Б. С. Чуркин,
Э. Б. Гофман,
В. В. Карпов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА ЧЕРЕЗ СТЕНКУ ФОРМЫ ПРИ ЛИТЬЕ ПО ПЕНОПОЛИСТИРОЛОВЫМ МОДЕЛЯМ В УСЛОВИЯХ ЗАЛИВКИ ВАКУУМНЫМ ВСАСЫВАНИЕМ

Кинетика заполнения форм при литье вакуумным всасыванием определяется темпом создания разрежения в полости формы. При литье по пенополистироловым моделям эта кинетика, кроме процессов истечения газа из камеры в ресивер, зависит от интенсивности парообразования при испарении пенополистирола в зазоре между расплавом и моделью, а также от процесса фильтрации газа через песчаную стенку (засыпки) в вакуумную камеру. Рассмотрим математическую модель этого процесса (рис. 1).

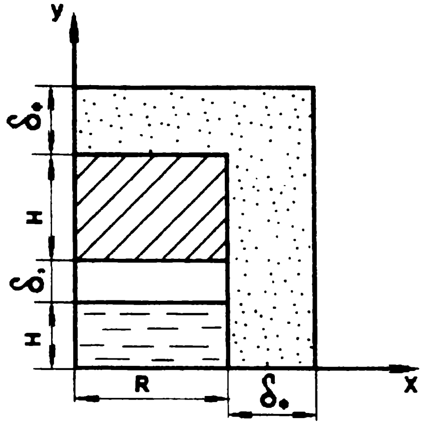

Рис. 1. Расчетная схема процесса

Для вычисления скорости фильтрации применим уравнение Дарси

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\mu} \cdot gr\vec{a}dP, \tag{1}$$

где κ – коэффициент проницаемости среды, м^2;

μ – динамический коэффициент вязкости газа, Па·с;

P – давление газа, Па.

Запишем уравнение неразрывности потока газа

$$\Pi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \cdot \vec{v}), \qquad (2)$$

где Π – пористость среды;

c – плотность газа, кг/м^3.

С учетом (1) уравнение (2) принимает вид

$$\Pi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = div(\frac{\kappa}{\upsilon} \cdot gr\vec{a}dP),$$

где υ – кинематический коэффициент вязкости газа, м^2/с.

Учитывая, что для большинства газов, включая воздух, в интервале температур от 600 до 900 К кинематический коэффициент вязкости υ изменяется в пределах от $50\cdot10^{-6}$ до $100\cdot10^{-6}$ м^2/с, усреднив его, в дальнейшем примем $\upsilon=75\cdot10^{-6}$ м^2/с. Примем коэффициент проницаемости постоянным в объеме стенки формы. С учетом этого имеем

$$\Pi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\kappa}{\nu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right). \qquad (3)$$

Примем $\rho = \frac{P}{RT_г}$, где $T_г$ – температура газа. Получаем следующее уравнение для расчета поля давления:

$$\frac{\partial(\frac{P}{T_г})}{\partial t} = \frac{\kappa \cdot R}{\Pi \cdot \nu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right). \qquad (4)$$

Напишем граничные условия для уравнения (4):

$$P(x^*, y^*, z^*) = P_ф, \qquad (5) \qquad\qquad P(x^{***}, y^{**}, z^{***}) = P_к, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x^{**},y^{**},z^{**}} = 0, \quad (7) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x^{**},y^{**},z^{**}} = 0, \quad (8) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x^{**},y^{**},z^{**}} = 0. \quad (9)$$

Здесь $P_к$ – давление в камере ($P_к = (P_a - P_p)(1 - \exp(-\beta t))$, где P_p – давление в ресивере; P_a – атмосферное давление; β – коэффициент, зависящий от объема камеры, проходного сечения дросселя и P_p) [1];

x^{*}, y^{*}, z^{*} – координаты поверхности контакта формы с зазором;

x^{**}, y^{**}, z^{**} – координаты поверхности контакта формы с моделью, расплавом и нижней плитой;

$x^{***}, y^{***}, z^{***}$ – координаты наружной поверхности формы.

Вполне очевидно, что уравнение (4) необходимо совместить с теплофизическими уравнениями по расчету температурного поля фильтрующегося газа.

Для описания процессов теплопередачи в стенке формы используем метод потоков [1]. Для этого разобьем стенку формы на элементарные ячейки. На рис. 2 приведена расчетная схема для двумерного случая.

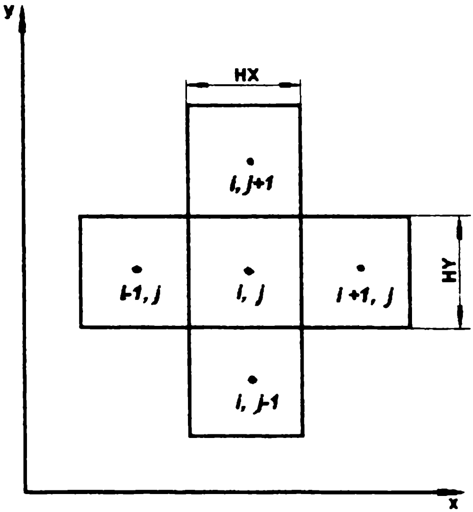

Рис. 2. Расчетная схема для двумерного случая

Для изменения внутренней энергии газа и дисперсной среды в пределах ячейки с индексами i, j можно написать следующее уравнение:

$$\frac{\partial E_{i,j}}{\partial t} = -\oiint_S Q_{i,j} \cdot n \cdot ds, \qquad (10)$$

где $Q_{i,j}$ – вектор плотности потока энергии на поверхности, ограничивающей выделенную ячейку (i, j);

S – площадь поверхности, ограничивающей ячейки.

При отсутствии движения газа ($gr\vec{a}dP = 0$) плотность теплового потока определяется теплопередачей теплопроводностью с эффективным значением коэффициента теплопроводности $\lambda_{эф}$. При этом плотность теплового потока равна $(-\lambda_{эф} \cdot \frac{\partial T_{ср}}{\partial n})$, где $T_{ср}$ – температура дисперсной среды.

Плотность теплового потока, связанного с потоком газа, равна $\vec{v} \cdot \vec{n} \cdot c_2 \cdot \rho_2 \cdot T_г$. Внутри ячейки происходит перераспределение тепла, внесенного с газом, между газом и материалом среды за счет теплового потока от газа к материалу:

$$\Delta Q = \alpha_V (T_г - T_{ср}) \cdot \Delta V \cdot \Delta t,$$

где α_V – коэффициент теплоотдачи, отнесенный к единице объема пористой среды;

ΔV – объем ячейки.

Напишем конечно-разностный вариант уравнения (10) для двумерного случая. Изменение энергии ячейки за счет теплопередачи теплопроводностью вычислим по формуле

$$\begin{aligned}\Delta E_{ijT} &= -\Delta t((\lambda_{эф}\left(\frac{\partial T_{ср}}{\partial x}\right)^{к}_{i-1,j} - \lambda_{эф}\left(\frac{\partial T_{ср}}{\partial x}\right)^{к}_{i+1,j})HY + \\ &+ (\lambda_{эф}\left(\frac{\partial T_{ср}}{\partial y}\right)^{к}_{i,j-1} - \lambda_{эф}\left(\frac{\partial T_{ср}}{\partial y}\right)^{к}_{i,j+1})HX).\end{aligned} \qquad (11)$$

Это изменение энергии приведет к изменению температуры ячейки (как газа, так и дисперсного материала):

$$\Delta T_1 = \frac{\Delta E_{ijT}}{(c_г \cdot \rho_г \cdot П + c_ф \cdot \rho_ф (1 - П)) \cdot HX \cdot HY} =$$

$$= \frac{\Delta E_{ijT}}{c_ф \cdot \rho_ф \left(\frac{c_г \cdot \rho_г \cdot П}{c_ф \cdot \rho_ф} + (1 - П) \right) \cdot HX \cdot HY} = \tag{12}$$

$$= \frac{\Delta E_{ijT}}{c_ф \cdot \rho_ф (1 - П) \cdot HX \cdot HY} \quad ,$$

так как $\frac{c_г \cdot \rho_г \cdot П}{c_ф \cdot \rho_ф} << (1 - П)$.

За время Δt энергия газа изменится на величину ΔE_{ijT}, равную изменению энергии за счет переноса тепла движущимся газом и теплообмена с дисперсной средой.

$$\Delta E_{ijK} = -\Delta t((c_г(\rho_г v_x T_г)^к_{i+1,j} - c_г(\rho_г v_x T_г)_{i-1,j})^к HX + (c_г(\rho_г v_y T_г)^к_{i,j+1} -$$

$$- c_г(\rho_г v_y T_г)_{i,j-1})^к \cdot HY + \alpha^к_v (T_г - T_ф)^к HY \cdot HX), \tag{13}$$

где v_x и v_y – компоненты вектора скорости;

$c_г$ – теплоемкость газа, Дж/(кг·К);

α_v – объемный коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^3·К).

Это приведет к изменению температуры газа:

$$\Delta T_г = \frac{\Delta E_{ijK}}{HY \cdot HX \cdot c_г \cdot \rho_г \cdot П}. \tag{14}$$

За счет передачи тепла от газа к материалу ячейки ее температура изменится на величину

$$\Delta T_3 = \frac{\alpha^к_v (T_г - T_м)^к \cdot \Delta t}{c_ф \cdot \rho_ф (1 - П)}. \tag{15}$$

Полное изменение температуры дисперсной среды равно $\Delta T_ф = \Delta T_1 + \Delta T_3$, а температуры газа $\Delta T_г = \Delta T_1 + \Delta T_2$.

Температуры на следующем шаге по времени равны

$$T^{к+1}_{фij} = T^к_{фij} + \Delta T_ф; \qquad T^{к+1}_{гij} = T^к_{гij} + \Delta T_г.$$

Функции в правых частях уравнений (11), (13), (15) соответствуют предыдущему шагу по времени. Объемный коэффициент теплоотдачи α_v можно вычислить по формуле [2]

$$\alpha_v = 6\alpha_F(1 - \Pi)/d,$$

где α_F – поверхностный коэффициент теплоотдачи;

d – средний диаметр зерен песка.

Поверхностный коэффициент теплоотдачи α_F находим из критериального уравнения

$$Nu = 0{,}106 \cdot \mathrm{Re}, \tag{16}$$

где $Nu = \dfrac{\alpha_F \cdot d}{\lambda_г}$, $\mathrm{Re} = \dfrac{v \cdot d}{\nu \cdot \Pi}$.

Коэффициент проницаемости K можно определить по данным определения газопроницаемости. При стандартном методе газопроницаемость определяется по формуле

$$K_г = \frac{V_г \cdot h}{S \cdot P \cdot t},$$

где $V_г$ – объем газа, см^3;

h – высота стандартного образца, см;

S – площадь образца, см^2;

t – время, с;

P – избыточное давление, см вод. ст.

Для перевода газопроницаемости $K_г$ в коэффициент проницаемости необходимо пересчитать ее размерность в СИ.

$$K = K_г \cdot \frac{10^{-4}}{98} \cdot \mu_в,$$

где $\mu_в$ – динамический коэффициент вязкости воздуха при t=20 °С; $\mu_{в\,20^o}$ = = 1,98·10^{-5} Па·с.

$$K = 2K_г \cdot 10^{-11}. \tag{17}$$

Компоненты скорости вычисляются по формулам:

$$v_x = -\frac{K}{\mu}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}; \quad (18) \qquad v_y = -\frac{K}{\mu}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}. \quad (19)$$

Массовый расход газа из зазора определяется по формуле

$$\frac{dm_г}{dt} = -\frac{P_ф}{RT_{эф}}\cdot h_з \cdot b \cdot (v_x)_n, \quad (20)$$

где $h_з$ – высота зазора;

b – ширина модели;

$(v_x)_n$ – скорость газа на внутренней поверхности формы.

Напишем граничные условия процесса:

$$v_x(x^{**}, y^{**}, z^{**}, t) = 0; \quad (21) \qquad v_y(x^{**}, y^{**}, z^{**}, t) = 0; \quad (22)$$

$$v_x(x^{***}, y^{***}, z^{***}, t) = 0; \quad (23) \qquad v_y(x^{***}, y^{***}, z^{***}, t) = 0; \quad (24)$$

$$v_{x,S_в} = 0; \quad v_{y,S_в} = 0; \quad (25) \qquad v_{x,S_н} = 0; \quad v_{y,S_н} = 0, \quad (26)$$

где $S_в$ и $S_н$ – верхняя поверхность контакта формы с моделью и поверхность контакта формы с нижней плитой.

$$\lambda_м\left(\frac{\partial T_м}{\partial n}\right)_{x^{**},y^{**},z^{**}} = \lambda_{эф}\cdot\left(\frac{\partial T_ф}{\partial n}\right)_{x^{**},y^{**},z^{**}}; \quad (27)$$

$$\lambda_{эф}\left(\frac{\partial T_ф}{\partial n}\right)_{x^{***},y^{***},z^{***}} = \lambda_c\cdot\left(\frac{\partial T_c}{\partial n}\right)_{x^{***},y^{***},z^{***}}; \quad (28)$$

$$T_м(x^{**}, y^{**}, z^{**}) = T_ф(x^{**}, y^{**}, z^{**}); \quad (29)$$

$$T_c(x^{***}, y^{***}, z^{***}) = T_ф(x^{***}, y^{***}, z^{***}); \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial T_ф}{\partial n}\right)_{S_{нар}} = 0, \quad (31)$$

где $T_м$, $T_ф$ и T_c – температуры модели, формы и сплава;

$S_{нар}$ – наружная поверхность формы.

Начальные условия процесса:

$$P(x, y, z, t=0)=P_а; \quad (32) \qquad P_ф=P_а, \quad (33)$$

$$T_ф(x, y, z, t=0)=T_{20}; \quad (34) \qquad T_г(x, y, z, t=0)=T_{20}. \quad (35)$$

Система уравнений (4)–(9) и (11)–(35) образует математическую модель процесса. Для того чтобы ее замкнуть, необходимо совместить ее с моделями процессов формирования газового зазора, т.е. плавления и испарения пенополистирола, кинетики заполнения формы сплавом, а также тепловых процессов при заполнении формы сплавом.

Литература

1. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 519 с.

2. Телегин А. С., Швыдкий В. С., Ярошенко Ю. Г. Термодинамика и тепломассоперенос. – М.: Металлургия, 1980. – 264 с.

Б. С. Чуркин,
А. Б. Чуркин

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ ФОРМ ПРИ ЛИТЬЕ ПОД РЕГУЛИРУЕМЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Анализ гидродинамических процессов при заполнении форм в условиях литья под регулируемым давлением, как правило, проводят с использованием нестационарного уравнения Бернулли для участков заполнения металлопровода и полости формы [1, 2]. При этом начальную скорость подъема уровня в полости формы находят по формуле

$$v_0 = v_{мк} \frac{\omega_м}{\omega_ф}, \quad (1)$$