основные направления нашего исследования: теорию множеств лагранжевых подпространств линейного симплектического пространства; теорию подмногообразий аффинно-симплектического пространства; введение на симплектическом многообразии согласованной с его симплектической структурой линейной связности; теорию пространств симплектической связности.

Теория множеств лагранжевых подпространств линейного симплектического пространства

В наших работах изучается симплектическое пространство над полем действительных чисел (R).

Определение 1. Линейное пространство над полем R называется симплектическим, если на нем задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма, т.е. задано отображение $q: V \times V \to R$, удовлетворяющее условиям билинейности, невырожденности $(q(\vec{x}, V)=0 \Rightarrow \vec{x}=0)$ и кососимметричности $(q(\vec{x}, y) = -q(\vec{y}, \vec{x}))$.

Вместо $q(\vec{x}, \vec{y})$ условимся писать (x, y), называя значение формы $q(\vec{x}, \vec{y})$ скалярным произведением $\vec{x}$ на $\vec{y}$. В силу невырожденности симплектическое пространство конечной размерности является четкомерным. через $SV_{2n}(R)$ обозначим $2n$ - мерное симплектическое пространство над полем R.

Определение 2. Ортогональным дополнением U^{1} подпространства U симплектического пространства $SV_{2n}(R)$ называется подпространство $U^{1}=\{\vec{x}\in SV_{2n} \mid \forall \vec{y}\in U: q(\vec{y},\vec{x})=0\}$.

Определение 3. Подпространство U симплектического пространства $SV_{2n}(R)$ называется лагранжевым, если $U = U^{1}$ (при этом $U=\frac{1}{2}\dim SV_{2n}=n$).

Лагранжевы подпространства $SV_{2n}(R)$ и их множества играют значительную роль в приложениях симплектической геометрии.

Определение 4. Множество всех лагранжевых подпространств симплектического пространства называется его лагранжевым грассманианом и обозначается $L(V)$. Лагранжевы подпространства X, У называются трансверсальными, если $X\cap У=\vec{0}$.

При изучении $L(V)$ в $SV_{2n}(R)$ нами получены следующие результаты: 1) лагранжев грассманиан $L(V)$ охарактеризован как однородное пространство; 2) множество упорядоченных пар трансверсальных лагранжевых подпространств охарактеризовано как однородное пространство; 3) найдена полная система упорядоченной тройки лагранжевых подпространств; множество всех таких троек разбито на классы, каждый из которых охарактеризован как однородное пространство; 4) при некоторых ограничениях найдена полная система инвариантов упорядоченных четверок лагранжевых подпространств; множество всех таких четверок при некоторых ограничениях разбито на классы, каждый из которых охарактеризован как однородное пространство; 5) указаны условия, при которых упорядоченная пятерка лагранжевых подпространств образует репер симплектической группы в $L(V)$; 6) определено понятие координатного репера $L(V)$ и координат точки из $L(V)$ в координатном репере. Полная формулировка и доказательство этих результатов опубликованы нами в [1]. В работе [2] аналогичным способом исследуется лагранжев грассманиан эрмитова пространства.

Теория подмногообразий аффинно-симплектического пространства

Определение 5. Аффинно-симплектическим пространством (AS_{2n}) называется аффинное пространство, пространство переносов которого является линейным симплектическим пространством.

В ряде наших работ изучалась теория поверхностей AS_{2n}, представляемых в виде

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u^1, u^2, \ldots u^k) \qquad (2.1)$$

для поверхности размерности k. При этом отдельно рассматривались случаи четномерной ($k=2m$) и нечетномерной ($k=2m-1$) поверхности.

Определение 6. Симплектическим M-слоем в точке M поверхности $x \subset AS_{2n}$ называется совокупность соприкасающихся плоскостей $E_0 = M, E_1, E_2 \ldots E_m$ поверхности в этой точке, заданных в порядке возрастания степени их соприкосновения с поверхностью, и группы, являющейся подгруппой стационарности симплектической группы пространства для указанной совокупности плоскостей.

В обоих случаях (к = 2m и к = 2m - 1) нами решена задача отыскания полной системы инвариантов двух m-слоев, определяемых в бесконечно близких точках M и M поверхности. Точнее говоря, исходя из уравнения (2.1) построена система тензоров, через которые указанная полная система инвариантов может быть выражена. На основе тензоров введен и изучен ряд инвариантов четномерной поверхности $X_{2m} \subset AS_{2n}$, названных кривизнами различного порядка в точке $X_{2m} \subset AS_{2n}$, а также кривизнами 1-го порядка в точке $X_{2m} \subset AS_{2n}$ в заданном к-мерном направлении. Введено понятие поверхности постоянной кривизны.

Достаточно полное изложение указанных результатов и их доказательств дано в работах [3-9].

Введение на симплектическом многообразии согласованной с его симплектической структурой линейной связности

Определение 7. Симплектическим многообразием называется пара (M^{2n}, w^2), где M^{2n} - дифференцируемое многообразие (класса C^{∞}) четной размерности $2n$; w^2 - замкнутая невырожденная дифференциальная два-форма на M^{2n}.

Из данного определения следует, что для каждой точки $X \in M^{2n}$ касательное пространство $T_x M^{2n}$ в этой точке к многообразию является линейным симплектическим пространством.

Линейная связность на многообразии X^n есть дополнительная структура на нем, позволяющая определить отображение путей на этом многообразии на множество изоморфизмов касательных пространств (или, как говорят, параллельное перенесение векторов по заданному пути).

Если на многообразии задана линейная связность, а X-векторное поле на этом многообразии, то для тензорных полей на нем определяется понятие ковариантной производной тензорного поля в направлении векторного поля X (если C_T - тензорное поле, то эта производная обозначается через $\nabla_X C_T$).

Если на многообразии X^n задана дополнительная структура, то интерес представляют такие линейные связности на этом многообразии, которые в определенном смысле согласованы с этой дополнительной структурой. Примером может служить риманова связность, которая на данном римановом многообразии определяется единственным образом. В случае симплектического многообразия (M^{2n}, ω^2) интерес представляет линейная связность на нем, согласованная с его симплектической структурой в том смысле, что при параллельном перенесении векторов, определяемому этой связностью, сохраняется скалярное произведение векторов, индуцируемое на касательных пространствах два-формой ω^2. Аналитически это требование выражается в форме

$$\nabla_X \omega^2 = 0 \qquad (3.1)$$

для любого векторного поля X.

Линейную связность на симплектическом многообразии, удовлетворяющую этому требованию, естественно назвать симплектической. Оказывается, что симплектическая связность требованием (3.1) определяется неоднозначно, произвол в определении такой связности без кручения характеризуется 3-валентным симплектическим ковариантным тензором.

Вводя некоторые дополнительные структуры на симплектическом многообразиии в виде последовательности скалярных полей и ряд требований геометрического характера, нам удалось сконструировать на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) симплектическую связность, произвол в определении которой характеризуется (2m - 1) скалярными полями. При этом учтены различные направления приложений геометрии симплектического многообразия. Детальное изложение этих результатов содержится в работах [10-13].

Теория пространств симплектической связности

Определение 8. Симплектическое многообразие, на котором задана согласованная с его симплектической структурой линейная связность, называется пространством симплектической связности. Если кручение этой связности равно 0, то это пространство симметричной симплектической связности.

Мы ввели понятие кривизны пространства симметричной симплектической связности в данном двумерном направлении и доказали теорему, аналогичную теореме Шура для римановых пространств, что позволяет ввести понятие пространства симплектической связности постоянной кривизны. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространства симметричной симплектической связности допускают группу движений с максимальным числом параметров.

Эти результаты изложены в работах [14-15].

В заключение отметим, что в данной статье мы ограничились тем кругом вопросов симплектической геометрии, по которым нами получены оригинальные результаты. В целом же симплектическая геометрия - один из актуальных разделов современной математики, находящий приложения в классической механике, теории поля, квантовой механике. Представление о современном состоянии этого раздела математики в целом и некоторых его приложениях можно получить из обзора [16].

Литература

1. Верников М.Б. Полные системы инвариантов и репер в множестве лагранжевых подпространств симплектического пространства//Математика. 1986. N 6. С. 3-7. (Изв. вузов).

2. Верников М.Б. Полные системы инвариантов и репер в лагранжевом грассманиане эрмитова пространства//Математика. 1990. N 8. С.22-29. (Изв.вузов).

3. Верников М.Б. О геометрии поверхностей аффинно-симплектического пространства//УМН. 1965. Т. 20, вып.5 (125).

4. Верников М.Б. О кривизне четномерной поверхности аффинно-симплектического пространства для четномерной площадки: Сб. ст. Челябинск, 1966. Вып.1, ч.2. С.66-77.

5. Верников М.Б. Теорема о кривизне четномерной поверхности аффинно-симплектического пространства в данном 2 К-мерном направлении//

Математика. 1967. N 54. С.44-45. (Учен.зап.Свердл. пед.ин-та).

6. Верников М.Б. Элементы касания высших порядков поверхности симплектического пространства//Математика. 1970. N 124. вып.3. С.10-28 (Учен.зап.Свердл.пед.ин-та).

7. Верников М.Б. К теории нечетномерной поверхности в четномерном аффинно-симплектическом пространстве: Материалы 7-й науч.-техн. конф. УПИ. Свердловск, 1984. С.6-41.

8. Верников М.Б. Элементы касания поверхности симплектического пространства. Общий случай//Математика. 1975. N 2. С.104-107. (Изв.вузов)

9. Верников М.Б. К теории нечетномерной поверхности в четномерном аффинно-симплектическом пространстве//Математика. 1985. N 5 С.62-64. (Изв.вузов)

10. Верников М.Б. О симплектической связности, присоединенной к двумерному кососимметрическому тензору: Тез.докл. II межвуз.науч. конф. по проблемам геометрии, г.Казань, 14-19 сент. Казань, 1967. С.33.

11. Верников М.Б. К определению связности, согласованной с симплектической структурой на дифференцируемом многообразии//Математика. 1980. N 7. С. 77-79. (Изв.вузов)

12. Верников М.Б. К определению связности, согласованной с симплектической структурой на дифференцируемом многообразии//Глобальная и риманова геометрия: Межвуз.сб.науч.тр. / ЛГПИ им. А.И.Герцена. Ленинград, 1983. С.5-16.

13. Верников М.Б. Конструкция симплектической связности//Свердл. инж.-пед.ин-т. Свердловск, 1989. 16 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР N 2194 - В 89.

14. Верников М.Б. К теории кривизны пространств симплектической связности: Сб. ст. Челябинск, 1970. Вып.2. С.137-142.

15. Верников М.Б. О движениях в пространствах симплектической связности: Сб. ст. - Челябинск, 1970. Вып. 2. С.132-136.

16. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия//ИНТ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1965. Т. 4. С.5-139.