

*Б. Н. Поляков,
Ю. И. Няшин,
А. А. Селянинов*

САПР ТЕХНОЛОГИИ И КОНСТРУКЦИИ АГРЕГАТА ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ПИЛЬНЫХ ДИСКОВ (ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ)

Сортопрокатное производство, составляющее значительную долю от общего объема проката металлургических комбинатов России и стран СНГ, содержит большое количество пил горячей и холодной резки, изготовление дисков для которых производится практически вручную или по упрощенной, многооперационной и далеко не современной технологии. Поэтому стойкость и долговечность пильных дисков, определяющих ритмичность работы и производительность участков резки, а также качество продукции, весьма малы (по данным сотрудников Кузнецкого металлургического комбината, стойкость не превышает в среднем 3–4 часа), что не соответствует требованиям производства, поэтому каждый сортопрокатный цех вынужден самостоятельно изготавливать диски и содержать их значительный парк. Например, в крупносортном цехе (стан 600) Коммунарского металлургического комбината их ежемесячный оборот составляет в среднем 190–200 штук, из которых 40–45 % – новые, а остальные – реставрированные. Из-за низкой стойкости пильных дисков повышается расход металла, увеличиваются трудозатраты и появляются значительные потери производства на многочисленных сортопрокатных станах.

Поэтому, принимая во внимание отсутствие современного промышленного производства пильных дисков широкого диапазона диаметров и толщин и большую потребность металлургических комбинатов в значительном объеме дисков высокого качества изготовления (по планшетенности и требуемому уровню остаточных напряжений, по точности нарезки зубьев и их термообработки, по стойкости и долговечности), ОАО “Уралмаш” предложило (и Кузнецкий металлургический комбинат признал целесообразным) создать технологию и оборудование современного комплекса для механизированного и автоматизированного производства пильных дисков из листового проката

на основе объединенной в одном агрегате технологии вырезки и правки, фрезерования и термообработки зубьев. Основу агрегата должна составлять специализированная роликотправильная машина (РПМ), обеспечивающая высокий уровень планшетности, а также заданный и управляемый уровень остаточных напряжений.

В качестве главного элемента технологии предложено принять так называемый карусельный способ правки, отличающийся тем, что с целью исключения ручного труда и улучшения качества правки выправляемый диск вращают вокруг своей оси и многократно пропускают между радиально расположенными в шахматном порядке коническими роликами, при этом прогиб диска в каждом цикле его правки изменяют от нуля до максимума и затем вновь уменьшают до нуля [1].

На основе этого способа разработан эскизно-технический проект РПМ, кинематическая схема которой показана на рис. 1 [2].

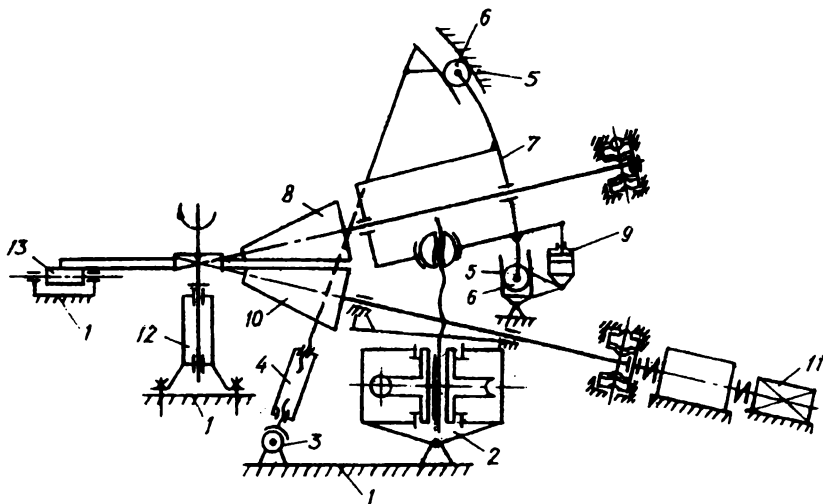


Рис. 1. Кинематическая схема машины для правки изделий из листового материала (пильных дисков)

Основные конструктивные узлы РПМ следующие. На станине 1 установлено качающееся нажимное устройство 2 и эксцентриковая опора 3 стяжного винтового механизма 4 регулировки положения направляющих 5, соединенных верхним шарниром с винтовым механизмом, а нижним шарниром – со станиной. В криволинейных направляющих 5 на катках 6 может перемещаться с помощью нажимного устройства верхняя обойма 7 с коническими верхними рабочими роликами 8, установленными в обойме на подшипниках качения, ролики имеют червячные механизмы осевой регулировки. Верхняя обойма переуравновешена устройством 9. Нижние конические рабочие ролики 10 установлены в станине 1 и имеют индивидуальные приводы 11. Также на станине размещено центрирующее устройство 12, представляющее собой холостой шпиндель, установленный на подшипниках качения, и роликное поддерживающее устройство 13.

Машина работает и обеспечивает технологию правки следующим образом [2]. В исходном положении подвижная обойма и эксцентриковая опора находятся в верхнем положении, рабочие ролики разведены. Верхний ролик, повернутый вокруг вертикальной оси, освобождает рабочее пространство машины для приема диска. Диск, имеющий базовое центральное отверстие, укладывается на нижние правящие ролики, одновременно надеваясь на центрирующее устройство. Эксцентриковая опора поворачивается в нижнее положение, опуская верхний правящий ролик на диск, которому нижним приводным роликом сообщается вращательное движение. Нажимное устройство опускает верхнюю обойму по криволинейным направляющим, при этом рабочие ролики деформируют диск до максимального изгиба, необходимого для правки, а затем уменьшают деформацию до нуля по заданной закономерности, необходимой для обеспечения качественной правки. После чего вращение диска прекращается, рабочие ролики разводятся эксцентриковой опорой в холостое положение.

С целью обоснования технологического процесса правки, конструктивных параметров РПМ и мощностей ее приводов разработана программа расчетов и параметрических исследований на ЭВМ напряженно-деформированных состояний (НДС) пильных дисков при правке. Целевыми функциями являются минимальная неплоскостность и заданный (минимальный) уровень остаточных напряжений.

Программа обосновывает:

- исходную настройку роликов, которая выражается в распределении деформации по роликам и в ее изменении по времени (или в оборотах диска), т.е. рациональный закон изменения деформации от максимального изгиба (начало правки) до останова диска;

- количество роликов и их шаг (в постановке предусматривается возможность переменного шага);

- мощность привода нижних роликов;

- диаметр и конусность правящих роликов;

- влияние настройки роликов и ее неточностей (погрешностей) на уровни радиальных и тангенциальных остаточных напряжений и неплоскостность (точность нажимного устройства), т.е. оценку чувствительности взаимосвязи технологии правки и конструктивных параметров РПМ.

В расчетной схеме и постановке задач предусматривается ряд вариантов правки дисков различных исполнений (в том числе с отверстиями) и несколько видов эпюр контактных давлений (деформаций): равномерно распределенное вдоль образующих ролика, трапецеидальный и треугольный графики с максимумом по наружному диаметру диска.

Ниже подробно показываются заложенные в программу техническая и математическая постановки задачи правки пильных дисков.

Техническую постановку задачи можно представить в следующем виде.

Диски перед правкой имеют дефекты по неплоскостности: разнотолщинность, коробоватость, местную, радиальную и окружную волну.

Цель правки – ликвидировать неплоскостность поверхностей диска и сформировать заданный (или обеспечить минимальный) уровень остаточных напряжений в радиальном и тангенциальном направлениях.

Схема процесса правки пильного диска показана на рис. 2.

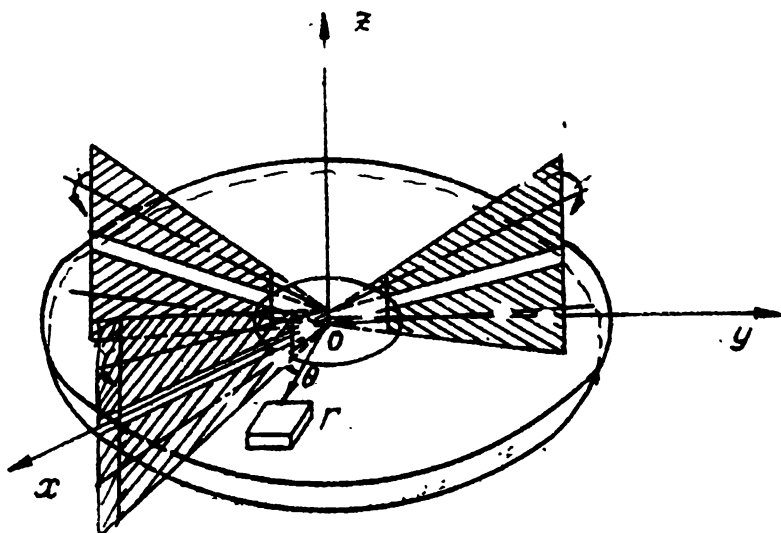


Рис.2. Схема правки пильного диска

Первоначальное рассогласование $\Delta\theta$ верхних и нижних роликов равно или близко к θ . За счет обжатия или проглаживающего прохода снимается (или частично снижается) разнотолщинность. Затем рассогласование $\Delta\theta$ увеличивается до 60° (при числе роликов $n = 3$) при вертикальном ходе вниз верхних роликов с последующим возвратом при $\Delta\theta = 120^\circ$ в исходную плоскость. При этом сначала создается доминирующая окружная волна, которая потом сводится на нет.

Диски на правку поступают в отожженном состоянии, поэтому начальное состояние металла считается ненапряженным.

При правке реализуется знакопеременное нагружение, поэтому должно учитываться анизотропное упрочнение металла при изотропном его упрочнении в различных направлениях при заданной температуре T (рис. 3, а), а также зависимость σ_z от ξ_i (рис. 3, б). Если точка \bar{x} в координатах (σ_z, ϵ_i) находится на ветвях 1-2, 3-4, 5-6 и т.д., то $\bar{x} \in \Omega^p$, иначе $\bar{x} \in \Omega^r$.

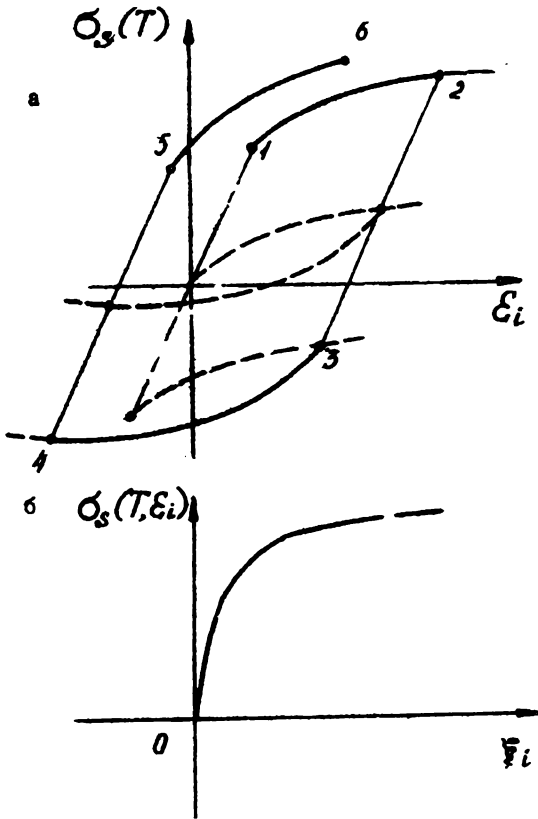


Рис.3. Зависимость предела текучести при заданной температуре:
 а - от ϵ_i при изотропном упрочнении в различных направлениях; б - от ξ_i

Поверхность диска имеет вид, показанный на рис.4. Здесь $S_1 \div S_4$ - поверхность диска, $S_5^{(i)}$, $i = \bar{1}, \bar{n}$ - поверхности контакта металла с приводными валками (прилипание по \bar{n} и скольжение по $\bar{\tau}$ и \bar{r}), $S_6^{(j)}$, $j = \bar{1}, \bar{n}$ - поверхности контакта металла с опорными валками (прилипание по \bar{n} и скольжение по $\bar{\tau}$ и \bar{r}).

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4; S_5^{(i)} \subset S_2, i = \bar{1}, \bar{n}; S_6^{(j)} \subset S_4, j = \bar{1}, \bar{n}.$$

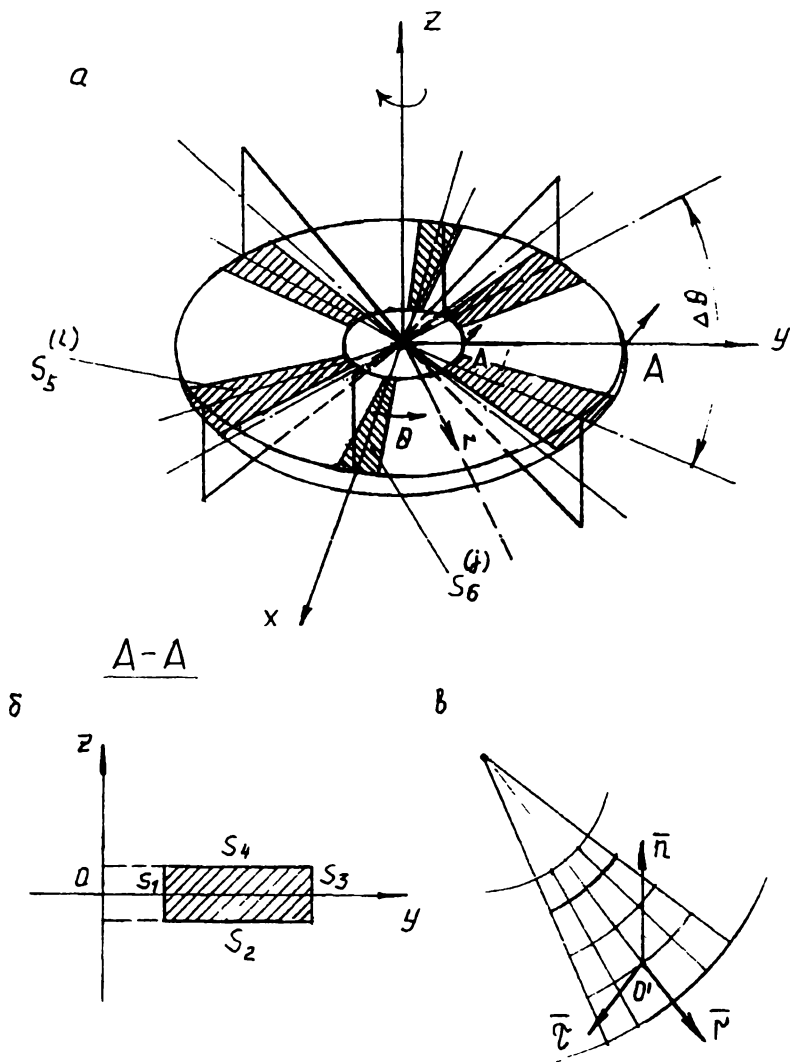


Рис. 4. Схема к определению граничных условий ($n = 3$):
 а и б - поверхность диска; в - поверхность контакта с приводными валками

Граничные условия имеют вид:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 / (S_5^{(i)} + S_6^{(j)}); i, j = \overline{1, n}; F_r = F_z = F_\theta = 0;$$

$$S_5^{(i)}, i = \overline{1, n}: V_n = 0, F_r = -f \cdot F_n \cdot \frac{V_r}{V_r}, F_z = -f \cdot F_n \cdot \frac{V_z}{V_z};$$

$$S_6^{(j)}, j = \overline{1, n}: V_n = 0, F_r = -f \cdot F_n \cdot \frac{V_r}{V_r}, F_z = -f \cdot F_n \cdot \frac{V_z}{V_z};$$

где f – коэффициент трения.

Точка $\bar{x} \in S_5^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, если $\bar{x} \in S^{(i)} \cup S_2$, где $S^{(i)}$ – поверхность i -го приводного вала. Точка $\bar{x} \in S_6^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, если $\bar{x} \in S^{(j)} \cup S_4$, где $S^{(j)}$ – поверхность j -го неприводного вала. (При определении принадлежности \bar{x} к $S_5^{(i)}$ или $S_6^{(j)}$ строится итерационная процедура с той целью, чтобы на этих поверхностях контакта выполнялись условия $V_n = 0$ и $\sigma_n = 0$.)

В результате имеем нестационарную изотермическую задачу упругопластичности.

Численная реализация задачи в полном объеме, вероятно, невозможна в настоящее время из-за технических затруднений, поэтому следует ввести некоторые допущения. Пользоваться одновременно теориями пластин и оболочек затруднительно. В них используется гипотеза жесткой нормали Кирхгофа-Лява ($t < R$ – для пластинки, $t \leq 0,1r_0$ – для оболочки, где r_0 – радиус кривизны основной поверхности), которая позволяет избежать решения пространственной задачи. Однако, в этом случае возникает проблема больших прогибов в учете начальной неплоскостности, а также граничных условий на свободной поверхности.

Для пологих оболочек с учетом больших прогибов задача сводится к решению систем двух нелинейных интегральных уравнений: относительно условий и относительно моментов (двух уравнений для оболочки вращения).

Предполагается в связи с этим применить схему расчета напряженного состояния, когда зависимость вектора скорости металла $\vec{v}(r, \theta)$ от z является кусочно-линейной функцией по толщине диска.

При этом деформации по толщине будут равны константам в каждом слое по координате z .

Исходные данные пильного диска, РПМ и технические требования таково: наружный диаметр диска (в заготовке) – 1500 ÷ 2400 мм; внутренний

диаметр диска – 400 мм; материал (листовая сталь) марок 50, 60 и 65I¹ (после отжига); толщина листа – $8 \div 12$ мм; исходная неплоскостность – до 12 мм/м, ≈ 29 мм на диаметре 2400 мм; исходная разнотолщинность – до $+0,5 \div -0,8$ мм; конечная неплоскостность – до $0,1 \div 0,2$ мм; температура правки – 20 °С (как вариант, 400÷500 °С); количество рабочих роликов (верхних или нижних) – 3÷8; шаг роликов – $120^\circ \pm 0^\circ$; угол конусности роликов – $20^\circ \pm 30^\circ$; длина образующей конуса – 800÷1000 мм; максимальная окружная скорость роликов – 0,8 м/мин; мощность двигателя ≈ 20 кВт; скорость подачи нажимного устройства – 1,5 мм/с.

Проведем предварительный анализ схем правки. Для того, чтобы рабочая наружная поверхность пыльного диска была плоской и обеспечивалась достаточная стойкость (работоспособность), необходимо получить после правки достаточную планшетность, а также распределение остаточных напряжений определенного типа или низкий уровень остаточных напряжений в радиальном и тангенциальном направлениях. Следить за уровнем остаточных напряжений также следует из-за возможной потери устойчивости диска после правки или при работе. С этой же целью желательно иметь в наружных рабочих кольцевых частях пыльного диска растягивающие окружные остаточные напряжения при сжимающих радиальных и нулевых поперечных напряжениях.

Дефекты формы диска (разнотолщинность, коробоватость, радиальная и окружная волна) носят случайный характер. Поэтому, как отмечалось при технической постановке задачи, эти дефекты следует свести к одному доминирующему – к окружной волне. С этой целью при нулевом рассогласовании валков $\Delta\theta = 0$ снимается разнотолщинность за счет обжатия. На этой стадии процесс подобен прокатке.

Для уничтожения коробоватости и случайной радиальной и окружной волнистости рассогласование валков делается средним (60° при $n = 3$), диск обжимается верхней обоймой валков и проворачивается. При этом создается доминирующая окружная волна, которая при повороте диска “гоняется по кругу”, остальными дефектами пренебрегаем.

Таким образом, задачи можно решать в детерминированной постановке, исключив случайный характер начальных несовершенств поверхности пыльного диска.

Чтобы диск после правки был плоским, необходимо в процессе правки создать в металле растягивающие окружные и сжимающие радиальные напряжения. Для этого можно применить разработанную схему правки (см. рис. 2), которая по существу является карусельной. Идея правки заключается в создании окружных растягивающих напряжений путем уменьшения рассогласования валков $\Delta\theta$, другими словами, уменьшением длины окружной волны и стремлением получить участки диска уменьшенной кривизны (рис. 5, б, участок АВ).

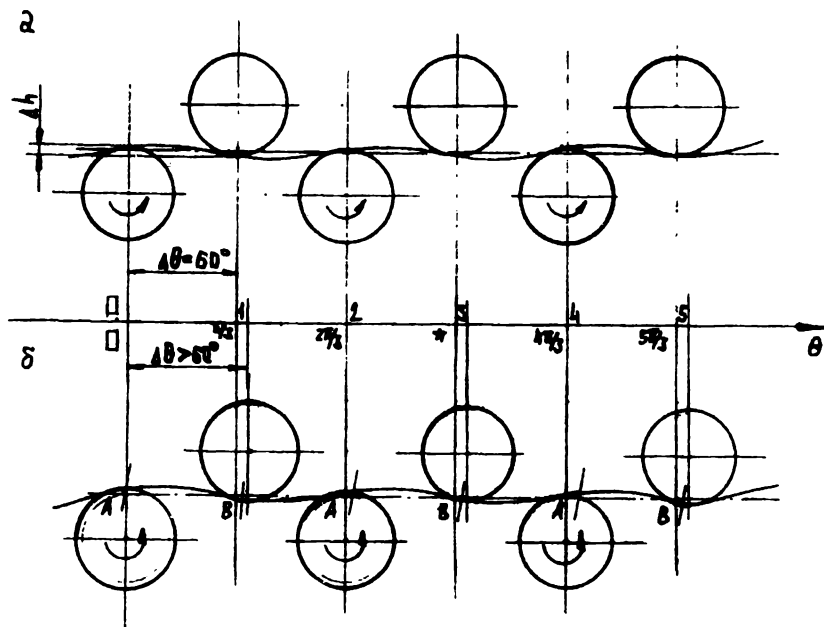


Рис. 5. Окружная развертка сечения РПМ: а - $\Delta\theta=60^\circ$; б - $\Delta\theta>60^\circ$

На рис. 5, а в положении I в верхних слоях диска окружные напряжения σ_θ сжимающие, в нижних слоях - растягивающие. После уменьшения $\Delta\theta$ в положении I сжимающие вверх и растягивающие вниз окружные напряжения увеличиваются из-за увеличения кривизны (см. рис. 5, б). При этом на участке АВ возможно перераспределение окружных напряжений,

если нижний слой металла диска перейдет в пластическое состояние. При переходе металла диска из положения *I* в положение *II* производится знакопеременный изгиб с натяжением из-за влияния следующего участка *AB* на отрезке 2–3 (см. рис. 5, б). То есть правка может производиться путем знакопеременного изгиба с натяжением. В этой схеме правки окружные напряжения должны оставаться растягивающими в течение всего процесса.

Растяжение по θ приводит к появлению радиальных напряжений, сжимающих в центральных кольцах и растягивающих в наружных кольцах диска. Из-за неравномерности окружных напряжений по радиусу диска и наличия сжимающих и растягивающих радиальных напряжений заранее трудно сказать, каково будет распределение остаточных напряжений и не приведут ли они к потере устойчивости диска. Если же режим будет таким, что не удастся перевести металл в пластическое состояние, то волна и при уменьшении $\Delta\theta$ будет снова “гоняться по кругу”.

При обсуждении проблемы правки дисков появились новые варианты:

- правка с развернутыми роликами (рис. 6, а);
- с предварительно выполненными дополнительными отверстиями (рис. 6, б);
- правка только части поверхности диска (рис. 6, в).

Правка с развернутыми роликами приводит к растягивающим радиальным напряжениям по всему диску при окружных растягивающих. Этот вариант предпочтительней первого, однако снова становится непонятной картина напряжений после правки. Вероятно, после правки в центральных кольцах диска будут сжимающие напряжения по r и θ , в наружных – растягивающие.

Правка дисков с отверстиями в смысле теоретического предварительного анализа сложнее первых двух вариантов. Можно предположить, что при одинаковой картине напряжений после правки отверстия позволят уменьшить уровень остаточных напряжений в диске и этим самым создать запас устойчивости.

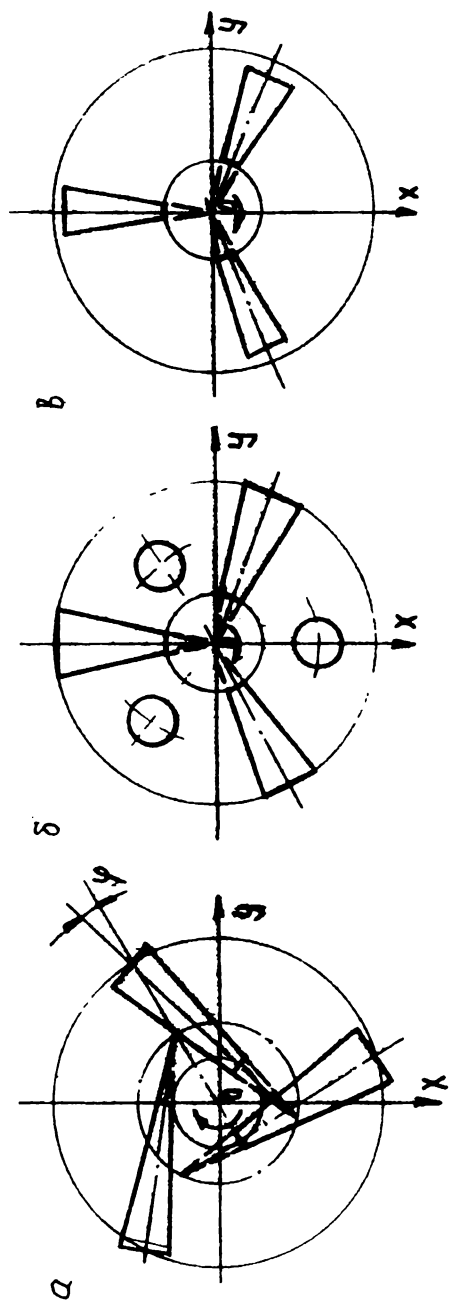


Рис. 6. Схемы правки дисков: а – с развернутыми роликами;
 б – с дополнительными отверстиями; в – части поверхности

Интересным кажется вариант, когда диск обкатывается не весь, а только его часть. В данном случае при зажиме готового диска двумя шайбами во внутренней полости между ними диск может быть и с дефектами. Важно, чтобы его рабочая поверхность (наружная) была плоской. Тогда возможна кольцевая обкатка внутренней части диска при $\Delta\theta=0$. Процесс становится аналогичным кольцевой прокатке. При такой правке во внутренних кольцевых слоях диска создаются сжимающие радиальные и окружные напряжения. Наружные слои становятся как бы натянутыми на внутренние. Если при этом при радиальном сжатии и окружном растяжении наружных слоев добиться в них пластической деформации, то можно будет получить в них снижение неплоскостности. Правда, при этом варианте остается необходимость предварительной обкатки всего диска для устранения разнотолщинности.

С точки зрения механики наиболее понятен механизм правки в четвертом варианте. Для численного анализа этих вариантов необходим расчет НДС пыльного диска и остаточных напряжений в нем. Для этого поставим задачу определения НДС в диске при правке.

Итак, математическая постановка задачи правки диска предлагается в следующем виде. Диск на правку поступает в отожженном состоянии, поэтому начальное состояние диска считается ненапряженным. Погрешности геометрии учитываются при задании начальной расчетной области Ω .

Принято считать, что все элементы металла при правке движутся по линиям тока, последовательно переходя из одного в другой за время Δt , тогда

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + \Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + \xi_{ij}\Delta t, \quad (i, j = x, y, z) \dots \forall \bar{x} \in \Omega \quad (1)$$

где ε_{ij}^H – компоненты накопленной деформации.

Область Ω состоит из упругой Ω_e и пластической Ω_p подобластей, тогда НДС в каждой точке с координатой \bar{x} будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) \cdot \Delta t = \xi_{ij}\Delta t, \quad \forall \bar{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^e = \Delta\varepsilon_{ij}^p + \Delta\varepsilon_{ij}^e \cdot \delta_{ij}, \quad \forall \bar{x} \in \Omega^e, \quad (3)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta(\delta_{ij} - \sigma\delta_{ij}) / (2G), \quad \forall \bar{x} \in \Omega^e, \quad (4)$$

$$\Delta\varepsilon^e = \Delta(k\sigma), \quad \forall \bar{x} \in \Omega^e, \quad (5)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^p + \Delta\varepsilon_{ij}^p \cdot \delta_{ij}, \quad \forall \bar{x} \in \Omega^p, \quad (6)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = (\xi_{ij} - \xi \cdot \delta_{ij}) \cdot \Delta t, \quad \forall \bar{x} \in \Omega^p, \quad (7)$$

$$\xi_{ij} - \xi \cdot \delta_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma \cdot \delta_{ij}) / (2\mu), \quad \forall \bar{x} \in \Omega^p, \quad (8)$$

$$\Delta \varepsilon^p = \xi \cdot \Delta x = 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega^p. \quad (9)$$

В формулах (2)–(9)

$$\mu = \frac{\tau_i}{H} = \frac{\sigma_i(\xi_i, \Gamma, T)}{\xi_i},$$

где $\Gamma = \int H dt$ – степень деформации сдвига,

T – температура металла.

Граничные условия приведены в технической постановке задачи.

Задача об НДС нестационарная. Пренебрегая эффектами ползучести, можно считать, что НДС является функцией изменяющихся граничных условий. Тогда задачу можно решить как квазистационарную, т.е. изменение граничных условий нужно учитывать в пошаговой процедуре. Приращения напряжений и деформаций суммируются с полученными на предыдущем шаге, соответственно учитывается изменение геометрии диска.

В результате математическая постановка задачи правки следующая: найти зависимость рассогласования $\Delta\theta$ от величины обжатия Δh , угол разворота роликов φ , количество роликов n , количество отверстий в диске, при которых неплоскостность диска Δl будет минимальна, при ограничениях типа равенств, представляющих собой систему уравнений упругопластичности (1)–(9) и граничные условия, при ограничениях типа неравенств, включающих в себя ограничение на уровень остаточных напряжений, из условий трещинообразования, и ограничения на параметры процесса правки ($\Delta\theta$, Δh , φ , n и т.п.).

Уточнить постановку задачи и конкретизировать ее можно будет после численного анализа предложенных схем.

Алгоритм решения задачи об НДС диска при правке предлагается следующий. Исходим из диска, в котором создана доминирующая окружная волна. Пренебрегаем напряжениями, возникающими при ее создании. Начальная область Ω задается косинусоидой с периодом $2\pi/n$ (при $n = 3$ с периодом $2\pi/3$) по углу θ , и толщина диска по осям θ и r равна константе. Расогласование роликов $\Delta\theta = 60^\circ$. Задаем приращение перемещения по углу θ и по обжатию Δh , с которым определяются напряжения и деформации в диске после решения задачи об НДС (при решении корректируются линии тока и

получается новая конфигурация). Снова задаем приращение по углу θ и Δh . Решив задачу об НДС, получаем новое решение. Процедура повторяется до окончания процесса правки, т.е. при $\Delta\theta=120^\circ$ и $\Delta h=0$. После чего из полученной геометрии диска определяется разнотолщинность диска Δt .

Покажем вывод конечноэлементных соотношений. Система уравнений упругопластичности (1)–(9) в вариационной постановке сводится к функционалу

$$\Phi\{V_i, \sigma\} = \int_V \left(\Delta t \cdot \sigma_v \cdot E_v - \lambda_{1/2} \Delta t \xi_v \xi_v + \frac{3}{2} \lambda_1 \Delta t \cdot \xi^2 - \frac{3}{2} k \sigma^2 + 3 \varepsilon^0 \sigma \right) dv - \int_{B_1} \Delta t \cdot F_i V_i dB_1, \quad (10)$$

где ε^0 – накопленная элементом средняя деформация,

B_2 – часть поверхности диска, на которой заданы силовые граничные условия;

$$\lambda = \begin{cases} 2G \cdot \Delta t, & \bar{x} \in \Omega^* \delta, \\ 2\mu, & x \in \Omega^p, \end{cases}$$

$$k = \frac{1 - 2\nu}{E},$$

где ν – коэффициент Пуассона;

E – модуль упругости.

Сформулируем вариационный принцип. Пусть имеется множество K возможных состояний $\{V_i, \sigma\}$, которое удовлетворяет физическим и геометрическим уравнениям и граничным условиям в скоростях на части поверхности B_1 .

Тогда условие равенства нулю первой вариации функционала (10)

$$\delta\Phi\{V_i, \sigma\} = 0, \quad \forall \{V_i, \sigma\} \in K \quad (11)$$

выполняется в том и только в том случае, если $\{V_i, \sigma\}$ – решение поставленной краевой задачи.

Применим к этому вариационному принципу метод конечных элементов. Рассматриваемую область разбиваем на элементы с восемью узлами (шестигранники) (рис. 7, а), каждый из которых разбивается на шесть конечных элементов – тетраэдров (рис. 7, б).

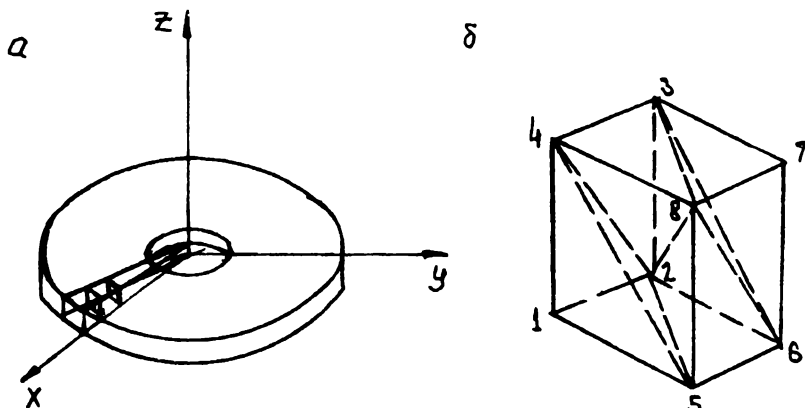


Рис. 7. Схема разбиения области: а – на конечные элементы; б – первый тетраэдр с узлами 4, 1, 2, 5; второй – 4, 2, 8, 5; третий – 4, 2, 3, 8; четвертый – 6, 7, 3, 8; пятый – 6, 3, 2, 8 и шестой – 6, 8, 2, 5

Возьмем линейную аппроксимацию поля скоростей по элементу, которая приводит к постоянным в элементе компонентам тензоров напряжений и деформаций:

$$\begin{cases} V_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, \\ V_y = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z, \\ V_z = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z. \end{cases} \quad (12)$$

Пронумеруем узлы тетраэдра i, j, m и k . Приравнявая величины смещения в узлах, получаем три системы из четырех уравнений:

$$\begin{cases} V_n = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \\ V_{nj} = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j, \\ V_{nm} = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 z_m, \\ V_{nk} = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k + \alpha_4 z_k. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $V_{X_i}, V_{X_j}, V_{X_m}, V_{X_k}$ и x_i, y_i, z_i – компоненты вектора скорости в узлах и координаты узлов.

Аналогично системе (13) составляются еще две системы по V_y и V_z .

Из решения с помощью определителя из (13) получаются коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 , выраженные через скорости в узлах и координаты узлов. Подставляя их в (12), получим:

$$\begin{cases} V_x = \frac{1}{6V} (\beta_i V_{xi} + \beta_j V_{xj} + \beta_m V_{xm} + \beta_k V_{xk}), \\ V_y = \frac{1}{6V} (\beta_i V_{yi} + \beta_j V_{yj} + \beta_m V_{ym} + \beta_k V_{yk}), \\ V_z = \frac{1}{6V} (\beta_i V_{zi} + \beta_j V_{zj} + \beta_m V_{zm} + \beta_k V_{zk}), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_m & Y_m & Z_m \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Здесь V представляет собой объем тетраэдра.

Величины $\beta_i, \beta_j, \beta_m, \beta_k$ соотношения (14) имеют вид

$$\begin{cases} \beta_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z, \\ \beta_j = a_j + b_j x + c_j y + d_j z, \\ \beta_m = a_m + b_m x + c_m y + d_m z, \\ \beta_k = a_k + b_k x + c_k y + d_k z, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$a_i = \det \begin{vmatrix} X_j Y_j Z_j \\ X_m Y_m Z_m \\ X_k Y_k Z_k \end{vmatrix}, \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_m & Z_m \\ 1 & Y_k & Z_k \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$c_i = \det \begin{vmatrix} X_j, 1, Z_j \\ X_j, 1, Z_m \\ X_j, 1, Z_k \end{vmatrix}, \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} X_j & Y_j & 1 \\ X_m & Y_m & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Остальные коэффициенты получаются с помощью циклической перестановки индексов в последовательности k, i, j, m, k .

Коэффициенты $a_r, r = i, j, m, k$ исчезают при дифференцировании, коэффициенты b_i, c_i, d_i имеют вид

$$\begin{cases} b_i = \ell [y_m Z_i - y_i Z_m - y_j (Z_k - Z_m) + Z_j (y_k - y_m)], \\ c_i = \ell [x_j (Z_k - Z_m) - x_m Z_k + x_k Z_m + Z_j (x_m - y_k)], \\ d_i = \ell [x_j (y_m - y_k) - y_j (x_m - x_k) + x_m y_k - x_k y_m], \end{cases} \quad (18)$$

где $\ell = -1$ для $b_i, b_m, c_i, c_m, d_i, d_m$;

$\ell = 1$ для $b_j, b_k, c_j, c_k, d_j, d_k$.

Остальные коэффициенты получаются при циклической перестановке индексов k, i, j, m, k , т.е. $i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow k \rightarrow i$.

Столбец скоростей и деформаций можно записать так:

$$\{\xi\} = \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \sqrt{2}\xi_{xy} \\ \sqrt{2}\xi_{yz} \\ \sqrt{2}\xi_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial V_x / \partial x \\ \partial V_y / \partial y \\ \partial V_z / \partial z \\ \sqrt{2}/2 (\partial V_x / \partial y + \partial V_y / \partial x) \\ \sqrt{2}/2 (\partial V_y / \partial z + \partial V_z / \partial y) \\ \sqrt{2}/2 (\partial V_z / \partial x + \partial V_x / \partial z) \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Множитель $\sqrt{2}$ вносится из-за того, что вместо девяти компонент здесь только шесть.

Подставляя (14) в (19), получим

$$\{\xi\} = [B]\{V\}, \quad (20)$$

где $\{V\}$ – вектор-столбец угловых скоростей,

$[B]$ – матрица связи скоростей деформаций и узловых скоростей.

Матрица $[B]$ имеет вид

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & [B_i] & & [B_j] & & [B_m] & [B_k] \\ \begin{array}{c} b_i \\ 0 \\ 0 \\ c_i/\sqrt{2} \\ 0 \\ d_i/\sqrt{2} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ c_i \\ 0 \\ b_i/\sqrt{2} \\ d_i/\sqrt{2} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ d_i \\ 0 \\ c_i/\sqrt{2} \\ b_i/\sqrt{2} \end{array} & & & & \\ \end{array} \end{array}. \quad (21)$$

В матрице (21) незаполненные клетки получаются отмеченной ранее циклической перестановкой индексов.

Средняя скорость деформации ξ и среднее напряжение σ равны

$$\xi = \frac{1}{3} \{I\}^T \{\xi\}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \{I\}^T \{\sigma\}, \quad (22)$$

где $\{I\}^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ – символы Кронекера;

T – обозначение транспонирования;

$$\{\sigma\}^T - \text{вектор столбец напряжений, } \{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sqrt{2}\tau_{xy}, \sqrt{2}\tau_{yz}, \sqrt{2}\tau_{xz}\}^T.$$

Физические соотношения тогда примут вид

$$\{\sigma\} = \sigma \{I\} + \lambda_1 \{\xi\} - \lambda_1 \xi \{I\} + \{\dot{C}\}. \quad (23)$$

где $\{\dot{C}\}$ – вектор-столбец, который состоит из известных членов.

Подставив выражения (20), (22) и (23) в функционал (10) и, взяв его первую вариацию, получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V \left(\lambda_1 \Delta [B]^T [B] \{V\} - \frac{\lambda_1 \Delta t}{3} [B]^T \{I\} \{I\}^T [B] \{V\} + \Delta t [B]^T \{C\} + \right. \\ & \left. + \Delta t [B]^T \{C\} + \Delta t [B]^T \{I\} \sigma \right) dV - \int_{S_n} \Delta t [N]^T \{F\} dS = 0, \\ & \int_V \left(\Delta t \{I\}^T [B] \{V\} - 3K\sigma + 3\dot{E} \right) dV = 0, \end{aligned} \right. \quad (24)$$

или

$$\begin{bmatrix} [A_1] & \{A_2\} \\ \{A_2\}^T & A_3 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_v\} \\ F_\sigma \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Аналогично получается система разрешающих уравнений в области пластического течения, структура которых та же, что и в выражении (25).

Так, в зоне упругого нагружения и упругой разгрузки элементы системы уравнений (25) имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} [A_1] &= \int_V \left(\lambda_1 [B]^T [B] - \frac{\lambda_1 \Delta t}{3} [B]^T \{I\} \{I\}^T [B] \right) dV, \\ \{A_2\} &= \int_V \Delta t [B]^T \{I\} dV, \\ A_3 &= - \int_V 3K dV, \\ \{F_v\} &= - \int_V \Delta t [B]^T \{C\} dV + \int_{S_n} \Delta t [N]^T \{F\} dS, \\ F_\sigma &= \int_V 3E_0 dV. \end{aligned} \right. \quad (26)$$

В зоне пластического течения

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_1] = \int_V \left(\lambda_1 [B]^T [B] - \frac{\lambda_1}{3} [B]^T \{I\} \{I\}^T [B] \right) dV, \\ [A_2] = \int_V [B]^T \{I\} dV, \\ A_3 = 0, \\ \{F_v\} = - \int_{b_i} [N]^T \{F\} dS, \\ F_\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (27)$$

Так как матрица $[B]$ и матрица формы на поверхности $[N]$ являются функциями координат, то при разворачивании (26) и (27) последние получают интегрированием.

Получим матрицу связи в (25). Ввиду блочной структуры матрицы $[B]$ достаточно перемножить $[B_r]^T [B_s]$, $r, S=i, j, m, k$.

Внесем коэффициенты $\frac{1}{6V}$ в (21) в сами b_i, c_i, d_i и т.п.

$$[B_r]^T = \begin{bmatrix} b_r & 0 & 0 & c_r / \sqrt{2} & 0 & d_r / \sqrt{2} \\ 0 & c_r & 0 & b_r / \sqrt{2} & d_r / \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & d_r & 0 & c_r / \sqrt{2} & b_r / \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[B_s] = \begin{bmatrix} b_s & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & d_s \\ c_s / \sqrt{2} & b_s / \sqrt{2} & 0 \\ 0 & d_s / \sqrt{2} & c_s / \sqrt{2} \\ d_s / \sqrt{2} & 0 & b_s / \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[B_r]^T [B_s] = \begin{bmatrix} b_r b_s + c_r c_s / 2 + d_r d_s / 2 & c_r b_s / 2 & d_r b_s / 2 \\ b_r c_s / 2 & c_r c_s + b_r b_s / 2 + d_r d_s / 2 & d_r c_s / 2 \\ b_r d_s / 2 & c_r d_s / 2 & d_r d_s + c_r c_s / 2 + b_r b_s / 2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\frac{1}{3}\{I\}[B_s] = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right\} * [B_s] = \left\{ \frac{b_s}{3}, \frac{C_s}{3}, \frac{d_s}{3} \right\}, \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{3}\{I\}[B_s] \right)^T \left(\{I\}[B_s] \right) = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} b_s \\ C_s \\ d_s \end{Bmatrix} \{b_s, C_s, d_s\} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} b_s b_s & b_s C_s & b_s d_s \\ C_s b_s & C_s C_s & C_s d_s \\ d_s b_s & d_s C_s & d_s d_s \end{Bmatrix}. \quad (32)$$

Далее формируется матрица жесткости $[K]$ размером 13×13 .

Итак, представленная математическая модель при ее численной реализации обеспечивает полную и надежную информацию о НДС пыльного диска при его правке на РПМ. Достоверность отдельных фрагментов модели оценивается путем сравнения с известными аналитическими решениями ряда тестовых краевых задач в статической постановке.

Таким образом, показанные техническая и математическая постановки задачи численного исследования НДС диска при правке на РПМ и разработанная на их основе программа могут составить исходную версию САПР современных технологий и конструкции агрегата для автоматизированного серийного производства высококачественных пыльных дисков широкого диапазона типоразмеров, необходимых как для металлургии, так и для других отраслей промышленности.

Литература

1. Способ правки пыльных дисков: заявка на авт. свидетельство / Быков В. А., Поляков Б. Н., Соколовский О. П., Чертков Ю. А. (СССР) – № 1800756/25–27 от 21.06.72.

2. А.с. 4235412 СССР, М.кл. В 21d 1/02. Машина для правки изделий из листа / Быков В. А., Дыдыкин Ю. Н., Корякин К. В., Стрижов Ю. А., Чертков Ю. А. (СССР). № 1809 556 / 25–27; Заявл. 11.07.72; Опубл. 15.04.74. / Бюл. № 14. – 2 с.: ил.