

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНФОРМАТИКИ В ПРЕПОДАВАНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН (НА ПРИМЕРЕ КУРСА «ЛИТЕЙНАЯ ГИДРАВЛИКА И ТЕПЛОФИЗИКА»)

В ходе освоения специальных дисциплин у будущих специалистов должна быть сформулирована не только целостная, комплексная система знаний о технологических процессах, но и система навыков и умений в области оптимальной организации процессов, обеспечивающей их наивысшую эффективность. Это, кроме понимания сущности процессов на качественном уровне, требует умения количественно оценивать и описывать развитие кинетики процессов и взаимосвязь явлений.

Специальные дисциплины, как правило, связаны с рассмотрением сложных реальных многофакторных процессов, описываемых такими уравнениями, которые средствами классической математики, изучаемой в вузе, не решаются. Поэтому технологические курсы или переполнены сложными, громоздкими математическими расчетами, редко приводящими к реальным практическим результатам, или содержат эмпирические формулы, как правило, не описывающие физическую сущность явлений. В первом случае физическая картина теряется за «лесом» формул, а во втором механизмы процессов не раскрываются. Построение курсов на эмпирических формулах более или менее приемлемо при подготовке инженеров-технологов, так как дает им инструмент для решения их практических профессиональных задач, но оно совершенно недостаточно при подготовке инженеров-педагогов, так как их деятельность не связана напрямую с технологическими расчетами, а педагогический процесс требует четкого разъяснения механизмов явлений.

Следует отметить, что содержание и методика преподавания курса высшей математики в техническом и инженерно-педагогическом вузах за последние 20 лет практически не изменились, несмотря на широкое распространение информатики и вычислительной техники. По-прежнему в курсе высшей математики преобладает ориентация не на развитие навыков в математической постановке и моделировании задач, а на освоение классических методов их решения. Затрачивается много времени и усилий на овладение методами интегрирования, решения дифференциальных линейных и нелинейных уравнений и другими операциями.

В настоящее время, когда все берущиеся интегралы и сводящиеся к квадратурам дифференциальные уравнения сведены в справочники, имеются соответствующие программы для ЭВМ, ориентация математической подготовки в

этих направлениях вряд ли оправдана. Кроме того, так как классические методы анализа не позволяют решать подавляющее большинство прикладных задач, приобретенные навыки и знания оказываются невостребованными и забываются к концу обучения в вузе даже отлично успевающими студентами.

Практика преподавания дисциплины «Литейная гидравлика и теплофизика» показала высокую эффективность применения на лекционных, практических и лабораторных занятиях методов математического моделирования и проведения машинных экспериментов по исследованию, анализу и оптимизации процессов.

Схема последовательности исследования и изучения любых процессов с использованием компьютеров приведена на рис. 1. Прежде всего, необходимо дать описание физических явлений в ходе процесса, сформулировать физические законы, которым процесс подчиняется, определить перечень факторов (входных и выходных), однозначно управляющих процессами.

Очень важным этапом является математическое описание процесса. На наш взгляд, главной задачей математической подготовки в вузе должно быть развитие у студентов навыков и умений в математическом описании явлений, а не умений проводить решение кем-то другим составленных простых и, как правило, не имеющих практического смысла задач.

На этом этапе выполняется запись математических формулировок (как правило, в виде уравнений) соответствующих физических законов, осуществляется фиксация всех известных факторов, однозначно определяющих процесс, проводится их ранжирование по значимости, определяются интервалы варьирования их значений.

На этапе постановки математической модели выбирается форма представления физических законов на математическом языке (дифференциальные или интегральные уравнения, функционалы, линейные или нелинейные уравнения и т.п.), формулируются краевые условия задачи, определяется степень точности описания моделью физической модели процесса (внутреннее правдоподобие).

Особенно важным является определение метода численной аппроксимации модели для обеспечения ее реализации на компьютере. Современная прикладная математика включает большой арсенал средств (метод конечных разностей, метод конечных и граничных элементов, метод потенциала, метод потоков и т.д.). Необходимо выбрать наиболее эффективный, экономичный и простой метод аппроксимации.

При организации машинных экспериментов можно применить как пассивную, так и заранее разработанную стратегию. В настоящее время в ходе изучения информатики из приведенной на рис. 1 схемы реализуются только лишь последние три этапа. Студенты не получают необходимых знаний по программированию на алгоритмических языках и, по существу, изучение информатики направлено лишь на освоение технических возможностей разработанных систем и программ.

Рассмотрим приведенный выше алгоритм изучения и исследования



Рис. 1. Последовательность действий при организации исследования процессов в ходе учебных занятий

технологических процессов на примере изучения темы «Кинетика затвердевания отливок» в курсе «Литейная гидравлика и теплофизика».

Фундаментальной особенностью литейного производства является то, что формирование изделия происходит в ходе фазового перехода первого рода – затвердевания. В физическом плане этот процесс описывается как тепловой, т.е. затвердевание управляется процессами теплопередачи и отвода теплоты кристаллизации.

Для простоты рассмотрим двумерную задачу, что может быть принято при выполнении условия $B > 10R_0$, где B – ширина, а R_0 – половина толщины стенки отливки (рис.2).

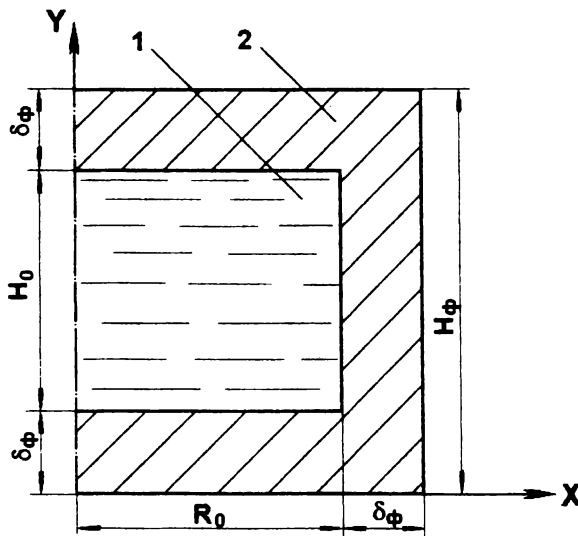


Рис. 2. Схема затвердевающей отливки:
1 – отливка; 2 – литейная форма

Обычно принимают, что теплопередача в отливке и стенках формы осуществляется теплопроводностью и для описания процесса применяют уравнение теплопроводности Фурье. Теплопередача с наружной поверхности формы осуществляется естественной конвекцией и излучением. Для расчета тепловых потоков в этом случае можно использовать уравнения:

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=R_0+\delta_{\phi}} = -\alpha_1 (T_2(x=R_0+\delta_{\phi}, y, t) - T_{cp}); \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)_{x=0} = \alpha_1(T_2(x, y=0, t) - T_{cp}); \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)_{x=H_\phi} = -\alpha_1(T_2(x, y=H_\phi, t) - T_{cp}), \quad (3)$$

где $T_2(x, y, t)$ – температура в стенке формы;

α_1 – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы.

Расчет коэффициента α осуществляется по известным из теплофизики формулам [2].

При литье в металлические формы теплообмен между отливкой и формой может быть описан следующими уравнениями:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=R_0} = -\alpha_2(T_1(x=R_0, y, t) - T_2(x=R_0, y, t)); \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=R_0} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=R_0}; \quad (5) \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)_{y=\delta_\phi} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_{y=\delta_\phi}; \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_{y=\delta_\phi} = \alpha_2(T_1(x, y=\delta_\phi, t) - T_2(x, y=\delta_\phi, t)); \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_{y=H_0+\delta_\phi} = -\alpha_2(T_1(x, y=\delta_\phi + H_0, t) - T_2(x, y=\delta_\phi + H_0, t)). \quad (8)$$

где U_1 – функция Гудмэна для отливки, $U_1 = \int_0^{T_1} \lambda_1 dT$, где λ_1 – коэффициент теплопроводности отливки как функция температуры; (9)

U_2 – функция Гудмэна для формы, $U_2 = \int_0^{T_2} \lambda_2 dT$, где λ_2 – коэффициент теплопроводности формы; (10)

T_1 – температура в объеме отливки;

α_2 – коэффициент теплоотдачи от отливки к форме через покрытие толщиной $\delta_{кр}$ с теплопроводностью $\lambda_{кр}$. $\alpha_2 = \lambda_{кр} / \delta_{кр}$.

Сплав заливали в полость формы с температурой T_{10} . Стенки формы перед заливкой нагревали до температуры T_{20} .

Рассмотрим сплав с эвтектическим превращением. При температурах выше температуры ликвидуса T_l (жидкое состояние) сплав имеет теплопроводность $\lambda_{жс}$, удельную теплоемкость $c_{жс}$ и плотность $\rho_{жс}$. В интервале температур кристаллизации ($T_c < T_l = T_n$) обозначим теплопроводность сплава $\lambda_{т-жс}$, плотность $\rho_{т-жс}$ и теплоемкость $c_{т-жс}$. В величину теплоемкости $c_{т-жс}$ эффективно включена удельная теплота кристаллизации

$$c_{т-жс} = C_{\phi} + \frac{Q_{кр}}{T_l - T_c},$$

где $Q_{кр}$ – удельная теплота кристаллизации в интервале температур $T_c \div T_l$;
 T_l и T_c – температура ликвидуса и солидуса сплава;
 C_{ϕ} – физическая теплоемкость сплава в данном интервале температур.
 Введем функции Кирхгофа

$$H_1 = \int_0^{T_1} c_1 \cdot \rho_1 \cdot dT_1 \quad \text{и} \quad H_2 = \int_0^{T_2} c_2 \cdot \rho_2 \cdot dT_2, \quad (11)$$

где c_1 и ρ_1 – теплоемкость и плотность сплава как функции температуры;
 c_2 и ρ_2 – теплоемкость и плотность материала формы.

Физически H_1 и H_2 представляют собой теплосодержания единицы объема сплава и формы.

Наряду с функциями (10) и (11) можно определить функции

$$U_1 = f(H_1), \quad U_2 = \varphi(H_2), \quad T_1 = \psi(U_1) \quad \text{и} \quad T_2 = \zeta(U_2). \quad (12)$$

В процессе затвердевания границы между областью жидкого и жидко-твердого состояния сплава (фронт ликвидуса) и между областями жидко-твердого состояния и полностью затвердевшего сплава (фронт солидуса) перемещаются к оси отливки по законам, которые необходимо определить. Цель моделирования состоит в определении этих кинетических законов.

Физическую картину процесса теплопередачи при затвердевании отливок необходимо дополнить естественной конвекцией жидкого сплава в полости формы, вызванной значительными перепадами температур, а следовательно, и

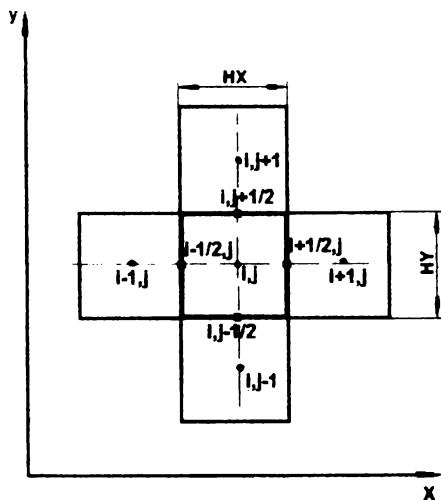


Рис. 3. Схема расчетной ячейки

плотностей сплава в объеме отливки. Учет естественной конвекции требует сопряженного решения гидродинамических уравнений, что резко усложняет задачу. В принятых на практике расчетах естественную конвекцию учитывают, умножая коэффициент теплопроводности сплава на некоторый множитель, зависящий от чисел Грасгофа и Прандтля [1]. Однако физическая картина при этом существенно искажается, и не выявляется влияние конвекции на смещение термического центра отливки вверх, что очень важно с точки зрения организации питания отливки.

Математическое описание процесса затвердевания, как правило, осуществляют в виде краевой задачи, включающей дифференциальные уравнения теплопроводности и краевые условия. Ввиду нелинейности краевая задача не может быть решена аналитически и для ее решения применяют различные методы численной аппроксимации, чаще всего – метод конечных разностей.

Данный подход, особенно если требуется решить еще и гидродинамическую задачу, очень трудоемкий. Кроме того, из уравнений в явном виде не прослеживается их физический смысл и не соблюдаются в конечно-разностных схемах законы сохранения. Поэтому в данной работе впервые для решения задач о затвердевании отливки с учетом естественной конвекции применен метод потоков [2].

Отливка и стенка формы разбиваются на ячейки (в данном случае – прямоугольные) и для каждой ячейки рассматриваются законы сохранения массы, импульса и внутренней энергии (рис. 3).

В общем виде законы изменения имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\iint_S \theta_F \cdot n \cdot dS, \quad (13)$$

где F – рассматриваемая величина (масса M , внутренняя энергия E , компоненты импульса K_x и K_y);

θ_F – вектор плотности потока величины F через поверхность S , ограничивающую ячейку;

n – единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

Приведем уравнение (13) для компонентов импульса прямоугольной ячейки (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_x}{\partial t} = & -((\rho(v_x^2)_{i+\frac{1}{2},j} - (\sigma_{xx})_{i+\frac{1}{2},j} - \rho(v_x^2)_{i-\frac{1}{2},j} + (\sigma_{xx})_{i-\frac{1}{2},j}) \cdot HY + \\ & + (\rho(v_x \cdot v_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\tau_{xy})_{i,j+\frac{1}{2}} - \rho(v_x v_y)_{i,j-\frac{1}{2}} + (\tau_{xy})_{i,j-\frac{1}{2}}) \cdot HX); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_y}{\partial t} = & -((\rho(v_x \cdot v_y)_{i+\frac{1}{2},j} - (\tau_{xy})_{i+\frac{1}{2},j} - \rho(v_x \cdot v_y)_{i-\frac{1}{2},j} + (\tau_{xy})_{i-\frac{1}{2},j}) \cdot HY + \\ & + ((\rho(v_y^2)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\sigma_{yy})_{i,j+\frac{1}{2}} - \rho(v_y^2)_{i,j-\frac{1}{2}} + (\sigma_{yy})_{i,j-\frac{1}{2}}) \cdot HX) - \\ & - \rho_0 \cdot g \cdot HX \cdot HY (1 + \beta(T_0 - T_1(x, y, t))); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial t} = & -(((H_1 \cdot v_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (\frac{\partial U_1}{\partial x})_{i+\frac{1}{2},j} - (H_1 \cdot v_x)_{i-\frac{1}{2},j} + (\frac{\partial U_1}{\partial x})_{i-\frac{1}{2},j}) HY + \\ & + ((H_1 \cdot v_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\frac{\partial U_1}{\partial x})_{i,j+\frac{1}{2}} - (H_1 \cdot v_y)_{i,j-\frac{1}{2}} + (\frac{\partial U_1}{\partial x})_{i,j-\frac{1}{2}}) \cdot HX); \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_x = v_x \cdot HY \cdot HX \cdot \rho; \quad K_y = v_y \cdot HY \cdot HX \cdot \rho;$$

где v_x и v_y – проекции вектора скорости на оси x и y ;

ρ – плотность жидкого сплава;

ρ_0 – плотность жидкого сплава при $T_l = T_{l0}$;

β – коэффициент термического расширения жидкого сплава;

E_1 – внутренняя энергия ячейки, $E_1 = H_1 \cdot HY \cdot HX$;

HX и HY – размеры ячейки вдоль осей x и y ;

σ_{xx} ; τ_{xy} ; σ_{yy} – компоненты тензора напряжений.

Компоненты тензора ячейки вычисляются по формулам:

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad (17) \quad \sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad (19)$$

где P – давление в ячейке;

μ – динамический коэффициент вязкости сплава.

Уравнение изменения внутренней энергии для стенки формы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial t} = & \left(\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{i+1/2, j} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{i-1/2, j} \right) HY + \\ & + \left(\left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{i, j+1/2} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{i, j-1/2} \right) \cdot HX, \end{aligned} \quad (20)$$

$$E_2 = H_2 \cdot HY \cdot HX. \quad (21)$$

В уравнениях (14)–(16) и (20) индексы $i+1/2, j$ и $i-1/2, j$ относятся к значениям величин на правой и левой границах ячейки, а $i, j+1/2$ и $i, j-1/2$ – к значениям величин на верхней и нижней границах ячейки. При этом на каждой границе ячейки данные величины принимаются постоянными. Для всех функций в левых частях уравнений (14)–(16) и (20) частные производные по времени $\frac{\partial F}{\partial t}$ заменяются конечно-разностным приближением:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F^{k+1} - F^k}{\Delta t}, \quad (22)$$

где F^k и F^{k+1} – значения компонент импульса и внутренней энергии в текущий момент времени t и в следующий момент времени $t+\Delta t$;

Δt – шаг по времени.

Давление в начальный момент времени распределено по ячейкам согласно гидростатическому закону

$$P(x, y) = P_a + \rho \cdot g(y - \delta_\phi),$$

где P_a – атмосферное давление;
 y – ордината центра ячейки.

После расчета энергии ячеек и поля скоростей по приведенным выше уравнениям осуществляется проверка соблюдения условия неразрывности потока для каждой ячейки:

$$\text{Div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Для ячейки это уравнение имеет вид

$$\frac{(V_x)_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2HX} + \frac{(V_y)_{i,j+1} - (v_y)_{i,j-1}}{2HY} \leq \varepsilon, \quad (23)$$

где ε – некоторое очень малое допустимое значение (в расчетах принимали $\varepsilon = 0,001$).

Если это условие не выполняется, то производится перерасчет поля давлений по формуле

$$P_{ij}^{n+1} = P_{ij}^n - B \cdot \text{Div } \vec{v}_{ij}. \quad (24)$$

Далее повторяется вычисление поля скоростей с использованием при расчетах σ_{xx} и σ_{yy} новых значений давлений. Данный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие (23). После этого переходят к расчетам на следующем шаге по времени.

По расчетным значениям энергии E_I определяем значение функции H_I . С использованием функций $U_I(H_I)$ и $T_I(U_I)$ находим значение температуры сплава T_I . Если в ячейке $T_I < T_{\text{сол}}$, то ячейка затвердела. Алгоритм расчета позволяет на каждом шаге по времени определить положение фронтов солидуса и ликвидуса.

К основным факторам, определяющим процесс, относятся: теплофизические параметры сплава и формы, коэффициент температурного расширения жидкого сплава, начальная температура сплава T_{10} и формы T_{20} , размеры отливки R_0 , H_0 и толщина формы δ_ϕ , теплопроводность $\lambda_{кр}$ и толщина $\delta_{кр}$ кокильного покрытия.

Расчеты были спланированы по матрице 4^2 и выполнялись для ряда сплавов (чугун, силумин АК7ч, сталь). Программа расчетов была написана на языке Pascal 7 с выводом данных в виде таблиц и графической схемы с изображением фронта солидуса и направлений векторов скоростей в ячейках. На рис.4 приведен вид схемы, где кружками отмечены ячейки с затвердевшим сплавом. Расчет

выполнен для отливки из сплава АК7ч при $R_0=20$ мм, $H_0=250$ мм, $T_{l0}=700$ °С, $T_{20}=200$ °С, $\delta_{кр}=0,01$ см, $\delta_{\phi}=50$ мм.

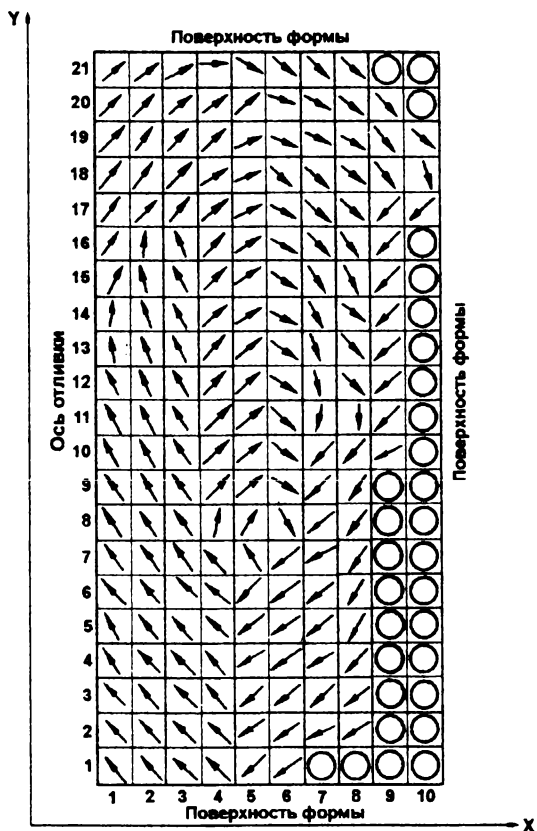


Рис. 4. Поле скоростей и положение фронта затвердевания при $t=2,8$ с

В научном плане в данной работе впервые разработана методика исследования свободной конвекции в ограниченном объеме затвердевающего расплава.

Литература

1. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 519 с.
2. Лыков А. В. Теплообмен. – М.: Энергия, 1972. – 559 с.