Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет»

Л. К. Конышева, Ю. В. Слесарев

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Екатеринбург
РГППУ
2012

УДК 51(075.8)
ББК В1я73-1
К65

Конышева, Л. К.

К65 Математика: учебное пособие / Л. К. Конышева, Ю. В. Слесарев. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед.ун-та, 2012. 184 с.
ISBN 978-5-8050-0477-4

Рассмотрены основные математические структуры, а также некоторые вопросы метаматематики, даны основы аксиоматического метода построения математических теорий, введено понятие математической модели. Представлено несколько аксиоматических теорий и их интерпретации.

Пособие предназначено студентам специальности 020500 Теология.

УДК 51(075.8)
ББК В1я73-1

Рецензенты: кандидат педагогических наук, доцент Г. Т. Солдатова (ФГАОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»); заслуженный деятель науки и техники, доктор физико-математических наук, профессор П. С. Попель (ГОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0477-4

Оглавление

Введение

…сотворение мира Богом есть математическая необходимость и истина.

Св. Игнатий (Брянчанинов)

…математика – наука божественная.
Мы ищем то, что дано свыше.

В. Чубариков

Учебное пособие предназначено для студентов, получающих подготовку по специальности «Теология». Его содержание полностью отвечает требованиям ГОС 2002 специальности 020500 Теология.

Попытаемся ответить на вопрос: «Зачем теологу знать математику?». Или по-другому: «Каковы цели изучения данного курса?». Как сказал крупнейший ученый, известный английский астрофизик Стивен Хокинг, «любая формула, включенная в книгу, уменьшает число ее покупателей вдвое»[1]. Но с другой стороны, «в математических формулах и уравнениях отражены некоторые общие свойства реального мира. Одни и те же формулы повторяются в разных его областях»[2]. Может быть, именно поэтому человек, желающий овладеть научными знаниями, не должен бояться формул и уравнений, а значит, ему необходимо знать основы математики.

Сегодня уже ни у кого не вызывает сомнений, что математика является языком естественных наук. Наряду с этим происходит все более глубокое проникновение математики и в гуманитарные науки. Количественный анализ, математические модели и вычислительные алгоритмы широко используются во всех областях человеческого знания. Нельзя считать себя ученым, теологом, философом, не имея представления о современной математике.

Перечислим основные цели изучения курса:

1. *Овладеть языком современной науки*:

• получить представление об «устройстве» математики и об основных математических структурах: порядковых, алгебраических, топологических;

[1] Математика. Бог. Вселенная: Мудрые мысли/сост. И. С. Малаховский. Калининград: Янтарь: Сказ, 2005. С. 33.

[2] *Бондарев В. П.* Концепции современного естествознания [Электронный ресурс]// Электронная библиотека Социологического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. URL: http://www.gumer.info/bibliotek_Buks /Science/bond/index.php.

• сформировать понятие о математике как о языке;

• овладеть навыками использования основных терминов современной математики.

2. *Развить логическую составляющую мышления*:

• уточнить понятие о дедуктивном методе в науке на примере некоторых математических теорий;

• получить представление о математической логике (логике высказываний и логике предикатов), ее соотношении с формальной логикой;

• сформировать умение использовать в рассуждениях законы математической логики;

• получить навыки формулирования точных, ясных и последовательных суждений.

3. *Овладеть алгоритмами и методами решения задач*:

• сформировать понятие о математической модели, методах ее построения, ограничениях, интерпретации;

• понятие о вычислительном алгоритме;

• умение использовать математические модели для решения некоторых конкретных задач;

• сформировать навыки решения практически важных задач.

Пособие состоит из шести глав. Следует помнить, что математический текст – это единая система, в которой используются специфические символы. Читать пособие надо последовательно, по главам. Не разобравшись в материале какой-либо главы, не стоит переходить к изучению следующей.

В конце каждой главы помещен список вопросов. Если материал главы усвоен качественно, ответы на вопросы не должны вызвать затруднений. Если же трудности все-таки возникли, следует вернуться к нужному разделу, вновь внимательно прочитать текст и после этого попытаться ответить на вопрос еще раз.

Приведенный список обозначений поможет студентам лучше усвоить предлагаемый материал, а предметный указатель облегчит навигацию по пособию.

Работа выполнена по благословению владыки Викентия, архиепископа Екатеринбургского и Верхотурского (2010 г.)

Список обозначений

$A, B, C, \ldots, X$	точки, высказывания, логические формулы, множества
$x, y, p, q, h, v, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n$	переменные
$\overline{p}$	отрицание, дополнение, инверсия p, «не p»
$p \wedge q$	конъюнкция, логическое умножение, «p и q»
$p \vee q$	дизъюнкция, логическое сложение, «p или q»
$p \to q$	импликация, «если p, то q»
$p \leftrightarrow q$	эквиваленция, «p тогда и только тогда, когда q»
$B = \{0,1\}$	множество значений булевых переменных
$\{\mathcal{P}(U), \cap, \cup, ^{-}\}$	алгебра множеств на булеане $\mathcal{P}(U)$
U	универсальное множество
$\cap, \cup, ^{-}$	пересечение, объединение и дополнение множеств
$\{\mathcal{B}, \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1\}$	булева алгебра
$y = x_1 \oplus x_2$	кольцевая сумма
СДНФ	совершенная дизъюнктивная нормальная форма
$\in, \notin$	принадлежит, не принадлежит (элемент множеству)
$\varnothing$	пустое множество
$\mu_A(x)$	характеристическая функция множества (A)
$\subseteq, \not\subset$	включено, не включено
2^U, $\mathcal{P}(U)$	булеан множества U
B^n	множество n-мерных двоичных векторов
$P(x), P(x_1, x_2), \ldots, P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	одно-, дву-, …, n-местный предикаты
$X \times Y$	прямое или декартово произведение множеств X и Y
U^2	декартов квадрат множества U
U^n	n-я степень множества U
$\forall$	квантор всеобщности
$\exists$	квантор существования
Γ	бинарное отношение, график бинарного отношения
ρ	характеристическое свойство бинарного отношения, метрика пространства
$\mu(x_i, y_j), (x_i \in X, y_j \in Y)$	характеристическая функция бинарного отношения на множестве $X \times Y$
J	матрица инциденций, матрица бинарного отношения
$J_1 \cdot J_2$	произведение матриц J_1 и J_2
$\Gamma_1 \circ \Gamma_2$	композиция бинарных отношений Γ_1 и Γ_2

$\xrightarrow{def}$	«...по определению»
$E_1, E_2, \ldots, E_n$	классы эквивалентности
U/E	фактор-множество множества U
$\sup H$	точная верхняя грань множества H
$\inf H$	точная нижняя грань множества H
f	функциональное соответствие, отображение
$X \xrightarrow{f} Y$	отображение множества X на множество Y
$\Gamma, \cdot\Gamma^{-1}, \overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}^{-1}$	прямое, обратное, противоположное, противоположное обратному отношения
$*, \circ, \circ$	произвольные бинарные алгебраические операции
G, g	группа и элемент группы
e	нейтральный элемент групповой операции
$\infty, -\infty$	плюс и минус бесконечность
$\rho(x,a) < r, \rho(x,a) \le r$	открытый и замкнутый шары с центром в точке a и радиусом r
$\delta(x), \varepsilon(y)$	дельта и эпсилон окрестности точек x и y
$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$	последовательность точек
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	предел последовательности
$T = (X, \{\Sigma\})$	топологическое пространство (X – носитель топологии, Σ – открытое множество, $\{\Sigma\}$ – система открытых множеств, топология)
$\{V, K, +, \cdot\}$	линейное пространство над числовым полем K (V – множество-носитель, $(+)$ – бинарная операция, условно называемая сложением, $(\cdot)$ – операция, условно называемая умножением на число из поля K)
V	множество геометрических векторов
L	множество точек пространства
(V, L)	геометрическое трехмерное аффинное пространство
$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$	система базисных векторов
$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$	линейная комбинация базисных векторов
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
D	фрактальная размерность (размерность Хаусдорфа-Безиковича)

Примечание. Последовательность обозначений соответствует последовательности их появления в тексте пособия.

1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Язык математики

1.1.1. О понятии «язык»

Практически каждый человек владеет одним или несколькими языками, знает, для каких целей используется язык, чем язык отличается от других атрибутов человека. Но формулировка определения языка оказывается невероятно сложной задачей.

Вопрос о том, что такое язык, встал с особой остротой, когда потребовалась организация диалога человека с машиной (компьютером). При этом возникла необходимость создания *искусственных языков* – языков программирования, компьютерных, информационных языков и т. п. Искусственными языками считаются и специализированные языки науки, в частности формализованные языки математики и логики, возникшие задолго до появления вычислительных машин.

В замечательной книге В. В. Налимова[1] «Вероятностная модель языка» собрано более пятидесяти высказываний о языке[2]. Некоторые из этих высказываний можно рассматривать как определение языка. Приведем одно из них, наиболее близкое к понятию математического языка: «Язык – вся совокупность слов и словосочетаний, обычно используемая народом, нацией или расой с целью выразить или передать мысли; более широко – способность выражать мысли вербально»[3].

Однако любые языки, особенно искусственные, научные и специализированные, могут служить не только для «выражения мыслей», но и, нередко, как раз для их сокрытия. В настоящее время весьма серьезной проблемой можно считать продвижение лженауки и шарлатанства среди людей, плохо владеющих научным языком. В широко известной статье «Краткий определитель научного шарлатанства» ее автор А. Голод предупреждает: «Если в публикации встречаются слова: *аура, биополе, чакра, биоэнергетика, панацея, энерго-информационный, резонансно-волновой, психическая энергия, мыслеформа, телегония, волновая генетика, волновой геном, сверхчувственный, астральный,* – то можете быть уверены, что

[1] Василий Васильевич Налимов (1910–1997) – известный русский (советский) ученый, профессор МГУ.

[2] *Налимов В. В.* Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1979. С. 12–33.

[3] Там же. С. 17.

имеете дело с шарлатанской писаниной»[1]. Следует помнить также, что язык является самым мощным средством манипуляции человеческим сознанием. В упомянутой выше книге В. В. Налимова имеется следующее высказывание, принадлежащее А. Г. Спиркину[2]: «Язык – основное средство управления поведением людей»[3].

Математика – язык науки. Именно поэтому, чтобы не поддаться на манипуляции недобросовестных людей, чтобы уметь отличать научные факты от бессовестного шарлатанства, так важно овладеть языком математики.

Для любых письменных языков, как естественных, так и искусственных, основополагающими понятиями являются «*алфавит*», «*грамматика*» и «*семантика*». Алфавит есть набор символов, из которых строятся элементарные знаки – слова. Например, алфавит математического языка – это набор цифр, букв, скобок, знаков действий и т. п. Из слов образуется *словарь языка. Грамматика* языка – это совокупность правил, с помощью которых над словами строятся тексты. *Семантика* языка определяет смысл слов и текстов.

1.1.2. Формализм и конструктивизм в математике

В математике весьма часто используется термин «*исчисление*». Например, «дифференциальное исчисление», «интегральное исчисление», «векторное исчисление», «исчисление высказываний» и т. п. Уточним смысл этого термина.

Будем понимать под исчислением формальный аппарат, основанный на четко сформулированных правилах оперирования знаками определенного вида и позволяющий дать исчерпывающе точное описание некоторого класса задач, причем для наиболее простых подклассов этого класса дать также и алгоритмы решения[4].

В большинстве случаев последовательность построения исчисления следующая:

1. Определен *алфавит* – конечный или бесконечный набор символов.

---

[1] *Голод А.* Краткий определитель научного шарлатанства // Наука и жизнь. № 3. 2009. С. 50.

[2] Александр Григорьевич Спиркин (1918–2004) – русский (советский) философ, профессор, член-корреспондент АН СССР.

[3] *Налимов В. В.* Указ. соч. С. 31.

[4] *Гастев Ю. Л.* Исчисление [Электронный ресурс] // Большая советская энциклопедия. URL: http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/056/962.htm/.

2. Определена *грамматика языка* – набор правил, позволяющих соединять элементы алфавита, строя *выражения* и *формулы*, т. е. «слова» и «предложения» этого исчисления.

3. Некоторые правильно построенные «слова» и «предложения» объявлены *аксиомами* данного исчисления.

4. Зафиксированы *правила вывода*, с помощью которых получают новые правильные «слова» и «предложения» – *теоремы*.

Набор, состоящий из алфавита, правил образования аксиом и правил вывода образует *формальную систему*. Термины «исчисление», «формальная система», а также «формализм» и «формальная теория» часто используются как синонимы. Поскольку любая формальная теория включает в себя *систему аксиом*, нередко такие теории называют *формально-аксиоматическими* или просто *аксиоматическими теориями*.

Смысл, который вкладывается в символы формальной теории, т. е. семантика полученного текста, называется *интерпретацией формальной теории*.

На рубеже XIX – XX вв. формально-аксиоматические теории воспринимались как образец строгости, как эталон, к которому надо стремиться при построении любой математической теории. Однако вскоре выяснилось, что в рамках такой теории невозможно доказать ее непротиворечивость. Для доказательства непротиворечивости надо выйти за рамки этой теории, иными словами, расширить ее систему аксиом. Но внутри вновь полученной расширенной теории вновь возникает та же проблема доказательства ее непротиворечивости, а следовательно, систему аксиом вновь приходится расширять.

В настоящее время наряду с формально-аксиоматическими теориями широкое распространение имеет *конструктивная математика*[1]. В конструктивной математике объект считают существующим, если известен способ его построения – конструктивный процесс. Конструктивный процесс похож на процедуру, осуществляемую современным компьютером: компьютер ничего не доказывает, а просто вычисляет. Для конструктивной математики приходится строить особую логику, отличную от классической математической логики, которая используется при построении формаль-

---

[1] См. напр.: *Акимов О. Е.* Дискретная математика. Логика, группы, графы. М.: Лаб. базовых знаний, 2001. С. 317–376.

но-аксиоматических теорий. Например, в логике конструктивной математики не принимаются *закон исключения третьего*[1] и закон *двойного отрицания*[2].

1.1.3. Логико-математический язык

Перед тем как приступить к описанию языка математики, уточним смысл ряда терминов.

1. Знаки алфавита. Перед разработкой математической теории договариваются о специальных знаках, которые будут в ней использованы. Совокупность этих знаков называется алфавитом. В качестве знаков математического алфавита обычно используются:

- малые и большие буквы латинского и греческого алфавитов;
- арабские и римские цифры;
- всевозможные скобки;
- пробелы;
- знаки препинания: запятые, точки, точка с запятой, двоеточие, знак восклицания и др. (прил. 1).

В случае необходимости используются другие знаки, смысл которых заранее уточняется. Кроме математических символов всегда употребляются знаки разговорного языка, с помощью которых поясняются символические тексты.

2. Терм. Терм (от лат. *terminus* – выражение, слово, термин) есть общее название понятий «имя объекта» и «именная форма».

Поясним, что такое «имя объекта» и «именная форма», на примерах[3].

Пример 1

Знаки 1, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{2}$, e, $5-3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ есть *имена четырех различных объектов*: натурального числа 1, натурального числа 2, иррационального числа e (число e – основание натурального логарифма, $e \approx 2{,}718281828\ldots$) и рационального числа $\frac{2}{3}$.

[1] Одно из двух высказываний «А» или «не А» является истинным.

[2] Если ложно то, что «А» есть неверное высказывание, то «А» истинно.

[3] Примеры взяты из кн.: *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Введение в математическую логику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 120 с.

В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ – два разных имени объекта 1 (между именами поставлен знак равенства); $2=\frac{4}{2}=5-3$ – три различных имени объекта 2.

Пример 2

Комбинация знаков $\frac{e^x-1}{x}$ именем объекта не является, так как содержит знак переменной «x». Если подставить во все позиции, которые занимает x в этой комбинации знаков, имя подходящего объекта (числа), то получим имя объекта. Например, если $x=1$, то комбинация знаков $\frac{e^1-1}{1}=\frac{2{,}71828..-1}{1}=1{,}71828..$ есть имя иррационального числа – 1,71828…, если $x=-1$, то $\frac{e^{-1}-1}{-1}=1-\frac{1}{e}=0{,}63212...$ есть имя другого иррационального числа – 0,63212…, если $x=0$, то комбинация знаков $\frac{e^0-1}{0}$ не дает имени объекта, так как на нуль делить нельзя. Комбинация знаков $\frac{e^0-1}{0}$ является *бессмыслицей.*

Итак, именная форма – это комбинация знаков, содержащая символы одной или нескольких переменных, причем весьма существенно, что вместо знаков переменных можно подставлять имена объектов, получая либо имя объекта, либо вновь именную форму, либо бессмыслицу.

Пример 3

Подчеркнем, что комбинация знаков $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ есть *имя объекта* (единицы), несмотря на то, что она содержит знак переменной «x». Подставляя вместо x любое число, получим не имя объекта и не новую именную форму, а бессмыслицу. Например, $\lim\limits_{4\to 0}\frac{e^4-1}{4}$ – бессмыслица. Вместо переменной в данную комбинацию можно подставлять лишь символы других переменных. При этих подстановках получаем различные имена той же самой единицы. Например, $\lim\limits_{3y\to 0}\frac{e^{3y}-1}{3y}=\lim\limits_{\alpha+\beta\to 0}\frac{e^{\alpha+\beta}-1}{\alpha+\beta}=1$.

В некоторых учебниках математики (например, школьных) слово «терм» чаще всего заменяется на слово «выражение». Например, $2+\frac{3}{7}$ – числовое выражение, x^2+2x+1 – буквенное выражение.

3. **Формулы**. Формула (от лат. *formula* – форма, правило, предписание) есть комбинация термов, образующая утвердительное или отрицательное предложение. С помощью формул довольно сложные предложения могут быть записаны в компактной и удобной форме.

Примеры

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=1, \tag{1}$$

$$2-5=-3, \tag{2}$$

$$t \neq -2, \tag{3}$$

$$a^3+3a^2+3a+1=0, \tag{4}$$

$$x^2+2x+1<0, \tag{5}$$

$$x^2+y^2 \geq 0, \tag{6}$$

$$S_n=\frac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q}. \tag{7}$$

Формулы могут содержать одну, две, три и более переменных ((3) – (7)) либо не содержать ни одной переменной ((1), (2)). Формулы, не содержащие переменных, представляют собой *истинные* ($2-5=-3$) или *ложные* ($\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=1$) *высказывания.*

Для всех формул, содержащих переменные, необходимо указывать *множества допустимых значений* этих переменных, т. е. те множества, подстановка элементов которых вместо переменных обращает формулу в истинное или ложное высказывание, но при этом не возникает бессмыслицы. В примерах (3) – (7) вместо переменных можно подставлять действительные числа, т. е. множеством допустимых значений переменных во всех этих формулах служит множество R. Некоторые формулы при подстановке любых чисел из R становятся *истинными высказываниями* (например, $x^2+y^2 \geq 0$), другие – *ложными высказываниями* (например, $x^2+2x+1<0$). Некоторые формулы разбивают все множество допустимых значений на два непересекающихся подмножества: *множество истинности* и *множество ложности.*

Пример 1

Формула $t \neq -2$ становится истинным высказыванием при подстановке любых чисел, отличных от двойки, а подстановка двойки делает ее ложным высказыванием. Множество R разбивается на два непересекающихся подмножества: $\{-2\}$ – *множество ложности*, $R/\{-2\}$ [1] – *множество истинности.*

---

[1] Символ $R/\{-2\}$ обозначает *разность множеств* R и $\{-2\}$, т. е. множество всех действительных чисел без числа (-2).

Пример 2

Формула $a^3+3a^2+3a+1=0$ истинна при $a=-1$, поскольку данное равенство преобразуется по формуле сокращенного умножения в формулу $(a+1)^3=1$. *Множество истинности:* $\{-1\}$, *множество ложности*: $R/\{-1\}$.

Пример 3

Формула $S_n=\dfrac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q}$ есть формула *суммы геометрической прогрессии*:

$$S_n=a_0+a_0q+a_0q^2+\ldots+a_0q^n=\frac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q}.$$

Напомним, что a_0 называют начальным членом геометрической прогрессии, q – знаменателем прогрессии, $n+1$ – числом членов геометрической прогрессии. Формула истинна на множестве $R/\{1\}$. При подстановке единицы формула превращается в бессмыслицу.

При неограниченном возрастании n прогрессию называют *бесконечной геометрической прогрессией.* Сумма бесконечной геометрической прогрессии определяется формулой

$$S=a_0+a_0q+a_0q^2+\ldots+a_0q^n+\ldots=\frac{a_0}{1-q}.$$

Эта формула истинна только для тех действительных чисел q, для которых выполняется неравенство $-1<q<1$.

Из примеров видно, что формулы всегда содержат знаки «<», «≈», «=», «≠», «≥» и т. п., соединяющие два или более терма. В зависимости от того, какой именно знак входит в формулу, ее называют «строгим неравенством», «приближенным равенством», «равенством», «неравенством», «нестрогим неравенством» и пр.

4. Функциональные символы. Функциональные символы – это буквы, используемые для выражения функциональной зависимости переменных.

Пример 1

$f(x)$ – функциональный символ, показывающий, что *каждому* значению переменной x сопоставляется *определенное единственное* значение другой переменной; символом f обозначают *правило* (алгоритм), с помощью которого можно это значение найти.

Пример 2

$u(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ – функциональный символ, показывающий, что *каждому набору*

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ значений переменных x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ сопоставляется *определенное единственное* значение другой переменной; символом u обозначено правило (алгоритм), с помощью которого можно это значение найти.

Пример 3

$\delta(\frac{\varepsilon}{2})$ – функциональный символ, показывающий, что *каждому* значению переменной ε сопоставляется *определенное единственное* значение другой переменной; символом δ обозначают правило (алгоритм), с помощью которого можно это значение найти, поделив предварительно выбранное значение ε пополам.

Функциональные символы часто входят в формулы вида $y = f(x)$, $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, $h = \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ и т. п., в которых явно указывается имя зависимой переменной. Это имя называют *функцией.* Например, y есть функция от x, u – функция от $x_1, x_2, ..., x_n$, h – функция от $\frac{\varepsilon}{2}$.

Буквы, стоящие в скобках функционального символа, называют *аргументами*, или *независимыми переменными.* Число таких букв может быть любым: существуют функции от одного, двух и большего числа аргументов. Аргументам можно придавать *любые допустимые значения.* (Значение аргумента является *недопустимым*, если в результате вычислений получается бессмыслица, например, деление на нуль.)

Первая буква функционального символа указывает на существование некоторого правила или алгоритма, позволяющего найти значение функции для любых допустимых значений аргументов. Отметим, что при формально-аксиоматическом подходе достаточно доказать, что такое правило существует, не приводя его в явном виде. Конструктивная математика, напротив, предполагает, что если найдена последовательность шагов для вычисления значений зависимой переменной, то доказывать существование функциональной зависимости не требуется.

Подчеркнем, что *в формулах вида $y = f(x)$ множества значений функции y и аргумента x всегда являются числовыми множествами.* В математическом анализе используются термины «действительные функции действительного аргумента», «действительные функции натурального аргумента», «комплекснозначные функции комплексных аргументов» и т. п. В этих терминах заранее указано, какие из числовых множеств служат множествами допустимых значений аргумента и функции.

5. Высказывания и предикаты. Высказывание – это любое предложение, которое можно оценить с точки зрения его *истинности* или *ложности*. Например, рассмотренные выше формулы (1) и (2) являются ложным и истинным высказываниями. Понятие «высказывание» – основной объект изучения логики высказываний. Логика высказываний, в свою очередь, является одним из разделов математической логики и логической основой многих других разделов математики. Наряду с формулами математическая логика рассматривает высказывания любого содержания.

Пример 1

A: «Молекула воды имеет формулу H_2O» – истинное высказывание.

B: «Все лягушки красного цвета» – ложное высказывание.

C: «Где мой кошелек?» – предложение не является высказыванием, так как не может быть оценено с точки зрения истинности или ложности.

D: «Число x делится на 5» – предложение не является высказыванием, так как не может быть оценено с точки зрения истинности или ложности. Однако в отличие от предложения C предложение D можно превратить в высказывание одним из двух способов: 1) подставить вместо переменной какое-либо целое число; 2) связать переменную каким-либо квантором.

Например:

«Число 7 делится на 5» – ложное высказывание;

«Число 0 делится на 5» – истинное высказывание;

«*Все* целые числа делятся на 5» – ложное высказывание, использован квантор всеобщности;

«*Некоторые* целые числа делятся на 5» – истинное высказывание, использован квантор существования.

Пусть $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – предложение, содержащее переменные $x_1, x_2, ..., x_n$. Если при подстановке допустимых значений переменных или связывании их кванторами это предложение обращается в истинное или ложное высказывание, то $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *предикатом*. Число переменных в предикате называют *числом мест предиката*.

Пример 2

P: «Прямая l проходит через точку M». Предикат P может быть одноместным или двуместным:

а) l – произвольная прямая, точка M фиксирована; $P = P(l)$ – одноместный предикат, место переменной помечено символом l;

б) M – любая точка пространства, l – фиксированная прямая; $P = P(M)$ – одноместный предикат, место переменной помечено символом M;

в) l – произвольная прямая, M – любая точка пространства; $P = P(l, M)$ – двуместный предикат, места переменных помечены символами l и M.

Пример 3

«Умы *мыслителей* ($x_1, x_2, ..., x_n$) *того времени* (t) занимал вопрос о будущих судьбах *царства* (c)» – $P(x_1, x_2, ..., x_n, t, c)$, число мест предиката – $n+2$. Подчеркнем, что в данном предложении предикатные места обозначены словами «мыслители», «время», «царство». Эти слова являются *общими понятиями* и в математической логике соответствуют переменным. Действительно, слова «мыслители», «время», «царство» с точки зрения математики являются переменными, поскольку вместо них можно подставить конкретные имена, даты, названия царств. Например, «Умы Кости, Алексея и отца Георгия в 2009 году занимал вопрос о будущих судьбах царства минералов» – ложное высказывание. Можно связать эти переменные кванторами: «Умы *некоторых* ($\exists$) мыслителей *всех* ($\forall$) времен занимал вопрос о будущих судьбах *некоторых* ($\exists$) царств» – истинное высказывание или «Ум *любого* ($\forall$) из мыслителей *всех* ($\forall$) времен занимал вопрос о будущих судьбах *каждого* ($\forall$) царства» – ложное высказывание.

6. Предикатные символы. Предикатные символы – это буквы, используемые для обозначения предикатов: A, B, C – нульместные предикаты, или высказывания, $P(x)$ – одноместный предикат, $P(x_1, x_2)$ – двуместный предикат и т. д.

Сравним понятия «функция» и «предикат».

Пусть $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функциональный символ, а $P = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – предикатный символ. Аргументы функции и места предиката помечены в данном случае одними и теми же символами: $x_1, x_2, ..., x_n$. Однако в функциональный символ вместо переменных можно подставлять только *числа* из заранее оговоренных числовых множеств, а *на места* в предикате можно подставлять любые *имена*. Общее требование при любых подстановках: подстановка не должна приводить к возникновению бессмыслицы.

После подстановки чисел в функциональный символ получаем числовое выражение. Вычислив его значение, получаем *соответствующее числовое значение* функции.

После подстановки имен в предикатный символ получаем *истинное* или *ложное* высказывание. Таким образом, предикатный символ может принимать только два значения – «*истина*» или «*ложь*». В математической логике и других разделах математики приняты следующие обозначения *возможных значений предикатов*: «истина» – И, T (*true* – истина), 1; «ложь» – Л, F (*fals* – ложь), 0.

1.2. Величины и их классификация

Прежде чем говорить о понятии «величина», уточним смысл тесно связанного с ним понятия «измерение».

1.2.1. Измерения

В настоящее время класс измеряемых характеристик чрезвычайно расширился. Измеряют радиус Вселенной и радиус атомного ядра, с помощью разнообразных тестов измеряют уровень интеллекта и качества личности человека, экономическими методами измеряют стоимость футболистов, наемных работников и пр. Пользуясь результатами измерений, необходимо помнить, что эталон характеристики, т. е. единица измерения, выбирается самим исследователем произвольно. Поэтому, говоря, например, об измерении каких-либо качеств человека, всегда следует помнить, что полученный результат не является объективным, а зависит от вкусов и приоритетов измеряющего.

Оставив в стороне новейшие и часто спорные методики, обратимся к обобщенной классической модели измерения.

Рассмотрим множество[1] объектов, обладающих каким-либо определенным свойством. Например:

- множество тел, существующих в пространстве, обладает свойством *протяженности*;
- множество тяжелых тел обладает свойством, которое называют *массой*;
- если рассматривается множество каких-то процессов, то его элементы (процессы) характеризуются *длительностью* и т. п.

Будем говорить, что элементы рассматриваемого множества *однородны по определенной характеристике.*

Именно такие однородные характеристики объектов и подвергаются измерению. Для измерения необходим эталонный или единичный носитель измеряемой характеристики. В результате процесса измерения мы получаем ответ на вопрос: «*Во сколько раз* интересующая нас характеристика из-

[1] «Множество» – неопределяемое математическое понятие. Его синонимы – «совокупность», «собрание», «ансамбль» и пр.

меряемого объекта больше или меньше этой же характеристики эталона?» или, по-другому: «*Каково отношение* характеристики измеряемого объекта к этой же характеристике эталона?»

1.2.2. Числовая ось. Действительные числа

Какие бы характеристики объектов мы ни измеряли, процесс измерения всегда один и тот же (прил. 2). Однотипен и результат измерения – это конечная или бесконечная сумма вида $n+\frac{n_1}{k}+\frac{n_2}{k^2}+ \ \ldots \ +\frac{n_m}{k^m}+ \ \ldots$, которая в случае $k=10$ превращается в конечную или бесконечную десятичную дробь $n, n_1 n_2 \ \ldots \ n_m \ldots$.

Число, которое получают в результате измерения, называют действительным числом. Приведем одно из определений действительного числа.

Определение 1.1. Число, которое может быть записано десятичной дробью, называют ***действительным числом***.

Множество всех действительных чисел обозначают как R.

Геометрическим образом множества действительных чисел является *числовая прямая*, или *числовая ось* (рис. 1.1).

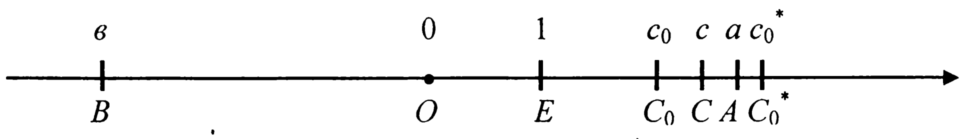


Рис. 1.1. Числовая ось

Последовательность построения числовой оси:

1. Построим прямую.
2. Выберем на прямой точку, которой поставим в соответствие число 0. Прямая разбита на два луча, имеющих противоположные направления.
3. Выберем луч ***положительного направления***, обозначим его стрелкой. Второй луч становится лучом ***отрицательного направления***.
4. На луче положительного направления от точки 0 отложим отрезок единичной длины. Один конец этого отрезка соответствует числу 0, второй – числу 1.

Числовая ось построена.

Справедливы утверждения:

Утверждение 1. Каждой точке оси соответствует определенное *действительное число.* Точки на луче положительного направления будут соответствовать числам со знаком «+» (положительным числам), на луче отрицательного направления – числам со знаком «–» (отрицательным числам). Например, точке A соответствует число a, равное длине отрезка OA, взятой со знаком «+», точке B – число b, равное длине отрезка OB, взятой со знаком «–». Точке O соответствует число 0.

Примечание 1. Из *утверждения 1* очевидно, что если точка C^* лежит на числовой оси правее точки C и при этом точке C^* соответствует число c^*, а точке C – число c, то выполняются соотношения:

1) $c^* > c$;

2) отрезку $OC + OC^*$ соответствует сумма чисел $c + c^*$;

3) отрезку $CC^* = OC^* - OC$ соответствует разность чисел $c^* - c$.

Примечание 2. *Утверждение 1* можно переформулировать в условное предложение, или *импликацию*[1]: «Если точка C есть точка числовой оси, то ей соответствует определенное действительное число». В этом суждении предложение «Точка C есть точка числовой оси» – условие, а предложение «Точке C соответствует определенное действительное число» – заключение. Из истинности прямой импликации (*утверждения 1*) отнюдь не следует истинность *обратной импликации*: «Если c есть действительное число, то ему соответствует определенная точка числовой оси». Обратная импликация должна быть рассмотрена столь же детально, как и прямая.

Утверждение 2. Каждому действительному числу соответствует определенная *точка* оси.

В самом деле, любое действительное число можно представить десятичной дробью, конечной или бесконечной, со знаком «+» или «–». Пусть имеем положительное число $n, n_1 n_2 \ldots n_m \ldots$. Чтобы найти на оси точку C, которая ему соответствует, будем строить *стягивающуюся последовательность отрезков*, т. е. последовательность, в которой каждый следующий отрезок вложен в предыдущий, причем все отрезки содержат искомую точку C. Для этого выполним последовательность действий:

[1] Импликация – это условное суждение вида: «Из A следует B». Если данная импликация прямая, то импликация «Из B следует A» является обратной. Различные виды суждений и, в частности, импликации будут подробно рассмотрены в главе «Элементы математической логики».

1. От точки O отложим в положительном направлении $n+1$ единичных отрезков. Получим точки C_0 и C_0^*, причем $OC_0 = n$ и $OC_0^* = n+1$.

Имеем: $C \in C_0C_0^*$[1], длина отрезка $C_0C_0^* = (n+1) - n = 1$.

2. Разделим единичный отрезок на десять частей и от точки C_0 в положительном направлении отложим $n_1 + 1$ десятых долей единичного отрезка. Получим точки C_1 и C_1^*, причем $OC_1 = n,n_1$ и $OC_1^* = n,(n_1+1)$.

Имеем: $C \in C_1C_1^*$, длина отрезка $C_1C_1^* = n,(n_1+1) - n,n_1 = 0{,}1$.

3. Разделим десятую долю единичного отрезка на десять частей и от точки C_1 в положительном направлении отложим n_2+1 сотых долей единичного отрезка. Получим точки C_2 и C_2^*, причем $OC_2 = n,n_1n_2$ и $OC_2^* = n,n_1(n_2+1)$.

Имеем: $C \in C_2C_2^*$, длина отрезка $C_2C_2^* = n,n_1(n_2+1) - n,n_1n_2 = 0{,}01$.

4. Будем продолжать аналогичные действия до тех пор, пока не исчерпаем все отличные от 0 знаки десятичной дроби.

Если дробь конечна и содержит, скажем, m знаков после запятой – $n,n_1n_2 \ldots n_m$, то выполнив шаг номер m и отложив от точки C_{m-1} ровно n_m нужных долей единичного отрезка, мы попадем в искомую точку C. Если же десятичная дробь бесконечна, то дойти до нужной точки можно лишь мысленно.

С помощью указанной выше процедуры мы получаем:

1) стягивающуюся последовательность отрезков;
2) последовательности действительных чисел;
3) последовательности точек.

1. *Стягивающаяся последовательность отрезков:*

$$C_0C_0^* \geq C_1C_1^* \geq C_2C_2^* \geq \ldots \; .$$

Каждый отрезок содержит искомую точку C, а длины их монотонно уменьшаются, стремясь к 0. Точка C есть предел такой последовательности отрезков: $C = \lim\limits_{m\to\infty} C_mC_m^*$.

2. *Последовательности действительных чисел:*

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m,\ \ldots\ ; \qquad n, \quad n,n_1 \quad n,n_1n_2, \quad \ldots,\ n,n_1n_2 \ \ldots\ n_m,\ \ldots$$

$$c_0^*,\ c_1^*,\ c_2^*,\ \ldots,\ c_m^*,\ \ldots\ ; \qquad n+1,\ n,(n_1+1),\ n,n_1(n_2+1),\ \ldots,\ n,n_1n_2\ \ldots\ (n_m+1),\ \ldots$$

---

[1] Знак «$\in$» следует читать «принадлежит»; предложение «$C \in C_0C_0^*$» – «точка C принадлежит отрезку $C_0C_0^*$».

Число c разделяет эти последовательности чисел, т. е. $c_m \le c < c_m^*$.

Особый случай – когда десятичная дробь $n,n_1n_2 \dots n_m \dots$, которую мы ищем на числовой оси, есть периодическая дробь с периодом 9: $n,n_1n_2 \dots n_m(9)$. Такая дробь – это лишь одна из форм записи конечной десятичной дроби $n,n_1n_2 \ \dots \ n_m+1$. Поясним это утверждение примерами.

Пример 1

Покажем, что 0,9999...=1.

Действительно, $0{,}9999 = 9\cdot(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ \dots) = \frac{9}{10}\cdot(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ \dots)$.

Сумма $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ \dots$ есть сумма бесконечной геометрической прогрессии, начальный член которой $a_0=1$ и знаменатель $q=\frac{1}{10}$. Используя формулу суммы геометрической прогрессии $\left(S=\frac{a_0}{1-q}\right)$, получаем:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ \dots\ = \frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}.$$

Таким образом, имеем: $0{,}9999=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}=1$.

Пример 2

3,45699999 ... = 3,457.

В самом деле, $3{,}4569999\dots = 3{,}456+9\cdot(\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}+\frac{1}{1000000}+\dots) =$

$$=3{,}456+\frac{9}{10000}\cdot(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ \dots) = 3{,}456+\frac{9}{10000}\cdot\frac{10}{9} = 3{,}456+\frac{1}{1000} = 3{,}456+0{,}001=3{,}457.$$

Лишь для этого особого случая неравенство $c_m \le c < c_m^*$ должно быть заменено на неравенство $c_m < c \le c_m^*$. Чтобы исключить такую замену, договоримся записывать числа $n,n_1n_2 \dots n_m(9)$ в виде конечной десятичной дроби $n,n_1n_2 \dots (n_m+1)$. Выполняя эту договоренность, мы исключим особый случай, и неравенство $c_m \le c < c_m^*$ окажется справедливым для любых действительных чисел.

3. *Последовательности точек:*

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \dots\ ,\ C_m,\ \dots$$
$$C_0^*,\ C_1^*,\ C_2^*,\ \ \ \ ,\ C_m^*,\ \dots$$

Точки последовательности C_0, C_1, C_2, ... C_m, ... «движутся» вправо, неограниченно приближаясь к точке C. В этом «движении» одна из точек может совпасть с точкой C, что будет означать конец процедуры, но ни одна из точек последовательности не может «перейти» точку C и оказаться справа от нее.

Точка C ограничивает последовательность $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$ справа, являясь *точной верхней гранью* этой последовательности. Если десятичная дробь $n,n_1n_2 \dots n_m$, которую мы ищем на числовой оси, конечна, то конечной будет и последовательность точек $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$. Точная верхняя грань C этой последовательности совпадет с точкой C_m.

Точки второй последовательности – $C_0^{\bullet}, C_1^{\bullet}, C_2^{\bullet}, \dots, C_m^{\bullet}, \dots$ – «движутся» влево, неограниченно приближаясь к точке C. Но все эти точки лежат правее, чем C (особый случай периодической дроби $n,n_1n_2 \dots n_m(9)$ исключен).

Точка C ограничивает последовательность $C_0^{\bullet}, C_1^{\bullet}, C_2^{\bullet}, \dots, C_m^{\bullet}, \dots$ слева, являясь ее ***точной нижней гранью.***

Все действительные числа делятся на два класса: рациональные и иррациональные. Дадим определения обоих классов.

Определение 1.2. ***Рациональное число*** – это действительное число, которое может быть записано конечной десятичной дробью или бесконечной периодической десятичной дробью. ***Иррациональное число*** – это действительное число, которое соответствует бесконечной непериодической десятичной дроби.

Рациональное число есть результат измерения отрезка, соизмеримого с единичным отрезком, иррациональное число – длина отрезка, несоизмеримого с единичным отрезком.

Справедливо *утверждение*:

Любое рациональное число можно записать обыкновенной дробью.

Доказывать данное утверждение не будем, а проиллюстрируем его несколькими примерами.

Пример 1

3,649 – конечная десятичная дробь. Представим ее в виде обыкновенной дроби:

$$3{,}649 = 3 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{9}{1000} = 3 + \frac{600}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{9}{1000} = 3\frac{649}{1000}.$$

Пример 2

3, 649649649….=3,(649) бесконечная периодическая дробь, период (649) начинается сразу после запятой.

$$3{,}\,649649649\ldots = 3 + \frac{649}{1000} + \frac{649}{1000^2} + \frac{649}{1000^3} + \ \ldots\ = 3 + \frac{649}{1000}\cdot\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \ldots\right).$$

Сумма $1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} +\ \ldots$ есть геометрическая прогрессия. Начальный член $a_0 = 1$, знаменатель $q = \frac{1}{1000}$.

Используем формулу суммы геометрической прогрессии $\left(S = \frac{a_0}{1-q}\right)$, получаем:

$$1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} +\ \ldots\ = \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1000}{999}.$$

Окончательно имеем:

$$3{,}(649) = 3 + \frac{649}{1000}\cdot\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \ldots\right) = 3 + \frac{649}{1000}\cdot\frac{1000}{999} = 3\frac{649}{999}.$$

Пример 3

3,64969696… = 3,64(96) – бесконечная периодическая дробь, после запятой имеется допериодическая часть.

$$3{,}64(96) = 3 + \frac{64}{100} + \frac{96}{10000} + \frac{96}{10000\cdot 100} + \frac{96}{10000\cdot 100^2} +\ \ldots =$$

$$= 3 + \frac{64}{100} + \frac{96}{10000}\cdot\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} +\ \ldots\ \right) = 3 + \frac{64}{100} + \frac{96}{10000}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} =$$

$$= 3 + \frac{64}{100} + \frac{96}{9900} = = 3 + \frac{64}{100} + \frac{96}{9900} = 3 + \frac{64\cdot 99 + 96}{9900} = 3\frac{6432}{9900} = 3\frac{536}{825}.$$

Как видно из примеров, если в процессе десятичного измерения получилась конечная или периодическая дробь, то измеряемый отрезок соизмерим с эталонным отрезком. Если в результате получена периодическая дробь, это говорит о том, что единичный отрезок был разделен на доли неудачно. Так, если бы в примере 2 эталонный отрезок был разбит на 999 долей, то после того как он был отложен три раза, в оставшейся части поместились бы ровно 649 таких долей. В примере 3 единичный отрезок надо было разбить на 825 долей, и тогда процесс измерения окончился бы на втором шаге.

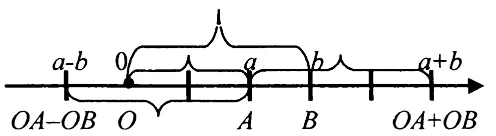


Рис. 1.2. Сложение и вычитание отрезков числовой оси

Из сказанного выше очевидно, что между действительными числами и точками числовой оси можно установить *взаимно однозначное соответствие*: каждой точке соответствует определенное число, а каждому числу – единственная точка. При этом сохраняется порядок во множестве точек и множестве чисел: для точек числовой оси слова «правее», «левее» соответствуют словам «больше», «меньше» для действительных чисел[1]. Операции сложения и вычитания чисел соответствуют сложению и вычитанию отрезков числовой оси. Если точке A соответствует число a и точке B – число b, то сумме отрезков OA и OB соответствует число $a+b$, а разности отрезков – разность чисел $a-b$ (рис. 1.2).

Числовая ось и множество действительных чисел R в некотором смысле неразличимы. Можно считать, что числовая ось есть геометрическая модель множества R, а можно, напротив, принять, что R – аналитическое описание точек числовой оси. Поэтому в математических текстах числа часто называют точками, а числовые неравенства – интервалами, отрезками или промежутками[2]. При этом используются термины и обозначения, представленные в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Обозначения и названия числовых промежутков

Геометрическое изображение	Числовое неравенство	Числовой промежуток	Термин
$\longrightarrow \quad \longleftarrow$	$x<b, \quad x>a$	$(-\infty,b)$, (a,∞)	Открытый луч
$\longrightarrow\!\bullet \quad \bullet\!\longrightarrow$	$x\le b, \quad x\ge a$	$(-\infty,b]$, $[a,\infty)$	Луч
$\longleftrightarrow$	$a<x<b$	(a,b)	Интервал
$\longleftarrow\!\bullet \quad \bullet\!\longrightarrow$	$a<x\le b$, $a\le x<b$	$(a,b]$, $[a,b)$	Полуинтервал
$\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet$	$a\le x\le b$	$[a,b]$	Отрезок

Примечание. a,b,x – любые действительные числа, причем $a\le b$.

---

[1] Если числовая ось расположена вертикально, то порядок точек на ней определяется словами «выше», «ниже». Если ось имеет произвольное направление, то используются слова «перед точкой», «за точкой».

[2] Все числовые промежутки можно называть *подмножествами* множества R. Подмножество – это совокупность элементов множества, включающая в себя часть элементов или все элементы или ни один из элементов (пустое подмножество). Подробнее о множествах и подмножествах см. в гл. «Элементы теории множеств».

1.2.3. Величины

Под скалярной величиной понимают характеристику свойства объекта, которую можно измерить[1].

I. Положительные скалярные величины

Понятие *положительной скалярной величины* является обобщением понятий «длина», «площадь», «объем», «масса» и т. п. Свойства положительных скалярных величин были отчетливо сформулированы уже в «Началах» Евклида (III в. до н. э.).

Вернемся к рассмотрению множества, элементы которого однородны по некоторой характеристике, т. е. являются носителями какой-либо скалярной величины (например, каждый элемент имеет определенную длину). Пусть a, b и c – элементы этого множества. Их можно сравнивать ($a<b$, $a>b$ или $a=b$), складывать ($a+b=c$) и умножать на натуральное число ($\underbrace{a+a+...+a}_{n \text{ слагаемых}}=n\cdot a$). Операции сравнения, сложения и умножения обладают свойствами, которые составляют *систему аксиом положительных скалярных величин* (табл. 1.2.)

Теперь запишем строгое определение системы положительных скалярных величин.

Определение 1.3. ***Системой положительных скалярных величин*** называют множество, на котором заданы отношение порядка (<), бинарная операция[2] (+) и операция умножения на натуральное число, удовлетворяющие аксиомам 1 – 10 (см. табл. 1.2).

Таблица 1.2

Система аксиом положительных скалярных величин

№ п/п	Тип аксиом	Название аксиомы	Формулировка и запись аксиомы
1	2	3	4
1	Аксиомы порядка	Линейность отношения порядка	Для любых a,b имеет место одно и только одно из трех соотношений: $a<b$, $a>b$ или $a=b$

[1] *Колмогоров А. Н.* Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988. С. 112–113.

[2] Бинарной операцией называют алгебраическую операцию, сопоставляющую каждой паре элементов множества определенный элемент этого же множества (результат операции).

Окончание табл. 1.2

1	2	3	4
2		Транзитивность отношения порядка	Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$
3	Аксиомы сложения	Единственность суммы	Для любых a,b существует единственный элемент c, равный их сумме: $a+b=c$
4		Коммутативность сложения	$a+b=b+a$
5		Ассоциативность сложения	$a+(b+c)=(a+b)+c$
6	Связь сложения с отношением порядка	Монотонность сложения	$a+b>a$
7		Возможность вычитания	Если $a>b$, то существует единственный элемент c, для которого верно равенство: $b+c=a$
8	Аксиомы умножения на натуральное число	Возможность деления на натуральное число	Для любого элемента a и любого натурального числа n найдется такой элемент b, что $n\cdot b=a$
9		Аксиома Архимеда	Для любых элементов a,b найдется натуральное число n такое, что $a<n\cdot b$
10	Аксиома непрерывности	Аксиома непрерывности	Пусть $[c_0,c_0^*]$, $[c_1,c_1^*]$, $[c_2,c_2^*]$, ... , $[c_m,c_m^*]$, ... – стягивающаяся последовательность отрезков элементов множества. Существует единственный элемент c, который больше или равен любому из элементов c_m и меньше всех c_m^* $(m=0,1,2,...)$

Следует очень внимательно прочесть это определение и запомнить его. Определения такого типа называют *аксиоматическими определениями*. Большинство определений в математике являются именно аксиоматическими. В аксиоматическом определении нет привязок к каким-либо реальным объектам. Любая система, состоящая из множества, отношения и бинарной операции над его элементами и операции умножения элемента множества на натуральное число, может быть названа системой положительных скалярных величин, если она удовлетворяет десяти указанным аксиомам.

Поскольку множество положительных действительных чисел R_+ удовлетворяет всем требованиям определения системы положительных скалярных величин, то R_+ есть система положительных скалярных величин.

II. Скалярные величины

Отрезки на лучах числовой оси могут иметь противоположное направление (см. рис. 1.2). Противоположно направленными могут оказаться, например, скорости. Стрела времени может быть направлена как в будущее, так и в прошлое. Для того чтобы указать, что однородные величины могут быть противонаправленными, используют знак «+» или «–».

Определение системы всех скалярных величин повторяет определение системы положительных скалярных величин, но система аксиом (см. табл. 1.2) выглядит несколько иначе и отражает наличие отрицательных скалярных величин и нуля. Аксиомы 1 – 5, 8, 10 (см. табл. 1.2) остаются неизменными, а аксиомы 6, 7 и 9 принимают следующие формулировки и названия:

6. Для любого элемента a справедливо равенство $0+a=a$ (существование нуля).

7. Для любого элемента a найдется элемент $-a$, такой, что $a+(-a)=0$ (существование противоположного элемента).

9. Для любого элемента a и любого натурального числа n найдется такой элемент b, что $|a| \le n \cdot |b|$ (аксиома Архимеда)[1].

Множество всех действительных чисел R с отношением порядка (<, >, =), операциями сложения и умножения на целое число является системой скалярных величин. В дальнейшем любую систему скалярных величин будем рассматривать как подмножество множества R.

---

[1] $|a|$ и $|b|$ – модули величин a и b. Определение модуля величины c: $|c| = \begin{cases} c, & если \quad c \ge 0, \\ -c, & если \quad c < 0. \end{cases}$

III. Значение величины. Постоянные и переменные величины

Любой математический текст состоит из предложений, а предложения – из обычных слов или символов (символьные предложения, например, $2x=5$, $3-\frac{t}{5}\le 4$). Символьные предложения, как и обычные, имеют сказуемое, подлежащее и дополнение. Символы, выполняющие роль подлежащего и дополнения, называют *термами.* В приведенных выше примерах символьных предложений символы 2, x, $2x$, 5, 3, t, $\frac{t}{5}$, $-\frac{t}{5}$, $3-\frac{t}{5}$, 4 являются термами. Одни термы представляют собой числа, другие – буквы, третьи – комбинацию чисел, букв и математических знаков.

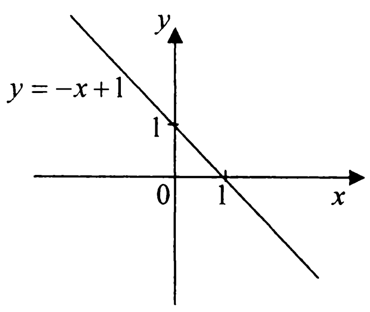
Числа всегда обозначают постоянные величины. Буквы могут обозначать как постоянные, так и переменные величины. Для обозначения постоянных величин чаще всего используют начальные буквы латинского алфавита: a, b, c, d, e, для переменных величин – конечные: x, y, z, t, u, v.

Примечание. В терминах «постоянная величина», «переменная величина» слово «величина» чаще всего опускают, а говорят просто «постоянная», «переменная».

Если в математическом тексте речь идет о скалярных величинах, или, что то же самое, о действительных числах, то *букву следует представлять как место, на которое можно подставить число*, или, по-другому, *значением буквы является число.*

Если буква обозначает постоянную величину, то в каждой конкретной задаче вместо этой буквы пишут определенное число. Если же буква обозначает переменную величину, то вместо нее может появляться любое число. При этом некоторые значения переменной делают математическое предложение, в которое она входит, истинным, другие – ложным.

Пример 1



$y=ax+b$ – математическое предложение, представляющее собой равенство, имеющее смысл уравнения прямой на плоскости. В этом равенстве есть две постоянные величины, обозначенные буквами a и b, и две переменные, обозначенные x и y. Если речь идет о какой-то конкретной прямой, то вместо a и b появляются конкретные числа, но переменные x и y сохраняются. Так, для прямой, изображенной на рисунке, $a=-1$, $b=1$ и равенство имеет вид $y=-x+1$. Но если в это равенство вместо переменных x и y подставить числа, равенство перестанет быть уравнением прямой на плоскости, и обратится в числовое равенство, истинное или ложное. Например, $2=-(-1)+1$ – истинное равенство, $2=-1+1$ – ложное равенство.

Пример 2

Пусть X – подмножество множества Y, а Y – подмножество множества R. Символически это предложение записывают так: $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq R$[1]. В этих предложениях символ R играет роль постоянной, символы же X и Y – роль переменных. Вместо этих символов могут быть подставлены любые числовые промежутки. Если значением буквы является не число, а множество, то используют заглавную латинскую букву.

IV. Зависимые и независимые скалярные величины

Между величинами может существовать какая-либо связь или зависимость. Ее записывают в виде равенства, неравенства, совокупности равенств или неравенств, системы равенств или неравенств и пр. Связь может иметь вероятностный характер, когда ее наличие или отсутствие оценивается как вероятный, но не достоверный факт.

Пример 1

Рассмотрим уравнение $2x-3y+4z=5$. Это математическое предложение устанавливает связь между тремя переменными: x, y и z. Такое уравнение можно назвать *уравнением связи*. Поскольку переменных три, а уравнение связи одно, две переменные являются *свободными*, а третья – *связанной*. Свободные переменные могут принимать любые значения. Но если вместо свободных переменных подставлены какие-то определенные числа, то значение связанной переменной определяется однозначно из полученного уравнения. Например, пусть x и y – свободные переменные. Выберем для них значения: $x=2$, $y=1$. Равенство принимает вид $4-3+4z=5$. Следовательно, $z=1$. При всех других значениях z равенство становится ложным: $4-3+4\cdot 2=5$ – ложное равенство, $4-3+4\cdot(-1)=5$ – ложное равенство и т. д.

В рассмотренном случае в качестве свободных переменных взяты x и y. Можно было бы взять x и z или z и y. Но в любом случае свободных переменных может быть только две: общее число переменных ($n=3$) минус число уравнений связи ($m=1$).

[1] Знак «$\subseteq$» – знак подмножества. Предложение «$X \subseteq R$» может означать: «Множество X содержит все действительные числа» или «Множество X содержит некоторые действительные числа», или «Множество X – пустое множество».

Пример 2

Рассмотрим равенство $y = \sin x$. Как известно из школьного курса, такое равенство определяет тригонометрическую функцию синус. Рассмотрим его как уравнение связи, определяющее функциональную связь между двумя переменными – x и y. Одна из них является свободной, другая – связанной. Свободную переменную называют *аргументом*, связанную – *функцией*. Если в уравнении связи использованы буквы x и y, аргумент чаще всего обозначают буквой x. Аргумент x в функции синус может быть любым действительным числом: $x \in R$; функция синус принимает свои значения на отрезке $[-1, \ \ 1]$, т. е. $y \in [-1, \ \ 1]$.

Очень часто в математических задачах рассматриваются именно зависимые переменные, часть из которых является свободными, остальные – связанными. Уравнения связи в *общем виде* могут быть записаны следующим образом: $F(x, y, z, t, u, v, ...) = 0$ – уравнение, связывающее переменные x, y, z, t, u, v, ...; $x = x(t)$ – формула для вычисления значений зависимой переменной x по известным значениям свободной переменной t, $y = f(x_1, \ x_2, ..., \ x_n)$ – формула для вычисления значений зависимой переменной y по известным значениям свободных переменных x_1, x_2, ..., x_n.

V. Векторные величины

Уже при рассмотрении числовой оси и множества действительных чисел R мы видели, что величина может иметь два противоположных направления: положительное и отрицательное. На плоскости же направлений бесконечно много. Чтобы задать направление на плоскости, необходимо задать две независимые друг от друга величины, определив систему координат на плоскости. Наиболее часто используются декартова прямоугольная система координат и полярная система координат. На рис. 1.3 показано, как вектор $\overrightarrow{AB}$ на плоскости заменяется парой чисел – его декартовых (рис. 1.3, *а*) или полярных (рис. 1.3, *б*) координат.

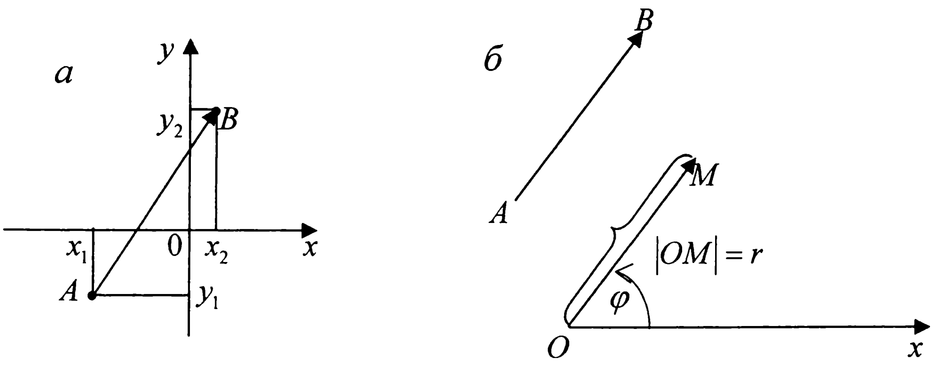


Рис. 1.3. Вектор $\overrightarrow{AB}$:

а – в декартовой системе координат: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;

б – в полярной системе координат: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM} = (r, \varphi)$

Вектор, который определяется парой величин (чисел), называют *двумерным вектором*.

Если речь идет не о плоскости, а о трехмерном пространстве, то каждый вектор в нем представлен тройкой независимых величин (такие векторы называют трехмерными векторами). В физике, а также во многих других науках используются векторы большей размерности – четырех-, пяти-, ..., n-мерные.

Более детально векторы будут рассмотрены далее[1]. Здесь лишь подчеркнем, что последовательность из n независимых скалярных величин (действительных чисел) называют n-мерным вектором, а множество всех таких векторов – n-мерным векторным пространством.

1.2.4. Время как величина и как параметр

О том, что такое время, люди размышляют с незапамятных времен. Так Аристотель в 4-й книге «Физики» обсуждает ту странность времени, что прошлое уже прошло, будущее не наступило, а настоящее не имеет длительности. «Что же тогда остается от времени?» – спрашивает философ[2].

Загадка времени до сих пор не решена. Выдвигаются многочисленные гипотезы о природе и структуре времени. При МГУ сегодня функционирует Институт исследований природы времени.

Не вдаваясь в притягательную таинственность времени, будем рассматривать его в двух аспектах: как величину (обозначаемую обычно символом t) и как параметр, связывающий пространственные координаты.

До сих пор ведутся споры, какой величиной является время: скалярной или векторной. В классической физике время – всегда скалярная величина. Как скалярная величина время не имеет каких-либо принципиальных отличий от других скалярных величин. Ось времени может рассматриваться как обычная числовая ось. Остановимся более подробно на времени как параметре, связывающем пространственные координаты движущегося тела.

---

[1] См. тему «Пространства».

[2] *Чернин А. Д.* Физика времени. М.: Наука, 1987. С. 217.

Пусть некоторое тело движется по известной траектории в пространстве (рис. 1.4). В каждый момент времени t оно находится в определенной точке этого пространства. Введена прямоугольная декартова система координат, имеющая оси: $0x$, $0y$ и $0z$. Каждой из точек траектории, а следовательно, каждому моменту времени (t), соответствует радиус-вектор ($\vec{r}$)[1]:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

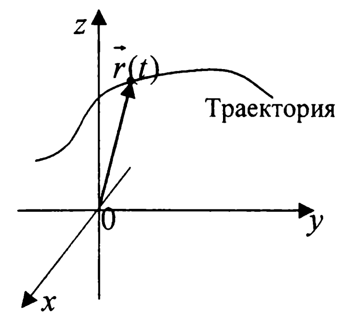


Рис. 1.4. Радиус-вектор движущейся точки

Таким образом, для каждой точки траектории имеем:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$$

Система равенств содержит три уравнения связи и четыре переменные: x, y, z и t. Следовательно, одна из этих переменных свободная и три связанных. В качестве свободной переменной всегда выбирают время – t. Тогда для каждого момента можно вычислить пространственные координаты x, y и z. Таким образом, данная система равенств есть запись *закона движения тела.*

Время (t) в системах такого типа называют параметром, систему уравнений связи – параметрическим уравнением.

Пример

Известно, что снаряд, выпущенный из орудия, движется по параболической траектории, которую можно записать следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t + x_0; \\ y = y_0; \\ z = (gt^2/2) + v_{0z} \cdot t + z_0. \end{cases}$$

[1] Радиус-вектор точки $A(x, y, z)$ – это вектор $\vec{r}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке A. Координаты вектора совпадают с координатами точки: $\vec{r} = (x, y, z)$.

Вопросы и задания для самопроверки

1. В результате измерения отрезка AB получены следующие результаты: а) $AB = 0{,}673$ м; б) $AB = \dfrac{28}{35}$ см; в) $AB = 5{,}0(28)$ дм. Опишите процесс измерения в каждом из этих случаев.
2. Дайте определение соизмеримых и несоизмеримых отрезков.
3. На какой вопрос отвечает результат процесса измерения?
4. Запишите общий алгоритм процесса измерения.
5. Запишите алгоритм построения числовой оси.
6. Найдите на числовой оси числа: 3; –2,5; $\dfrac{6}{7}$; $-\sqrt{3}$. В каждом случае запишите последовательности чисел, для которых данное число является точной нижней и точной верхней гранью.
7. Дайте определения а) множества действительных чисел; б) множества рациональных чисел; в) множества иррациональных чисел.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Логика формальная и логика математическая

Логика как наука возникла почти за пять столетий до Рождества Христова, т. е примерно два с половиной тысячелетия назад, а первые труды по *логике математической* появились чуть более полутора столетий назад.

Та часть логики, которая послужила основанием для математической логики, называется *формальной логикой*. Формальная логика определяется как наука о мышлении[1]. Ее предмет – исследование умозаключений и доказательств с точки зрения их формы.

Как самостоятельная наука формальная логика начала существовать благодаря величайшему ученому Древней Греции Аристотелю (384–322 до н. э). Последователи Аристотеля объединили все его сочинения по логике в труде под названием «Органон» («Орудие познания»). Именно Аристотель сформулировал четыре основных закона формальной логики: *закон тождества, закон противоречия, закон исключения третьего* и *закон достаточного основания*. Формулировки этих законов даны в прил. 3.

Начала *математической логики* заложил английский математик Джордж Буль (1815–1864). В 1848 г. он опубликовал статью «Математический анализ логики, или Опыт исчисления дедуктивных умозаключений», а в 1854 г. появился его главный труд «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». В этих работах отразилось убеждение Буля в том, что математические операции могут осуществляться не только над числами, но и над предложениями обычного языка. Буль детально изучил свойства этих операций, создав новую алгебру, которая является частью современной математической логики и носит имя Джорджа Буля – «булева алгебра».

Математическая логика позволяет проверить правильность рассуждений в естественном языке путем построения логических моделей. Для построения таких моделей используют специальный алфавит, формулы и правила их преобразования. Поэтому *разделы математической логики* можно рассматривать как *исчисления, интерпретациями которых служат утверждения естественного языка.*

---

[1] Большая советская энциклопедия [Электронный ресурс]. URL: http://bse.sci-lib.com/article116995.html.

Представление формальной логики как исчисления, как формально-аксиоматической теории позволило вдохнуть жизнь в компьютеры, т. е. в машины, которые «пользуются логикой», «думают».

2.2. Высказывания. Логические операции. Логические законы

В математической логике под *высказыванием* понимают повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, *истинно* данное предложение или *ложно* в заранее оговоренных условиях места и времени. Высказывание может быть сформулировано на любом естественном или искусственном языке.

Приведем примеры высказываний:

A: «Солнце светит всем»;

B: «Профессиональное образование в нашей стране делится на среднее и высшее»;

C: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны»;

D: «Все люди умеют летать»;

K: «$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=1$».

Высказывания обозначают буквами латинского алфавита – заглавными: $A, B, C, \ldots, X, \ldots$, как в приведенных примерах, или строчными: $x, y, p, q, h, v, \ldots$. Используются также буквы с индексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такое обозначение является совершенно естественным, поскольку высказывания в математической логике – это переменные, принимающие одно из двух возможных значений: *истина* (1) или *ложь* (0). Если x – высказывание, то $x \in \{0,\ 1\}$[1], что означает: «Возможные значения для переменной x – это 0 или 1». Переменные, принимающие только два возможных значения, называют *булевыми переменными*. Таким образом, высказывание – это всегда булева переменная.

Математическая логика не интересуется семантикой (содержанием) высказывания. С точки зрения математической логики, приведенные в примерах высказывания A: «Солнце светит всем» и C: «Диагонали ромба

[1] Напомним, что фигурные скобки – символ множества, элементы которого перечислены внутри этих скобок. Знак «$\in$» есть знак принадлежности элемента множеству.

взаимно перпендикулярны» одинаковы, поскольку оба истинны: $A = C = 1$.

Над высказываниями выполняют следующие *логические операции*:

1) отрицание (другие названия этой операции – инверсия, операция «НЕ»);
2) конъюнкция (или логическое умножение, или операция «И»);
3) дизъюнкция (или логическое сложение, или операция «ИЛИ»);
4) импликация;
5) эквиваленция.

Все логические операции определяются с помощью *таблиц истинности*. Рассмотрим каждую из операций.

1. Отрицание высказывания ($\overline{p}$)

Таблица 2.1

Таблица истинности отрицания высказывания

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Отрицание высказывания p (табл. 2.1) есть высказывание $\overline{p}$, которое истинно тогда и только тогда, когда p ложно.

В логике высказываний символ $\overline{p}$ читают: «Не p» или «Неверно, что p».

2. Конъюнкция высказываний ($p \wedge q$)

Таблица 2.2

Таблица истинности конъюнкции высказываний

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция высказываний p и q (табл. 2.2) есть высказывание $p \wedge q$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания p и q.

Символ $p \wedge q$ читают: «p и q».

Пример истинной конъюнкции $p \wedge q$: «Число 6 делится на 2 и на 3», где p: «Число 6 делится на 2», $p = 1$ (p – истинное высказывание), q: «Число 6 делится на 3», $q = 1$ (q – истинное высказывание); $1 \wedge 1 = 1$ (конъюнкция двух истинных высказываний есть истинное высказывание).

Пример ложной конъюнкции $p \wedge \overline{q}$: «Число 6 делится на 2 и не делится на 3». $p = 1$, $q = 1$, $\overline{q} = 0$; $1 \wedge 0 = 0$.

3. Дизъюнкция высказываний ($p \vee q$)

Дизъюнкция высказываний p и q (табл. 2.3) есть высказывание $p \vee q$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний p или q.

Таблица 2.3

Таблица истинности дизъюнкции высказываний

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Символ $p \vee q$ читают: «p или q».

Пример истинной дизъюнкции $p \vee q$: «Число 6 меньше или равно числу 7», где p: «6 меньше 7», $p=1$, q: «6 равно 7», $q=0$; $1 \vee 0 = 1$.

Пример ложной дизъюнкции $p \vee q$: «6 больше или равно 7», где p: «6 больше 7», $p=0$, q: «6 равно 7», $q=0$; $0 \vee 0 = 0$.

4. Импликация высказываний ($p \to q$)

Таблица 2.4

Таблица истинности импликации высказываний

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация высказываний p и q (табл. 2.4) есть высказывание $p \to q$, которое ложно тогда и только тогда, когда p – истина, а q – ложь.

Символ $p \to q$ читают: «Если p, то q», или «Из p следует q».

Высказывание p называют условием, или посылкой, импликации, q – следствием, или заключением, импликации.

Примеры *истинной* импликации $p \to q = 1$:

1) $p \to q$: «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 2»; p: «12 делится на 6», $p=1$, q: «12 делится на 2», $q=1$; $1 \to 1 = 1$.

2) $p \to q$: «Если число 12 делится на 8, то оно делится на 2»; p: «12 делится на 8», $p=0$, q: «12 делится на 2», $q=1$; $0 \to 1 = 1$.

3) $p \to q$: «Если число 12 делится на 8, то оно делится на 25»; p: «12 делится на 8», $p=0$, q: «12 делится на 25», $q=0$; $0 \to 0 = 1$.

Как видно из примеров, если условие импликации ложно, заключение может быть истинным или ложным, но на оценку истинности всей импликации это не влияет. (Из лжи следует все, что угодно.)

Пример ложной импликации $p \to q = 0$:

$p \to q$: «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 8»;
p: «12 делится на 6», $p = 1$, q: «12 делится на 8», $q = 0$; $1 \to 0 = 0$.

(Из истины должна следовать только истина.)

5. Эквиваленция высказываний ($p \leftrightarrow q$)

Эквиваленция высказываний p и q (табл. 2.5) есть высказывание $p \leftrightarrow q$, которое истинно тогда и только тогда, когда значения истинности p и q совпадают.

Высказывания p и q называют членами эквиваленции.

Таблица 2.5

Таблица истинности эквиваленции высказываний

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Символ $p \leftrightarrow q$ читают: «Для того, чтобы p, необходимо и достаточно, чтобы q», «p тогда и только тогда, когда q».

Пример эквиваленции $p \leftrightarrow q$:

«Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда угол SPQ равен углу SQP». Данная эквиваленция истинна, так как члены эквиваленции p: «треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и q: «угол SPQ равен углу SQP» либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Высказывания бывают *простыми* и *составными*. Простое высказывание p является неопределяемым понятием математической логики, составное строится из простых $- p, q, ..., h$ соединением их в *формулы*: $F(p, q, ..., h)$.

Приведем определение формулы логики высказываний.

Определение 2.1. ***Формулой логики высказываний*** является:

1) любая логическая (булева) переменная (атомарная формула);

2) если p и q – формулы, то выражения $\overline{p}$, $\overline{q}$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \leftrightarrow q)$ являются формулами;

3) никаких других формул, кроме представленных в 1) и 2), нет.

Из определения ясно, что для образования формулы используются знаки логических операций и скобки, устанавливающие порядок выполнения этих операций. Формула, содержащая два или более простых высказывания, называется *составным высказыванием*.

При записи сложных формул, для того чтобы избежать большого количества скобок, используют следующие правила:

1) конъюнкция выполняется раньше дизъюнкции, знак $\wedge$ можно опускать;

2) конъюнкция и дизъюнкция выполняются раньше импликации и эквиваленции;

3) если над скобкой стоит знак отрицания, то скобки можно опускать.

Пример

Формулу $((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \to (\overline{(x_1 \leftrightarrow x_2)} \vee x_3)$ в соответствии с этими правилами можно переписать так: $x_1 x_2 \vee x_3 \to \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} \vee x_3$.

Определение 2.2. Две логические формулы A и B будем называть ***равносильными формулами***, если они принимают одинаковые значения на любом наборе значений входящих в эти формулы атомарных формул.

Если на каком-то наборе значений атомарных формул $p, q, ..., h$ составное высказывание $F(p, q, ..., h)$ принимает значение 1, то набор этот называют *единичным набором*, если же 0, то *нулевым набором*. Например, единичными наборами импликации $p \to q$ являются наборы $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, а нулевым – набор $(1, 0)$ (см. табл. 2.4).

В некоторых случаях более удобным является другое определение равносильности формул:

Определение 2.2′. Две логические формулы A и B будем называть ***равносильными формулами***, если их нулевые и единичные наборы совпадают.

Ниже приведены *законы логики высказываний*, устанавливающие равносильности между формулами:

1. Двойственность: $\overline{pq} = \overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{p \vee q} = \overline{p}\,\overline{q}$.

2. Двойное отрицание: $\overline{\overline{p}} = p$.

3. Отрицание импликации: $\overline{p \to q} = p \wedge \overline{q}$.

4. Идемпотентность: $pp = p$, $p \vee p = p$.

5. Коммутативность конъюнкции и дизъюнкции: $pq = qp$, $p \vee q = q \vee p$.

6. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$(pq)h = p(qh),\ (p \vee q) \vee h = p \vee (q \vee h).$$

7. Законы дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции:

$$p(q \vee h) = pq \vee ph,\ p \vee qh = (p \vee q)(p \vee h).$$

8. Самодистрибутивность импликации: $p \to (q \to h) = (p \to q) \to (p \to h)$.

9. Контрпозиция: $p \to q = \bar{q} \to \bar{p}$.

10. Приведение к абсурду: $(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q}) = p$.

11. Противоречие: $p\bar{p} = 0$.

12. Исключение третьего: $p \vee \bar{p} = 1$.

13. Поглощение: $p(p \vee q) = p$, $p \vee pq = p$.

14. Выражение импликации через дизъюнкцию и отрицание: $p \to q = \bar{p} \vee q$.

15. Свойства нуля: $p0 = 0$, $p \vee 0 = p$.

16. Свойства единицы: $p1 = p$, $p \vee 1 = 1$.

Справедливость любого из перечисленных логических законов можно доказать, если установить совпадение единичных и нулевых наборов, входящих в формулы левой и правой частей равенства. Для этого надо построить таблицы истинности соответствующих высказываний.

Докажем логический закон приведения к абсурду: $(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q}) = p$ (рис. 2.1).

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \to q$	$\bar{p} \to \bar{q}$	$(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q})$
0	0	1	1	0	1	**0**
0	1	1	0	1	0	**0**
1	0	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**

$$\boxed{(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q}) = p}$$

Рис. 2.1. Доказательства логического закона приведения к абсурду

Для доказательства эквивалентности формул p и $(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q})$ рассмотрим все возможные наборы значений атомарных формул p и q и запишем для каждого из наборов значения составных высказываний $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{p} \to q$, $\bar{p} \to \bar{q}$, используя табл. 2.1, 2.3, 2.4.

Как видно из рис. 2.1, единичные и нулевые наборы формул p и $(\overline{p} \to q)(\overline{p} \to \overline{q})$ совпадают. Следовательно, эти формулы эквивалентны.

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1) тождественно истинные;

2) тождественно ложные;

3) выполнимые.

Определение 2.3. Формулу A называют ***тождественно истинной формулой***, или ***тавтологией***, если она принимает значение 1 (*истина*) на всех наборах входящих в нее атомарных высказываний. Формулу A называют ***тождественно ложной формулой***, если она принимает значение 0 (*ложь*) на всех наборах входящих в нее атомарных высказываний. Формулу A называют ***выполнимой формулой***, если она принимает значение 1 хотя бы на одном наборе входящих в нее атомарных высказываний.

2.3. Булева алгебра. Булевы функции. Решение логических задач

Как было отмечено выше, высказывания являются булевыми переменными. Над ними можно выполнять *булевы операции:* конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Множество $\{\{0,1\}, \wedge, \vee, \bar{\ }\}$, где $\{0,1\}$ – множество возможных значений высказываний; $\wedge$, $\vee$, $\bar{\ }$ – знаки операций над высказываниями, является *интерпретацией булевой алгебры*[1].

Булева алгебра есть формально-аксиоматическая теория, или, по-другому, математическая модель. Эта модель описывает не только множество высказываний с указанными логическими операциями, но и многие другие объекты. Например, в следующей главе мы рассмотрим еще одну интерпретацию булевой алгебры – алгебру множеств: $\{\mathcal{P}(U), \cap, \cup, \bar{\ }\}$, где $\mathcal{P}(U)$ – множество всех подмножеств универсального множества U; $\cap, \cup, \bar{\ }$ – операции объединения, пересечения и дополнения множеств. Важной интерпретацией булевой алгебры, о которой писал сам Джордж Буль, является алгебра случайных событий.

[1] Интерпретация формально-аксиоматической теории – это смысловое содержание символов теории, другими словами, семантика теории.

Поскольку булева алгебра является формально-аксиоматической теорией, символы, которые в ней используются, не имеют конкретного содержания и получают его в интерпретациях теории. В интерпретациях мы говорим о высказываниях, множествах, случайных событиях и пр. Но символы самой булевой алгебры пусты. Именно поэтому их и можно наполнить любым «подходящим» содержанием.

Дадим аксиоматическое определение булевой алгебры. Напомним, что в аксиоматическом определении нет привязок к каким-либо реальным объектам (см. п. 1.2.3). В нем заявлено, что на неком *множестве* заданы *отношения* и *алгебраические операции*, которые удовлетворяют определенному *набору аксиом*. Именно такая совокупность – ***множество, отношения и операции, система аксиом*** – является определением формально аксиоматической теории. Отметим также, что для булевой алгебры, как и для многих других теорий, существует несколько различных аксиоматик (наборов аксиом). Если выбрана какая-либо система аксиом, то аксиомы других систем становятся теоремами и требуют доказательства.

Аксиоматическое определение булевой алгебры. Пусть $\mathcal{B}$ – *непустое* множество[1], на котором определены две *бинарные* операции[2] ($\wedge$, $\vee$), одна *унарная* операция[3] ($\bar{\ }$) и две *нульарные* операции[4] (0, 1), условно называемые «конъюнкция», «дизъюнкция», «отрицание», «нуль», «единица». Множество $\{\mathcal{B}, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\}$ называют *булевой алгеброй*, если операции обладают свойствами, обозначенными в табл. 2.6.

На основе аксиом доказывается истинность других утверждений. Например, нетрудно доказать справедливость равенств, которые называются ***законами де Моргана***[5]:

1. $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.
2. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

[1] Множество называют *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента. *Непустое* множество – это множество, содержащее не менее одного элемента.

[2] Алгебраическая операция называется *бинарной*, если она выполняется над двумя компонентами (например, сложение и умножение – это бинарные операции).

[3] Алгебраическая операция называется *унарной*, если она выполняется над одним компонентом (например, возведение в квадрат, присваивание знака минус – это унарные операции).

[4] *Нульарной* операцией называют выделение из множества-носителя элементов, играющих особую роль.

[5] Докажем первый закон де Моргана:

$$\begin{cases} (x \wedge y) \wedge \overline{x \wedge y} = 0 \\ (x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = ((x \wedge \bar{x}) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \bar{y})) = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \wedge y}.$$

Второй закон доказывается аналогично.

Принимая, что для 0 и 1 справедливы неравенства: $0 \le 0$, $0 \le 1$, $1 \le 1$, можно, опираясь на аксиомы 4 и 5 (см. табл. 2.6), определить в булевой алгебре отношение порядка: $x \le y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

Таблица 2.6

Аксиомы булевой алгебры

№ п/п	Название свойства	Свойства конъюнкции	Свойства дизъюнкции
1	Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
2	Ассоциативность	$(x \wedge y) \wedge z = y \wedge (x \wedge z)$	$(x \vee y) \vee z = y \vee (x \vee z)$
3	Дистрибутивность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции)
4	Свойство нуля	$x \wedge 0 = 0$	$x \vee 0 = x$
5	Свойство единицы	$x \wedge 1 = x$	$x \vee 1 = 1$
6	Идемпотентность	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
7	Свойство поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
8	Определение отрицания	$x \wedge \bar{x} = 0$	$x \vee \bar{x} = 1$

Определение 2.4. Функцию $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n, y \in \{0, 1\}$ называют ***булевой функцией от** n **аргументов***.

Все формулы логики высказываний являются булевыми функциями. Число атомарных высказываний в формуле – это число аргументов функции. Например, импликация $p \to q$ есть булева функция от двух переменных $y = f(p, q)$, сопоставляющая каждому набору значений переменных (p, q) определенное значение переменной y (см. табл. 2.4).

Задать булеву функцию $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – значит указать ее значения на каждом наборе значений ее аргументов $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Часто булевы функции задают с помощью таблиц.

Пример 1

Некоторые булевы функции от двух аргументов ($y = f(x_1, x_2)$)

x_1	x_2	$y=x_1 \downarrow x_2$	$y = x_1 \oplus x_2$	$y = x_1 \mid x_2$	$y=x_1 \wedge x_2$	$y=x_1 \leftrightarrow x_2$	$y=x_1 \to x_2$	$y=x_1 \vee x_2$
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1

Приведем названия бинарных операций, использованных при записи булевых функций:

1) $y = x_1 \downarrow x_2$ – *стрелка Пирса*,
2) $y = x_1 \oplus x_2$ – *кольцевая сумма*,
3) $y = x_1 | x_2$ – *штрих Шеффера*,
4) $y = x_1 \wedge x_2$ – *конъюнкция*,
5) $y = x_1 \leftrightarrow x_2$ – *эквиваленция*,
6) $y = x_1 \to x_2$ – *импликация*,
7) $y = x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция*.

Строки таблицы булевой функции, на которых y принимает значение 1, называют *единичными наборами*, остальные строки таблицы – *нулевыми наборами*.

Например, единичные наборы дизъюнкции $y = x_1 \vee x_2$: $\{(01),(10),(11)\}$, нулевой набор – $\{(00)\}$. Единичные наборы импликации $y = x_1 \to x_2$: $\{(00), (01),(11)\}$, а нулевой набор – $\{(10)\}$.

Пример 2

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$	
			y_1	y_2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Приведем примеры табличной записи функций от трех переменных:

Единичные наборы функции y_1: $\{(001), (010), (100), (110)\}$.

Нулевые наборы функции y_1: $\{(000), (011), (101), (111)\}$.

Единичные наборы функции y_2: $\{(000), (010), (100), (101), (111)\}$.

Нулевые наборы функции y_2: $\{(001), (011), (110)\}$.

Справедливо *утверждение*:

Любая булева функция представима в булевой алгебре.

Смысл этого утверждения состоит в том, что как бы ни была задана булева функция, сколько бы аргументов она ни имела, ее всегда можно представить в виде формулы, содержащей буквы, которые обозначают переменные, знаки бинарных, унарных и нульарных булевых операций ($\wedge$, $\vee$, $\bar{}$, 0, 1) и скобки.

Представить булеву функцию такой формулой можно, например, записав ее *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ). СДНФ строят на единичных наборах функции. Каждому единичному набору соответствует *элементарная конъюнкция*, содержащая символы всех аргументов функции. Если в единичный набор элемент входит единицей, то в элементарную конъюнкцию он включается сам; если же нулем, то включается его отрицание. Так, в примере 2 при составлении СДНФ функции y_1 будут образованы следующие элементарные конъюнкции:

$$(001) \Rightarrow \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3,\ (010) \Rightarrow \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3},\ (100) \Rightarrow x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3},\ (110) \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}.$$

Обратим внимание на то, что все составленные таким образом элементарные конъюнкции равны единице на единичных наборах, а на нулевых наборах – нулю. Значит, выполнив дизъюнкцию всех элементарных конъюнкций, мы получим формулу, сохраняющую как единичный, так и нулевой наборы, поскольку на каждом единичном наборе одна из компонент дизъюнкции равна единице, а на каждом из нулевых все они обращаются в нули.

Формула, представляющая собой дизъюнкцию всех элементарных конъюнкций единичных наборов, есть СДНФ данной функции.

Запишем СДНФ функции y_1 из примера 2:

$$y_1 = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}).$$

Учитывая порядок выполнения логических операций (см. разд. 2.2) и опустив знаки конъюнкций, получаем:

$$\text{СДНФ}(y_1) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3}.$$

Запишем СДНФ всех булевых функций $y = f(x_1, x_2)$ из примера 1:

СДНФ$(x_1 \downarrow x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$,

СДНФ$(x_1 \oplus x_2) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}$,

СДНФ$(x_1 | x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}$,

СДНФ$(x_1 \wedge x_2) = x_1x_2$,

СДНФ$(x_1 \leftrightarrow x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1x_2$,

СДНФ$(x_1 \rightarrow x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_2$,

СДНФ$(x_1 \vee x_2) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1x_2$.

Пользуясь свойствами булевых операций (см. табл. 2.6), некоторые СДНФ можно сократить. Покажем это на примере СДНФ функции $y = x_1|x_2$ (штрих Шеффера): $\text{СДНФ}(x_1|x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \overset{(1)}{=} \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1\bar{x}_2 \overset{(2)}{=} \bar{x}_1 1 \vee x_1\bar{x}_2 =$ $\overset{(3)}{=} \bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2 \overset{(4)}{=} (\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{(5)}{=} 1(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \overset{(6)}{=} \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Прокомментируем равенства (1) – (6) в цепочке упрощений:

(1) дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z);$$

(2) определение отрицания: $x \vee \bar{x} = 1$;

(3) свойство единицы: $x \wedge 1 = x$;

(4) дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

(5) определение отрицания: $x \vee \bar{x} = 1$;

(6) свойство единицы: $x \wedge 1 = x$.

Итак, имеем:

$$x_1|x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Полученную формулу называют *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) функции штрих Шеффера.

Еще раз подчеркнем, что любая булева функция может быть представлена в виде СДНФ или ДНФ. Поскольку формулы логики высказываний по сути являются булевыми функциями, их также можно представлять в виде СДНФ или ДНФ, что весьма облегчает решение логических задач.

Пример

Дано высказывание A: «Если бы он не сказал ей, она бы и не узнала. А не спроси она его, он и не сказал бы ей. Но она узнала. Следовательно, она спросила». Определить, является ли данное высказывание тавтологией.

Решение

Выделим в высказывании A атомарные высказывания:

p: «Он сказал ей»;

q: «Она узнала»;

g: «Она спросила».

Запишем A в виде формулы:

$A = (\bar{p} \to \bar{q})(\bar{g} \to \bar{p})q \to g$.

Преобразуем импликации в дизъюнкции:

$$(\bar{p} \to \bar{q})(\bar{g} \to \bar{p})q \to g = \overline{(\bar{p} \to \bar{q})(\bar{g} \to \bar{p})q} \vee g = \overline{(p \vee \bar{q})(g \vee \bar{p})q} \vee g.$$

Применим к полученной формуле законы де Моргана, свойства коммутативности и ассоциативности дизъюнкции:

$$\overline{(p\vee \bar q)(g\vee \bar p)}q\vee g=\bar p q\vee \bar g p\vee \bar q\vee g=(\bar p q\vee \bar q)\vee(\bar g p\vee g).$$

Применим свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, определение отрицания и свойство единицы:

$$(\bar p q\vee \bar q)\vee(\bar g p\vee g)=(\bar p\vee \bar q)(q\vee \bar q)\vee(\bar g\vee g)(p\vee g)=(\bar p\vee \bar q)1\vee 1((p\vee g)=$$
$$=(\bar p\vee p)\vee \bar q\vee g=1.$$

Итак, доказано, что $A=(\bar p\to \bar q)(\bar g\to \bar p)p\to g=1$ при любых значениях высказываний p, q и g. Это означает, что высказывание A является тавтологией.

Найдем, какие еще тождественно истинные импликации можно получить из высказывания A. Доказано, что $A=\bar p q\vee \bar g p\vee \bar q\vee g$. Используем свойства ассоциативности и коммутативности дизъюнкции и ее связь с импликацией ($p\vee q=\bar p\to q$; $\bar p\vee q=p\to q$):

$A=(\bar p q\vee \bar g p)\vee(\bar q\vee g)=\overline{\bar p q\vee \bar g p}\to(\bar q\vee g)=(\bar p\to \bar q)(\bar g\to \bar p)\to(\bar q\vee g)$ – «Если бы он не сказал ей, она бы и не узнала. А не спроси она его, он и не сказал бы ей. Следовательно, она не узнала или же она его спросила».

$A=\bar p q\vee(\bar g p\vee \bar q\vee g)=\overline{\bar p q}\to(\bar g p\vee \bar q\vee g)=p\vee \bar q\to(\bar g p\vee \bar q\vee g)$ – «Если бы он сказал ей или она бы не узнала, то возможными оказались бы такие последствия: она не спросила, но он сказал ей, или она не узнала, или же она спросила».

$A=(\bar q\vee g)\vee(\bar p q\vee \bar g p)=\overline{\bar q\vee g}\to(\bar p q\vee \bar g p)=q\bar g\to(\bar p q\vee \bar g p)$ – «Если бы она узнала, но при этом не спрашивала бы его, то возможными оказались бы такие варианты: он не сказал ей, но она узнала или она не спросила, но он ей сказал».

Задание

Составьте другие варианты высказываний с импликацией и запишите их в виде связных текстов. Можно ли определить по текстам, что все они эквивалентны друг другу?

2.4. Алгебра множеств

2.4.1. Множества и способы их задания

«Множество» – это неопределяемое понятие математики. Георг Кантор (1845–1918) – немецкий математик, чьи работы лежат в основе теории множеств, говорил, что «множество – это многое, мыслимое как единое».

Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами: A, B, X, T, ..., элементы множества – строчными буквами: a, b, x, t, ...

Напомним, что слова «принадлежит» и «не принадлежит» обозначаются символами $\in$ и $\notin$. Например, формула $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A, а $x \notin A$, что элемент x не принадлежит множеству A.

Элементами множества могут быть любые объекты – числа, векторы, точки, высказывания и т. п. В частности, элементами множества могут являться множества.

При построении формально-аксиоматических теорий смысл элементов множества не уточняется. Строя интерпретации теорий, каждый раздел математики использует свои множества.

Начиная решать какую-либо задачу, прежде всего определяют множество тех объектов, которые будут в ней рассмотрены. Например, в задачах математического анализа изучают всевозможные числа, их последовательности, функции и т. п.

Определение 2.5: Множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче, называют ***универсальным множеством*** (для данной задачи).

Универсальное множество будем обозначать буквой U. Универсальное множество является *наибольшим множеством* в том смысле, что все объекты являются его элементами, т. е. высказывание $x \in U$ в рамках задачи всегда истинно. *Наименьшим множеством* является *пустое множество*. Оно не содержит ни одного элемента и обозначается символом $\varnothing$.

Задать множество A – значит указать способ, позволяющий относительно любого элемента x из универсального множества U *однозначно* установить, принадлежит x множеству A или не принадлежит. Другими словами, это правило, позволяющее определить, какое из двух высказываний – $x \in A$ или $x \notin A$ – является истинным, а какое ложным для любого элемента универсального множества U.

Множества можно задавать различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

1. Список элементов множества. Этим способом можно задавать конечные, или счетные, множества. Множество является конечным, или счетным, если его можно упорядочить, пронумеровав все его элементы, например, a_1, a_2, ... и т. д. Если существует элемент с самым большим номером, то множество является конечным, если же в качестве номеров

задействованы все натуральные числа, то множество является бесконечным счетным множеством.

Примеры

1. $A = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ – множество, содержащее 6 элементов (конечное множество).

2. $B = \{0, 0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, ...\}$ – бесконечное счетное множество.

3. $P = \{1, 2, \{1,2\}, 3, \{1,2,3\}\}$ – множество, содержащее 5 элементов, два из которых ($\{1,2\}$ и $\{1,2,3\}$) сами являются множествами.

2. Характеристическое свойство. Характеристическое свойство множества – это свойство, которым обладает каждый элемент множества, но не обладает никакой объект, не принадлежащий множеству.

Примеры

1. T – множество равносторонних треугольников.

2. $B = \{0 \le x < 1, (x \in R)\} = [0, 1)$ – множество действительных чисел, больших или равных нулю и меньших единицы.

3. $C = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$, $(n = 1, 2, ...)$ – множество всех несократимых дробей, числитель которых на единицу меньше знаменателя.

3. Характеристическая функция.

Определение 2.6. ***Характеристической функцией*** множества A называют функцию $\mu_A(x)$, заданную на универсальном множестве U и принимающую значения на множестве $\{0, 1\}$. При этом $\mu_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\mu_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Последнее предложение в определении можно записать в виде формулы:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A \\ 1, & \text{если } x \in A \end{cases}, \quad (x \in U).$$

Из определения характеристической функции следует два очевидных *утверждения*:

1) $\mu_U(x) \equiv 1$, $(x \in U)$;

2) $\mu_\varnothing(x) \equiv 0$, $(x \in U)$.

Пример

Пусть имеются универсальное множество $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ и два его подмножества: A – множество чисел, меньших 7, и B – множество четных чисел; μ_A и

μ_B – характеристические функции множеств A и B. Запишем эти функции тремя разными способами.

1. Задание характеристических функций μ_A и μ_B с помощью *таблицы их значений*:

$x \ (x \in U)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mu_B(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

2. Запись μ_A и μ_B в виде формул:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x < 7 \\ 0, & \textit{если} \quad x \geq 7 \end{cases}. \qquad \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10 \\ 0, & \textit{если} \quad x = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8 \end{cases}.$$

3. Представление μ_A и μ_B в виде *двоичных векторов*[1]. Такое представление возможно лишь при условии, что универсальное множество U упорядочено и конечно. Число координат векторов равно числу элементов множества U. Располагаются координаты в том же порядке, что и элементы множества U. По сути, эти векторы представляют собой строчки из таблицы значений характеристических функций:

$$\mu_A = (1111110000),\ \mu_B = (0101010101).$$

Удобной иллюстрацией множеств являются *диаграммы Эйлера-Венна*. На этих диаграммах универсальное множество изображается прямоугольником, а его подмножества – кругами или эллипсами (рис. 2.2).

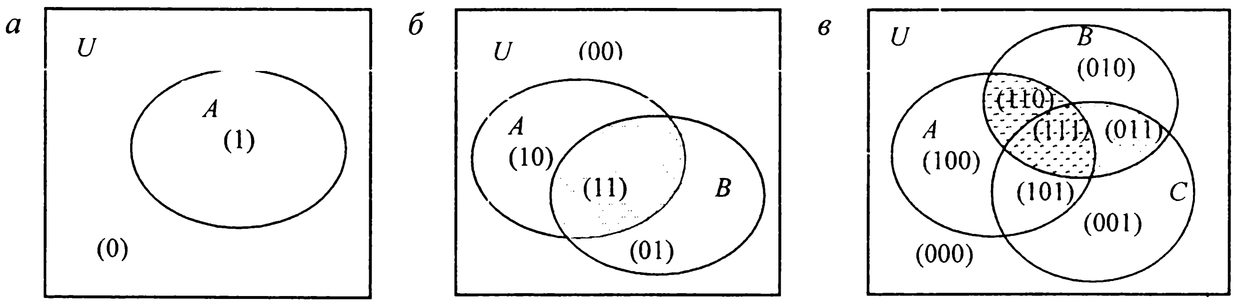


Рис. 2.2. Диаграммы Эйлера-Венна:
а – одно подмножество в универсальном множестве; *б* – два подмножества в универсальном множестве; *в* – три подмножества в универсальном множестве

При выделении на диаграммах Эйлера-Венна подмножеств универсального множества прямоугольник распадается на непересекающиеся об-

[1] n-мерным *двоичным вектором* называют последовательность n элементов, состоящую из нулей и единиц. Элементы последовательности называют *координатами двоичного вектора*. Множество всех n-мерных двоичных векторов обозначают символом B^n.

ласти. Если установить порядок выделения подмножеств, то каждой области можно присвоить двоичный номер, или, по-другому, сопоставить каждой области двоичный вектор.

Выделение одного множества (множества A) разбивает прямоугольник на две непересекающиеся области, в которых характеристическая функция μ_A принимает разные значения: $\mu_A = 1$ внутри эллипса и $\mu_A = 0$ вне эллипса (рис. 2.2, *а*).

Добавление множества B (рис. 2.2, *б*) делит каждую из уже имеющихся двух областей на две подобласти. Образуется $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ непересекающиеся области, каждая из которых соответствует определенной паре значений характеристических функций (μ_A, μ_B). Например, пара (01) соответствует области, в которой $\mu_A = 0$, $\mu_B = 1$. Эта область включает в себя те элементы универсального множества U, которые не принадлежат множеству A, но принадлежат множеству B.

Добавление множества C (рис. 2.2, *в*) разбивает прямоугольник на восемь областей. Для нумерации этих областей необходимы трехмерные векторы: (μ_A, μ_B, μ_C). Напомним, что имеется именно восемь различных трехмерных двоичных векторов (см. разд. 2.3), так что каждая область получит свой двоичный номер.

Добавляя четвертое, пятое, ..., n-е множества, получаем 2^4, 2^5, ..., 2^n областей, каждая из которых имеет свой вполне определенный двоичный номер, составленный из значений характеристических функций множеств. Подчеркнем, что последовательность нулей и единиц в любом из номеров выстроена в определенном, заранее обговоренном порядке. Только при условии упорядоченности двоичный номер области несет информацию о принадлежности или непринадлежности элементов этой области каждому из выделенных множеств.

Итак, при изучении множеств двоичные векторы $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, где $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, могут быть использованы по-разному:

1) двоичный вектор $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ может представлять характеристическую функцию μ_A множества A при условии, что универсальное множество U конечно (число элементов равно числу n) и упорядочено;

2) двоичный вектор $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ может представлять номер области на диаграмме Эйлера-Венна, если на ней в определенной последовательности выделено n множеств.

Термин «*подмножество*» интуитивно понятен и уже неоднократно использовался. Уточним понятие «подмножество» и несколько связанных с ним понятий.

Определение 2.7. Множество A называют ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Отношение между множеством и подмножеством называют ***отношением включения***.

Если множество A является подмножеством множества B, то говорят, что A *включено в* B или B *включает в себя* A. Слова «включено» и «не включено» обозначаются символами $\subseteq$ и $\not\subset$. Высказывание «$A \subseteq B$» может быть прочитано любым из следующих способов: «множество A включено во множество B», «множество B включает в себя множество A», «множество A является подмножеством множества B».

Обратим внимание на то, что в определении 2.7 не сказано, имеются ли во множестве B элементы, не принадлежащие A. Возможны два случая:

1) B содержит элементы, не принадлежащие A (рис. 2.3, *а*);
2) B не содержит элементы, которые не принадлежат A (рис. 2.3, *б*).

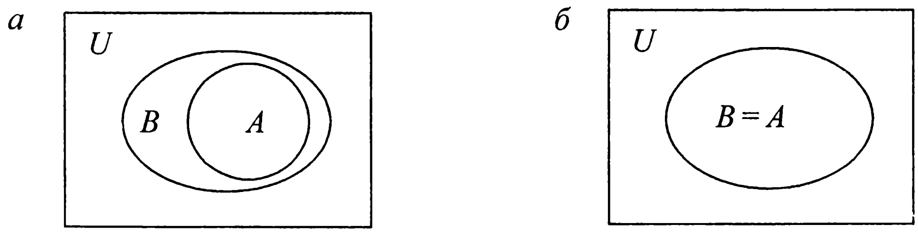


Рис. 2.3. Диаграммы Эйлера-Венна:
а – для случая $A \subset B$; *б* – для случая $A = B$

В первом случае множество B «больше» множества A, так как кроме всех элементов, входящих в A, имеет еще какие-то элементы. В этом случае A называют *правильной частью* множества B, а отношение между A и B – отношением строгого включения. Знак строгого включения – $\subset$. Запись $A \subset B$ означает «A строго включено в B» или «A является правильной частью B».

Когда два множества состоят из одних и тех же элементов, их называют *равными множествами* ($A = B$), а отношение между ними – *отношением равенства*. В случае равенства множеств истинны оба высказывания:

$A \subsetneq B$ и $B \subseteq A$. Поскольку любое множество A равно самому себе, то оно является подмножеством самого себя: $A \subseteq A$.

Таким образом, утверждение $X \subseteq A$ истинно для тех множеств X, которые либо являются правильной частью A, либо равны A.

Примечание. Высказывание $X \subseteq A$ аналогично нестрогому числовому неравенству $x \le a$, которое устанавливает порядок на числовых множествах. Отношение включения ($X \subseteq A$) также будем рассматривать как отношение порядка.

2.4.2. Булеан

Определение 2.8. Множество всех подмножеств множества U называют ***булеаном*** множества U.

Применяется обозначение $\mathcal{P}(U)$ – булеан множества U.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Запишем булеан множества $A=\{a_1,a_2\}$, содержащего два элемента. Элементы множества A упорядочены, каждый элемент имеет номер. Следовательно, характеристические функции элементов булеана могут быть записаны в виде двумерных двоичных векторов.

$\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_1,a_2\}\}$. Булеан содержит 4 элемента, причем элементами булеана являются множества. Составим таблицу элементов булеана и их характеристических функций.

Элементы булеана (подмножества множества A)	Значение характеристической функции подмножества	
	на элементе a_1	на элементе a_2
$\varnothing$	0	0
$\{a_2\}$	0	1
$\{a_1\}$	1	0
$\{a_1,a_2\}$	1	1

Характеристическая функция любого из подмножеств множества A (любого из элементов булеана) может быть представлена как двумерный двоичный вектор: $\mu_\varnothing=(00)$, $\mu_{\{a_2\}}=(01)$, $\mu_{\{a_1\}}=(10)$, $\mu_{\{a_1,a_2\}}=(11)$.

Между элементами булеана существуют следующие отношения включения:

$$\varnothing \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1,a_2\},$$

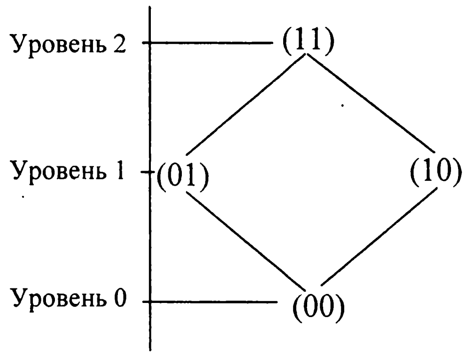
$$\varnothing \subseteq \{a_2\} \subseteq \{a_1,a_2\}.$$

Рассматривая отношение включения на булеане как отношение порядка, естественно определить отношение порядка и между соответствующими двоичными векторами:

$$\mu_{\varnothing} \le \mu_{\{a_1\}} \le \mu_{\{a_1,a_2\}}$$
$$\mu_{\varnothing} \le \mu_{\{a_2\}} \le \mu_{\{a_1,a_2\}}.$$

Подчеркнем, что в обоих случаях порядок является частичным, так как между некоторыми элементами булеана нет отношения включения: $\{a_2\} \not\subset \{a_1\}$, $\{a_1\} \not\subset \{a_2\}$. Соответственно, нельзя сравнивать между собой векторы $\mu_{\{a_2\}} = (01)$ и $\mu_{\{a_1\}} = (10)$.

Изобразим схематически отношение включения между элементами булеана $\mathcal{P}(A)$ с помощью диаграммы.



Все подмножества множества A на диаграмме разбиты на три уровня. На нулевом уровне находится «наименьшее» – пустое множество с характеристической функцией (00). Это множество является подмножеством всех элементов булеана. На первом уровне располагаются два одноэлементных множества. Множества первого уровня *несравнимы* друг с другом. На втором уровне расположено «наибольшее» множество, совпадающее с самим множеством A.

Пример 2

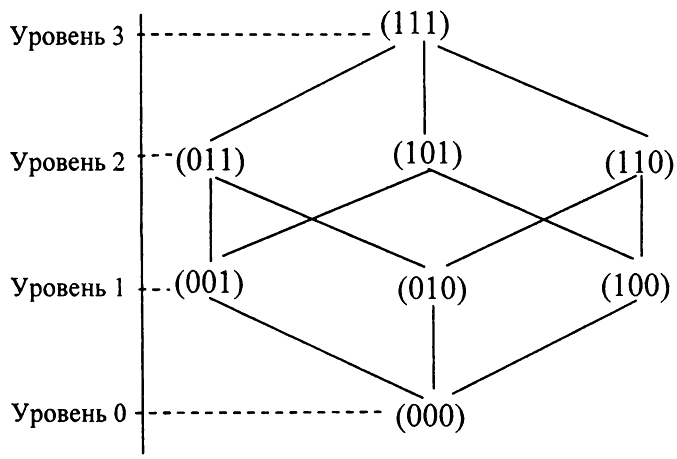
Множество $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ содержит три элемента. Элементы множества A упорядочены, каждый элемент имеет номер. Следовательно, характеристические функции элементов булеана могут быть записаны в виде трехмерных двоичных векторов.

Составим таблицу элементов булеана и их характеристических функций, а также диаграмму отношений включения между его элементами.

Элементы булеана (подмножества множества A)	Значение характеристической функции подмножества		
	на элементе a_1	на элементе a_2	на элементе a_3
$\varnothing$	0	0	0
$\{a_3\}$	0	0	1
$\{a_2\}$	0	1	0
$\{a_2, a_3\}$	0	1	1
$\{a_1\}$	1	0	0
$\{a_1, a_3\}$	1	0	1
$\{a_1, a_2\}$	1	1	0
$\{a_1, a_2, a_3\}$	1	1	1

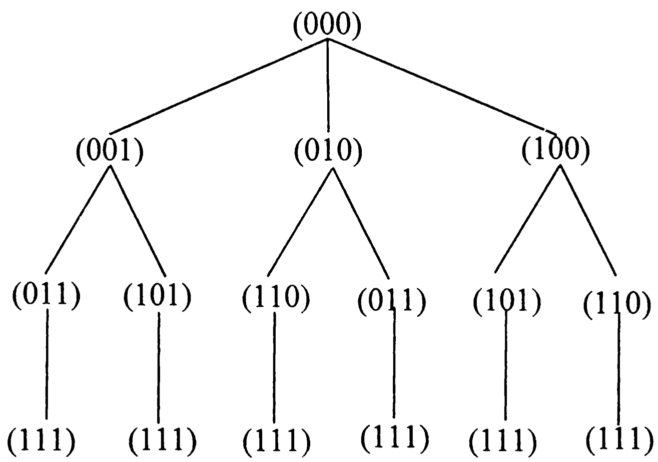
Число элементов булеана с добавлением элемента a_3 удвоилось: булеан трехэлементного множества содержит 8 подмножеств. Столько же существует и трехмерных двоичных векторов. Каждый двоичный вектор есть характеристическая функция одного из подмножеств.

Диаграмма отношений включения между подмножествами трехэлементного множества A:



Все подмножества множества A разбиты на четыре уровня. Множества одного уровня несравнимы между собой по отношению включения, но двигаясь по любому пути диаграммы, получаем последовательную цепочку включений.

Интересным является вопрос: сколько всего путей существует в диаграмме? Ответить на него достаточно просто, построив так называемое дерево путей:



Как видно на дереве путей, существует 6 цепочек включений подмножеств, причем каждая состоит из четырех включений:

$\varnothing \subseteq \{a_3\} \subseteq \{a_2, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$; $\varnothing \subseteq \{a_3\} \subseteq \{a_1, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$;

$\varnothing \subseteq \{a_2\} \subseteq \{a_1, a_2\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$; $\varnothing \subseteq \{a_2\} \subseteq \{a_2, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$;

$\varnothing \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$; $\varnothing \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1, a_2\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$.

Отношению включения на булеане соответствует отношение «меньше или равно» на множестве двоичных векторов.

Определение 2.9. Говорят, что ***двоичный вектор*** a ***меньше или равен двоичному вектору*** b, если каждая координата вектора a не больше одноименной координаты вектора b.

В буквенной форме определение 2.9 имеет следующий вид:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \le (y_1, y_2, ..., y_n) \Leftrightarrow x_i \le y_i, \quad x_i, y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Пусть U – множество, содержащее n элементов. Очевидно, что между его подмножествами и множеством n-мерных двоичных векторов существует взаимно однозначное соответствие: каждому подмножеству соответствует определенный вектор и каждому вектору – определенное подмножество. Следовательно, в булеане $\mathcal{P}(U)$ столько элементов, сколько существует n-мерных двоичных векторов. Как было показано ранее (см. разд. 2.3), число n-мерных двоичных векторов равно 2^n. Отсюда вытекает, *что булеан любого множества, содержащего n элементов, содержит* 2^n *подмножеств*. Поэтому булеан множества U называют также *множеством-степенью* U и кроме обозначения $\mathcal{P}(U)$ применяют также обозначение 2^U: $\mathcal{P}(U)=2^U$.

Обобщим сказанное выше. Пусть $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ – множество, содержащее n элементов, 2^U – его булеан, множества P и Q – произвольные элементы булеана, $B^n = \{(x_1 x_2 ... x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$, $i = 1, 2, ..., n$ – множество n-мерных двоичных векторов.

1. Между множествами 2^U и B^n существует взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее каждому множеству из булеана 2^U определенный вектор из B^n, и наоборот, каждому вектору – определенное множество.

2. Если множеству A $(A \in 2^U)$ сопоставлен вектор $(x_{1A}\, x_{2A} \dots x_{nA})$, то координата x_{iA} есть значение характеристической функции множества A на i-м элементе универсального множества U: $x_{iA} = \mu_A(u_i)$.

3. Установленное таким образом взаимно однозначное соответствие между множествами 2^U и B^n *сохраняет отношение порядка*:

$$P \subseteq Q \Leftrightarrow (x_{1P}\, x_{2P} \dots x_{nP}) \le (x_{1Q}\, x_{2Q} \dots x_{nQ}).$$

4. Учитывая, что двоичный вектор – это одно из возможных представлений характеристической функции определенного элемента булеана, утверждение $P \subseteq Q \Leftrightarrow (x_{1P}\, x_{2P} \dots x_{nP}) \le (x_{1Q}\, x_{2Q} \dots x_{nQ})$ возможно переписать так:

$$P \subseteq Q \Leftrightarrow \mu_P(u_i) \le \mu_Q(u_i), \quad (u_i \in U).$$

2.4.3. Операции над множествами

Пусть U – универсальное множество и $\mathcal{P}(U)$ – множество всех его подмножеств, множества A, B – элементы булеана: $A, B \in \mathcal{P}(U)$. Рассмотрим операции на булеане $\mathcal{P}(U)$.

1. Дополнение множества ($\overline{A}$)

Определение 2.10. ***Дополнением множества*** A называют множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U, которые не принадлежат множеству A.

На рис. 2.4 множество $\overline{A}$ представлено заштрихованной областью.

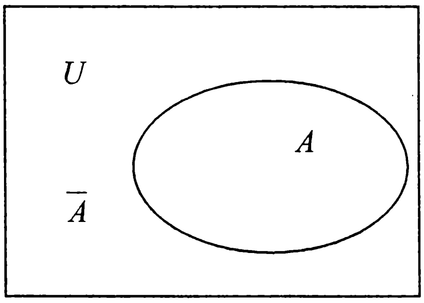


Рис. 2.4. Изображение дополнения множества A на диаграмме Эйлера-Венна

Таблица 2.7

Значения характеристической функции дополнения множества

μ_A	$\mu_{\overline{A}}$
0	1
1	0

В табл. 2.7 записаны значения характеристической функции $\mu_{\overline{A}}$ для каждого из двух возможных значений μ_A. Как видно из табл. 2.7, справедливы равенства $\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$, $\mu_A = 1 - \mu_{\overline{A}}$.

Дополнение множества A является унарной алгебраической операцией на $\mathcal{P}(U)$. Каждому подмножеству A множества U эта операция ставит в соответствие другое подмножество $\overline{A}$, в которое попадают все элементы U, не принадлежащие A.

2. Пересечение множеств ($A \cap B$)

Определение 2.11. ***Пересечением множеств*** A и B называют множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

На рис. 2.5 множество $A \cap B$ представлено областью с двойной штриховкой.

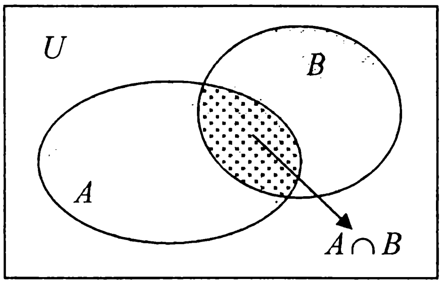


Рис. 2.5. Изображение пересечения множеств A и B на диаграмме Эйлера-Венна

В табл. 2.8 записаны значения характеристической функции $\mu_{A \cap B}$ для каждой из четырех возможных пар значений μ_A и μ_B.

Таблица 2.8

Значения характеристической функции пересечения множеств

μ_A	μ_B	$\mu_{A \cap B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Для вычисления значений характеристической функции пересечения множеств используются следующие формулы:

1) *логическое произведение*:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad x \in U;$$

2) *алгебраическое произведение*:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \qquad x \in U.$$

3. Объединение множеств ($A \cup B$)

Определение 2.12. ***Объединением множеств*** A и B называют множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B, или обоим множествам.

На рис. 2.6 множество $A \cup B$ представлено заштрихованной областью.

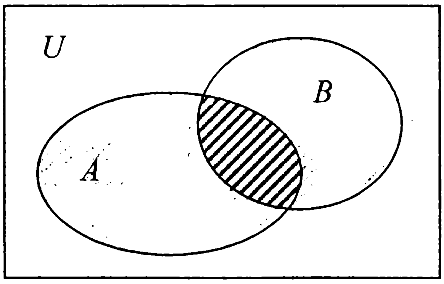


Рис. 2.6. Изображение объединения множеств A и B на диаграмме Эйлера-Венна

В табл. 2.9 записаны значения характеристической функции $\mu_{A \cup B}$ для каждой из четырех возможных пар значений μ_A и μ_B.

Таблица 2.9

Значения характеристической функции объединения множеств

μ_A	μ_B	$\mu_{A \cup B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Для вычисления значений характеристической функции объединения множеств используются следующие формулы:

1) *операция максимум*:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad x \in U;$$

2) *вероятностная сумма*:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \qquad x \in U.$$

Формулы вычисления $\mu_{A \cup B}(x)$ сопряжены с формулами вычисления $\mu_{A \cap B}(x)$. Это означает, что если $\mu_{A \cap B}$ вычисляется по формуле логического произведения, то $\mu_{A \cup B}$ следует вычислять по формуле операции максимум, если же $\mu_{A \cap B}$ вычислено как алгебраическое произведение, то $\mu_{A \cup B}$ – это вероятностная сумма.

Как уже было отмечено (см. п. 2.3), $\{\mathcal{P}(U), \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U\}$ есть интерпретация булевой алгебры, поскольку бинарные, унарная и нульарные операции над множествами удовлетворяют ее аксиомам.

В табл. 2.10 представлены свойства операций объединения, пересечения и дополнения над множествами.

Таблица 2.10

Свойства операций пересечения, объединения и дополнения над множествами

№ п/п	Название свойства	Свойства пересечения	Свойства объединения
1	Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
2	Ассоциативность	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3	Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)
4	Свойство нуля	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
5	Свойство единицы	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
6	Идемпотентность	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
7	Свойство поглощения	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
8	Определение дополнения	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	$A \cup \overline{A} = U$
9	Определение порядка	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
10	Законы де Моргана	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Докажем истинность некоторых свойств (см. табл. 2.10).

Свойство поглощения для пересечения $A \cap (A \cup B) = A$

Составим таблицу значений характеристических функций множеств, входящих в равенство $A \cap (A \cup B) = A$ (рис. 2.7).

μ_A	μ_B	$\mu_{A \cup B}$	$\mu_{A \cap (A \cup B)}$
0	0	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	1	**1**
1	1	1	**1**

$$\mu_{A \cap (A \cup B)}(x) = \mu_A(x)$$

Рис. 2.7. Значения характеристических функций множеств, входящих в равенство $A \cap (A \cup B) = A$

Как видно из рис. 2.7, произвольный элемент x универсального множества U принадлежит множеству $A \cap (A \cup B)$ тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству A.

Следовательно, равенство $A \cap (A \cup B) = A$ верно.

Закон де Моргана для объединения

Составим таблицу значений характеристических функций множеств, входящих в равенство $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (рис. 2.8).

μ_A	μ_B	$\mu_{A \cup B}$	$\mu_{\overline{A}}$	$\mu_{\overline{B}}$	$\mu_{\overline{A \cup B}}$	$\mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}$
0	0	0	1	1	**1**	**1**
0	1	1	1	0	**0**	**0**
1	0	1	0	1	**0**	**0**
1	1	1	0	0	**0**	**0**

$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_A(x)$

Рис. 2.8. Значения характеристических функций множеств, входящих в равенство $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Как видно на рис 2.8, произвольный элемент x универсального множества U принадлежит множеству $\overline{A \cup B}$ тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Следовательно, равенство $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ верно.

Аналогично можно доказать любое другое равенство табл. 2.10.

На булеане кроме операций дополнения, пересечения и объединения можно выполнять ряд других бинарных операций. Результатом выполнения таких операций вновь является множество из того же булеана.

В табл. 2.11 приведены характеристические функции множеств, получаемых в результате выполнения бинарных операций на булеане.

Таблица 2.11

Значения характеристических функций бинарных операций на булеане $\mathcal{P}(U)$

μ_A	μ_B	$\mu_{\overline{A \cup B}}$	$\mu_{B \setminus A}$	$\mu_{A \setminus B}$	$\mu_{A \oplus B}$	$\mu_{\overline{A \cap B}}$	$\mu_{\overline{A \oplus B}}$	$\mu_{\overline{B \setminus A}}$	$\mu_{\overline{B \setminus A}}$	$\mu_{\overline{A \setminus B}}$
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Приведем названия бинарных операций на булеане и их диаграммы Эйлера-Венна (рис. 2.9).

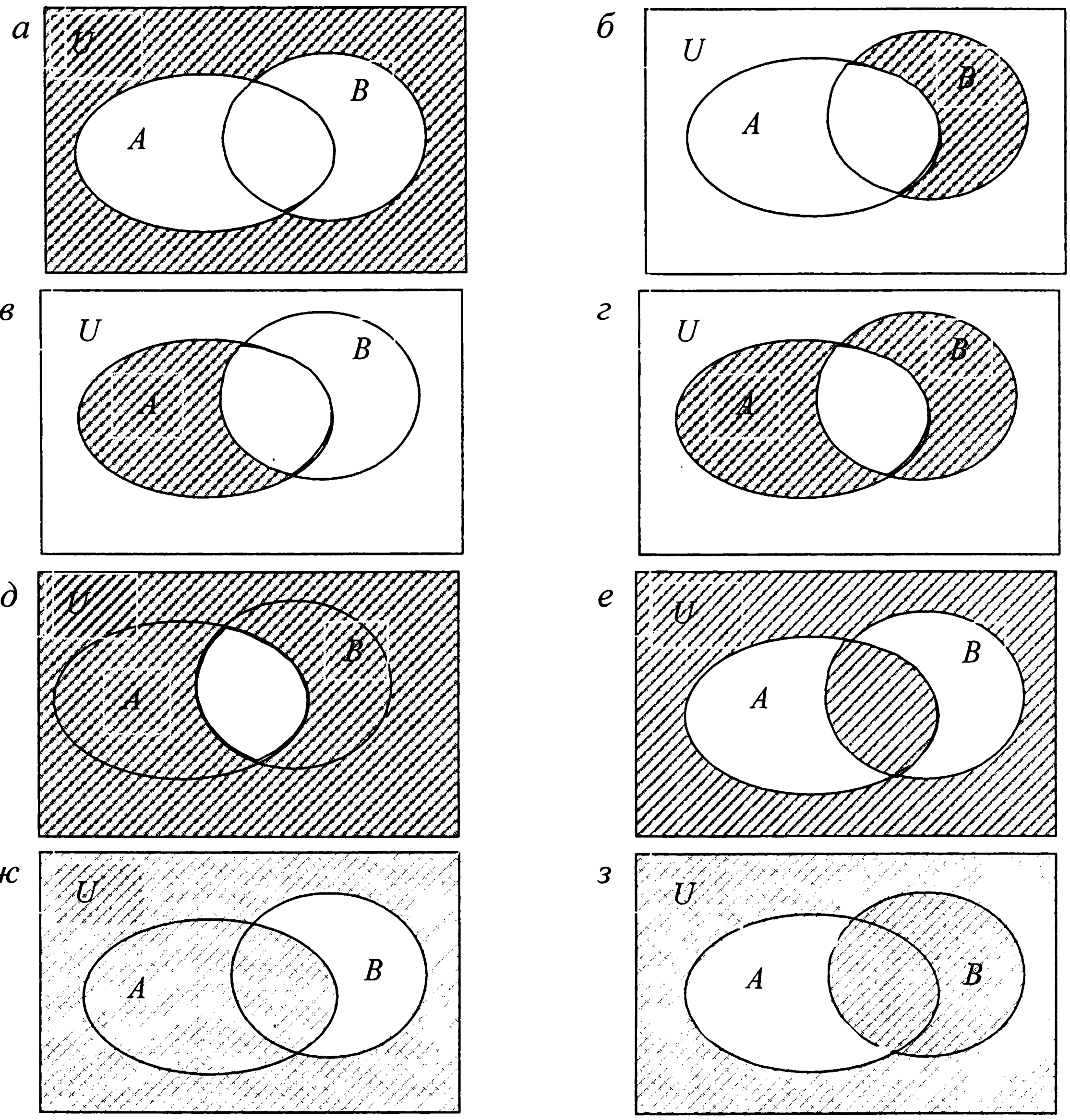


Рис. 2.9. Результаты выполнения бинарных операций на булеане (заштрихованные области на диаграммах Эйлера-Венна):

а – $\overline{A \cup B}$ – дополнение объединения множеств; *б* – $B \setminus A$ – разность множеств B и A; *в* – $A \setminus B$ – разность множеств A и B; *г* – $B \oplus A$ – кольцевая сумма множеств A и B; *д* – $\overline{A \cap B}$ – дополнение пересечения множеств A и B; *е* – $\overline{A \oplus B}$ – дополнение кольцевой суммы множеств A и B; *ж* – $\overline{B \setminus A}$ – дополнение разности множеств B и A; *з* – $\overline{A \setminus B}$ – дополнение разности множеств A и B

Покажем, что результат выполнения любой бинарной операции на булеане можно представить в булевой алгебре $\{\mathcal{P}(U), \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U\}$, т. е. через операции пересечения, объединения и дополнения.

Например, представим операцию $\overline{A \setminus B}$ (дополнение разности множеств A и B). Выпишем в таблицу значения характеристической функции множества $\overline{A \setminus B}$ с комментарием относительно принадлежности или непринадлежности произвольного элемента x универсального множества U пересечениям $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ и $A \cap B$ (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Значения характеристической функции множества $\overline{A \setminus B}$

μ_A	μ_B	$\mu_{A\setminus B}$	$\mu_{\overline{A\setminus B}}$	Комментарий ($x \in U$)
0	0	0	1	$\begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B},\ x \in \overline{A \setminus B}$
0	1	0	1	$\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap B,\ x \in \overline{A \setminus B}$
1	0	1	0	$\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B},\ x \notin \overline{A \setminus B}$
1	1	0	1	$\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap B,\ x \in \overline{A \setminus B}$

Из табл. 2.12 видно, что любой элемент x универсального множества U является элементом множества $\overline{A \setminus B}$ в том и только том случае, если он принадлежит или $\overline{A} \cap \overline{B}$, или $\overline{A} \cap B$, или $A \cap B$, другими словами, принадлежит объединению указанных пересечений: $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$. Следовательно, $\overline{A \setminus B} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$.

Итак, результат операции $\overline{A \setminus B}$ выражен в виде формулы, содержащей пересечения и объединения самих множеств или их дополнений.

Сократим формулу, пользуясь свойствами операций на булеане (см. табл. 2.10):

$$\overline{A \setminus B} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \overset{(1)}{=} (\overline{A} \cap (\overline{B} \cup B)) \cup (A \cap B) \overset{(2)}{=} (\overline{A} \cap U) \cup (A \cap B) =$$
$$\overset{(3)}{=} \overline{A} \cup (A \cap B) = \overset{(4)}{=} (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) \overset{(5)}{=} U \cap (\overline{A} \cup B) \overset{(6)}{=} \overline{A} \cup B.$$

Следовательно, $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cap B$.

Прокомментируем цепочку равенств (1) – (6).

(1) $(\overline{A} \cap (\overline{B} \cup B)) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

(2) $(\overline{B} \cup B) = U$ – определение дополнения;

(3) $\overline{A} \cap U = \overline{A}$ – свойство единицы;

(4) $\overline{A}\cup(A\cap B)=(\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup B)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;

(5) $\overline{A}\cup A=U$ – определение дополнения;

(6) $U\cap(\overline{A}\cup B)=\overline{A}\cup B$ – свойство единицы.

Аналогичным образом можно получить формулу для любой бинарной операции, а также для любой операции над тремя, четырьмя и более множествами.

Поскольку множество $\{\mathcal{P}(U),\cap,\cup,\bar{\ },\varnothing,U\}$ есть интерпретация булевой алгебры, любую операцию над множествами можно представить в виде формулы СДНФ. СДНФ на булеане – это объединение элементарных пересечений множеств. В элементарные пересечения входят все рассматриваемые множества – либо сами по себе, либо своими дополнениями. Формулу СДНФ можно попытаться сократить, используя свойства операций булевой алгебры, и получить сокращенную ДНФ исходной формулы.

2.5. Логика предикатов

2.5.1. Основные понятия и определения

Ранее (п. 1.1.3) было дано определение предиката как предложения $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, содержащего переменные $x_1, x_2, ..., x_n$. Предложение с переменными является предикатом лишь в том случае, если при подстановке допустимых значений переменных или связывании их кванторами это предложение обращается в истинное или ложное высказывание. Переменные в предикате называют предикатными местами, а их число – *числом мест предиката.*

Также было отмечено, что предикатные места в текстах (как математических, так и нематематических) соответствуют общим понятиям – таким, как «человек», «страна», «наука» и т. п. Вместо любого из подобных слов могут быть подставлены конкретные имена, обращающее предложение в истинное или ложное высказывание. Предложение, содержащее общее понятие, можно также обратить в общеутвердительное или частноутвердительное высказывание, связав нужные термины словами «все», «любой», «каждый» или «некоторый», «найдется», «существует», т. е. кванторами всеобщности, или кванторами существования. В дальнейшем будем полагать, что термины «переменная» (в математике) и «общее понятие» (в логике и других науках) можно считать синонимами.

Напомним обозначения предикатов:

$A,\ B,\ C, \ldots$ – нульместные предикаты или высказывания;

$P(x)$ – одноместный предикат;

$P(x_1, x_2)$ – двуместный предикат;

…

$P(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат.

Приведем примеры предикатов:

- $P(x)$: «x умеет летать»;
- $P(x,y)$: «x светит для y»;
- $P(x,y,z)$: «Если x и y – диагонали фигуры z, то x и y взаимно перпендикулярны»;
- $P(X_1, X_2, \ldots, X_n, U)$: «Множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ образуют булеан множества U».

Рассмотрим по порядку одно-, дву-, …, n-местные предикаты.

Одноместный предикат $P(x)$ содержит одну переменную – x. С каждым одноместным предикатом связаны четыре множества:

1) X – множество значений предикатного места;
2) K_1 – множество истинности предиката;
3) $K_2 = \overline{K_1}$ – множество ложности предиката;
4) $B = \{0, 1\}$ – множество значений предиката.

Прежде всего следует определить X – множество значений переменной x. Напомним, что множеством значений предикатной переменной является множество, элементы которого можно подставлять в предикатное место, получая при этом истинные или ложные высказывания, но не бессмыслицу.

Если X – множество значений переменной x, то предикат разбивает X на два непересекающихся класса: K_1 – множество истинности предиката и $K_2 = \overline{K_1}$ – множество ложности предиката. Множество K_1 – это множество значений x, при которых $P(x) = 1$ (истинное высказывание), а множество K_2 – множество значений x, при которых $P(x) = 0$ (ложное высказывание). Справедливы равенства $K_1 \cup K_2 = X$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, т. е. $K_2 = \overline{K_1}$.

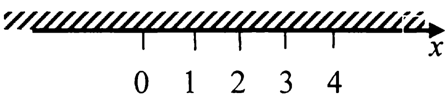
$B=\{0,1\}$ – множество значений предиката. 0 (ложь), 1 (истина) – это те значения, которые принимает предикат при подстановке вместо переменной ее возможных значений или связывании переменной квантором.

Пример 1

Дан одноместный предикат $P(x): x^2-4x\le 0$. Требуется *а*) указать множество значений переменной, найти множество истинности и множество ложности, *б*) составить из предиката два истинных и два ложных высказывания, *в*) записать общеутвердительное и частноутвердительное высказывания, определить их значения.

Решение

а) Вместо переменной x в предикат $P(x)$ можно подставить любое действительное число. Это означает, что $X=R$ (R – множество всех действительных чисел). В геометрической терминологии X – множество всех точек числовой прямой.



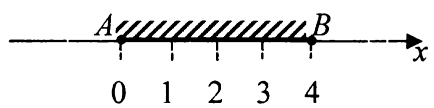
Чтобы найти множество истинности и множество ложности предиката, решим неравенство $x^2-4x\le 0$ методом интервалов:

$x^2-4x=0$,

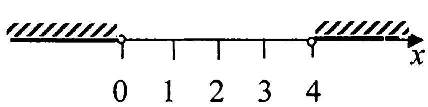
$x_1=0,\quad x_2=4$ – корни уравнения.

$x^2-4x=x(x-4)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 4$.

Таким образом, $K_1=\{x\in R: 0\le x\le 4\}$ (множество всех действительных чисел, которые не меньше нуля и не больше четырех). Геометрически K_1 есть отрезок AB.



Множество $K_2=\{x\in R: (0>x)\cup(x>4)\}$ (множество всех действительных чисел, которые меньше нуля или больше четырех). Геометрически K_2 – это два открытых луча слева от $x=0$ и справа от $x=4$.



б) Чтобы получить истинные высказывания, надо взять любые элементы K_1 и подставить их в $P(x)$:

$$x=0\Rightarrow P(0): 0^2-4\cdot 0\le 0;\ P(0)=1;$$

$$x=2\Rightarrow P(2): 2^2-4\cdot 2\le 0;\ P(2)=1.$$

Составим два ложных высказывания. Для этого возьмем значения x из K_2:

$$x = -0{,}01 \Rightarrow P(-0{,}01) : (-0{,}01^2 - 4\cdot(-0{,}01)) \le 0;\ P(-0{,}01) = 0;$$

$$x = 4{,}5 \Rightarrow P(4{,}5) : 4{,}5^2 - 4\cdot 4{,}5 \le 0;\ P(4{,}5) = 0.$$

в) Общеутвердительное высказывание:

$\forall x P(x) : x^2 - 4x \le 0$; «Для любого действительного числа x выполняется неравенство $x^2 - 4x \le 0$»; $\forall x P(x) = 0$ (ложное высказывание).

Частноутвердительное высказывание:

$\exists x P(x) : x^2 - 4x \le 0$; «Найдутся такие действительные числа x, для которых справедливо неравенство $x^2 - 4x \le 0$»; $\exists x P(x) = 1$ (истинное высказывание).

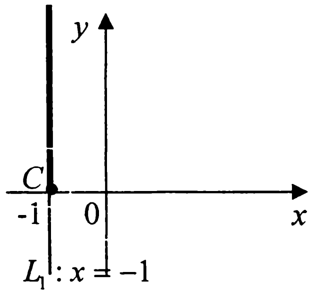
Если $P(x,y)$ – двуместный предикат, то для каждого предикатного места должно быть определено свое множество значений: $x \in X$, $y \in Y$. Подставив вместо переменной x элемент множества X (например, $x_0 \in X$), получим одноместный предикат $P(x_0,y)$ с предикатным местом y. Аналогично можно получить одноместный предикат $P(x,y_0)$, подставив вместо y какой-либо элемент множества Y. Если же сделать подстановку в оба места предиката, то предикат станет истинным или ложным высказыванием.

Пример 2

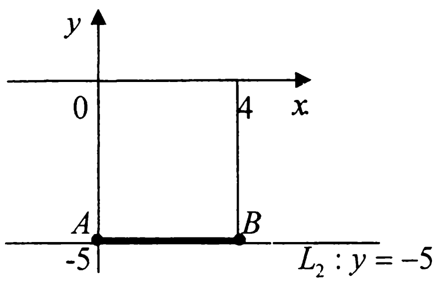
Рассмотрим двуместный предикат $P(x,y) : x^2 - 4x - 5 \le y$ ($x \in R$, $y \in R$).

Вместо переменных в предикат можно подставлять любые действительные числа. Геометрически это означает, что можно подставлять координаты любых точек плоскости.

1. Подставим вместо x одно из его возможных значений: $x = -1$. Эта подстановка выделяет на плоскости прямую L_1, а предикат становится одноместным предикатом $P(y) : 0 \le y$. С геометрической точки зрения, множество значений переменной этого предиката – ординаты всех точек прямой $L_1 : x = -1$ ($-\infty < y < \infty$), множество истинности K_{1y} – ординаты точек луча на прямой L_1 от точки C вверх ($0 \le y < \infty$), множество ложности K_{2y} – ординаты точек открытого луча ниже оси абсцисс ($y < 0$).

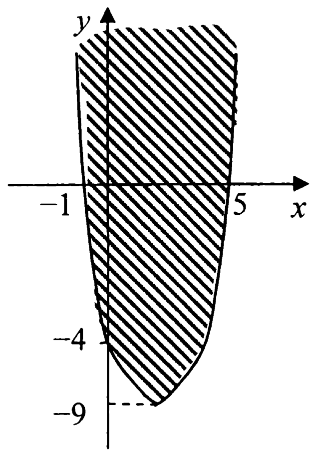


2. Подставим вместо y одно из его возможных значений: $y=-5$. На плоскости выделится прямая $L_2: y=-5$, а предикат $P(x)$: $x^2-4x\le 0$ станет одноместным. Множество значений переменной этого предиката – абсциссы всех точек прямой L_2 ($-\infty<x<\infty$), множество истинности K_{1x} – абсциссы точек отрезка AB ($0\le x\le 4$), множество ложности K_{2x} – абсциссы точек двух открытых лучей слева и справа от отрезка AB ($(x<0)\cup(x>4)$).



3. Чтобы получить из предиката $P(x,y)$ истинное или ложное высказывание, надо подставить числа в оба предикатных места. Например, подстановка $x=-1$, $y=-5$ дает ложное высказывание $P: -5\ge 0$.

4. Множеством истинности двуместного предиката $P(x,y)$ является множество координат точек области внутри параболы $y=x^2-4x-5$ и на самой параболе. Множество ложности – координаты всех остальных точек плоскости.



Итак, чтобы двуместный предикат $P(x,y)$ стал высказыванием, надо связать обе его переменные. При этом возможны следующие варианты:

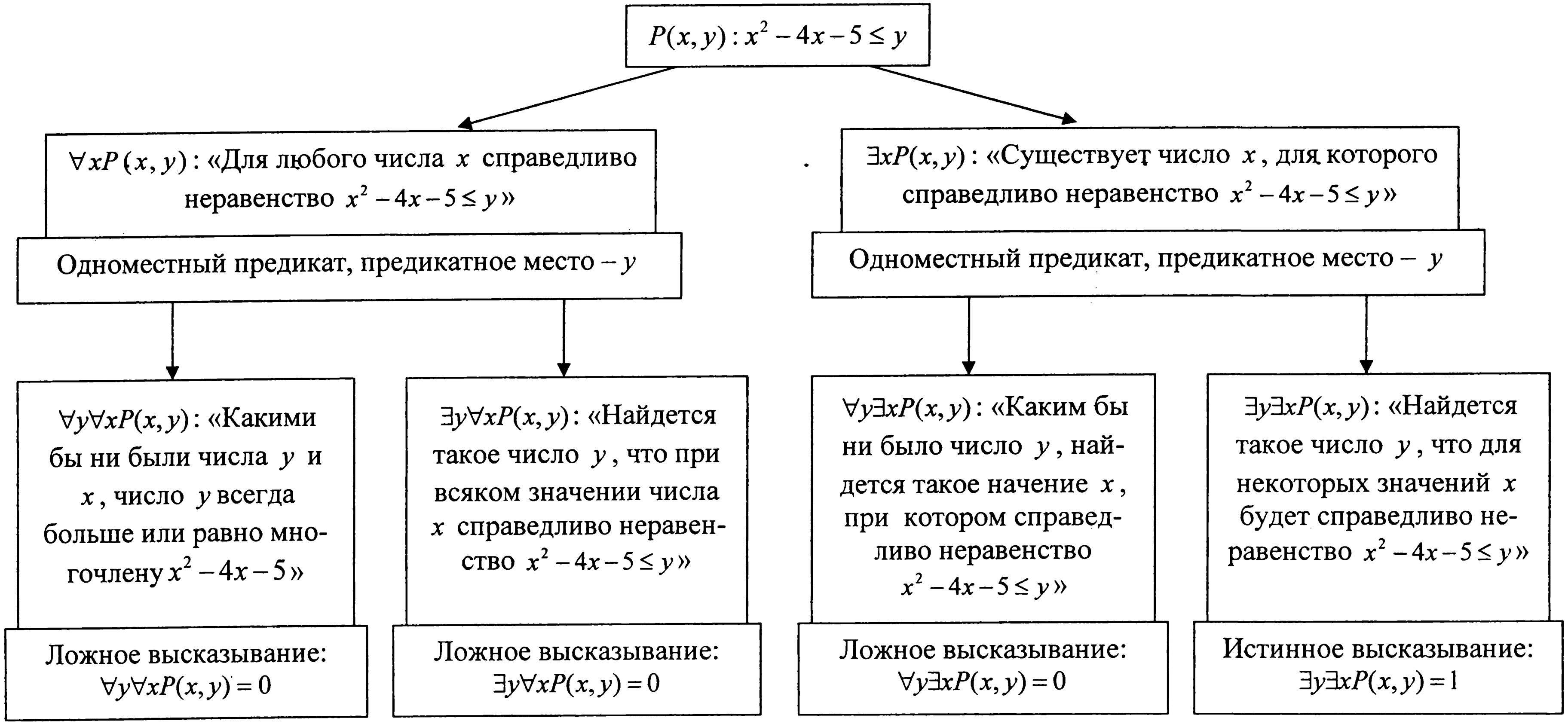
1) подставить в предикатные места пару чисел (x_0,y_0), где $x_0\in X$ и $y_0\in Y$;

2) связать квантором одну переменную, в предикатное место второй переменной подставить какое-либо ее значение;

3) связать обе переменные кванторами.

Пример 3

Свяжем переменные предиката $P(x,y): x^2-4x-5\le y$ кванторами. Процедуру оформим в виде схемы.


$P(x,y): x^2-4x-5 \le y$
$\forall x P(x,y)$: «Для любого числа x справедливо неравенство $x^2-4x-5 \le y$»
Одноместный предикат, предикатное место – y
$\exists x P(x,y)$: «Существует число x, для которого справедливо неравенство $x^2-4x-5 \le y$»
Одноместный предикат, предикатное место – y
$\forall y \forall x P(x,y)$: «Какими бы ни были числа y и x, число y всегда больше или равно многочлену x^2-4x-5»
Ложное высказывание: $\forall y \forall x P(x,y)=0$
$\exists y \forall x P(x,y)$: «Найдется такое число y, что при всяком значении числа x справедливо неравенство $x^2-4x-5 \le y$»
Ложное высказывание: $\exists y \forall x P(x,y)=0$
$\forall y \exists x P(x,y)$: «Каким бы ни было число y, найдется такое начение x, при котором справедливо неравенство $x^2-4x-5 \le y$»
Ложное высказывание: $\forall y \exists x P(x,y)=0$
$\exists y \exists x P(x,y)$: «Найдется такое число y, что для некоторых значений x будет справедливо неравенство $x^2-4x-5 \le y$»
Истинное высказывание: $\exists y \exists x P(x,y)=1$

$P(x,y): x^2-4x-5 \le y$

$\forall y P(x,y)$: «Любое число y больше или равно многочлену x^2-4x-5»

Одноместный предикат, предикатное место – x

$\forall x \forall y P(x,y)$: «Каким бы ни было число x, для всякого значения y справедливо неравенство x^2-4x-5»

Ложное высказывание: $\forall y \forall x P(x,y) = 0$

$\exists x \forall y P(x,y)$: «Найдется такое число x, что при всяком значении y справедливо неравенство $x^2-4x-5 \le y$»

Ложное высказывание: $\exists x \forall y P(x,y) = 0$

$\exists y P(x,y)$: «Существует число y, для которого справедливо неравенство: $x^2-4x-5 \le y$»

Одноместный предикат, предикатное место – x

$\forall x \exists y P(x,y)$: «Каким бы ни было число x, найдется такое значение y, для которого истинно неравенство $x^2-4x-5 \le y$»

Истинное высказывание: $\forall y \exists x P(x,y) = 1$

$\exists x \exists y P(x,y)$: «Найдется такое число x, что для некоторых значений y будет истинно неравенство $x^2-4x-5 \le y$»

Истинное высказывание: $\exists x \exists y P(x,y) = 1$

Множество, составленное из пар вида (x_0, y_0), называют ***прямым произведением***[1] ***множеств*** X и Y. Прямое произведение обозначают символом $X \times Y$. Поскольку в дальнейшем понятие прямого произведения мы будем использовать довольно часто, приведем его определение.

Определение 2.13. ***Прямым (декартовым) произведением множеств*** X и Y называют множество $X \times Y$, состоящее из всех пар вида (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$, и только из этих пар.

Итак, множеством значений переменных двуместного предиката $P(x,y)$ является декартово произведение $X \times Y$, где X – множество значений переменной x, Y – множество значений переменной y. Множество $X \times Y$ содержит множество истинности K_1 и множество ложности K_2 предиката $P(x,y)$. K_1 состоит из тех и только тех пар, подстановка которых в предикат делает его истинным высказыванием, а K_2 состоит из пар, обращающих предикат в ложное высказывание. Справедливы равенства $K_1 \cup K_2 = X \times Y$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, из которых следует, что $K_2 = \overline{K_1}$.

Множеством значений переменных трехместного предиката $P(x, y, z)$ является прямое произведение трех множеств $X \times Y \times Z$. Прямое произведение трех множеств есть множество $X \times Y \times Z$, состоящее из упорядоченных троек элементов (x, y, z), где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Множество значений трехместного предиката $X \times Y \times Z$ также разбивается на множество истинности K_1 и множество ложности K_2: $K_1 \cup K_2 = X \times Y \times Z$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$.

В общем случае множеством значений n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ является прямое произведение n множеств: $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

2.5.2. Логические операции над предикатами

Над предикатами, как и над высказываниями, выполняют операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции и отрицания. При этом получают предикатную формулу или составной предикат.

Рассмотрим выполнение логических операций над предикатами P_1 и

[1] Прямое произведение множеств называют также *декартовым произведением*, по имени величайшего французского ученого Рене Декарта (1596 –1650). Философские работы Декарта явились основой религиозно-философского учения – картезианства. Картезианство имело целью достичь благополучия и самоутверждения на земле и блаженства на небе силами автономной мудрости естественного разума без обращения к вере, традиции и Откровению.

P_2 для простейшего случая, когда оба предиката имеют одинаковое число мест и множеством значений переменных для обоих предикатов является множество M. Множества K_1 и $\overline{K}_1$ – множества истинности и ложности предиката P_1, а K_2 и $\overline{K}_2$ – предиката P_2 (рис. 2.10).

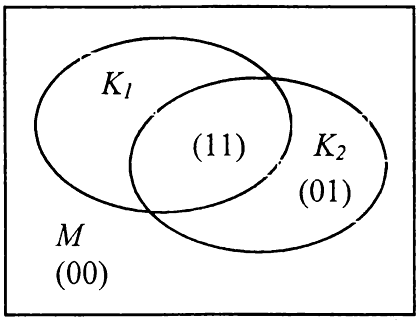


Рис.2.10. Диаграмма Эйлера-Венна множеств M, K_1, K_2

Запишем таблицу характеристических функций булевых операций над множествами K_1 и K_2 и истинности основных логических формул с предикатами P_1 и P_2 (табл. 2.13).

Таблица 2. 13

Значения характеристических функций операций над множествами K_1 и K_2 на булеане $\mathcal{P}(M)$ и логических формул с предикатами P_1 и P_2

μ_{K_1}	μ_{K_2}	$\mu_{K_1 \cap K_2}$	$P_1 \wedge P_2$	$\mu_{K_1 \cup K_2}$	$P_1 \vee P_2$	$\mu_{\overline{K}_1}$	$\mu_{\overline{K}_1 \cup K_2}$	$P_1 \to P_2$	$\mu_{K_1 \oplus K_2}$	$\mu_{\overline{K_1 \oplus K_2}}$	$P_1 \leftrightarrow P_2$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0.	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

$K_{P_1 \wedge P_2} = K_1 \cap K_2$ $\quad$ $K_{P_1 \to P_2} = \overline{K}_1 \cup K_2$

$K_{P_1 \vee P_2} = K_1 \cup K_2$ $\quad$ $K_{P_1 \leftrightarrow P_2} = \overline{K_1 \oplus K_2}$

Анализ табл. 2.13 показывает, что справедливы следующие *правила*:

1. Множеством истинности конъюнкции $P_1 \wedge P_2$ предикатов является пересечение их множеств истинности $K_1 \cap K_2$.

2. Множеством истинности дизъюнкции $P_1 \vee P_2$ предикатов является объединение их множеств истинности $K_1 \cup K_2$.

3. Множеством истинности импликации предикатов $P_1 \to P_2$ является объединение множества ложности посылки импликации $\overline{K}_1$ и множества истинности ее заключения K_2: $\overline{K}_1 \cup K_2$.

4. Множеством истинности эквиваленции предикатов $P_1 \leftrightarrow P_2$ является дополнение кольцевой суммы множеств истинности предикатов P_1 и P_2: $\overline{K_1 \oplus K_2}$.

Найдем условия, при которых импликация и эквиваленция предикатов являются тавтологиями. Перепишем таблицу истинности импликации $P_1 \to P_2$ (см. табл. 2.13), удалив из нее нулевую строку (табл. 2.14).

Таблица 2.14

Истинность импликации $P_1 \to P_2$

μ_{K_1}	μ_{K_2}	$\mu_{\overline{K_1} \cup K_2}$	$P_1 \to P_2$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Очевидно, что $P_1 \to P_2$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $\mu_{K_1} \le \mu_{K_2}$. В терминах алгебры множеств это означает, что $K_1 \subseteq K_2$ (множество истинности предиката P_1 есть подмножество множества истинности предиката P_2). В терминах алгебры логики $P_1 \le P_2$ (условие импликации меньше или равно ее заключению).

Вывод: импликация предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда множество истинности условия импликации является подмножеством множества истинности ее заключения.

Перепишем таблицу истинности эквиваленции $P_1 \leftrightarrow P_2$ (см.табл. 2.13), удалив из нее нулевые строки (табл. 2.15). Очевидно, что $P_1 \leftrightarrow P_2$ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $K_1 = K_2$ или $P_1 = P_2$.

Таблица 2.15

Истинность эквиваленции $P_1 \leftrightarrow P_2$

μ_{K_1}	μ_{K_2}	$P_1 \leftrightarrow P_2$
0	0	1
1	1	1

Вывод: эквиваленция предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда множества истинности ее условия и заключения равны друг другу.

В более сложных случаях предикатной формулой могут быть соединены предикаты с различным числом мест – от нульместных (высказываний) до многоместных. Рассмотрим пример.

Пример

Имеем атомарные предикаты:

q: «Любое положительное число x может являться длиной отрезка» – нульместный предикат (истинное высказывание, $q = 1$);

$P(l_1, l_2)$: «Прямые l_1 и l_2 параллельны друг другу» – двуместный предикат на множестве пар прямых $l \times l$;

$Q(A, l)$: «Точка A лежит на прямой l» – двуместный предикат на множестве пар точек и прямых $T \times l$;

$H(AB, x)$: «Длина отрезка AB равна числу x» – двуместный предикат на множестве пар отрезков ($AB \in L$) и действительных чисел ($x \in R$): $L \times R$.

Рассмотрим предикатную формулу

$$F = q \wedge P(l_1, l_2) \to Q(A, l_1) \wedge Q(B, l_2) \wedge H(AB, x):$$

«Поскольку любое положительное число x может являться длиной отрезка, а прямые l_1 и l_2 параллельны друг другу, то точка A лежит на прямой l_1, точка B – на прямой l_2 и длина отрезка AB равна числу x».

$F = F(l_1, l_2, A, B, AB, x)$ – шестиместный предикат, определенный на множестве $l \times l \times T \times T \times L \times R$.

Такие случаи являются достаточно сложными и должны рассматриваться отдельно.

2.5.3. Кванторные операции над предикатами

Процедуру связывания предикатного места квантором называют кванторной операцией. Мы уже вводили знаки этих операций: $\forall$ – квантор всеобщности, $\exists$ – квантор существования.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M, K и $\overline{K}$ – его множество истинности и множество ложности.

Квантор всеобщности. Предложение $\forall x P(x)$: «Для всякого x утверждение $P(x)$ истинно» является уже не предикатом, а высказыванием. ***Высказывание $\forall x P(x)$ – истина, если множество K совпадает с областью значений предикатного места***: $K = M$, $\overline{K} = \varnothing$. ***Высказывание*** $\forall x P(x)$ ***– ложь, если*** $K \neq M$, $\overline{K} \neq \varnothing$. До выполнения кванторной операции x являлась свободной переменной и ей можно было придавать любые значения из множества M. После выполнения операции *переменная x связана* *квантором всеобщности*: значение высказывания $\forall x P(x)$ не зависит от x. Хотя символ x и входит в запись предложения $\forall x P(x)$, но подстановка значений x в это предложение приводит к бессмыслице.

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M. Утверждение $\exists x P(x)$: «Существует x, для которого $P(x)$ истинно» является высказыванием. ***Высказывание*** $\exists x P(x)$ ***– истина, если множество*** K ***не пусто***: $K \neq \varnothing$, иными словами, если множество M содержит хотя бы один элемент, который при подстановке в предикат обращает его в истинное высказывание. Значение высказывания $\exists x P(x)$ не зависит от x, переменная x связана квантором существования.

Пример

На множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ заданы два предиката $P_1(x)$: «$x < 6$», $P_2(x)$: «x – четное число».

Высказывание $\forall x P_1(x)$: «Все $x < 6$» является истинным, поскольку истинно каждое из высказываний $P_1(1)$: «1< 6»; $P_1(2)$: «2< 6»; $P_1(3)$: «3< 6»; $P_1(4)$: «4< 6»; $P_1(5)$: «5< 6». Высказывание $\forall x P_1(x)$ является конъюнкцией всех высказываний, которые получаются при подстановке значений x в предикат $P_1(x)$:

$$\forall x P_1(x) = P_1(1) \wedge P_1(2) \wedge P_1(3) \wedge P_1(4) \wedge P_1(5).$$

Высказывание $\exists x P_2(x)$: «Некоторые x – четные числа» истинно, так как среди высказываний $P_2(1)$: «1 – четное число», $P_2(2)$: «2 – четное число», $P_2(3)$: «3 – четное число», $P_2(4)$: «4 – четное число», $P_2(5)$: «5 – четное число» два истинны: $P_2(2)$ и $P_2(4)$. Высказывание $\exists x P_2(x)$ является дизъюнкцией всех высказываний, которые получаются при подстановке значений x в предикат $P_2(x)$:

$$\exists x P_2(x) = P_2(1) \vee P_2(2) \vee P_2(3) \vee P_2(4) \vee P_2(5).$$

Приведенный пример показывает, что операция связывания предикатного места квантором всеобщности равносильна конъюнкции всех высказываний, которые получаются из предиката при подстановке значений его переменной, а квантором существования – дизъюнкции всех таких высказываний.

Таким образом, если $P(x)$ – предикат, $x \in M$, $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, то справедливы равенства

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n).$$

Применим к этим равенствам законы де Моргана булевой алгебры (см. п. 2.3):

$$\overline{\forall x P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)} = \overline{P}(a_1) \vee \overline{P}(a_2) \vee \ldots \vee \overline{P}(a_n) = \exists x \overline{P}(x);$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)} = \overline{P}(a_1) \wedge \overline{P}(a_2) \wedge \ldots \wedge \overline{P}(a_n) = \forall x \overline{P}(x).$$

Получим формулы

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x); \quad \overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x).$$

Данные формулы представляют собой *правила* построения отрицаний высказываний и предикатов с кванторами:

Правило 1. При построении отрицания высказывания или предиката с квантором всеобщности можно квантор всеобщности заменить квантором существования, а предикат – его отрицанием.

Правило 2. При построении отрицания высказывания или предиката с квантором существования можно квантор существования заменить квантором всеобщности, а предикат – его отрицанием.

Пример

Применим *правило 1* и *правило 2* к рассмотренным выше высказываниям $\forall x P_1(x)$: «Все $x < 6$» и $\exists x P_2(x)$: «Некоторые x – четные числа» ($x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

$\overline{\forall x P_1(x)} = \exists x \overline{P}_1(x)$: «Существуют числа, которые не меньше (т. е. большие или равные) 6»;

$\overline{\exists x P_2(x)} = \forall x \overline{P}(x)$: «Все числа нечетные».

Поскольку в данном контексте под словом «числа» понимаются лишь числа 1, 2, 3, 4 или 5, то оба отрицания ложны: $\overline{\forall x P_1(x)} = \exists x \overline{P}_1(x) = 0$, $\overline{\exists x P_2(x)} = \forall x \overline{P}_2(x) = 0$.

Применяя свойство порядка для конъюнкции и дизъюнкции, получаем неравенства для высказываний с кванторами:

$$\forall x P(x) \le \exists x P(x); \quad \overline{\exists x P(x)} \le \overline{\forall x P(x)}.$$

Поясним данные неравенства. Связывая переменную квантором всеобщности, получаем высказывание, значение истинности которого меньше или равно значению высказывания с квантором существования, полученным из того же предиката: если $\forall x P(x) = 1$, то $\exists x P(x) = 1$; если $\forall x P(x) = 0$, то возможны оба варианта: $\exists x P(x) = 0$ или $\exists x P(x) = 1$.

Второе неравенство можно толковать аналогично.

Как мы уже говорили, кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Запишем схемы связывания кванторами произвольного двуместного предиката $P(x)$ (рис. 2.11) и прокомментируем их.

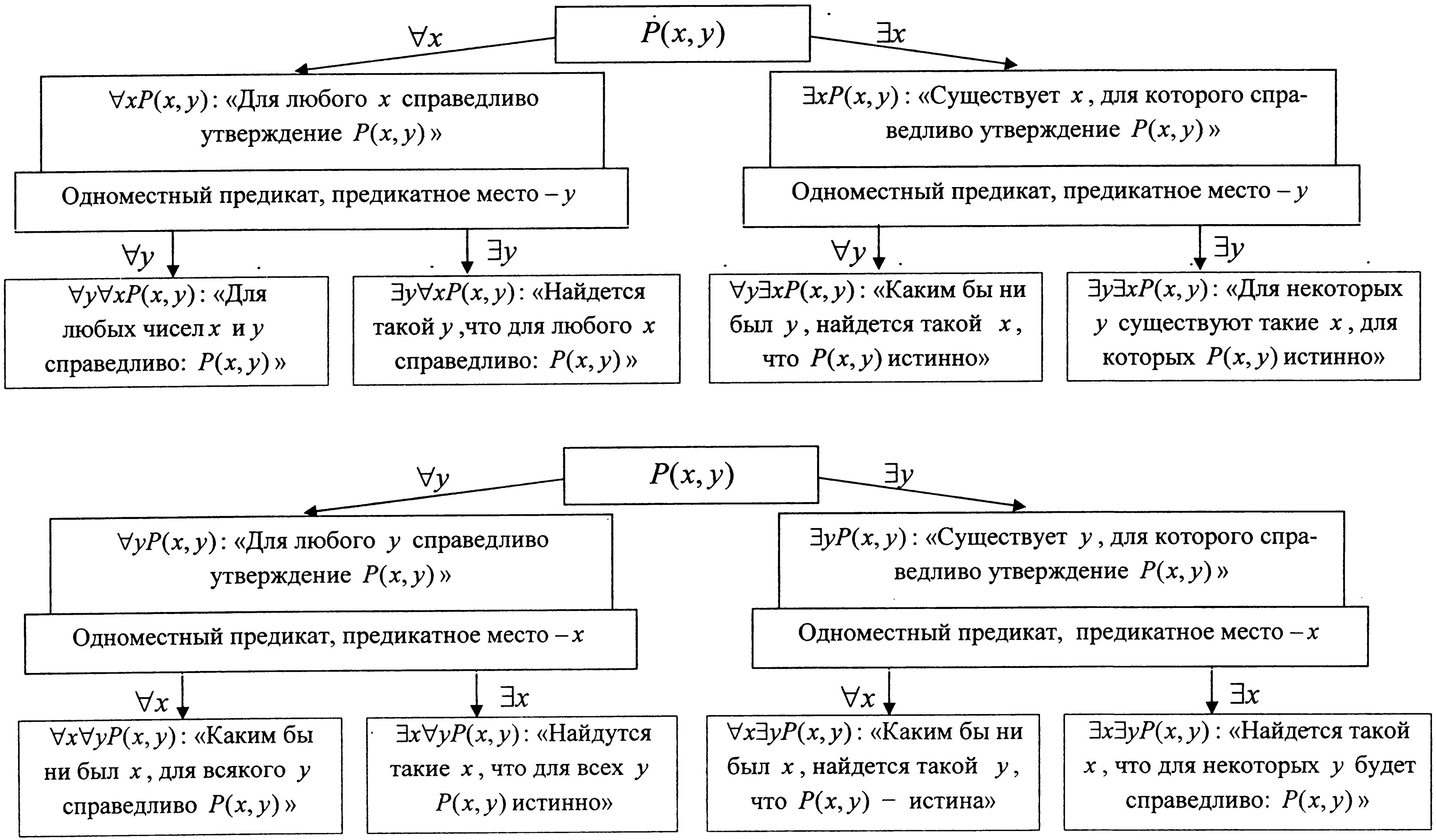


Рис. 2.11. Схема связывания кванторами произвольного двуместного предиката $P(x,y)$

Операция связывания выполняется по действиям:

1. Связывание одной из двух переменных.

Поскольку переменных две и кванторных операций тоже две, в результате получаем четыре одноместных предиката:

$\forall x P(x,y)$ – одноместный предикат с переменной y;

$\exists x P(x,y)$ – одноместный предикат с переменной y;

$\forall y P(x,y)$ – одноместный предикат с переменной x;

$\exists y P(x,y)$ – одноместный предикат с переменной x.

2. Связывание оставшейся переменной.

Применяя к каждому из четырех различных одноместных предикатов по две кванторные операции, получаем восемь различных высказываний с кванторами:

$$\forall y \forall x P(x,y),\ \exists y \forall x P(x,y),\ \forall y \exists x P(x,y),\ \exists y \exists x P(x,y);$$

$$\forall x \forall y P(x,y),\ \exists x \forall y P(x,y),\ \forall x \exists y P(x,y),\ \exists x \exists y P(x,y).$$

Справедливы следующие *утверждения*:

1. Результатом последовательного выполнения двух кванторных операций над двуместным предикатом $P(x,y)$ является истинное или ложное высказывание.

2. Если истинно высказывание $\forall x \forall y P(x,y)$, то высказывание $\exists x \exists y P(x,y)$ также истинно; если $\forall x \forall y P(x,y)$ ложно, то $\exists x \exists y P(x,y)$ может быть как ложным, так и истинным. Следовательно, $\forall x \forall y P(x,y) \le \exists x \exists y P(x,y)$ для любого двуместного предиката.

3. Результат связывания переменных различными кванторами зависит от того, какая из переменных связана первой. В общем случае $\forall x \exists y \ne \exists y \forall x$, $\exists x \forall y \ne \forall y \exists x$.

4. Если порядок связывания не меняется, то результат зависит от порядка следования кванторов. В общем случае $\forall x \exists y \ne \exists x \forall y$.

При построении отрицаний с двумя кванторами следует использовать записанные ранее *правило 1* и *правило 2.*

Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ действуют те же *правила* и *утверждения*, что и для одно- и двуместных предикатов.

В табл. 2.16 представлены все отмеченные ранее свойства и правила выполнения кванторных операций. Пусть p – высказывание, $P(x)$ и $Q(x)$ – одноместные предикаты, $P(x,y)$ – двуместный предикат.

Таблица 2.16

Свойства и правила выполнения кванторных операций

№ п/п	Название свойств и правил	Формульная запись свойства
1	Коммутативность порядка квантования одноименными кванторами	$\forall x \forall y P(x,y) = \forall y \forall x P(xy)$
		$\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(xy)$
2	Некоммутативность разноименных кванторов	$\forall x \exists y P(x,y) \neq \exists x \forall y P(xy)$
		$\exists x \forall y P(x,y) \neq \forall x \exists y P(xy)$
3	Некоммутативность порядка квантования разноименными кванторами	$\forall x \exists y P(x,y) \neq \exists y \forall x P(xy)$
		$\exists x \forall y P(x,y) \neq \forall y \exists x P(xy)$
4	Правило записи отрицания	$\overline{\forall x \exists y P(x,y)} = \exists x \forall y \overline{P}(x,y)$
5	Правила квантования конъюнкции	$p \wedge (\forall x P(x)) = \forall x (p \wedge P(x))$
		$p \wedge (\exists x P(x)) = \exists x (p \wedge P(x))$
6	Правила квантования дизъюнкции	$p \vee (\forall x P(x)) = \forall x (p \vee P(x))$
		$p \vee (\exists x P(x)) = \exists x (p \vee P(x))$
7	Правила квантования импликации	$p \to \forall x P(x) = \forall x (p \to P(x))$
		$p \to \exists x P(x) = \exists x (p \to P(x))$
		$\exists x (P(x) \to p) = \exists x P(x) \to p$
		$\forall x (P(x) \to p) = \exists x (p \to P(x))$
8	Правило порядка	$\forall x \forall y P(x,y) \leq \exists x \exists y P(x,y)$
9	Дистрибутивность квантования относительно конъюнкции и дизъюнкции	$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) = \exists x (P(x) \vee Q(x))$
		$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) = \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
		$\exists x P(x)) \wedge \exists y Q(y)) = \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$

2.5.4. Применение языка логики предикатов в математике

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства.

Приведем примеры записи определений математического анализа в виде предикатных формул[1]:

1) *определение предела числовой последовательности* «число a есть предел последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число n_0, что для всех натуральных чисел n из выполнения неравенства $n > n_0$ следует, что $|a_n - a| < \varepsilon$» запишем следующим образом:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \xrightarrow{def} \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \big(n > n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon\big),$$

где $n, n_0 \in N$, $\varepsilon \in R$, a_n – член последовательности с номером n; предикат $P(n, n_0, \varepsilon)$: $\big(n > n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon\big)$ – трехместный предикат, представляющий импликацию $P(n, n_0, \varepsilon) = P(n, n_0) \to Q(n, \varepsilon)$ двуместных предикатов $P(n, n_0) : n > n_0$, $Q(n, \varepsilon) : |a - a_n| < \varepsilon$;

2) *определение возрастающей функции*: «$f(x)$ есть возрастающая на множестве E функция, *если для любого числа* x_1 *из множества* E *и любого числа* x_2 *из этого же множества неравенство* $x_1 < x_2$ *влечет за собой неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$». В данном определении текст, выделенный курсивом, можно записать в виде высказывания с кванторами:

$$f(x) \uparrow (x \in E) \xrightarrow{def} \forall x_1 \forall x_2 \big((x_1 \in E) \wedge (x_2 \in E) \wedge (x_1 < x_2) \to f(x_1) < f(x_2)\big),$$

где предикат $P(x_1, x_2) : \big((x_1 \in E) \wedge (x_2 \in E) \wedge (x_1 < x_2) \to f(x_1) < f(x_2)\big)$ есть импликация двуместных предикатов:

$$P_1(x_1, x_2) : (x_1 \in E) \wedge (x_2 \in E) \wedge (x_1 < x_2) \text{ и } P_2(x_1, x_2) : \big(f(x_1) < f(x_2)\big).$$

Многие теоремы математики допускают формулировку в виде условных предложений, т. е. являются импликациями или эквиваленциями.

Примеры

1. Сумма углов треугольника равна 180°. В виде условного предложения теорема имеет вид: «Если T – треугольник и α, β, γ – величины его внутренних углов, то $\alpha + \beta + \gamma = 180°$».

2. Если функция имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

3. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Эту знаменитую теорему (теорему Пифагора) можно переформулировать так: «Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы квадрат длины одной из его сторон был равен сумме квадратов длин других его сторон».

---

[1] При записи определений используется символ $\xrightarrow{def}$, который читается так: «по определению…, если…».

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – предикаты, определенные на одном и том же множестве M. Их множествами истинности являются множества P и Q. На рис. 2.12 показаны все возможные соотношения между множествами P и Q.

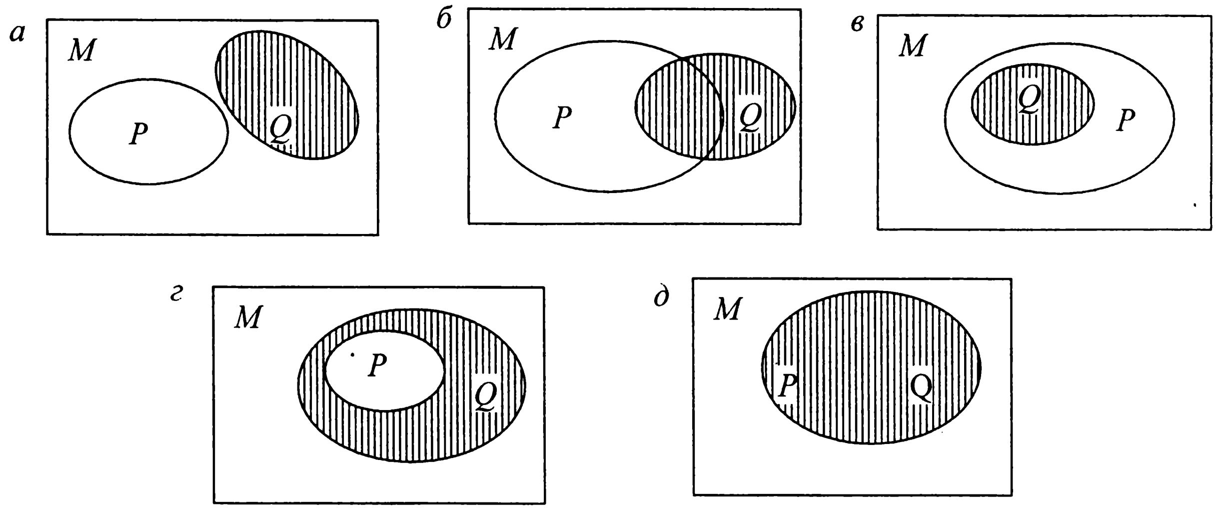


Рис. 2.12. Возможные соотношения между множествами истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, определенных на множестве M:
а – P и Q не пересекаются; *б* – P и Q имеют общие элементы; *в* – Q есть правильная часть P; *г* – P есть правильная часть Q; *д* – P равно Q

Составим из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ четыре импликации:

$P(x) \to Q(x)$ – прямая импликация;

$Q(x) \to P(x)$ – обратная импликация;

$\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ – противоположная импликация;

$\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ – импликация обратная противоположной.

Вспомним вывод, полученный в п. 2.5.2: импликация предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда множество истинности условия импликации является подмножеством множества истинности ее заключения.

Опираясь на этот вывод, можно утверждать, что прямая импликация $P(x) \to Q(x)$ является тавтологией, если $P \subseteq Q$ (рис. 2.12, *г* и 2.12, *д*). Итак, если $P \subseteq Q$, то $P(x) \to Q(x)$ является тождественно истинным предикатом, а значит, является истинным общеутвердительное высказывание

$$\forall x(P(x) \to Q(x)).$$

Если $P \subseteq Q$, то предикат $P(x)$ является *достаточным условием* для предиката $Q(x)$. Прочитать импликацию $P(x) \to Q(x)$ в этом случае можно любым из следующих способов:

1) $P(x) \to Q(x)$: «Если $P(x)$, то $Q(x)$»;

2) $P(x) \to Q(x)$: «Из $P(x)$ следует $Q(x)$»;

3) $P(x) \to Q(x)$: «Для $Q(x)$ достаточно условия $P(x)$».

Однако тождественная истинность прямой импликации отнюдь не влечет за собой тождественной истинности обратной импликации $Q(x) \to P(x)$. В самом деле, если $P \subseteq Q$ (см. рис. 2.11, *г*), то имеются такие значения x, при которых $Q(x)$ – истина, а $P(x)$ – ложь. Для этих значений x импликация $Q(x) \to P(x)$ является ложной. В этом случае предикат $Q(x)$ является *необходимым условием* предиката $P(x)$ и прочитать импликацию $Q(x) \to P(x)$ следует именно с использованием слова «необходимо»: «Для того, чтобы выполнялось $P(x)$, необходимо, чтобы выполнялось $Q(x)$». Построенное из такой импликации общеутвердительное высказывание будет ложным: $\forall x(Q(x) \to P(x))$ – ложь, а частноутвердительное – истинным: $\exists x(Q(x) \to P(x))$ – истина.

Как известно, теоремы часто содержат *необходимые и достаточные условия*. Чтобы доказать такую теорему, надо доказать тождественную истинность как прямой, так и обратной импликации. В этом случае оказывается тавтологией эквиваленция предикатов: $P(x) \leftrightarrow Q(x)$, т. е. истинно общеутвердительное высказывание, построенное из эквиваленции: $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ – истина.

С помощью таблиц истинности легко доказать равносильности импликаций:

$$P(x) \to Q(x) = \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x);$$

$$Q(x) \to P(x) = \overline{P}(x) \to \overline{Q}(x).$$

На этих равенствах основан метод *доказательства от противного*. Если прямую теорему $P(x) \to Q(x)$ доказать сложно, можно попытаться доказать терему, обратную противоположной: $\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$, предварив доказательство словами: «Предположим, что $Q(x)$ – ложно, и покажем, что $P(x)$ в этом случае также будет ложным». Если удается доказать теорему $\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$, то оказывается доказанной и прямая теорема $P(x) \to Q(x)$.

Запишем *выводы*, вытекающие из этих рассуждений.

1. Теорема представляет собой общеутвердительное или частноутвердительное высказывание, полученное из импликации или эквиваленции предикатов.

2. Чтобы доказать истинность частноутвердительного высказывания, достаточно привести один пример, подтверждающий истинность импликации. Чтобы доказать ложность (ошибочность) общеутвердительного высказывания, достаточно привести один контрпример, подтверждающий ложность импликации.

3. Если теорема есть общеутвердительное высказывание, полученное из импликации, то условие теоремы является достаточным условием для ее заключения, но, возможно, не является необходимым условием. Если же при формулировке теоремы использован квантор существования, то условие теоремы является необходимым, но, возможно, не является достаточным.

4. Если тождественно истинна прямая и обратная импликация теоремы, то условие теоремы является необходимым и достаточным. В этом случае при записи теоремы может быть использована эквиваленция предикатов.

5. Доказательство прямой теоремы можно заменить доказательством теоремы, обратной противоположной. Этот метод носит название доказательства от противного.

Пример

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Переформулируем теорему в виде условного предложения: «Пусть x – плоский выпуклый четырехугольник, a и b – отрезки. Если x – ромб и a, b – диагонали x, то a и b взаимно перпендикулярны».

Первое предложение в этой формулировке является описанием множеств значений переменных: $x \in M$, $a, b \in A$, где M – множество плоских выпуклых четырехугольников, A – множество отрезков. Это предложение называют *преамбулой теоремы*.

Условие теоремы представляет собой конъюнкцию одноместного и двуместных предикатов: $P(x) \wedge Q(a,x) \wedge H(b,x)$, где $P(x)$: «x – ромб», $Q(a,x)$: «a – диагональ x», $H(b,x)$: «b – диагональ x». Предикат $P(x) \wedge Q(a,x) \wedge H(b,x)$ задан на множестве $M \times A^2$. Заключение теоремы – предикат $G(a,b)$: «a и b взаимно перпендикулярны», заданный на множестве A^2.

Прямая теорема имеет вид: $\forall x, \forall a, \forall b \left(P(x) \wedge Q(a,x) \wedge H(b,x) \to G(a,b)\right)$.

Обратная теорема: $\forall x, \forall a, \forall b \left(G(a,b) \to P(x) \wedge Q(a,x) \wedge H(b,x)\right)$ – «Из перпендикулярности отрезков a и b следует, что они являются диагоналями ромба». Утверждение неверное, легко привести контрпример ложности импликации.

Противоположная теорема: $\forall x, \forall a, \forall b \left(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(a,x) \vee \overline{H}(b,x) \to \overline{G}(a,b)\right)$ – «Если четырехугольник x не является ромбом или отрезки a и b не есть диагонали x, то a и b не перпендикулярны друг другу». Утверждение неверное, легко привести контрпример ложности импликации.

Теорема, противоположная обратной: $\forall x, \forall a, \forall b \left(\overline{G}(a,b) \to \overline{P}(x) \vee \overline{Q}(a,x) \vee \vee \overline{H}(b,x)\right)$ – «Если отрезки a и b не перпендикулярны друг другу, то либо четырехугольник x, диагоналями которого они являются, не ромб, либо хотя бы один из них не является диагональю x». Утверждение истинное.

Условие прямой теоремы является условием достаточным, но не необходимым; условие обратной теоремы является условием необходимым, но не достаточным.

2.6. Силлогизмы

Суждение в логике – это умственное построение, выраженное в словах, которое может быть оценено с точки зрения истинности или ложности. Одна из задач логики – сформулировать правила, с помощью которых из известных, простых суждений – посылок, можно сформулировать новое суждение – заключение, несущее в себе новое знание. При этом истинность посылок должна быть очевидной, а истинность заключения – обеспечена формой рассуждения. Последовательность суждений, ведущая от посылок к заключению, называется в логике ***умозаключением***.

Умозаключения бывают индуктивные и дедуктивные. Посылки индуктивных умозаключений касаются частных или отдельных фактов, но собранные вместе, они позволяют сделать заключение относительно общего понятия. В математике широко применяется *метод математической индукции*, позволяющий перейти от единичных закономерностей к бесконечности. В дедуктивном умозаключении посылки носят общий характер, а заключение вытекает из них как более частный случай. Простейшая и в то же время важнейшая *форма дедуктивного умозаключения – силлогизм*.

Силлогизм есть такая форма умозаключения, в которой из двух суждений необходимо вытекает третье[1].

Учение о силлогизме разработано Аристотелем. В настоящее время теория силлогизма полностью формализована и является частью математической логики. В *математической логике* суждение – это высказывание. Все высказывания представляют собой суждения о тех или иных объектах.

---

[1] *Челпанов Г. И.* Учебник логики [Электронный ресурс]. URL: http://www.koob.ru/chelpanov/. uchebnik_logiki.

Перефразируем логическое определение силлогизма в терминах математической логики: ***силлогизм** есть сложное истинное высказывание, в котором истинность двух высказываний (посылок) влечет за собой истинность третьего высказывания – заключения.*

Посылки и заключение силлогизма строятся как общеутвердительные или частноутвердительные высказывания. Напомним, что такие высказывания получаются из предикатов путем связывания переменных кванторами. Как уже было показано, понятие предиката соединяет математическую логику и теорию множеств. Пусть U – универсальное множество, $\mathcal{P}(U)$ – булеан, $\Pi(x)$ – предикат, заданный на множестве U, P и $\overline{P}$ – его множество истинности и множество ложности. Очевидно, что каково бы ни было смысловое содержание предиката $\Pi(x)$, он эквивалентен предикату $P(x)$: $x \in P$, определенному на том же множестве U. Таким образом, рассмотрение всех возможных предикатов на множестве U можно свести к рассмотрению предикатов вида $x \in P$, где $P \in \mathcal{P}(U)$.

Чтобы построить силлогизм, необходимо иметь две посылки, т. е. два частноутвердительных или общеутвердительных высказывания, образованных из двух предикатов. Пусть это будут предикаты $P(x): x \in P$ и $Q(x): x \in Q$ $(P, Q \in \mathcal{P}(U))$. Множества P и Q могут находиться друг относительно друга в различных соотношениях (прил. 4).

В таблице соотношений между множествами и соответствующих этим соотношениям высказываний с кванторами (см. прил. 4) даны общепринятые обозначения таких соотношений или, что то же самое, таких высказываний. Например, символ $I(P,Q)$ обозначает как соотношение между множествами – $P \cap Q \neq \varnothing$, так и высказывание с квантором существования – $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

В определении силлогизма отмечено, что он связывает между собой три суждения. В формировании этих суждений как высказываний с кванторами участвуют три предиката или три множества. Пусть это будут множества P, Q и H. Им соответствуют предикаты $P(x)$, $Q(x)$ и $H(x)$.

Со времен Аристотеля известны четыре вида связи внутри этих «троек», которые называются *фигурами силлогизма.* Существование связи между верхними символами фигуры – P и Q – и нижними ее символами – P и H – обеспечивает связь определенного типа между симлами H и Q. Тип связи принято обозначать в виде геометрических и логических схем (см. прил. 4). Например, логическая схема $\dfrac{\begin{matrix}(Q,P)\\(H,P)\end{matrix}}{\therefore (H,Q)}$ означает, что соотношения (Q,P) и (H,P) с необходимостью влекут за собой (знак $\therefore$) соотношение между H и Q. Виды соотношений обозначают буквами A, E, I или O. Каждую из этих букв (A, E, I, O) можно записать в каждую строку схемы любой из фигур силлогизма. Например, из схемы $\dfrac{\begin{matrix}(Q,P)\\(H,P)\end{matrix}}{\therefore (H,Q)}$ можно получить следующие виды силлогизмов:

$$\frac{\begin{matrix}A(Q,P)\\A(H,P)\end{matrix}}{\therefore A(H,Q)},\quad \frac{\begin{matrix}E(Q,P)\\A(H,P)\end{matrix}}{\therefore A(H,Q)},\quad \frac{\begin{matrix}A(Q,P)\\I(H,P)\end{matrix}}{\therefore O(H,Q)},\quad \frac{\begin{matrix}O(Q,P)\\A(H,P)\end{matrix}}{\therefore E(H,Q)},\quad \frac{\begin{matrix}E(Q,P)\\E(H,P)\end{matrix}}{\therefore E(H,Q)}\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, из каждой схемы можно получить 64 силлогизма, а следовательно, всего существует 64×4 = 256 различных видов силлогизма. Однако большинство из них не несут в себе нового знания и давно отвергнуты учеными. Приняты и широко используются 19 видов, или модусов, силлогизма (см. прил. 4).

Для запоминания модусов различных фигур силлогизма издавна используется стихотворение, написанное гекзаметром на латыни:

bArbArA, cElArEnt, dArII, fErIOke prioris,
cEsArE, cAmEstrEs, fEstInO, bArOkO, secundae,
tertia, *dArAptI, dIsAmIs, dAtIsI, fElAptOn, bOcArdO, fErIsOn* habet,
Quarta insupper addit *brAmAntIp, cAmEnTs, dImArIs, fEsApO, frEsIsOn.*

Каждая строка стихотворения соответствует фигуре силлогизма, собственные имена (выделены курсивом) соответствуют модусам фигуры. Заглавные буквы в каждом имени составляют модус. Чаще всего используются названия силлогизмов, взятые именно из этого стихотворения.

Приведем примеры различных видов силлогизма.

Пример 1

$$\text{Силлогизм } barbara: \quad \frac{\begin{matrix} A(P,Q) \\ A(H,P) \end{matrix}}{\therefore A(H,Q)} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} P \subseteq Q \\ H \subseteq P \end{matrix}}{\therefore H \subseteq Q} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \forall x(H(x) \to P(x)) \end{matrix}}{\therefore \forall x(H(x) \to Q(x))}.$$

P – множество хищных животных;

Q – множество животных, питающихся мясом;

H – множество тигров.

$$\frac{\begin{matrix} \textit{все хищные животные питаются мясом} \\ \textit{тигр – хищное животное} \end{matrix}}{\therefore \textit{тигр питается мясом}}$$

Пример 2

$$\text{Силлогизм } celarent: \quad \frac{\begin{matrix} E(P,Q) \\ A(H,P) \end{matrix}}{\therefore E(H,Q)} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} P \cap Q = \varnothing \\ H \subseteq P \end{matrix}}{\therefore H \cap Q = \varnothing} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} \forall x(P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)) \\ \forall x(H(x) \to P(x)) \end{matrix}}{\therefore \forall x(H(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x))}.$$

P – множество насекомых;

Q – множество животных, имеющих более трех пар ножек;

H – множество пчел.

$$\frac{\begin{matrix} \textit{любое насекомое имеет не более трех пар ножек} \\ \textit{пчела – насекомое} \end{matrix}}{\therefore \textit{пчела имеет не более трех пар ножек}}$$

Пример 3

$$\text{Силлогизм } ferio: \quad \frac{\begin{matrix} E(P,Q) \\ I(H,P) \end{matrix}}{\therefore O(H,Q)} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} P \cap Q = \varnothing \\ H \cap P \neq \varnothing \end{matrix}}{\therefore H \setminus Q \neq \varnothing} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} \forall x(P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)) \\ \exists x(H(x) \wedge P(x)) \end{matrix}}{\therefore \exists x(H(x) \wedge \overline{Q}(x))}.$$

P – множество невменяемых;

Q – множество людей, подлежащих наказанию;

H – множество преступников.

$$\frac{\begin{matrix} \textit{Ни один невменяемый не подлежит наказанию} \\ \textit{некоторые преступника невменяемы} \end{matrix}}{\therefore \textit{некоторые преступники не подлежат наказанию}}$$

Пример 4

$$\text{Силлогизм } festino: \quad \frac{\begin{matrix} E(P,Q) \\ I(H,P) \end{matrix}}{\therefore O(H,Q)} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} P \cap Q = \varnothing \\ H \cap P \neq \varnothing \end{matrix}}{\therefore H \setminus Q \neq \varnothing} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} \forall x(P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)) \\ \exists x(H(x) \wedge P(x)) \end{matrix}}{\therefore \exists x(H(x) \wedge \overline{Q}(x))}.$$

P – множество суеверных людей;

Q – множество благоразумных людей;

H – множество образованных людей.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{любой суеверный человек неблагоразумен}\\ \textit{есть люди, которые образованы, но суеверны}\end{array}}{\therefore \textit{некоторые образованные люди неблагоразумны}}$$

Обратимся к теореме, которая позволяет строить не только истинные суждения в форме того или иного модуса силлогизма, но и умозаключения другого вида.

Основная теорема логического вывода[1]. Формула R является логическим следствием формул $F_1, F_2, ..., F_n$ тогда и только тогда, когда формула $F_1, F_2, ..., F_n \to R$ есть тавтология[1].

Рассмотрим на примерах возможности приложения этой теоремы к модусам и фигурам силлогизма.

Пример 1

Силлогизм *darii*.

$$\frac{\begin{array}{l}A(P,Q)\\ I(H,P)\end{array}}{\therefore I(H,Q)} \Rightarrow \frac{\begin{array}{l}P \subseteq Q\\ H \cap P \neq \varnothing\end{array}}{\therefore H \cap Q \neq \varnothing} \Rightarrow (\forall x(x \in P \to x \in Q) \wedge \exists x(x \in H \wedge x \in P)) \to (\exists x(x \in H \wedge x \in Q).$$

Составим таблицу истинности предикатов, входящих в силлогизм.

μ_P	μ_Q	μ_H	$x \in P \to x \in Q$	$x \in H \wedge x \in P$	$x \in H \wedge x \in Q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1
–	–	–	$F_1 =$ $\forall x(x \in P \to x \in Q) = 0$	$F_2 =$ $= \exists x(x \in H \wedge x \in P) = 1$	$R =$ $= \exists x(x \in H \wedge x \in Q) = 1$

Поясним последнюю строку таблицы.

$F_1 = \forall x(x \in P \to x \in Q) = 0$, поскольку существуют нулевые наборы значений предиката: (100) и (101).

---

[1] Основная теорема логического вывода и ее доказательство представлены в кн.: *Карпов Ю. Г.* Теория автоматов. СПб.: Питер, 2003. С. 57.

$F_2 = \exists x(x \in H \wedge x \in P) = 1$, так как имеется единичный набор значений предиката: (111).

$R = \exists x(x \in H \wedge x \in Q) = 1$, так как имеются единичные наборы значений предиката: (011) и (111).

Таким образом, при любом значении x импликация

$$(\forall x(x \in P \to x \in Q) \wedge \exists x(x \in H \wedge x \in P)) \to (\exists x(x \in H \wedge x \in Q)$$

истинна: $F_1 \wedge F_2 \to R = 0 \wedge 1 \to 1 = 1$.

Следовательно, согласно *основной теореме логического вывода*, предикат $R = \exists x(x \in H \wedge x \in Q)$ является логическим следствием посылок $F_1 = \forall x(x \in P \to x \in Q)$ и $F_2 = \exists x(x \in H \wedge x \in P)$.

Пример 2

Силлогизм *festino*.

$$\begin{array}{lcl} E(Q,P) & & P \cap Q = \varnothing & \\ I(H,P) & \Rightarrow & H \cap P \neq \varnothing & \Rightarrow (\forall x(x \in P \leftrightarrow x \notin Q) \wedge \exists x(x \in H \wedge x \in P)) \to (\exists x(x \in H \wedge x \notin Q). \\ \hline \therefore O(H,Q) & & \therefore H \setminus Q \neq \varnothing & \end{array}$$

Составим таблицу истинности предикатов, входящих в силлогизм.

μ_P	μ_Q	μ_H	$x \in P \leftrightarrow x \notin Q$	$x \in H \wedge x \in P$	$x \in H \wedge x \notin Q$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0
–	–	–	$F_1 =$ $\forall x(x \in P \leftrightarrow x \notin Q) = 0$	$F_2 =$ $= \exists x(x \in H \wedge x \in P) = 1$	$R =$ $= \exists x(x \in H \wedge x \in P) = 1$

Пояснения полностью аналогичны пояснениям в примере 1. Здесь запишем только результат и вывод.

При любом значении x импликация

$$(\forall x(x \in P \to x \notin Q) \wedge \exists x(x \in H \wedge x \in P)) \to (\exists x(x \in H \wedge x \notin Q)$$

истинна: $F_1 \wedge F_2 \to R = 0 \wedge 1 \to 1 = 1$.

Следовательно, согласно *основной теореме логического вывода*, предикат $R = \exists x(x \in H \wedge x \notin Q)$ является логическим следствием посылок $F_1 = \forall x(x \in P \to x \notin Q)$ и $F_2 = \exists x(x \in H \wedge x \in P)$.

Пример 3

Силлогизм *felapton.*

$$\begin{array}{ccccl} E(P,Q) & & P\cap Q=\varnothing & & \\ \underline{A(P,H)} & \Rightarrow & \underline{P\subseteq H} & \Rightarrow & (\forall x(x\in Q\leftrightarrow x\notin P)\wedge\forall x(x\in P\to x\in H))\to(\exists x(x\in H\wedge x\notin Q). \\ \therefore O(H,Q) & & \therefore H\setminus Q\neq\varnothing & & \end{array}$$

Составим таблицу истинности предикатов, входящих в силлогизм.

μ_P	μ_Q	μ_H	$x\in P\leftrightarrow x\notin Q$	$x\in P\to x\in H$	$x\in H\wedge x\notin Q$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0
–	–	–	$F_1=$ $=\forall x(x\in P\leftrightarrow x\notin Q)=0$	$F_2=$ $=\forall x(x\in P\to x\in H)=0$	$R=$ $=\exists x(x\in H\wedge x\notin Q)=1$

Таким образом, при любом значении x импликация

$$(\forall x(x\in Q\leftrightarrow x\notin P)\wedge\forall x(x\in P\to x\in H))\to(\exists x(x\in H\wedge x\notin Q)$$

истинна: $F_1\wedge F_2\to R=0\wedge 0\to 1=1$.

Следовательно, согласно *основной теореме логического вывода*, предикат $R=\exists x(x\in H\wedge x\notin Q)$ является логическим следствием посылок $F_1=\forall x(x\in P\leftrightarrow x\notin Q)$ и $F_2=\forall x(x\in P\to x\in H)$.

Опираясь на основную теорему логического вывода, а также на математические свойства логических операций, можно преобразовывать имплицитные высказывания[1].

Пусть имеем высказывание $F_1\wedge F_2\to R$, которое является тождественно истинным. Заменим импликацию дизъюнкцией и применим закон де Моргана[2]:

$$F_1\wedge F_2\to R=\overline{F_1\wedge F_2}\vee R=\overline{F_1}\vee\overline{F_2}\vee R.$$

Поскольку дизъюнкция коммутативна и ассоциативна, можно получить следующие имплицитные высказывания, которые тоже будут тождественно истинными:

---

[1] Имплицитным высказыванием будем называть высказывание вида $F_1,F_2,...,F_n\to R$, где $F_1,F_2,...,F_n$ – посылки импликации, а R – их логическое следствие.

[2] См. табл. 2.6.

$\overline{F}_1 \vee (\overline{F}_2 \vee R) = F_1 \to (\overline{F}_2 \vee R)$;

$\overline{F}_2 \vee (\overline{F}_1 \vee R) = F_2 \to (\overline{F}_1 \vee R)$;

$R \vee (\overline{F}_1 \vee \overline{F}_2) = \overline{R} \to \overline{F}_1 \vee \overline{F}_2)$;

$(R \vee \overline{F}_1) \vee \overline{F}_2 = \overline{R \vee \overline{F}_1} \to \overline{F}_2 = \overline{R} \wedge F_1 \to \overline{F}_2$;

$(R \vee \overline{F}_2) \vee \overline{F}_1 = \overline{R \vee \overline{F}_2} \to \overline{F}_1 = \overline{R} \wedge F_2 \to \overline{F}_1$.

Пример

Рассмотрим силлогизм S: «Ни одна несправедливая война не может быть оправдана. Некоторые несправедливые войны были успешны. Следовательно, некоторые успешные войны не могут быть оправданы».

Выделим предикаты данного силлогизма:

$P(x)$: «x – несправедливая война»;

$Q(x)$: «война x – может быть оправдана»;

$H(x)$: «x – успешная война».

Посылки силлогизма:

F_1: «Ни одна несправедливая война не может быть оправдана»,

$F_1 = \forall x(P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)) = \forall x(P(x) \to \overline{Q}(x)) \wedge (\overline{Q}(x) \to P(x))$;

F_2: «Некоторые несправедливые войны были успешны», $F_2 = \exists x(P(x) \wedge H(x))$.

Заключение силлогизма:

R: «Некоторые успешные войны не могут быть оправданы», $R = \exists x(H(x) \wedge \overline{Q}(x))$.

Получаем: $S = F_1 \wedge F_2 \to R$.

Составим отрицания посылок и заключения:

$\overline{F}_1 = \overline{\forall x(P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x))} = \exists x(\overline{\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x)) \wedge (Q(x) \vee P(x)}) = \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\overline{Q}(x) \wedge \overline{P}(x))$,

$\overline{F}_1$: «Бывают несправедливые войны, которые могут быть оправданы, а бывают войны справедливые, но которые нельзя оправдать».

$\overline{F}_2 = \overline{\exists x(P(x) \wedge H(x))} = \forall x(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x))$: «Все справедливые войны были неуспешны».

$\overline{R} = \overline{\exists x(H(x) \wedge \overline{Q}(x))} = \forall x(\overline{H}(x) \vee Q(x))$: «Все неуспешные войны могут быть оправданы».

Составим тексты истинных имплицитных высказываний:

$F_1 \to (\overline{F}_2 \vee R)$: «Если ни одна несправедливая война не может быть оправдана, то все справедливые войны были неуспешны или некоторые успешные войны не могут быть оправданы»;

$F_2 \to (\overline{F}_1 \vee R)$: «Некоторые несправедливые войны были успешны. Отсюда следует, что могут быть оправданы несправедливые войны или же бывают войны справедливые или успешные, но которые нельзя оправдать».

$\overline{R} \to \overline{F}_1 \vee \overline{F}_2$: «Если все успешные войны могут быть оправданы, то можно оправдать некоторые несправедливые войны или бывают справедливые войны, которые оправдать нельзя, или же любая справедливая война неуспешна».

$\overline{R} \wedge F_1 \to \overline{F}_2$: «Если можно оправдать все неуспешные войны и нельзя оправдать ни одну несправедливую войну, то все справедливые войны были неуспешны».

$\overline{R} \wedge F_2 \to \overline{F}_1$: «Можно оправдать все неуспешные войны. Некоторые успешные войны бывают несправедливыми. Отсюда следует, что некоторые несправедливые войны можно оправдать или, напротив, некоторые справедливые войны оправдать нельзя».

Вопросы и задания для самопроверки

1. Перечислите способы задания множеств, дайте характеристику каждого способа.

2. Запишите $\mathcal{P}(A) = 2^4$.

3. Постройте диаграмму отношений включения между подмножествами четырехэлементного множества A.

4. Постройте диаграмму Эйлера-Венна, изображающую цепочку включений $A \subset B \subset C$; запишите двоичные номера каждой подобласти диаграммы.

5. Дайте определения операций дополнения, пересечения и объединения на булеане; запишите таблицы значений характеристических функций этих операций.

6. Докажите с помощью таблиц значений характеристических функций свойства дистрибутивности, нуля, единицы и порядка операций пересечения и объединения.

7. Докажите равенства, связывающие операцию объединения с операцией кольцевая сумма: 1) $A \oplus B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, 2) $A \cup B = A \oplus B \oplus (A \cap B)$.

8. Обладают ли операции объединения и пересечения множеств дистрибутивностью относительно вычитания множеств? Ответ обоснуйте.

9. Дайте словесные комментарии к доказательствам дистрибутивности операций пересечения и объединения.

10. Запишите множества $A \setminus B \setminus C$ и $A \oplus (B \setminus C)$, используя операции дополнения, пересечения и объединения множеств.

11. Докажите, что значение характеристической функции кольцевой суммы $\mu_{A \oplus B}$ не зависит от того, какие из правил вычисления использованы – логическое произведение и операция максимум или алгебраическое произведение и вероятностная сумма.

12. Покажите, что на булеане 2^N уравнение $A \oplus X = B$ имеет единственное решение при любых $A, B \in 2^N$, а уравнение $A \cup X = B$ имеет решение только при условии $A = \varnothing$.

13. Определите во множестве B^N операцию кольцевой суммы.

14. Приведите по пять примеров истинных и ложных высказываний.

15. Приведите примеры одно-, дву- и трехместного предиката и укажите их множества значений и множества истинности.

16. Дайте определения формулы и равносильности формул логики высказываний.

17. Сформулируйте и докажите десять из шестнадцати законов логики высказываний.

18. Приведите три примера замены формулы, содержащей импликацию, сначала дизъюнктивной нормальной формой, затем конъюнктивной нормальной формой.

19. Приведите три примера замены формулы, содержащей эквиваленцию, сначала дизъюнктивной нормальной формой, затем конъюнктивной нормальной формой.

20. Приведите три примера тавтологий и докажите, что приведенные высказывания тождественно истинны.

21. Приведите три примера тождественно ложных высказываний и докажите, что они тождественно ложны.

22. Приведите пример двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, множества значений которых равны друг другу: $M_1 = M_2 = M$, а множества истинности различны: $P \neq Q$.

23. Над полученными предикатами $P(x)$ и $Q(x)$ выполните операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции, кольцевой суммы. Найдите множество истинности каждого составного предиката.

24. Приведите примеры импликаций и эквиваленций:

а) $P(x) \to Q(x)$, $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ $(x \in M)$;

б) $P(x,y) \to Q(x,y)$, $P(x,y) \leftrightarrow Q(x,y)$ $(x,y \in M^2)$;

в) $P(x,y,z) \to Q(x,y,z)$, $P(x,y,z) \leftrightarrow Q(x,y,z)$ $(x,y,z \in M^3)$.

25. Выполните с предикатами $P(x) \to Q(x)$, $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ $(x \in M)$, $P(x,y) \to Q(x,y)$, $P(x,y) \leftrightarrow Q(x,y)$ $(x,y \in M^2)$ все кванторные операции и прочитайте полученные высказывания.

26. Сформулируйте необходимое и достаточное условие тождествен-

ной истинности импликации и эквиваленции предикатов.

27. Запишите следующие равенства в виде условных предложений с кванторами:

а) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

б) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;

в) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Сформулируйте обратные, противоположные и противоположные обратным условные предложения.

3. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

3.1. Классификация и порядок

Понятие «классификация» знакомо каждому. Классификация – это разбиение множества всех изучаемых объектов на непересекающиеся подмножества – классы. Свойство (или набор свойств) объектов, с помощью которого произведена классификация, называется *основанием классификации*. Например, множество студентов, обучающихся в вузе, разбивается на учебные группы. Студенты A и B, попавшие в одну группу, связаны друг с другом отношением: «Студент A учится в той же группе, что и студент B». Если студент C – это студент другой группы, то высказывание: «Студент A учится в той же группе, что и студент C» является ложным. Основанием классификации в данном случае служат распоряжения декана о зачислении студентов в ту или иную группу.

Пусть классифицируются элементы множества U. Множество U распадается на классы: $E_1, E_2, ..., E_n$, причем $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = U$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Элементы, попавшие в один класс, *эквивалентны* друг другу, т. е. неразличимы с точки зрения основания классификации. Любой из элементов является *представителем* своего класса и обладает всеми свойствами этого класса (в рамках основания классификации). Отношение между элементами одного класса называют *отношением эквивалентности*, классы – *классами эквивалентности*. Множество всех классов эквивалентности называют *фактор-множеством* множества U и обозначают U/E.

Элементы множества можно не только классифицировать, но и сравнивать между собой, выстраивать по порядку. Отношения порядка, как правило, обозначаются символами «$\leq$», «$\geq$», «<», «>» и т. п. Множество, на котором задано отношение порядка, называют *упорядоченным*. Упорядоченное множество называют *порядковой структурой*.

Рассмотрим пример.

Пример

Мы уже говорили о том, что любое рациональное число можно записать обыкновенной дробью и что положительное рациональное число можно рассматривать как результат измерения длины отрезка, соизмеримого с единичным отрезком.

Запишем все положительные обыкновенные дроби в виде таблицы:

Таблица обыкновенных дробей Q_+

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & & \frac{m}{1} \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & & \frac{m}{2} \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \ldots & \frac{m}{3} \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & & \frac{m}{4} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \frac{4}{n} & & \frac{m}{n}
\end{array}$$

Из школьного курса математики известно, что обыкновенные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны друг другу, если $a = nc$ и $b = nd$: $\frac{a}{b} = \frac{nc}{nd} = \frac{c}{d}$ (выполнено сокращение дробей).

Обозначим множество всех обыкновенных положительных дробей символом Q_+.

Разобьем Q_+ на классы эквивалентности с помощью отношения $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q_+$. Пусть, например, класс $E_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{n}{n}, \ldots\right\}$, $E_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \ldots, \frac{n}{2n}, \ldots\right\}$, $E_3 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \ldots, \frac{3n}{2n}, \ldots\right\}$ и т. д. Каждый из этих классов есть одно конкретное рациональное число. Поэтому строгое определение рационального числа звучит так: рациональное число есть класс равных друг другу обыкновенных дробей. Множество рациональных чисел есть фактор множество Q_+ / E, где E – множество классов равных друг другу обыкновенных дробей. Любая дробь является представителем всего класса равных ей дробей.

Множество рациональных чисел Q_+ / E образует порядковую структуру, так как два любых различных рациональных числа можно сравнить, определив, какое из них больше, а какое меньше. Возьмем по одному представителю из различных классов: $\frac{a}{b} \in E_i$ и $\frac{c}{d} \in E_j$ ($i \neq j$). Приведем дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к общему знаменателю: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ и $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$ и сравним дроби с одинаковыми знаменателями: $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{cb}{db}$. Используем *правило: из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель* *больше.* Можно было привести дроби к одинаковому числителю: $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ и $\frac{c}{d}=\frac{ca}{da}$ и сравнить дроби с одинаковыми числителями: $\frac{ac}{bc}$ и $\frac{ca}{da}$. В этом случае надо использовать другое *правило*: *из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.*

В математике широко используются понятия «отношение», «отношение эквивалентности», «отношения порядка», «фактор-множество» и другие понятия *теории бинарных отношений*. Систематическому изложению этой теории и посвящена данная глава.

3.2. Теория бинарных отношений

3.2.1. Определение и способы задания бинарных отношений

Пусть U – какое-либо множество. Напомним, что множество всех пар вида (x,y), где $x \in X$ и $y \in Y$, называют *прямым, или декартовым, произведением множеств* X и Y и обозначают: $X \times Y$. Если $X=U$ и $Y=U$, то $X \times Y = U^2$. Множество U^2 называют прямым, или декартовым, квадратом множества U. Например, декартов квадрат множества $A=\{a, b, c\}$ – это множество всех пар элементов a, b и c:

$$A^2=\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}.$$

Определение 3.1. ***Бинарным отношением на множестве*** U называют подмножество Γ множества U^2.

Так, $\Gamma=\{(a,a), (a,c), (b,a), (b,c)\} \subset A^2$; Γ – график бинарного отношения на множестве A^2.

Примечание. Обратим внимание на то, что множество Γ имеет двойное название: «бинарное отношение» и «график бинарного отношения». Это вполне допустимо, поскольку график бинарного отношения Γ полностью определяет бинарное отношение.

Определение 3.2. Если $\Gamma \subseteq U^2$ – бинарное отношение на множестве U и $(a, b) \in \Gamma$, то элемент b $(b \in U)$ называют ***образом элемента*** a $(a \in U)$ в отношении Γ, элемент a – ***прообразом элемента*** b в отношении Γ, множество всех образов элемента a образуют ***полный образ*** этого элемента, а множество всех прообразов элемента b – ***полный прообраз*** b в отношении Γ. Множество образов всех элементов U составляют ***полный образ множества*** U, а множество прообразов всех его элементов – ***полный прообраз множества*** U в отношении Γ.

Бинарное отношение может быть задано одним из следующих способов:

1. *График бинарного отношения.* Если множество U конечно, то график Г – это список пар из множества U^2, в которых элементы соединены отношением. Если U – это часть числовой оси или вся ось, то график может быть представлен геометрически в системе координат.

2. *Характеристическое свойство бинарного отношения.* Характеристическое свойство – это свойство, определяющее характер связи между элементами в парах. Для обозначения характеристического свойства употребляется символ ρ. Например, $a\rho b$: «a старше b» (на множестве людей); $a\rho b$: «$a^2 + b^2 = 1$» (на множестве чисел) и т. п.

3. *Характеристическая функция.* Напомним, что характеристической функцией множества A называют функцию $\mu_A(x)$, заданную на универсальном множестве U и принимающую значения на множестве $\{0, 1\}$. При этом $\mu_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $\mu_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Если бинарное отношение Г задано на множестве U, то U^2 можно рассматривать как универсальное множество, а само отношение Г – как подмножество универсального множества. Поэтому характеристическая функция $\mu(x_i, x_j)$ бинарного отношения Г на множестве U может быть записана с помощью формулы

$$\mu_\Gamma(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \in \Gamma \\ 0, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \notin \Gamma \end{cases}.$$

Примечание. Обратим внимание на то, что характеристическая функция $\mu_A(x)$ ($x \in U$) множества есть функция от одного аргумента x, в то время как характеристическая функция бинарного отношения $\mu_\Gamma(x_i, x_j)$ ($(x_i, x_j) \in U^2$) есть функция от двух аргументов $(x_i,\ x_j)$.

Характеристическую функцию бинарного отношения удобно записывать в виде *матрицы бинарного отношения.*

Определение 3.3. ***Матрицей бинарного отношения*** Γ на множестве U, содержащем n элементов, называют квадратную таблицу, имеющую n строк и n столбцов, элементы которой есть значения характеристической функции $\mu_\Gamma(x_i, x_j)$ $i = 1, 2, ..., n,$ $j = 1, 2, ..., n.$

Пример

Имеем множество $A=\{a,\ b,\ c\}$. Прямой квадрат этого множества $A^2=\{(a,a),$ $(a,b),$ $(a,c),$ $(b,a),$ $(b,b),$ $(b,c),$ $(c,a),$ $(c,b),$ $(c,c)\}$ содержит 9 элементов.

Булеан $\mathcal{P}(A^2) = 2^{A^2}$ такого множества состоит из $2^9 = 1024$ подмножеств. Каждое подмножество является бинарным отношением на множестве A. Рассмотрим некоторые такие подмножества и запишем их матрицы:

$$\Gamma_\varnothing = \varnothing = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – пустое отношение;

$$\Gamma_A = A^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ – полное отношение;

$$\Gamma_1 = \{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_2 = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,a)\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_E = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – единичное отношение;

$$\Gamma_3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \Gamma_4 = \{(a,c),(b,c),(c,c)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и т. п. Всего 1024 различных бинарных отношений.

3.2.2. Композиция бинарных отношений

Любое бинарное отношение Γ на множестве U можно рассматривать как *операцию* нахождения образов каждого из элементов множества U. ***Композицией бинарных отношений*** Γ_1 и Γ_2, заданных на множестве U, называют последовательное выполнение операций Γ_1 и Γ_2. Обозначают композицию бинарных отношений так: $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$.

Пример

Пусть $A=\{a, b, c\}$. Отношения Γ_1 и Γ_2 заданы матрицами:

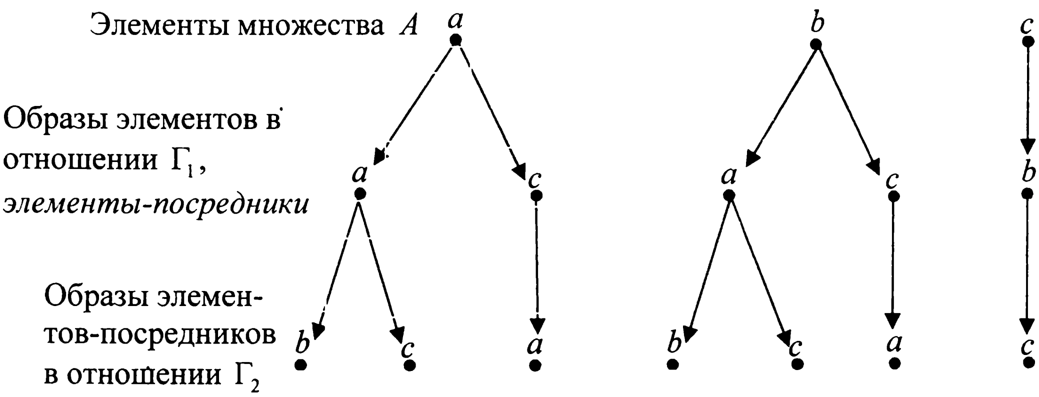
$$\Gamma_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ \Gamma_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдем композицию $\Gamma=\Gamma_1\circ\Gamma_2$. Для этого выполним последовательность действий:

1) используя матрицы Γ_1 и Γ_2, найдем образы каждого из элементов множества A, т. е. запишем их графики:

$$\Gamma_1=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\},\ \Gamma_2=\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,a)\};$$

2) построим схемы последовательного отыскания образов в отношениях Γ_1 и Γ_2:



3) запишем график отношения $\Gamma=\Gamma_1\circ\Gamma_2$ и его матрицу:

$$\Gamma=\Gamma_1\circ\Gamma_2=\{(a,b),(a,c),(a,a),(b,b),(b,c),(b,a),(c,c)\}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Образы элементов в отношении Γ_1 являются *элементами-посредниками* результирующего отношения $\Gamma=\Gamma_1\circ\Gamma_2$. Через них определяются образы результирующего отношения, но сами они в графике и матрице результирующего отношения не участвуют.

Достаточно непростую процедуру нахождения композиции бинарных отношений можно выполнять, *перемножая матрицы этих отношений*[1]. Поскольку операция умножения матриц очень широко используется в математике и встретится далее, рассмотрим ее достаточно подробно на примере умножения матриц Γ_1 и Γ_2.

[1] Правило нахождения матрицы композиции отношений Γ_1 и Γ_2 как произведения матриц этих отношений выводится достаточно громоздко, поэтому вывод правила опущен.

Пример

Перемножим матрицы $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Подчеркнем, что в результате этой операции вновь получится матрица размерности 3×3. Введем обозначение элементов новой матрицы:

$$\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

$$S_{ij}$$

Номер строки элемента матрицы

Номер столбца элемента матрицы

Отметим, что при использовании матриц всегда применяются двойные индексы элементов. Смысл таких индексов указан на схеме. Чтобы найти элемент S_{ij}, надо умножить *строку* № i матрицы Γ_1 на *столбец* № j матрицы Γ_2.

Рассмотрим, как это делается:

$$s_{11} = (1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 = 1.$$

Произведение строки на столбец выполняется по правилу *скалярного умножения векторов*: каждый элемент строки умножается на соответствующий элемент столбца, а полученные произведения складываются. Поскольку элементами матрицы бинарного отношения могут быть только нуль или единица, сложение выполняется по правилу максимума (см. п. 2.4.3):

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad x \in U.$$

$$s_{12} = (1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 0 = 1, \qquad s_{13} = (1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 = 1,$$

$$s_{21} = (1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 = 1, \qquad s_{22} = (1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 0 = 1,$$

$$s_{23} = (1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 = 1, \qquad s_{31} = (0 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 1 = 0,$$

$$s_{32} = (0 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 = 0, \qquad s_{33} = (0 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 0 = 1.$$

Запишем матрицу-произведение:

$$\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что композиция отношений некоммутативна, т. е. $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \neq \Gamma_2 \circ \Gamma_1$.

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2;$$

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,c)\};$$

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}.$$

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \neq \Gamma_2 \circ \Gamma_1.$$

3.2.3. Свойства и виды бинарных отношений

Наиболее важными свойствами бинарных отношений на множестве U являются *свойства рефлексивности*, *симметричности*, *антисимметричности* и *транзитивности*.

Дадим определение каждого из этих свойств. Пусть Γ – бинарное отношение на множестве U ($\Gamma \subseteq U^2$), n – число элементов множества U.

Определение 3.4. Отношение Γ ***рефлексивно***, если все пары вида (x_i, x_i), $i = 1, 2, ..., n$ входят в Γ ($(x_i, x_i) \in \Gamma$), и ***антирефлексивно***, если ни одна пара такого вида в Γ не входит ($(x_i, x_i) \notin \Gamma$).

В матрице рефлексивного отношения по главной диагонали стоят единицы (рис. 3.1), антирефлексивного – нули.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & 1 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ s_{31} & s_{32} & 1 & \dots & s_{3n} \\ \dots & & & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & & 1 \end{pmatrix}$$

Главная диагональ
матрицы

Рис. 3.1. Матрица рефлексивного отношения

Определение 3.5. Отношение Γ ***симметрично***, если $(x_i, x_j) \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $(x_j, x_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$.

Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали (рис. 3.2).

$$\Gamma = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & \dots & s_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & s_{3n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Главная диагональ
матрицы

Рис. 3.2. Матрица симметричного отношения

Определение 3.6. Отношение Γ ***антисимметрично***, если из того, что $(x_i, x_j) \in \Gamma$ и $(x_j, x_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$, следует, что $i = j$.

Определение 3.7. Отношение Γ ***транзитивно***, если из того, что $(x_i, x_j) \in \Gamma$ и $(x_j, x_k) \in \Gamma$, $i, j, k = 1, 2, ..., n$, следует, что $(x_i, x_k) \in \Gamma$.

В курсах дискретной математики доказано[1], что если Γ – транзитивное отношение, то $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$. Соответственно, каждый элемент матрицы Γ^2 не превосходит одноименный элемент матрицы Γ.

Пример 1

Определим свойства отношения $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[1] См. напр.: *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2002. С. 36.

1. Отношение Γ является рефлексивным, так как все элементы главной диагонали равны единице.

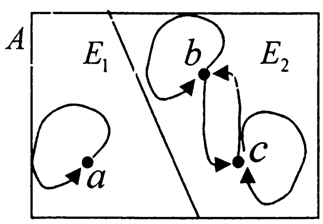
2. Отношение Γ является симметричным, так как матрица отношения симметрична относительно главной диагонали.

3. Симметричность отношения исключает антисимметричность.

4. Чтобы сделать вывод о транзитивности отношения, найдем Γ^2:

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение Γ является транзитивным, поскольку матрицы $\Gamma \geq \Gamma^2$. (В данном случае выполнено равенство: $\Gamma = \Gamma^2$.)



Запишем график отношения:

$$\Gamma = \{(a,a), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c)\}.$$

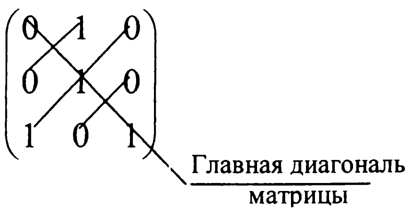
Отметим, что множество $A = \{a,b,c\}$ оказалось разбитым на два класса: $E_1 = \{a\}$ и $E_2 = \{b,c\}$. В каждом классе *все* элементы[1] связаны друг с другом попарно отношением Γ. Элементы, попавшие в разные классы, данным отношением не связаны. $E_1 \cup E_2 = A$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Таким образом, *рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение является отношением эквивалентности, разбивающим множество на непересекающиеся классы.*

Пример 2

Определим свойства отношения $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Отношение Γ не является рефлексивным, так как есть элемент главной диагонали $s_{11} = 0$.



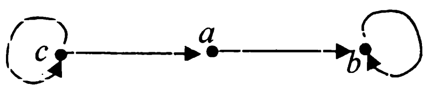
2. Отношение Γ является антисимметричным, так как единичные элементы матрицы не симметричны относительно главной диагонали: единице, стоящей выше диагонали, соответствуют нуль, стоящий ниже диагонали, и наоборот, единице, стоящей ниже диагонали, соответствует нуль выше диагонали.

[1] Обратим особое внимание на тот факт, что отсутствие рефлексивности не позволяет разбить множество на классы. Так, в данном примере отсутствие рефлексивности привело бы к тому, что множество $E_1 = \{a\}$ содержало элемент, не связанный отношением ни с каким другим элементом. Это явилось бы нарушением основания классификации.

3. Чтобы сделать вывод о транзитивности отношения, найдем Γ^2 :

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение Γ является транзитивным, поскольку $\Gamma \geq \Gamma^2$. (В данном случае выполнено равенство: $\Gamma = \Gamma^2$.) Запишем график отношения: $\Gamma = \{(a,b),\ (b,b),\ (c,a),\ (c,c)\}$.



Отношение позволяет расположить элементы множества в определенном порядке: (c,a,b)[1], упорядочить множество.

Таким образом, *антисимметричное и транзитивное отношение является отношением порядка, преобразующим множество в структуру порядка.*

Выводы

1. *Отношение эквивалентности* – это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

2. По отношению эквивалентности множество разбивается на непересекающиеся *непустые классы эквивалентности*, образуя фактор-множество.

3. Отношение эквивалентности является основанием классификации элементов множества: в каждый класс попадают элементы, связанные друг с другом отношением эквивалентности, а элементы, не связанные друг с другом этим отношением, попадают в разные классы.

4. *Отношение порядка* – это антисимметричное и транзитивное отношение.

5. По отношению порядка множество преобразуется в *структуру порядка*, в которой каждый элемент занимает свое определенное место.

3.2.4. Конгруэнции

Любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение является отношением эквивалентности. Отношения эквивалентности разбивают множества на классы, являясь основанием классификации его элементов. Элементы, попавшие в один класс, называются эквивалентными

---

[1] В круглых скобках записывают структуры порядка (последовательности). В таких структурах важны не только сами элементы, но и их место, положение в структуре. Например, $(a,b,c) \neq (c,a,b)$. Знаки фигурных скобок обозначают множество, порядок элементов в таких скобках значения не имеет. Например, $\{a,b,c\} = \{c,a,b\}$.

друг другу элементами. Эквивалентность элементов a и b обозначают так: $a \sim b$.

В ряду отношений эквивалентности особое место занимают так называемые *конгруэнции.*

О конгруэнции можно говорить лишь в том случае, если кроме отношения эквивалентности на множестве определены еще какие-то отношения или операции. Отношение конгруэнции – это *подстановочное отношение эквивалентности.* Термин «подстановочное» означает, что если в каком-либо равенстве, неравенстве или ином предикате заменить элементы левой части конгруэнтными им элементами, то в правую часть встанут элементы, конгруэнтные первоначальным элементам правой части.

Пример

Пусть Q_+ – множество всех обыкновенных дробей (см. п. 3.1). По отношению равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ множество Q_+ разбивается на классы эквивалентности.

Например, классами эквивалентности являются множества $E_1=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{2},\ldots,\frac{n}{n},\ldots\right\}$, $E_2=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\ldots,\frac{n}{2n},\ldots\right\}$, $E_3=\left\{\frac{3}{2},\frac{6}{4},\frac{9}{6},\ldots,\frac{3n}{2n},\ldots\right\}$ и т. д.

Покажем, что отношение равенства дробей есть подстановочное отношение эквивалентности в таких операциях, как сложение, вычитание, умножение и деление.

Пусть $a_1=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{9}{6}$. Эквивалентные (равные) им дроби: $a_2=\frac{2}{4}$, $b_2=\frac{3}{2}$.

Сложение: $a+b=c$.

$\frac{1}{2}+\frac{9}{6}=\frac{12}{6}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{2}{4}+\frac{3}{2}=\frac{8}{4}$.

Имеем: $\frac{12}{6}=\frac{8}{4}$. Результаты сложения попадают в один класс эквивалентности, определяющий рациональное число «2».

Вычитание: $b-a=c$.

$\frac{9}{6}-\frac{1}{2}=\frac{6}{6}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{3}{2}-\frac{2}{4}=\frac{4}{4}$.

Имеем: $\frac{6}{6}=\frac{4}{4}$. Результаты вычитания попадают в один класс эквивалентности, определяющий рациональное число «1».

Умножение: $a\cdot b=c$.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{6}=\frac{1\cdot 9}{2\cdot 6}=\frac{9}{12}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{6}{8}$.

Имеем: $\frac{9}{12}=\frac{6}{8}$. Результаты умножения попадают в один класс эквивалентности.

Деление: $\frac{a}{b}=c$.

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{6}}=\frac{1\cdot 6}{2\cdot 9}=\frac{6}{18}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{4}{12}$.

Имеем: $\frac{6}{18}=\frac{4}{12}$. Результаты деления попадают в один класс эквивалентности.

Не следует думать, что любое отношение эквивалентности на множестве Q_+ является конгруэнцией. Рассмотрим, например, отношение $a\rho b$[1]: «*Дроби a и b имеют одинаковый числитель*». Очевидно, что такое отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, следовательно, является отношением эквивалентности и разбивает множество Q_+ на классы дробей с одинаковыми числителями: $E_1=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$, $E_2=\left\{\frac{2}{1},\frac{2}{2},\ldots,\frac{2}{n},\ldots\right\}$, $E_3=\left\{\frac{3}{1},\frac{3}{2},\ldots,\frac{3}{n},\ldots\right\}$ и т. д.

Покажем, что отношение равенства числителей дробей не является подстановочным в некоторые арифметические операции.

Пусть $a_1=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{9}{6}$. Эквивалентные им дроби: $a_2=\frac{1}{5}$, $b_2=\frac{9}{4}$.

Сложение: $a+b=c$.

$\frac{1}{2}+\frac{9}{6}=\frac{12}{6}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{1}{5}+\frac{9}{4}=\frac{49}{20}$.

Имеем: $\frac{12}{6}$ и $\frac{49}{20}$. Суммы не имеют равных числителей, следовательно, попадают в разные классы эквивалентности.

Вычитание: $b-a=c$.

$\frac{9}{6}-\frac{1}{2}=\frac{6}{6}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{9}{4}-\frac{1}{5}=\frac{41}{20}$.

Имеем: $\frac{6}{6}$ и $\frac{41}{20}$. Разности не имеют равных числителей, следовательно, попадают в разные классы эквивалентности.

Умножение: $a\cdot b=c$.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{6}=\frac{1\cdot 9}{2\cdot 6}=\frac{9}{12}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1\cdot 9}{5\cdot 4}=\frac{9}{20}$.

[1] Напомним, что символ $a\rho b$ используется при задании бинарного отношения его характеристическим свойством. Такой символ можно трактовать как общее обозначение двуместного предиката. Символ ρ заменяет все слова в предикате, кроме символов переменных.

Дроби $\frac{9}{12}$ и $\frac{9}{20}$ имеют одинаковые числители. Результаты умножения попадают в один класс эквивалентности, т. е. данное отношение эквивалентности подстановочно в операцию умножения.

Деление: $\frac{a}{b}=c$.

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{6}}=\frac{1\cdot 6}{2\cdot 9}=\frac{6}{18}$. Заменим a_1 и b_1 дробями a_2 и b_2: $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{4}}=\frac{1\cdot 4}{5\cdot 9}=\frac{4}{45}$.

Имеем: $\frac{6}{18}$ и $\frac{4}{45}$. Частные не имеют равных числителей, следовательно, попадают в разные классы эквивалентности.

3.2.5. Виды отношений порядка

Отношение порядка – это антисимметричное и транзитивное отношение. По отношению порядка множество преобразуется в *структуру порядка*, в которой каждый элемент занимает свое определенное место.

В зависимости от того, какой вид отношения порядка установлен на множестве, структуры порядка бывают следующих видов:

1. Частично упорядоченные множества.
2. Линейно упорядоченные множества.
3. Решеточно упорядоченные множества.

Примечание. В дальнейшем отношение порядка в общем случае будем обозначать символом «$\leq$» или «$\geq$».

Частичный порядок. Отношение называют отношением частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

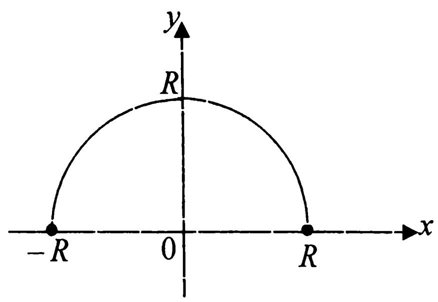
Примечание. Если на множестве U установлен частичный порядок, то для любого элемента $x\in U$ найдется элемент $y\in U$, связанный с x отношением порядка: $\forall x\exists y(x\leq y\vee y\leq x)$. В крайнем случае, таким элементом окажется сам элемент x, в силу рефлексивности связанный сам с собой отношением порядка: $\forall x(x\leq x)$.

Частично упорядоченное множество может содержать наименьший элемент или минимальный элемент. Необходимо уточнить эти понятия.

Элемент u_0 частично упорядоченного множества U является его ***наименьшим элементом***, если для любого элемента $u\in U$ выполняется неравенство $u_0\leq u$. Если при этом $u_0<u$ (равенство не имеет место ни для како-

го $u \in U$ и $u \neq u_0$), то u_0 называют ***минимальным элементом***. Аналогично определяются ***наибольший*** и ***максимальный элементы***.

Пример



Рассмотрим график функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Пусть $(x, y) \in \Gamma$ – множество точек графика.

Упорядочим множество точек:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 \leq y_2 .$$

(Сравниваются только значения функции, значения аргумента роли не играют.)

Определенное таким образом отношение порядка дает один наибольший, он же максимальный, элемент во множестве Γ: $(0,\ R)$. В самом деле: $\forall (x, y)\,((x, y) \leq (0,\ R))$. Единственный наибольший элемент является и единственным максимальным элементом.

Элементы графика $(-R,\ 0)$ и $(R,\ 0)$ являются наименьшими элементами: $\forall (x, y)\,((x, y) \geq (-R,\ 0))$ и $\forall (x, y)\,((x, y) \geq (R,\ 0))$. Равенство имеет место для самих точек: $(-R,\ 0)$ и $(R,\ 0)$. Следовательно, минимального элемента множество Γ не имеет.

Линейный порядок. Если в частично упорядоченном множестве любые два элемента $x, y \in U$ связаны отношением порядка: $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$, то отношение называют отношением линейного порядка. Линейно упорядоченное множество называют цепью[1].

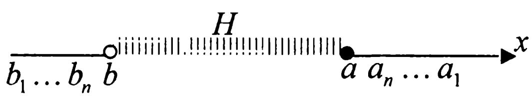
Вполне упорядоченное множество. Вполне упорядоченное множество – это такая цепь, в которой любое непустое подмножество содержит наименьший элемент.

Пусть P – частично упорядоченное множество и H – любое его непустое подмножество. Элемент $a_i \in P$ называют ***верхней границей множества*** H, если для любого элемента $h \in H$ выполняется условие $h \leq a_i$. Если для любой верхней границы a_i множества H выполняется неравенство $a \leq a_i$, то верхнюю границу a называют ***верхней гранью множества*** H. Если верхняя грань множества H существует, то она единственна. Будем обозначать ее так: $a = \sup H$ (супремум H). Аналогично определяется нижняя грань множества H, которую будем обозначать как $b = \inf H$ (инфинум H).

---

[1] См.: *Курош А. Г.* Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. М.: Наука, 1974. С. 100.

Пример



Пусть H – промежуток числовой оси, замкнутый сверху и открытый снизу. Числа $a_1, ..., a_n, a$ являются верхними границами[1] множества H, при этом число a есть верхняя грань множества H: $a = \sup H$. Обратим внимание на то, что $\sup H \in H$. Другими словами, $a = \sup H$ есть максимальный элемент множества H.

Числа $b_1, ..., b_n, b$ являются нижними границами[2] множества H. Число b есть нижняя грань множества H: $b = \inf H$, причем $\inf H \notin H$. Наименьшего, а тем более минимального элемента множество H не имеет: $\inf H \notin H$. Другими словами, не существует числа, которое принадлежало бы H и было бы меньше всех чисел в H.

Решеточно упорядоченное множество. Решеточно упорядоченное множество – это частично упорядоченное множество, каждая пара элементов которого имеет верхнюю и нижнюю грань.

Пример 1

Множество действительных чисел R с отношением порядка $\leq$ является решеточно упорядоченным множеством, так как для любых чисел a и b имеются верхняя и нижняя грани, которые находят по правилу: $\sup\{a,b\} = \max\{a,b\}$, $\inf\{a,b\} = \min\{a,b\}$. Отметим, что R является не только решеточно упорядоченным, но и линейно упорядоченным множеством, поскольку два любые числа связаны отношением порядка: $\forall a,b(a \leq b \vee b \leq a)$. Однако вполне упорядоченным множеством R назвать нельзя, поскольку открытые числовые промежутки, как было уже показано, не содержат ни наименьших, ни наибольших элементов.

Пример 2

Любой непустой булеан $\mathcal{P}(U)$ с отношением включения $\subseteq$ является решеточно упорядоченным множеством, так как для любых множеств $A, B \in \mathcal{P}(U)$ найдутся как супремум, так и инфинум: $\sup\{A,B\} = A \cup B$, $\inf\{A,B\} = A \cap B$. Если U содержит более одного элемента, то булеан $\mathcal{P}(U)$ не является линейно упорядоченным множеством, поскольку в нем найдутся множества, не связанные друг с другом отношением включения: $\exists A,B(A \not\subset B \wedge B \not\subset A \wedge A \neq B)$.

---

[1] Верхними границами являются не только числа $a_1, ..., a_n, a$, но и вообще все числа, лежащие правее точки a.

[2] Нижними границами являются не только числа $b_1, ..., b_n, b$, но и вообще все числа, лежащие левее точки b.

Пример 3

Множество B^n ($B = \{0, 1\}$) – множество всех n-мерных двоичных векторов с отношением $\le$. Напомним, что $0 \le 0$, $0 \le 1$, $1 \le 1$ и $(a_1, a_2, ..., a_n) \le (b_1, b_2, ..., b_n)$ тогда и только тогда, когда каждая координата первого вектора не превосходит одноименной координаты второго: $a_i \le b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Множество B^n является решеточно упорядоченным, поскольку для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найдутся как супремум, так и инфинум: $\sup\{\vec{a}, \vec{b}\} = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, ..., a_n \vee b_n)$, $\inf\{\vec{a}, \vec{b}\} = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, ..., a_n \wedge b_n)$, где $\vee$ и $\wedge$ – знаки дизъюнкции и конъюнкции булевых переменных.

Поскольку не все n-мерные двоичные векторы сравнимы между собой, порядок не является линейным.

3.3. Функциональные соответствия и их виды

В предыдущих разделах рассматривались бинарные отношения вида $\Gamma \subseteq U^2$. Но бинарные отношения могут иметь вид $\Gamma \subseteq X \times Y$, где множества X и Y не обязательно совпадают. Из таких отношений наиболее широко используются так называемые *функциональные соответствия*.

Математический анализ изучает различные функции на множестве действительных чисел. Эти функции можно рассматривать как бинарные отношения на множестве $X \times Y$, где X – область определения функции, Y – множество ее значений. Например, функция $y = \sin x$ есть бинарное отношение на множестве $R \times [-1, 1]$, функция $y = \ln x$ – бинарное отношение на множестве $R \times (0, \infty)$. Основной признак функционального соответствия таков: каждому элементу области определения X соответствует определенный единственный элемент множества значений Y.

Рассмотрим функциональное соответствие как особый вид бинарных отношений, заданных на произвольном множестве.

Определение 3.8. ***Функциональным соответствием*** f на множестве $X \times Y$ называют бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$, в котором *каждый* элемент множества X имеет *единственный* образ во множестве Y.

Примечание 1. Пусть m – число элементов множества X, а n – число элементов множества Y. Матрица функционального соответствия $f \subseteq X \times Y$ – это таблица, содержащая m строк и n столбцов, на пересечении которых стоят значения характеристической функции:

$$\mu(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (x_i y_j) \in f \\ 0, & \textit{если} \quad (x_i y_j) \notin f \end{cases}, \; (x_i \in X, \quad y_j \in Y).$$

Поскольку по определению функционального соответствия каждый элемент множества X имеет единственный образ во множестве Y, в каждой строке матрицы J_f один и только один элемент равен единице, все же другие элементы строки – нули.

Примечание 2. Если множества X и Y имеют одинаковое число элементов $m = n$, то матрица функционального соответствия $f \subseteq X \times Y$ есть квадратная матрица порядка n.

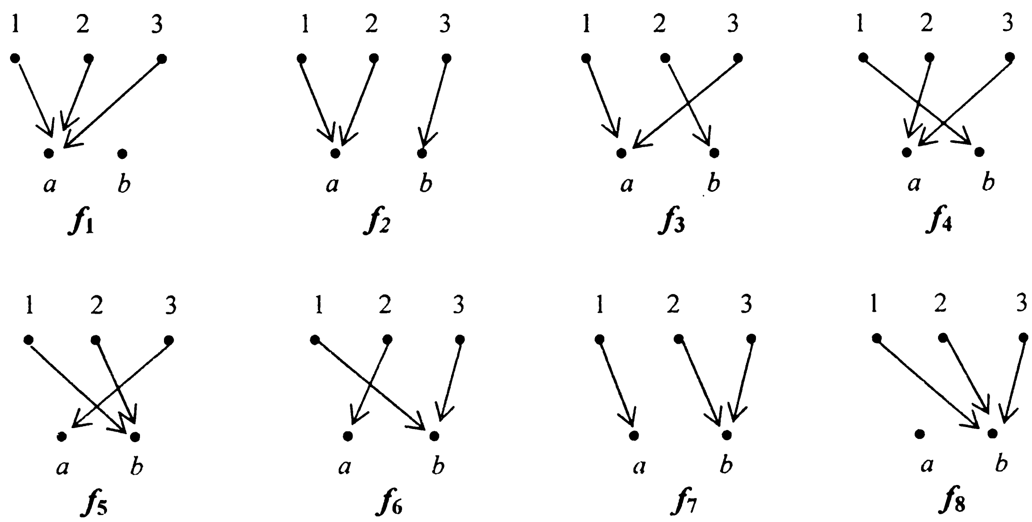
Пример 1

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y_1 = \{a, b\}$.

Декартово произведение $X \times Y_1 = \{(1a), (1b), (2a), (2b), (3a), (3b)\}$ содержит шесть пар, а следовательно, $2^6 = 64$ подмножеств. Каждое подмножество Γ есть бинарное отношение на множестве $X \times Y_1$, соответственно, на множестве $X \times Y_1$ существует 64 различных бинарных отношения.

Чтобы бинарное отношение являлось функциональным соответствием, каждый элемент множества X должен иметь единственный образ во множестве Y_1. Следовательно, график любого функционального соответствия на множестве $X \times Y_1$ может содержать только три пары, в которых на первом месте стоят элементы 1, 2, 3 множества X.

Вот как выглядят схемы возможных функциональных соответствий на множестве $X \times Y_1$:



Таких соответствий восемь: $f_1, f_2, \ldots, f_8$. Любое из них можно представить матрицей бинарного отношения:

$$J_{f_1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad J_{f_2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J_{f_3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad J_{f_4}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$J_{f_5}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad J_{f_6}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J_{f_7}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad J_{f_8}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Также каждое функциональное соответствие можно задать в виде двустрочной матрицы P_{f_i}, ($i=1, 2, ..., 8$), в первой строке которой записаны элементы множества X, а во второй – их образы из множества Y_1:

$$P_{f_1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&a&a\end{pmatrix},\quad P_{f_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&a&b\end{pmatrix},\quad P_{f_3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&a\end{pmatrix},\quad P_{f_4}=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&a&a\end{pmatrix},$$

$$P_{f_5}=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&b&a\end{pmatrix},\quad P_{f_6}=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&a&b\end{pmatrix},\quad P_{f_7}=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&b\end{pmatrix},\quad P_{f_8}=\begin{pmatrix}1&2&3\\b&b&b\end{pmatrix}.$$

В соответствиях f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 и f_7 каждый элемент множества Y_1 имеет *не менее одного прообраза* во множестве X. Такие соответствия называют *сюръективными функциональными соответствиями* или *отображениями множества X* ***на*** *множество Y_1*.

Соответствия f_1, f_8 сюръективными соответствиями не являются, поскольку один из элементов множества Y_1 имеет менее одного прообраза во множестве X. (В f_1 ни одного прообраза не имеет элемент b, в f_8 – элемент a.)

Очевидно, что если существует сюръективное функциональное соответствие на множестве $X\times Y$, то множество Y содержит элементов не больше, чем множество X.

Пример 2

Пусть $X=\{1, 2, 3\}$, $Y_2=\{a,b,c,d\}$.

Декартово произведение

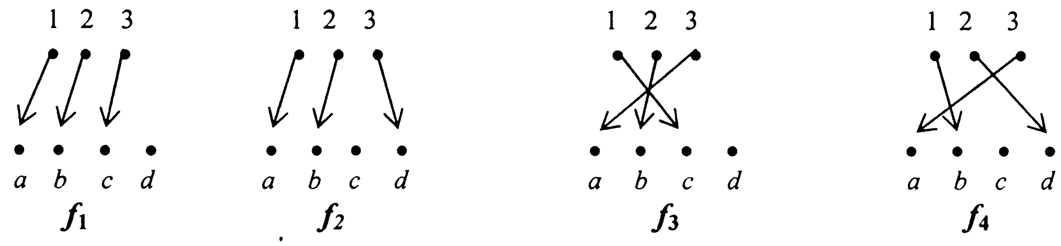
$$X\times Y_2=\{(1a),(1b),(1c),(1d),(2a),(2b),(2c),(2d),(3a),(3b),(3c),(3d)\}$$

содержит двенадцать пар, а следовательно, $2^{12}=4096$ подмножеств. Каждое подмножество Г есть бинарное отношение на множестве $X\times Y_2$, соответственно, на множестве $X\times Y_2$ существует 4096 различных бинарных отношений.

Чтобы бинарное отношение являлось функциональным соответствием, каждый элемент множества X должен иметь единственный образ во множестве Y_2. Поскольку элементов во множестве Y_2 больше, чем во множестве X, ни одно из этих функциональных соответствий не является сюръективным. Рассмотрим несколько соответствий, в которых каждый элемент Y_2 имеет *не более одного прообраза* во множестве X. Такие соответствия называют *инъективными функциональными соответствиями* или *отображениями множества X во множество Y_2*.

Запишем двустрочные матрицы некоторых инъективных функциональных соответствий на множестве $X \times Y_2$ и построим схемы этих отображений:

$$P_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix},\ P_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & d \end{pmatrix},\ P_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix},\ P_{f_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & d & a \end{pmatrix}.$$



Пример 3

Рассмотрим функциональные соответствия на множестве $X \times Y_3$, где $X = \{1, 2, 3\}$, $Y_3 = \{a, b, c\}$.

Декартово произведение $X \times Y_3 = \{(1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c), (3a), (3b), (3c)\}$ содержит девять пар, а следовательно, $2^9 = 1024$ подмножеств. Каждое подмножество Γ есть бинарное отношение на множестве $X \times Y_3$, соответственно, на множестве $X \times Y_3$ существует 1024 различных бинарных отношений.

Чтобы бинарное отношение являлось функциональным соответствием, каждый элемент множества X должен иметь единственный образ во множестве Y_3. Следовательно, график функционального соответствия может содержать только три пары, в которых на первом месте стоят элементы 1, 2, 3 множества X. Однако существует $3^3 = 27$ способов выбрать образ для каждого элемента множества X, т. е. на множестве $X \times Y_3$ существует 27 различных функциональных соответствий.

Некоторые из этих соответствий являются одновременно сюръективными и инъективными, т. е. каждый элемент множества Y_3 имеет не менее, но и не более одного прообраза во множестве X. Функциональные соответствия, являющиеся одновременно сюръективными и инъективными, называются *взаимно однозначными соответствиями*. Возможность установить взаимно однозначное соответствие между множествами говорит о том, что в этих множествах число элементов одинаково.

На рис. 3.3 представлена схема исследования соответствия на множестве $X \times Y$.

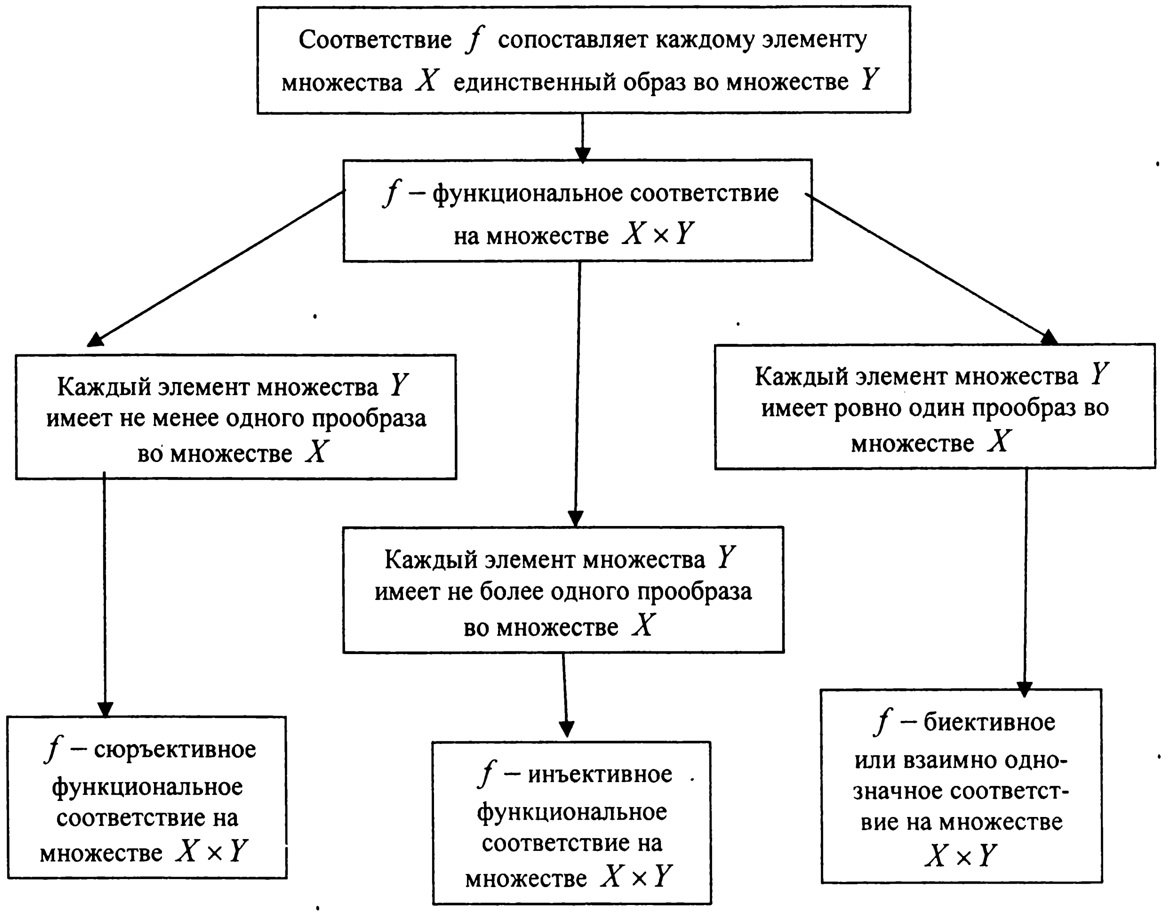


Рис. 3.3. Схема исследования соответствия на множестве $X \times Y$

Дадим определения некоторых важных математических понятий.

Определение 3.9. Если между отрезком натурального ряда $\{1, 2, ..., n\}$ и множеством Y существует взаимно однозначное соответствие, то число n называют ***числом элементов множества*** Y.

Определение 3.10. Если между множеством натуральных чисел N и множеством Y существует взаимно однозначное соответствие, то Y называют ***счетным множеством***.

Определение 3.11. Если между множеством X и его правильной частью Y ($Y \subset X$) существует взаимно однозначное соответствие, то множества X и Y называют ***бесконечными множествами***, если же взаимно однозначного соответствия не существует, то ***конечными множествами***.

Рассмотрим виды бинарных отношений с другой точки зрения.

Пусть Γ – бинарное отношение на множестве $X \times Y$, т. е. $\Gamma \subseteq X \times Y$. В дальнейшем будем называть Γ *прямым отношением*.

С каждым прямым отношением связаны еще три отношения:

Γ^{-1} – обратное отношение,

$\overline{\Gamma}$ – противоположное отношение,

$\overline{\Gamma}^{-1}$ – отношение, противоположное обратному[1].

Отношение Γ^{-1} $(\Gamma^{-1} \subseteq Y \times X)$ называют отношением, *обратным отношению* Γ, если $(y,x) \in \Gamma^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \Gamma$ $(x \in X, y \in Y)$.

Отношение $\overline{\Gamma}$ $(\overline{\Gamma} \subseteq X \times Y)$ называют отношением, *противоположным отношению* Γ, если $\overline{\Gamma}$ есть дополнение множества Γ до множества $X \times Y$.

Для противоположного отношения $\overline{\Gamma}$ существует обратное $\overline{\Gamma}^{-1}$, а для обратного – противоположное $\overline{\Gamma^{-1}}$, причем можно доказать, что $\overline{\Gamma}^{-1} = \overline{\Gamma^{-1}}$.

Пример

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$.

На множестве $X \times Y$ зададим функциональные соответствия f_1, f_2, f_3 и f_4 матрицами бинарных отношений:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствия f_3 и f_4 являются взаимно однозначными соответствиями, поскольку каждый элемент множества X имеет единственный образ во множестве Y и каждый элемент множества Y – единственный прообраз во множестве X.

Запишем матрицы отношений f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}, f_4^{-1} и отношений $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$, $\overline{f_3}$, $\overline{f_4}$, а также $\overline{f_1^{-1}}$, $\overline{f_2^{-1}}$, $\overline{f_3^{-1}}$ и $\overline{f_4^{-1}}$:

$$f_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

---

[1] Сравните с видами теорем: прямая теорема $P(x) \to Q(x)$, обратная теорема $Q(x) \to P(x)$, противоположная теорема $\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ и теорема, противоположная обратной $\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$.

$$\overline{f}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad \overline{f}_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad \overline{f}_3^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad \overline{f}_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Можно видеть, что только f_3^{-1} и f_4^{-1} являются взаимно однозначными соответствиями на множестве $Y\times X$.

Найдем матрицы композиций прямых и обратных отношений. Поскольку прямое отношение задано на множестве $X\times Y$ ($f\subseteq X\times Y$), а обратное – на множестве $Y\times X$ ($\Gamma^{-1}\subseteq Y\times X$), то их композиция $f\circ f^{-1}$ есть отношение на множестве $X\times X$ ($f\circ f^{-1}\subseteq X\times X$).

$$f_1\circ f_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\qquad f_2\circ f_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix};$$

$$f_3\circ f_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\qquad f_4\circ f_4^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot$$

Матрицы $f_3\circ f_3^{-1}$ и $f_4\circ f_4^{-1}$ есть единичные матрицы, т. е. соответствия $f_3\circ f_3^{-1}$ и $f_4\circ f_4^{-1}$ переводят каждый элемент множества X в себя. Отношение на множестве X^2, которое переводит каждый элемент множества $f_4\circ f_4^{-1}$, называют ***тождественным преобразованием множества*** X.

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Для того чтобы отображение $f\subseteq X\times Y$ было взаимно однозначным соответствием, необходимо и достаточно, чтобы обратное ему бинарное отношение $f^{-1}\subseteq Y\times X$ также являлось функциональным соответствием.

Утверждение 2. Если отображение $f\subseteq X\times Y$ является взаимно однозначным соответствием, то композиция $f\circ f^{-1}$ есть тождественное преобразование.

Вопросы и задания для самопроверки

1. На множестве $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано отношение $a\rho b$: «a делится на $в$ без остатка». Назовите образы элементов 2, 4, 6. Назовите прообразы этих элементов. Назовите полный образ и полный прообраз множества A по данному отношению. Запишите матрицу отношения.

2. Назовите способы задания бинарных отношений.

3. Запишите правило умножения матриц бинарных отношений.

4. Что позволяет обнаружить произведение матриц двух бинарных отношений?

5. Дайте определение транзитивного отношения, используя термины: а) «график бинарного отношения»; б) «матрица бинарного отношения».

6. Дайте определения свойств рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности бинарного отношения в терминах: а) графика бинарного отношения; б) характеристических свойств бинарного отношения; в) матрицы отношения; г) характеристической функции бинарного отношения.

7. Как найти расстояние между отношениями?

8. Дайте определение транзитивного замыкания отношения.

9. Приведите примеры отношений эквивалентности и отношений порядка.

10. Дайте определение фактор-множества.

11. Докажите, что множество четных чисел – бесконечное счетное множество, используя функциональное соответствие $m = 2n$, где n – натуральное число, m – четное число.

12. Докажите, что отношение E: «a имеет тот же остаток при делении на 3, что и $в$», является отношением эквивалентности на множестве натуральных чисел N. Определите фактор-множество N/E.

13. На отрезке натурального ряда $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано отношение $a\rho b$: «a непосредственно следует за $в$». Запишите характеристические свойства и графики отношений Γ, Γ^{-1}, $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}^{-1}$ и постройте графы этих отношений.

4. АЛГЕБРЫ

В драме Пушкина А. С. «Моцарт и Сальери» Сальери говорит, что он «поверил алгеброй гармонию». Это означает, что для Сальери алгебра является эталоном гармонии[1]. Действительно, алгебраические структуры исключительно изящны и соразмерны. К сожалению, несмотря на то, что во всех школах курс «Алгебра и начала анализа» является обязательным, большинство выпускников не могут ответить на вопрос: «Что изучает алгебра?».

В данной главе будут рассмотрены алгебраические структуры и отношения между ними, играющие существенную роль в познании мира.

4.1. Основные алгебраические структуры

Мы уже говорили о том, что по отношению порядка множество преобразуется в *структуру порядка*, в которой каждый элемент занимает свое определенное место. Аналогично, множество преобразуется в *алгебраическую структуру*, или *алгебру*, если в нем заданы *алгебраические операции*.

Школьники изучают алгебраические операции на числовых множествах и множествах векторов. С первого класса они учатся складывать, вычитать, умножать, делить, находить числа противоположные и обратные данному, и выполнять ряд других операций над числами. Над векторами выпускники школ умеют выполнять операции сложения и вычитания, а также находить скалярное и векторное произведение векторов.

Но алгебраические операции можно выполнять не только над числами и геометрическими векторами, но и над высказываниями, предикатами, множествами, двоичными векторами. Что же такое алгебраическая операция?

Пусть имеется множество U, $\underbrace{U\times U\times ..\times U}_{n\ раз}=U^n$ – n-я степень множества U.

Определение 4.1. Функциональное соответствие $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y$, где $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in U^n$, $y\in U$, называют ***n-арной или n-местной алгебраической операцией***[2] на множестве U, множество U – ***множеством-носителем***.

[1] Разумеется, этим словам Сальери многие люди придают совершенно другой смысл. Но одна из особенностей великих литературных произведений – многозначность фраз. Именно поэтому каждый человек, читая такое произведение, находит отклик в своей душе.

[2] Термины «n-арная» и «n-местная» являются синонимами. В дальнейшем будем использовать термин «n-местная».

Мы уже говорили, что бывают нульместные (n=0), одноместные (n=1) и двуместные (n=2) операции.

Пример 1

Некоторые операции на множестве действительных чисел R.

Нульместные операции: $y = 0$, $y = 1$ (выделение особых по сложению и умножению элементов).

Одноместные операции: $y = -x$, $y = x^{-1}$ ($x \neq 0$) (нахождение противоположного и обратного элементов).

Двуместные операции: $y = x_1 + x_2$ (сложение), $y = x_1 - x_2$ (вычитание), $y = x_1 \cdot x_2$ (умножение), $y = \frac{x_1}{x_2}$ ($x_2 \neq 0$) (деление).

Пример 2

Некоторые операции на множестве геометрических векторов V.

Нульместная операция: $\vec{y} = \vec{0}$ (выделение нулевого вектора).

Одноместная операция: $\vec{y} = -\vec{x}$ (нахождение противоположного вектора).

Двуместные операции: $\vec{y} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ (сложение), $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ (вычитание).

Пример 3

Некоторые операции на множестве бинарных отношений $\mathcal{P}(U^2)$.

Нульместные операции: $Y = \varnothing$, $Y = U^2$ (выделение пустого и полного отношений).

Одноместные операции: $Y = \Gamma^{-1}$, $Y = \overline{\Gamma}$, $Y = \overline{\Gamma}^{-1}$ (нахождение отношений обратного, противоположного и противоположного обратному).

Двуместные операции: $Y = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ (композиция отношений).

Алгебраические структуры содержат одну, две или более операций. Множество всех операций структуры называют *сигнатурой* данной алгебры и обозначают как Ω. Кроме сигнатуры указывается *тип алгебры*. Тип алгебры – это местности (числа мест) всех операций сигнатуры.

Пример 1

Множество-носитель – множество натуральных чисел: $N = \{1, 2, ..., n, ...\}$, сигнатура – $\Omega = \{1, +, \times\}$, тип – $\{0, 2, 2\}$ (одна нульместная и две двуместные операции). Соединив вместе эти символы, получим алгебру $\{N, 1, +, \times\}$ типа $\{0, 2, 2\}$.

Пример 2

$\{B, \wedge, \vee, \bar{\ }\}$ типа $\{2, 2, 1\}$ – булева алгебра, множество-носитель – $B = \{0, 1\}$.

В общем случае бинарные операции принято обозначать символами $*$, $\circ$, $\cdot$. Например, равенство $a*b=c$, означает, что над элементами множества-носителя выполнена некая двуместная операция $*$ («звездочка»), и результат этой операции есть элемент c.

Указание множества-носителя, сигнатуры и типа алгебры является недостаточным для определения алгебраической структуры. Необходимо также указать список свойств операций сигнатуры, т. е. дать набор аксиом алгебры.

Итак, ***алгебраическая структура***, или ***алгебра***, – это совокупность следующих элементов:

1) множество-носитель;
2) сигнатура;
3) тип алгебры;
4) система аксиом.

Определим ряд алгебраических структур, а затем рассмотрим некоторые примеры их реализации.

Полугруппа. Множество A с одной бинарной операцией $*$ называется *полугруппой*, если операция ассоциативна: $\forall a,b,c(a*(b*c)=(a*b)*c)$.

Группа. Алгебра $\{G, e, *\}$ с одной нульместной и одной двуместной операциями называется *группой*, если выполняются аксиомы:

1. $\forall g_1 \forall g_2 \forall g_3 (g_1*(g_2*g_3)=(g_1*g_2)*g_3$; групповая операция ассоциативна.
2. $\forall g(g*e=e*g=g)$; e – нейтральный элемент групповой операции.
3. $\forall g_1 \exists g_2 (g_1*g_2=g_2*g_1=e)$; для каждого элемента найдется противоположный (обратный) элемент.

Примечание 1. В теории групп рассматриваются группы по сложению $\{G, 0, +\}$ и группы по умножению $\{G, 1, \times\}$. В группах по сложению каждый элемент имеет противоположный себе: $\forall g \exists(-g)(g+(-g)=-g+g=0)$, а в группах по умножению – обратный: $\forall g \exists g^{-1}(g\times g^{-1}=g^{-1}\times g=1)$.

Примечание 2. Обратим внимание на то, что групповые аксиомы не требуют коммутативности групповой операции: $g_1*g_2 \neq g_2*g_1$ в общем случае. Группы, в которых групповая операция коммутативна, называются коммутативными, или абелевыми[1], группами.

---

[1] Нильс Хенрик Абель (1802 –1829) – норвежский математик, один из крупнейших математиков XIX в. На родине Абель не был признан при жизни, жил в нужде, умер от туберкулеза. В 1908 г. в Осло был воздвигнут памятник Абелю. Работы Абеля оказали большое влияние на развитие всей математики.

Кольцо. Алгебра $\{R, 0, +, \times\}$ с одной нульместной и двумя двуместными операциями называется *кольцом*, если выполняются аксиомы:

1. Алгебра $\{R, 0, +\}$ является группой.
2. Алгебра $\{R, \times\}$ является полугруппой.
3. Операция $\times$ дистрибутивна относительно операции $+$:

$$\forall r_1, r_2, r_3 (r_1 \times (r_2 + r_3) = (r_1 \times r_2) + (r_1 \times r_3)).$$

Примечание 1. Кольцевые операции $+$ и $\times$ условно называют *сложением* и *умножением*, хотя они могут иметь мало общего с привычными сложением и умножением.

Примечание 2. Таким образом, кольцом называют алгебраическую структуру с операциями сложения и умножения, которая является группой по сложению и полугруппой по умножению, причем умножение дистрибутивно относительно сложения.

Поле. Алгебра $\{R, 0, 1, +, \times\}$ с двумя нульместными и двумя двуместными операциями называется *полем*, если выполняются аксиомы:

1. Алгебра $\{R, 0, +\}$ является группой.
2. Алгебра $\{R \setminus \{0\}, 1, \times\}$ является группой.
3. Операция $\times$ дистрибутивна относительно операции $+$:

$$\forall r_1, r_2, r_3 (r_1 \times (r_2 + r_3) = (r_1 \times r_2) + (r_1 \times r_3)).$$

Примечание. Группа $\{R \setminus \{0\}, 1, \times\}$ определена на множестве R, из которого изъят нуль (нейтральный элемент по сложению), поскольку для нуля обратного элемента не существует.

Решетка. Алгебра $\{P, \wedge, \vee\}$ типа $\{2, 2\}$ называется *решеткой*, если бинарные операции $\wedge$ и $\vee$ обладают следующими свойствами:

1.	$a \wedge a = a.$	$1^*.$	$a \vee a = a.$
2.	$a \wedge b = b \wedge a.$	$2^*.$	$a \vee b = b \vee a.$
3.	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$	$3^*.$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$
4.	$a \wedge (a \vee b) = a.$	$4^*.$	$a \vee (a \wedge b) = a.$

Если во множестве P ввести отношение частичного порядка $a \leq b$ и положить, что $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ и $a \vee b = \sup\{a,b\}$, то все аксиомы решетки будут выполняться. Таким образом, решеточно упорядоченное множество и решетка представляют собой одну и ту же структуру. В первом случае мы рассматриваем ее как порядковую структуру, во втором – как алгебраическую.

Булева алгебра[1]. Алгебра $\{P, 0, 1, \wedge, \vee\}$ типа $\{0, 0, 2, 2\}$ называется *булевой алгеброй*, если выполняются аксиомы:

1. $\{P, \wedge, \vee\}$ является решеткой.
2. $a \wedge 0 = 0$.
3. $a \vee 1 = 1$.
4. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
5. $\forall a \exists \bar{a} (a \wedge \bar{a} = 0)$; $(a \vee \bar{a} = 1)$.

Каждая из алгебраических структур является *математической моделью* некоторых достаточно известных и часто используемых объектов – *интерпретаций* этих моделей. Чтобы овладеть смыслом модели, необходимо рассмотреть ее интерпретации. В предыдущих разделах были подробно изучены интерпретации булевой алгебры: алгебра множеств, алгебра высказываний и алгебра предикатов. Рассмотрим одну из интерпретаций математической модели «группа».

4.2. Группы

История возникновения понятия «группа» весьма драматична. Его появление связывают с именем Эвариста Галуа (1811 – 1832) – французского математика и революционера. За свою очень недолгую жизнь Галуа неоднократно подвергался репрессиям, поскольку вел деятельность, направленную против королевской власти. Ему было чуть больше 20 лет, когда его убили на спровоцированной дуэли. В историю Эварист Галуа вошел не как революционер, а как гениальный математик, опередивший развитие этой науки почти на столетие. В ночь перед дуэлью Эварист написал знаменитое письмо другу, в котором изложил основы своей математической теории[2]. По словам крупнейшего математика XX в. Германа Вейля, «по новизне и глубине идей, выраженных в этом письме, оно является, пожалуй, самым выдающимся творением из всего, что когда-либо было написано рукою человека»[3].

Группа – это модель всевозможных симметрий: симметрии в природе, симметрии в искусстве, симметрии в уравнениях, описывающих законы

[1] Сравните это определение с определением, данным в п. 2.3.

[2] В настоящее время в математике и других науках широко используются понятия «группа Галуа», «поле Галуа», «теория Галуа».

[3] *Вейль Г.* Симметрия. М.: Наука, 1968. С. 155.

природы, и т. п. Симметрия предполагает, что выполнив некоторое движение, преобразование природного объекта, геометрической фигуры или уравнения, описывающего некий физический закон, мы не изменим общей картины.

Именно такие ситуации и можно описывать с помощью групп. Как видно из аксиом группы (см. п. 4.1), помимо естественного требования ассоциативности групповой операции * ($\forall g_1 \forall g_2 \forall g_3 (g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3)$) должны выполняться еще всего два требования:

а) наличие нейтрального элемента e,

б) существование для каждого элемента противоположного или обратного ему: $\forall g_1 \exists g_2 (g_1 * g_2 = g_2 * g_1 = e)$.

Наличие нейтрального элемента говорит о том, что не всегда выполнение операции приводит к каким-либо изменениям: выполнение операции с нейтральным элементом оставляет все «на своих местах», «как было». Наличие противоположного или обратного элемента – очень жесткое требование. Оно означает, что всегда можно вернуться к исходному состоянию, выполнив соответствующую операцию.

Для уяснения понятия группы рассмотрим группы самосовмещений правильных плоских многоугольников, а также группу дискретных переносов.

4.2.1. Группа самосовмещений правильных плоских многоугольников

На рис. 4.1, *а* изображен правильный треугольник в треугольной рамке. Треугольник обладает *поворотной симметрией*. Если повернуть его на 120° (рис. 4.1, *б*) или 240° (рис. 4.1, *в*), то треугольник совместится сам с собой, при этом все точки треугольника перейдут в другие точки этого же треугольника, за исключением точки O, которая останется на своем месте. На рис. 4.1, *г*, *д*, *е* показан другой вид симметрии правильного треугольника: зеркальные отражения от осей симметрии – L_1, L_2 и L_3 соответственно. При зеркальном отражении точки треугольника, стоящие по разные стороны оси симметрии, меняются местами, точки самой оси остаются на месте.

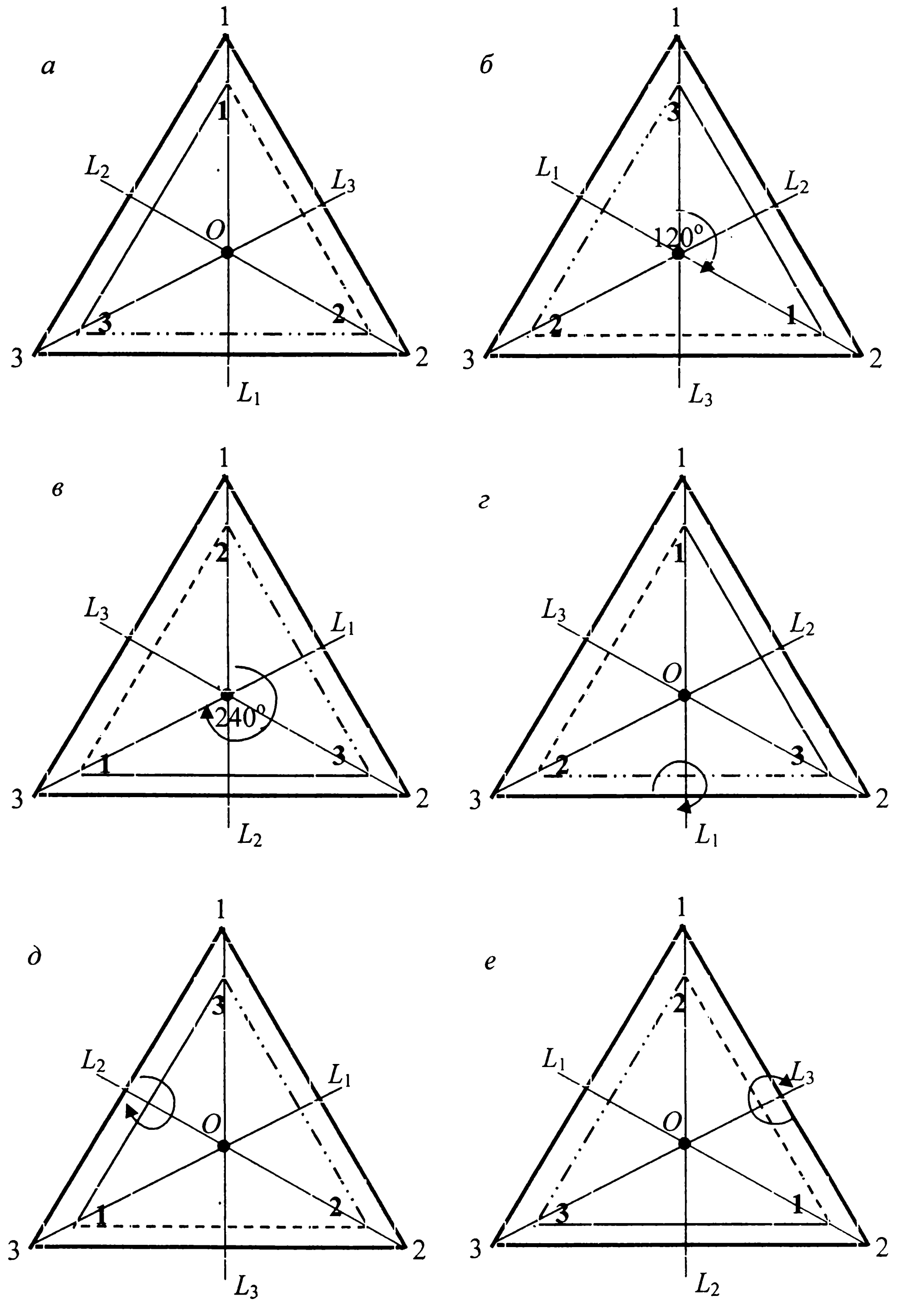


Рис. 4.1. Группа самосовмещений правильного треугольника:
а – исходная позиция (тождественное преобразование); *б* – поворот на 120°
вокруг центра симметрии; *в* – поворот на 240° вокруг центра симметрии;
г – зеркальное отражение от оси L_1; *д* – зеркальное отражение от оси L_2;
е – зеркальное отражение от оси L_3

Повороты и зеркальные отражения можно представить как *взаимно однозначные соответствия* между элементами множества точек треугольника (см. п. 3.3). Как видно на рис. 4.1, имеется шесть таких соответствий. Каждое из них можно записать в виде матрицы – двустрочной или квадратной (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Преобразования самосовмещений правильного треугольника

Название	Обозначение	Двустрочная матрица	Квадратная матрица
Тождественное преобразование	g_0	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Поворот вокруг точки O на 120°	g_1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Поворот вокруг точки O на 240°	g_2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Зеркальное отражение от оси L_1	g_3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Зеркальное отражение от оси L_2	g_4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Зеркальное отражение от оси L_3	g_5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Поясним таблицу 4.1. В двустрочных матрицах в первой строке записаны номера вершин внешней рамки: 1, 2, 3. Они сохраняются во всех преобразованиях. Во второй строке двустрочных матриц стоят номера вершин треугольника, который подвергается преобразованию.

В квадратных матрицах *последовательность строк* соответствует последовательности номеров вершин рамки: первая строка – 1, вторая – 2, третья – 3. В каждой из строк позиция единицы указывает номер соответствующей вершины треугольника, который подвергается преобразованию.

Рассмотрим, например, матрицу g_2: $\begin{array}{l} \textit{строка } 1 \\ \textit{строка } 2 \\ \textit{строка } 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Позиция единицы в первой строке показывает, что вершине 1 рамки соответствует вершина 2 треугольника, вершине 2 рамки – вершина 3 треугольника и вершине 3 рамки – вершина 1 треугольника.

Пусть $G_3 = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5,\}$ – множество всех самосовмещений правильного треугольника. Определим на множестве G_3 бинарную операцию $\circ$, которую назовем умножением. Умножение $g_i \circ g_j$ $(i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ на множестве G_3 состоит в *последовательном выполнении преобразований* g_i *и* g_j. Например, $g_1 \circ g_4$ – это выполнение поворота треугольника на 120° вокруг центра O[1], а затем его зеркальное отражение от оси L_2 (рис. 4.2).

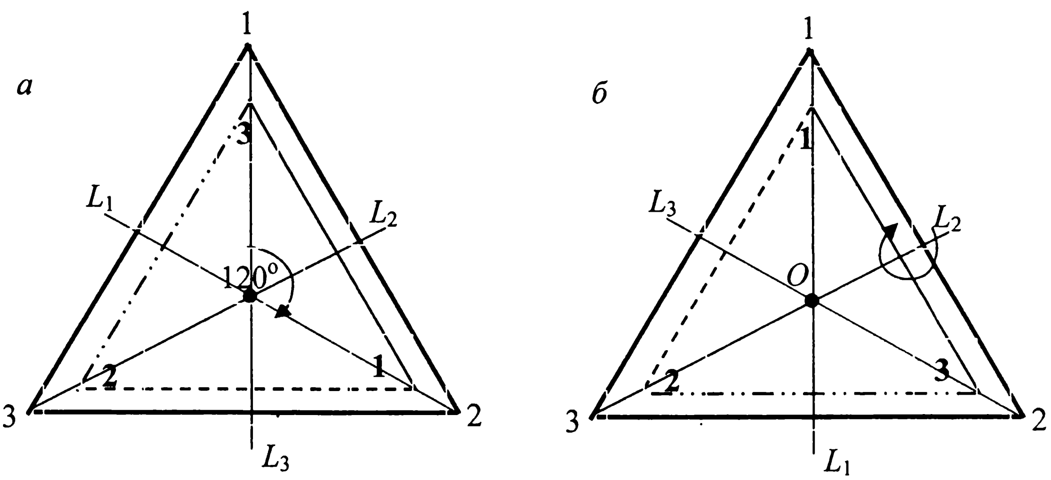


Рис. 4.2. Выполнение преобразования треугольника $g_2 \circ g_4$:
а – поворот на 120°; *б* – зеркальное отражение от оси L_2

На рис. 4.2 видно, что результат последовательного выполнения этих действий есть зеркальное отражение треугольника от оси L_1, т. е. преобразование g_3: $g_2 \circ g_4 = g_3$.

Выполним операцию $g_2 \circ g_4$, используя матричные записи операций.

[1] Обратите внимание на положения осей симметрии после поворота: ось L_1, проходящая через вершину 1 треугольника, проходит через эту вершину и после преобразования, однако положение ее изменилось, поскольку изменилось положение вершины 1. Аналогично при повороте изменилось и положение осей L_2 и L_3.

Двустрочные матрицы:

$$g_2 \circ g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = g_3 .$$

Выполняя действие (1), надо под второй строкой матрицы g_2 написать преобразование g_4, которое переводит вершину 1 в 3, 2 оставляет на месте, а вершину 3 переводит в 1. В результате такого преобразования получена трехстрочная матрица. Удалив промежуточную среднюю строку (действие (2)), получим результирующую матрицу g_3.

Квадратные матрицы

Справедливо *утверждение*: матрица произведения преобразований равна произведению матриц этих преобразований.

Проверим справедливость данного утверждения, выполнив операцию $g_2 \circ g_4$:

$$g_1 \circ g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 \\ 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 \\ 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = g_3.$$

Напомним, что умножение матриц выполняется как скалярное умножение строк на столбцы, причем при сложении используется правило максимума (см. п. 2.4.3).

Любые два преобразования треугольника можно перемножить. При этом результатом умножения будет являться также вполне определенное преобразование треугольника. Символически это утверждение можно записать так:

$$\forall g_i \forall g_j \exists g_k (g_i \circ g_j = g_k),\ g_i, g_j, g_k \in G .$$

Табл. 4.2 – *таблица умножения* самосовмещений правильного треугольника.

Таблица 4.2

Таблица умножения самосовмещений правильного треугольника

	G_3	Элементы множества					
G_3	$\circ$	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
Элементы множества	g_0	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
	g_1	g_1	g_2	g_0	g_5	g_3	g_4
	g_2	g_2	g_0	g_1	g_4	g_5	g_3
	g_3	g_3	g_4	g_5	g_0	g_1	g_2
	g_4	g_4	g_5	g_3	g_2	g_0	g_1
	g_5	g_5	g_3	g_4	g_1	g_2	g_0

В алгебре $\{G_3, g_0, \circ\}$ выполняются все групповые аксиомы:

1. Операция умножения ассоциативна:

$$\forall g_i \forall g_j \forall g_k (g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k).$$

2. Во множестве G_3 есть нейтральный элемент e − тождественное преобразование g_0: $g_0 = e$. Для любого элемента g_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ выполнено равенство $g_i \circ g_0 = g_0 \circ g_i = g_i$.

3. Во множестве G_3 для каждого элемента g_i есть обратный элемент g_i^{-1}: $g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = g_0$.

Все три утверждения можно проверить непосредственно по табл. 4.2.

Покажем, как находить обратные преобразования с помощью матриц. В качестве примера найдем преобразование g_2^{-1}, обратное преобразованию g_2.

Двустрочные матрицы:

$$g_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix};$$

$$g_2 \circ g_2^{-1} = g_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ y & z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 2; \\ x = 3 \end{cases}$$

$$g_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = g_1.$$

Поскольку в результате выполнения умножения $g_2 \circ g_2^{-1}$ получается тождественная матрица $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, можно, не выполняя никаких действий, рассмотреть матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = g_2$ снизу вверх и увидеть соответствие $\begin{cases} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{cases}$. После этого записать: $g_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = g_1$.

На рис. 4.3 изображены правильные пяти- и шестиугольник и их элементы симметрии.

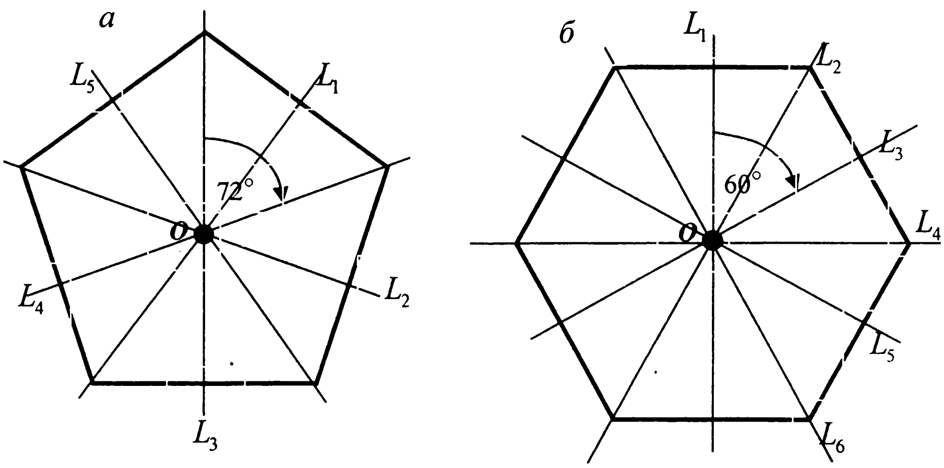


Рис. 4.3. Элементы симметрии:
а – правильного пятиугольника; *б* – правильного шестиугольника

Пятиугольник самосовмещается при выполнении пяти поворотов на углы 0°, 72°, 144°, 216° и 288°, а также пяти зеркальных отражений от осей L_1, L_2, L_3, L_4 , L_5 (рис. 4.3, *а*). Таким образом, множество самосовмещений правильного пятиугольника содержит десять элементов и с операцией умножения образует группу самосовмещений правильного пятиугольника: $\{G_5, g_0, \circ\}$.

Множество самосовмещений правильного шестиугольника содержит двенадцать элементов (рис. 4.3, *б*), образуя группу $\{G_6, g_0, \circ\}$.

Итак, любой правильный *n*-угольник на плоскости определяет группу самосовмещений $\{G_n, g_0, \circ\}$. Множество-носитель такой группы G_n содержит $2n$ элементов – n поворотов и n осевых симметрий, групповая операция умножения $\circ$ состоит в последовательном выполнении преобразований, g_0 – тождественное преобразование (поворот на 0°).

4.2.2. Группа дискретных переносов

I. *Группа дискретных переносов на прямой*

Представим себе линейный орнамент, например, такой, как показан на рис. 4.4.

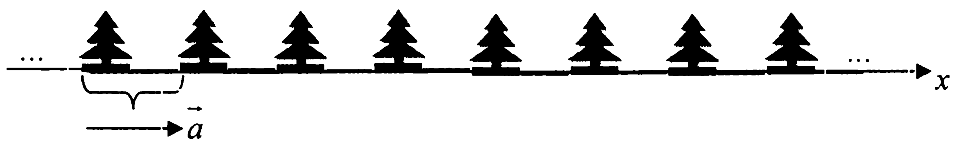


Рис. 4.4. Пример линейного орнамента

Будем считать орнамент бесконечным как влево, так и вправо. Очевидно, что если выполнить движение оси x на $n\vec{a}$ шагов, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, то орнамент самосовместится. Множество самосовмещений линейного орнамента является группой по сложению и называется *группой дискретных переносов прямой.*

Множество-носитель этой группы есть бесконечное множество сонаправленных и противонаправленных векторов вида $n\vec{a}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Нейтральным элементом группы является нулевой вектор $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (точка). Для каждого вектора $n\vec{a}$ найдется противоположный вектор $(-n\vec{a})$, сложение с которым дает нулевой вектор: $n\vec{a} + (-n\vec{a}) = \vec{0}$.

II. *Группа дискретных переносов плоскости*

Рассмотрим два вектора – $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 4.5).

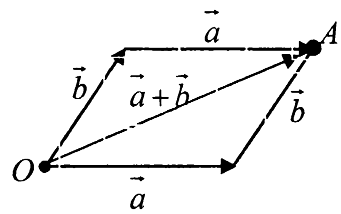


Рис. 4.5. Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Векторы не коллинеарны[1] друг другу, оба вектора приложены к точке O.

Любой вектор можно рассматривать как движение в заданном направлении.

Суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называют движение по векторам из точки O в точку A.

[1] Векторы называют коллинеарными, если они параллельны друг другу или лежат на одной и той же прямой.

Как ясно из рис. 4.5, попасть в точку A можно тремя путями:

1) от точки O до конца вектора $\vec{a}$, далее – от конца вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$ до его конца *(правило треугольника)*;

2) от точки O до конца вектора $\vec{b}$, далее – от конца вектора $\vec{b}$ по вектору $\vec{a}$ до его конца *(правило треугольника)*;

3) от точки O по направленному отрезку $\overrightarrow{OA}$ *(правило параллелограмма)*.

Способы движения по вектору $\vec{a}+\vec{b}$ позволяют сделать следующие выводы:

1. Существует два метода сложения векторов: метод треугольника и метод параллелограмма.

2. От перестановки мест слагаемых сумма векторов не меняется.

Теперь рассмотрим решетку, образованную всевозможными движениями вида $n\vec{a}+m\vec{b}$, где $(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$ – любые целые числа (рис. 4.6)[1]. Точки, в которые можно попасть путем таких движений, называют *узлами решетки*.

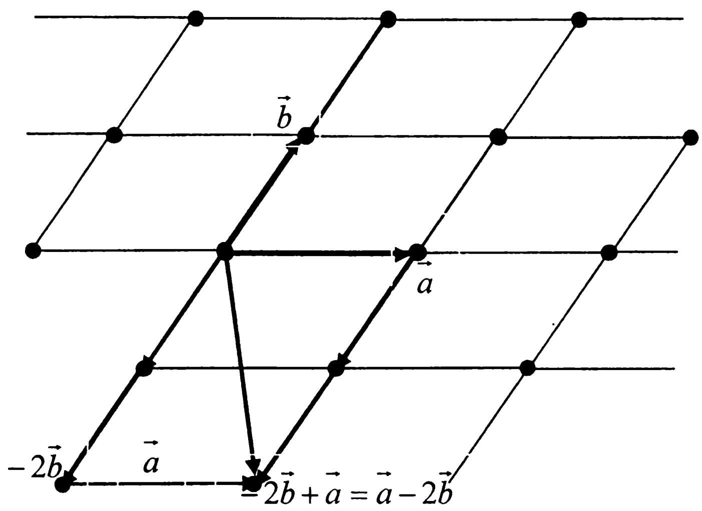


Рис. 4.6. Решетка, образованная движениями вида $n\vec{a}+m\vec{b}$

Движения вида $n\vec{a}+m\vec{b}$ сохраняют решетку. Очевидно, что такие движения образуют группу по сложению. Эту группу называют *группой дискретных переносов плоскости*.

[1] Предполагается, что такая решетка занимает всю бесконечную плоскость.

4.2.3. Группа дискретных преобразований плоскости

Соединим группу самосовмещений многоугольников и группу дискретных переносов. На рис. 4.7 показаны решетки, узлы которых попадают в вершины и центры симметрии треугольников (рис. 4.7, *а*), квадратов (рис. 4.7, *б*) и правильных шестиугольников (рис. 4.7, *в*).

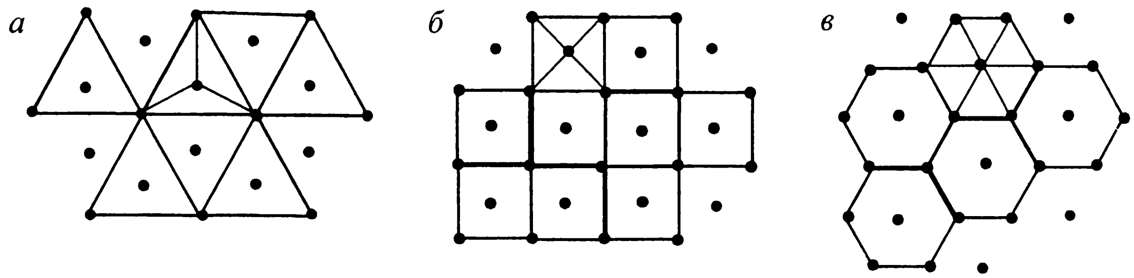


Рис. 4.7. Плоские решетки:
а – треугольников; *б* – квадратов; *в* – шестиугольников

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два любых неколлинеарных вектора, соединяющих ближайшие узлы какой-либо решетки. Можно показать, что перенос плоскости на вектор $n\vec{a}+m\vec{b}$ $(n,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ приводит к самосовмещению решетки. То же самое можно сказать и о преобразованиях симметрии многоугольников, образующих решетку: любое преобразование симметрии переводит решетку в себя[1].

На рис. 4.8 показано, что размещение узлов решетки в вершинах пяти- (рис. 4.8, *а*), семи- (рис. 4.8, *б*) , восьмиугольников (рис. 4.8, *в*) делает невозможным ее самосовмещение при аналогичных переносах плоскости. Например, складывая векторы, выходящие из общей вершины O (см. рис. 4.8, *а, б, в*), попадаем в точку A, которая не является узлом решетки. Очевидно, что самосовмещение невозможно для решетки, образованной любым n-угольником, если $n \geq 7$.

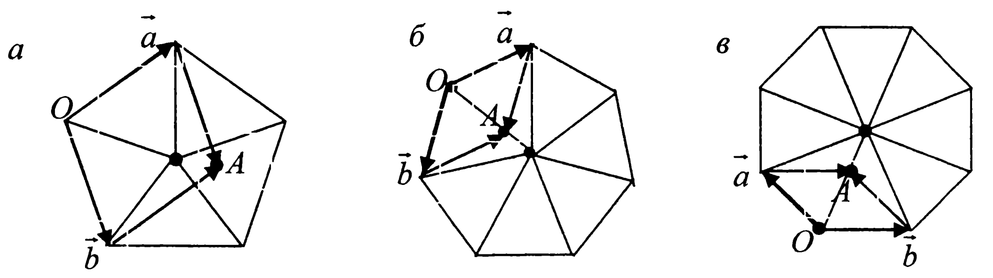


Рис. 4.8. Дискретные переносы многоугольников:
а – пятиугольника; *б* – семиугольника; *в* – восьмиугольника

[1] Считаем решетку бесконечной.

Итак, возможны решетки, построенные на треугольниках, четырехугольниках и шестиугольниках. Каждая из таких решеток может быть описана группой, содержащей повороты вокруг центра, отражения от осей симметрии и переносы. Решеток, построенных на основе пятиугольников и n-угольников, где $n \geq 7$, не существует.

Рассмотрение такого рода групп в трехмерном пространстве и тщательный их анализ привели русского ученого Евграфа Степановича Федорова (1853–1919), кристаллографа, минералога, геолога и геометра, к созданию таблицы возможных форм кристаллов. Эта таблица позволяет классифицировать кристаллы, предсказывать их новые возможные формы и по сути является аналогом таблицы Менделеева для химических элементов.

4.3. Гомоморфизмы и модели

4.3.1. Гомоморфизмы и их виды

Введем абстрактное понятие «гомоморфизм».

Для начала рассмотрим две простейшие структуры: $\{A, P_A(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ и $\{B, P_B(y_1, y_2, ..., y_n)\}$, где A и B – множества, а $P_A(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $P_B(y_1, y_2, ..., y_n)$ – n-местные предикаты на этих множествах. Если на множестве $A \times B$ задано отображение $f: A \xrightarrow{f} B$, *сохраняющее значение предиката* $P_A(x_1, x_2, ..., x_n)$, то такое отображение называют *гомоморфизмом* A в B (рис. 4.9).

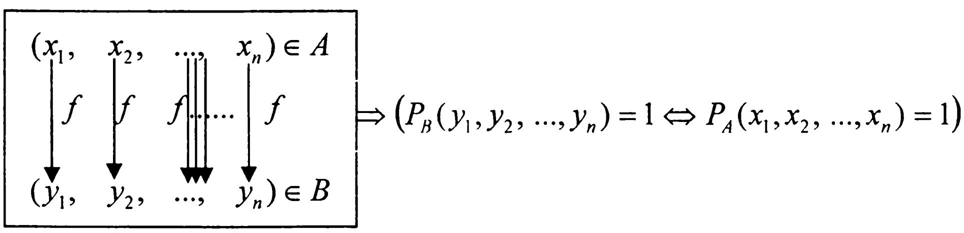


Рис. 4.9. Схема установления гомоморфизма f структуры $\{A, P_A(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ в структуру $\{B, P_B(y_1, y_2, ..., y_n)\}$

Теперь рассмотрим две алгебраические структуры, например, две группы (по умножению): $(G, *)$ и $(Q, \circ)$. Если на множестве $G \times Q$ задано отображение $f: G \xrightarrow{f} Q$, *сохраняющее произведение*, то такое отображение называют *гомоморфизмом* G в Q (рис. 4.10).

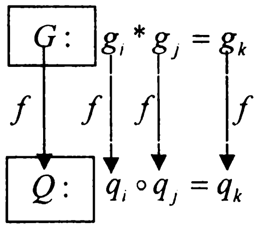


Рис. 4.10. Схема установления гомоморфизма f
группы $(G,*)$ в группу $(Q,\circ)$

В общем случае. Пусть $\mathcal{A} = \{A, f_{A1}, f_{A2}, ..., f_{Am}\}$ и $\mathcal{B} = \{B, f_{B1}, f_{B2}, ..., f_{Bm}\}$ – две структуры, содержащие предикаты с одинаковым числом мест и алгебраические операции одного типа. Отображение $f : A \xrightarrow{f} B$, *сохраняющее предикаты и операции*, называют *гомоморфизмом* A в B. На схеме (рис. 4.11) видно, что $f_{Ak}(x_i) = a_j$, $f(x_i) = y_i$, $f(a_j) = b_j$, $f_{Bk}(y_i) = b_j$.

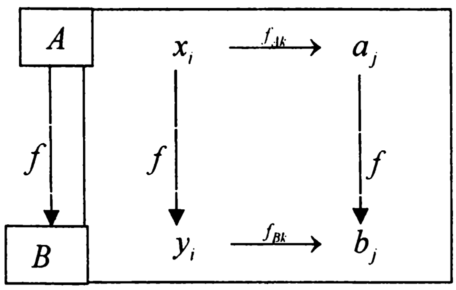


Рис. 4.11. Схема установления гомоморфизма
между структурами $\{A, f_{A1}, f_{A2}, ..., f_{Am}\}$ и $\{B, f_{B1}, f_{B2}, ..., f_{Bm}\}$

Следовательно, $f(f_{Ak}(x_i)) = b_j$ и $f_{Bk}(f(x_i)) = b_j$. Получаем равенство $f(f_{Ak}(x_i)) = f_{Bk}(f(x_i))$, которое справедливо для любого элемента x_i множества A. Итак, записать кратко требование сохранения функциональным соответствием $f : A \xrightarrow{f} B$ операций и значений предикатов $f_{Ak} \in \mathcal{A}$ и $f_{Bk} \in \mathcal{B}$ можно следующим образом: $f \circ f_{Ak} = f_{Bk} \circ f$, где $\circ$ означает композицию соответствий.

Определение 4.2. Функциональное соответствие $f : A \xrightarrow{f} B$, где A и B – носители структур $\mathcal{A} = \{A, f_{A1}, f_{A2}, ..., f_{Am}\}$ и $\mathcal{B} = \{B, f_{B1}, f_{B2}, ..., f_{Bm}\}$, называют ***гомоморфизмом из*** A ***в*** B, если выполняется равенство

$$f \circ f_{Ak} = f_{Bk} \circ f.$$

Существуют гомоморфизмы трех видов:

1. *Мономорфизм* – это гомоморфизм из A в B, при котором каждый элемент множества B имеет не более одного прообраза во множестве A, иными словами, $A \xrightarrow{f} B$ есть инъективное отображение.

2. *Эпиоморфизм* есть гомоморфизм из A в B, при котором каждый элемент множества B имеет не менее одного прообраза во множестве A, иными словами, $A \xrightarrow{f} B$ есть сюръективное отображение.

3. *Изоморфизм* – это гомоморфизм из A в B, при котором каждый элемент множества B имеет строго один прообраз во множестве A, иными словами, $A \xrightarrow{f} B$ есть взаимно однозначное отображение.

Примечание 1. Мономорфизм можно свести к изоморфизму, выделив во множестве B подмножество B_0, каждый элемент которого имеет единственный прообраз в A. Тогда $A \xrightarrow{f} B_0$ является изоморфизмом. Мы будем использовать термин «гомоморфизм» в основном для эпиоморфизмов и изоморфизмов.

Примечание 2. Изоморфизм алгебр отмечается символом $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Примечание 3. Если $A \xrightarrow{f} B$ есть изоморфизм, то соответствие f^{-1} из B в A также является изоморфизмом. Иными словами, если $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, то $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$, т. е. отношение изоморфизма является симметричным отношением на множестве алгебр. Кроме того, оно является рефлексивным и транзитивным, что следует из свойств взаимно однозначных соответствий. Следовательно, изоморфизм является отношением эквивалентности и разбивает все множество алгебр на классы изоморфных друг другу алгебр. Изучая свойства какой-либо алгебры из класса изоморфных алгебр, можно переносить эти свойства на все алгебры данного класса эквивалентности.

Определение 4.3. ***Эндоморфизм*** есть гомоморфное отображение структуры на себя.

Отображение множества на себя является преобразованием этого множества. Таким образом, эндоморфизм есть преобразование множества, сохраняющее операции. Эндоморфизмы, как и любые гомоморфизмы, могут быть мономорфными, эпиоморфными или изоморфными.

4.3.2. Модель как изоморфный образ фактор-множества

Понятие «гомоморфизм» тесно связано с понятием «модель».

Рассказывая приятелю свои впечатления о кинофильме, мы, по сути, строим *модель* содержания этого фильма, а также своих впечатлений и мыслей во время его просмотра средствами языка. Уравнение $S = vt$ есть *модель* равномерного и прямолинейного движения, записанная физическими символами. На рис. 4.12 приведена *модель* полета синицы.

Рис. 4.12. Модель полета синицы

Будем считать, что термин «модель» интуитивно понятен. Согласимся также с очевидным фактом, что *научное познание сводится к исследованию моделей изучаемых объектов.*

Чем же отличается модель от того фрагмента реальности, который она описывает? В первую очередь, тем, что в модели рассматриваются не отдельные объекты, а классы объектов. Изучение выбранного фрагмента реальности сводится именно к *изучению классов*, которые исследователь выделил в этом фрагменте.

Напомним, что разбиение множества на непересекающиеся классы всегда связано с отношением эквивалентности. Отношение эквивалентности – это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

Множество классов, полученных по отношению эквивалентности E на множестве A, образует *фактор-множество* множества A, которое, как мы уже говорили, принято обозначать символом A/E. Итак, разбиение на классы, или классификация, всегда связано с определением на множестве отношения эквивалентности, смысл которого диктуется смыслом задачи, поставленной исследователем.

Особую роль играют отношения эквивалентности, которые являются конгруэнциями. Вспомним, что это такое. Отношение конгруэнции – это подстановочное отношение. О нем можно говорить лишь в том случае, если на множестве определены еще какие-то отношения или операции. Термин «подстановочное» означает, что если в равенстве, неравенстве или ином предикате заменить элементы левой части конгруэнтными им элементами, то в правую часть встанут элементы, конгруэнтные первоначальным элементам правой части. То же можно сказать и об алгебраических операциях: если заменить компоненты операции конгруэнтными элементами, то результат будет конгруэнтен результату, который получился бы при выполнении операции с первоначальным составом компонент.

Как пишет Ю. А. Гастев, «...разбиение на классы эквивалентности, индуцируемое конгруэнцией, в самом естественном смысле слова "сохраняет структуру" множества, "факторизуемого" данной конгруэнцией, позволяя в применении к получаемому фактор множеству говорить обо всех операциях, "одноименных" операциям, определенным на исходном множестве. Больше того, мы можем в этом случае считать, что на фактор-множестве определены просто те же самые операции и аналогично рассматривать для классов эквивалентности, являющихся элементами фактор-множества, те же самые отношения и свойства. Иначе говоря, индуцируемое конгруэнцией разбиение определяет не просто фактор-множество исходного множества, но и его фактор-алгебру: фактор-множество группы есть группа, фактор-множество кольца есть кольцо (называемые соответственно фактор-группой и фактор-кольцом), и т. п.» [1].

Отметим, что в алгебре гомоморфизм $A \xrightarrow{f} E$ из множества A на его фактор-множество A/E принято называть *естественным гомоморфизмом*.

Пример

Пусть V – множество геометрических векторов на плоскости. Множество V можно разбить на классы по разным основаниям, например:

1) $a\rho_1 b$: «Вектор $\vec{a}$ параллелен вектору $\vec{b}$»;

2) $a\rho_2 b$: «Длина вектора $\vec{a}$ равна длине вектора $\vec{b}$»;

3) $a\rho b$: «Вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$» ($\vec{a} = \vec{b}$).

Соответственно, получаем три фактор-множества:

1) V/E_1, где E_1 – множество классов коллинеарных векторов[2];

2) V/E_2, где E_2 – множество классов векторов, равных друг другу по длине;

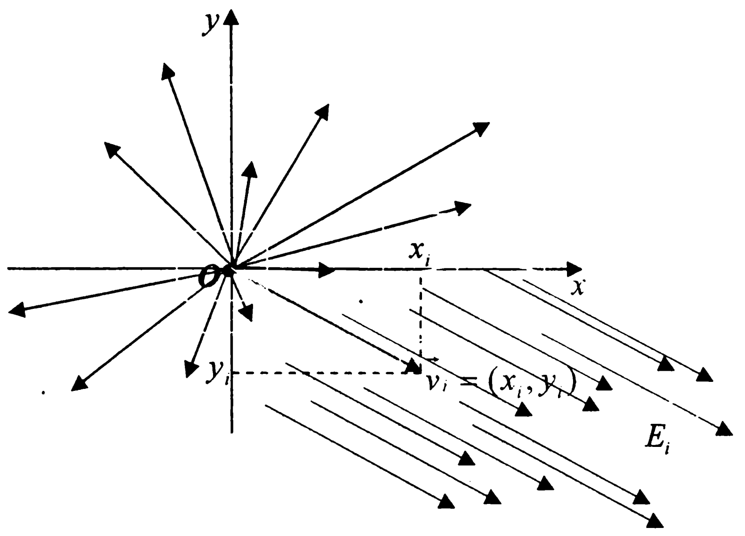
3) V/E, где E – множество классов равных друг другу векторов (сонаправленных и равных по длине).

---

[1] *Гастев Ю. А.* Гомоморфизмы и модели. Логико-алгебраические аспекты моделирования [Электронный ресурс]. URL: http://bookfi.org/g/%D0%93%D0%B0% D1%81%D1%82%D0%B5% .

[2] Напомним, что коллинеарные векторы – это векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых.

На множестве векторов V определены многие отношения и операции, например, параллельность и перпендикулярность векторов, умножение на число, сложение и вычитание, скалярное умножение и пр. Иными словами, множество V является носителем богатой структуры[1], содержащей много операций и отношений. *Все* элементы этой структуры сохраняются только на множестве V/E. В фактор-множествах V/E_1 и V/E_2 сохраняются лишь *некоторые* из элементов этой структуры.



Остановимся на фактор-множестве V/E. Элементы множества E, т. е. ***классы равных друг другу векторов,*** называют ***свободными векторами***. Векторы внутри этих классов неразличимы в рамках векторной алгебры.

Выберем из каждого класса E_i по одному представителю. Единственное требование, предъявляемое к векторам-представителям, – они должны быть удобны для изучения. Например, они должны быть приложены к одной точке O. Возьмем точку O в качестве начала координат и приложим к ней две оси – Ox и Oy. После этого представителю $\vec{v}_i$ каждого класса эквивалентности E_i будет сопоставлена пара чисел – координат этого вектора: $\vec{v}_i = (x_i, y_i)$. Эта же пара чисел будет сопоставлена и любому другому вектору из класса E_i.

Таким образом, система координат устанавливает соответствие между свободными векторами и множеством всех пар действительных чисел R^2: $E \xrightarrow{\varphi} R^2$. Это соответствие является взаимно однозначным отображением на множестве $E \times R^2$, сопоставляющим каждому свободному вектору пару чисел – координат этого вектора (при условии, что система координат выбрана). Но и каждая пара чисел соответствует строго одному свободному вектору, поскольку по заданным координатам при выбранной системе координат можно построить единственный вектор. Этот вектор является представителем класса равных ему векторов и определяет весь класс.

Итак, получены два гомоморфизма: $V \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\varphi} R^2$. Первый гомоморфизм – f – является естественным гомоморфизмом множества всех векторов V на множество свободных векторов E. Второй гомоморфизм – φ – есть изоморфное отображение множества свободных векторов на декартов квадрат множества действительных чисел R^2.

[1] Такая структура называется *линейной алгеброй*. Мы рассмотрим ее в следующей главе.

Все отношения и операции на множестве V векторов (на плоскости) могут быть изучены как отношения и операции на множестве R^2. Множество R^2 может быть выбрано в качестве модели векторного пространства V. Отношение между множествами V и R^2 можно рассматривать как отношение оригинала и модели.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "\varphi"] & R^2 \arrow[ll, bend right, "\text{модель}"'] \end{tikzcd}$$

Схема построения модели аналогична при любом исследовании. Основные этапы построения модели и термины, которые могут быть при этом использованы, представлены на рис. 4.13.

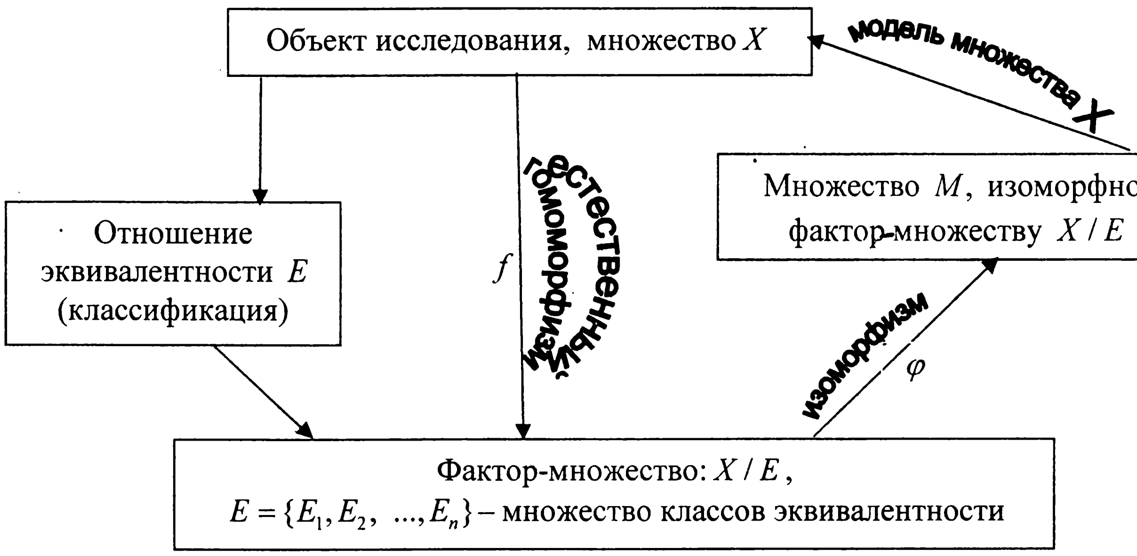


Рис. 4.13. Схема построения модели

Отметим, что фактор-множество X/E далеко не всегда дискретно и конечно, как показано на рис. 4.13. Так, в примере, рассмотренном выше (множество V векторов на плоскости), нельзя перечислить и записать все свободные векторы, поскольку некоторые из них бесконечно мало отличаются друг от друга как по длине, так и по направлению.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Перечислите основные алгебраические структуры.

2. Дайте определение группы, кольца, поля, булевой алгебры. Приведите пример каждой из перечисленных алгебраических структур.

3. Поясните, почему множество натуральных чисел не является группой ни по сложению, ни по умножению.

4. Выполните все операции табл. 4.2, используя:

а) двустрочные матрицы;

б) квадратные матрицы.

5. Во множестве $B = \{0, 1\}$ определены две бинарные операции: $a \cdot b = \min(a, b)$, $a + b = \max(a, b)$. Запишите таблицы этих операций. Какую алгебраическую структуру образует множество B с такими операциями?

6. Изобразите группу самосовмещений квадрата $\{G_4, g_0, \circ\}$.

7. Запишите таблицу умножения группы $\{G_4, g_0, \circ\}$ и для каждого элемента найдите обратный.

8. Изобразите группы самосовмещений прямоугольника и ромба. Запишите двустрочные и квадратные матрицы каждой из групп, а также их таблицы умножения.

9. Для каждого элемента групп самосовмещений прямоугольника и ромба найдите обратные элементы.

10. Постройте решетку на основе прямоугольника. Возможно ли самосовмещение такой решетки при дискретных переносах, поворотах и преобразованиях симметрии?

11. Дайте определение фактор-множества множества U.

12. Дайте определение гомоморфизма. Назовите виды гомоморфизмов и дайте определение каждого вида.

13. Дайте определение понятия «естественный гомоморфизм».

14. Пусть Q_+ – множество положительных рациональных чисел с операцией умножения. Введите на Q_+ отношение конгруэнции. Объясните выполнение операций умножения и деления дробей, используя термины «фактор-множество», «класс эквивалентности», «естественный гомоморфизм», «представитель класса эквивалентности».

15. Множество Q_+ разбивается на классы по отношению эквивалентности: «дробь a имеет числитель равный числителю дроби b». Объясните, почему фактор-множество по этому отношению не может служить моделью группы $\{Q_+, 1, \times\}$.

5. ПРОСТРАНСТВА

Исторически первым и важнейшим математическим пространством является трехмерное евклидово пространство, представляющее собой приближенный, абстрактный образ реального пространства. Связь с этим историческим образом ощущается в терминах, которые используются при описании других математических пространств. Так, элементы пространств, как правило, называют *точками*, меру удаленности точек друг от друга – *расстоянием*, подмножества – *областями* или *окрестностями* и т. п.

5.1. Метрические и топологические пространства

5.1.1. Множество действительных чисел как метрическое пространство. Два вида бесконечности

Множество всех действительных чисел R с операциями сложения и умножения представляет собой алгебраическую структуру, которую называют *полем*.

Полем является и множество всех точек числовой оси. Эти два поля изоморфны друг другу. С математической точки зрения, они неразличимы и обозначаются одним символом – R. Под словом «точка» часто имеют в виду действительное число, а под словом «число» – точку числовой оси.

Ввиду такой тесной связи оказывается совершенно естественным употребление термина «расстояние» во множестве R. Расстояние между числами x и y или между соответствующими точками числовой оси есть число, равное модулю разности между этими элементами:

$$\rho(x,y)=|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}\,.$$

Это равенство позволяет определить расстояние между любыми элементами множества R, а значит, делает R ***метрическим пространством***. В дальнейшем будем обозначать это метрическое пространство символом $(R,\rho(x,y))$.

Введение метрики дает возможность описывать близость или отдаленность точек пространства друг от друга, что, в свою очередь, позволяет ввести строгое определение конечного и бесконечного.

Именно об этих понятиях очень точно и в то же время поэтично пишет святитель Игнатий (Брянчанинов). Процитируем его текст. «К математической теории конечного и бесконечного... мы обращаемся часто, чтоб по возможности правильно и точно объяснить отношения тварей к Творцу, в собственном смысле непостижимые и необъяснимые. Не способна к такому объяснению ни одна наука, кроме математики. Она, одна она, доказывая неприступность бесконечного к постижению его, ставит в правильные отношения к нему все числа, то есть все виды тварей… Непосвященный в таинства математики никак не совместит в себе понятия, что все числа, столь различные между собою, вместе совершенно равны между собою в *отношении к бесконечному*. Причина такого равенства очень проста и ясна: она заключается в бесконечной, следовательно – *постоянно равной разнице* между бесконечным и каким бы то ни было числом» (курсив наш. – *Л. К., Ю. С.*)[1].

Поясним, что же понимают математики под конечным и бесконечным. Расширим множество R, добавив в него два элемента: ∞ и $-\infty$ (плюс бесконечность и минус бесконечность). Эти элементы, искусственно внесенные во множество R, называются ***несобственными элементами множества*** R. Подчеркнем, что несобственные элементы числами не являются. Нельзя сказать «бесконечно большое число», поскольку $|\pm\infty|$ больше любого наперед заданного числа.

На числовой прямой точки ∞ и $-\infty$ называются ***бесконечно удаленными точками***. Пусть a – любая точка числовой оси (или любое действительное число).

Основное неравенство, определяющее $\pm\infty$, имеет вид

$$-\infty < a < \infty.$$

Бесконечно удаленные точки числовой оси, или, что то же самое, несобственные элементы множества действительных чисел, удовлетворяют следующим равенствам и неравенствам:

1)	$\infty + a = \infty,$	если $a \neq -\infty;$	(1)
2)	$-\infty + a = -\infty,$	если $a \neq \infty;$	(2)
3)	$-\infty + \infty$	не определено;	(3)
4)	$\infty \cdot a = \infty,$	если $a > 0;$	(4)
5)	$-\infty \cdot a = -\infty,$	если $a > 0;$	(5)
6)	$\infty \cdot a = -\infty,$	если $a < 0;$	(6)
7)	$-\infty \cdot a = \infty,$	если $a < 0;$	(7)
8)	$\pm\infty \cdot 0$	не определено.	(8)

[1] *Игнатий* (Брянчанинов) (святитель). Слово о смерти. М.: Отчий дом, 2008. С. 179 – 180.

Равенства (1) и (2) есть точная запись высказывания святителя Игнатия: $\pm\infty + a = \pm\infty \Rightarrow \pm\infty - a = \pm\infty$ – разница между бесконечностью и каким бы то ни было числом постоянна и равна бесконечности. Используя понятие «расстояние», это высказывание можно записать так:

$$\forall a (a \in R) : \rho(a, \pm\infty) = \infty$$

(расстояние от любой точки числовой оси до бесконечно удаленной точки есть бесконечность).

Равенства (4) – (7) имеют следующий смысл: $|\pm\infty| \cdot |a| = \infty \Rightarrow \left|\frac{\pm\infty}{a}\right| = \infty$, или, по-другому: разделив бесконечность на любое число, получим ту же самую бесконечность.

Обобщая случаи разностного и кратного сравнения бесконечности с числами, приходим к выводу, сформулированному святителем Игнатием: «Все числа, столь различные между собою, вместе совершенно равны между собою в *отношении к бесконечному*» (курсив наш. – *Л. К., Ю. С.*) [1].

Мы не можем постичь бесконечности, но очевидно, что она связана с движением. Нельзя сказать: «бесконечно большое число», но вполне допустимо говорить о бесконечно больших величинах, поскольку величина есть нечто изменяющееся. В математике часто встречается высказывание: «величина x стремится к значению a: $(x \to a)$». В частности, величина может стремиться к бесконечности: $x \to \infty$ или $x \to -\infty$.

Предположим, что мы решили по числовой оси дойти до бесконечно удаленной точки. Преодолев огромное расстояние (скажем, $x = 10^{20}$ км), мы вдруг обнаруживаем, что ***расстояние впереди продолжает оставаться бесконечным***, а оглядываясь назад, видим, что прошли лишь ***конечное расстояние*** (пусть и равное очень большому числу 10^{20} (км)). То есть ***расстояние от любой точки числовой оси до бесконечно удаленной точки больше любого наперед заданного числа.***

Рассмотрим теперь другой вид бесконечности. Мы движемся в направлении точки a (рис. 5.1), но в саму точку попасть не можем, поскольку длина каждого следующего шага в несколько раз (например, в два раза) меньше предыдущего. Другими словами, наши шаги – это движение по точкам последовательности: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$, причем расстояние $\rho(a_i, a_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ начиная с некоторого номера $i = N$ становится и

---

[1] *Игнатий* (Брянчанинов) (святитель). Указ. соч. С. 180.

остается меньше любого положительного числа ε $(\varepsilon > 0)$. И вновь, сколько бы шагов мы ни сделали, посмотрев назад и вперед, обнаруживаем, что любая окрестность точки a содержит ***все*** точки последовательности, ***за исключением конечного*** их числа (см. рис. 5.1).

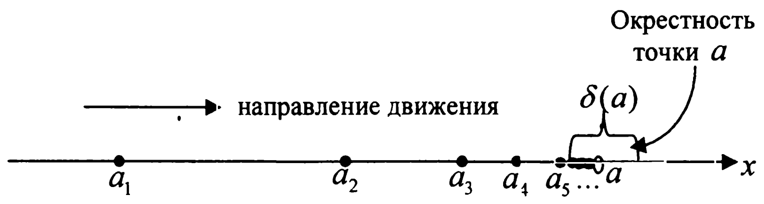


Рис. 5.1. Движение в направлении точки a
по элементам последовательности $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$

В данном случае движение происходит на ограниченном промежутке числовой оси $[a_1, a)$. Но двигаясь по точкам последовательности $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$, в точку a попасть нельзя: как бы близко мы ни подошли к ней, останется пройти все точки последовательности за исключением конечного их числа. Здесь мы сталкиваемся ***с бесконечной делимостью пространства*** R: ***в любом сколь угодно малом отрезке бесконечно много точек.***

Таким образом, в пространстве R имеется два типа бесконечности:

а) бесконечность «вширь», которая по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа;

б) бесконечность «вглубь», связанная с бесконечной делимостью пространства, или, другими словами, с бесконечной близостью точек метрического пространства $(R, \rho(x,y))$.

5.1.2. Обобщение понятия метрического пространства. Основные определения

Введем определения некоторых понятий метрического пространства[1].

Определение 5.1. Множество X называют ***метрическим пространством***, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

[1] Эти определения используются как в пространстве $(R, \rho(x,y))$, так и в любом другом метрическом пространстве.

2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксиома симметрии);

3. $\rho(x,y)\le\rho(y,z)+\rho(z,y)$ (аксиома треугольника).

Число $\rho(x,y)$, определенное таким образом, называют расстоянием между элементами x и y, или ***метрикой пространства***.

Метрическое пространство обозначают символом (X,ρ), где X – множество, состоящее из точек, ρ – метрика пространства.

Пусть (X,ρ) – метрическое пространство, A – подмножество множества X, a – элемент множества X, r – число, большее нуля ($r>0$).

Определение 5.2. Множество точек x, удовлетворяющих строгому неравенству $\rho(x,a)<r$, называют ***шаром***, а множество точек x, удовлетворяющих нестрогому неравенству $\rho(x,a)\le r$, – ***замкнутым шаром*** с центром в точке a и радиусом, равным r.

Открытый шар с центром в точке a и радиусом, равным r, обозначают символом $O(a,r)$. На рис. 5.2 изображен открытый шар $O(a,r)$ на числовой оси. Открытым шаром в пространстве $(R,\rho(x,y))$ называют интервал $(a-r,\,a+r)$, т. е. множество чисел, удовлетворяющих двойному строгому неравенству $a-r<x<a+r$.

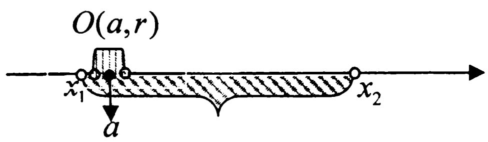


Рис. 5.2. Открытый шар $O(a,r)$
на интервале (x_1,x_2) числовой оси

Определение 5.3. Множество называют ***ограниченным***, если существует шар, содержащий это множество.

Определение 5.4. Множество A называют ***открытым*** в пространстве (X,ρ), если вместе с каждой своей точкой x оно содержит и некоторый шар $O(a,r)$.

Определение 5.5. Множество $\overline{A}$ называют ***замкнутым*** в пространстве (X,ρ), если оно является дополнением открытого множества A.

Примечание. Из логического закона двойного отрицания $\overline{\overline{p}} = p$ (см. п. 2.2) очевидно, что дополнение замкнутого множества есть множество открытое.

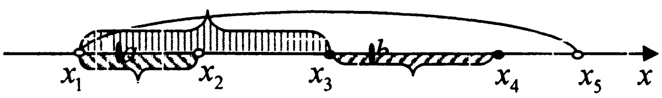
Определение 5.6. ***Окрестностью точки*** x называют любое открытое подмножество, содержащее точку x. ***Окрестностью множества*** A – любое открытое подмножество, содержащее A.

Окрестность точки x будем обозначать символом $\delta(x)$.

Определение 5.7.. Точку x называют ***граничной точкой*** множества A, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие A, так и точки, не принадлежащие A. Множество всех граничных точек множества A называют ***границей*** этого множества.

Пример

Рисунок поясняет приведенные выше определения на примере пространства



$(R, \rho(x, y))$. На нем отмечены некоторые точки, принадлежащие полуинтервалу $(x_1, x_4]$. Полуинтервал $A = (x_1, x_4]$ – это подмножество множества R, причем любая точка x полуинтервала удовлетворяет двойному неравенству $x_1 < x \le x_4$.

Множество $(x_1, x_4]$ является *ограниченным* множеством, так как целиком содержится в открытом шаре $O(x_3, r) = (x_1, x_5)$ с центром в точке x_3 и радиусом $r = \dfrac{x_1 + x_5}{2}$.

Полуинтервал $A = (x_1, x_4]$ *не является открытым множеством*, поскольку содержит граничную точку x_4, любая окрестность которой имеет как точки, принадлежащие A (слева от x_4), так и точки, не принадлежащие A (справа от x_4).

В то же время $A = (x_1, x_4]$ *не является и замкнутым множеством*. Действительно, дополнение $\overline{A} = (-\infty, x_1] \cup (x_4, \infty)$ содержит граничную точку x_1, следовательно, не является открытым множеством.

Интервал (x_1, x_2) есть открытое подмножество полуинтервала $(x_1, x_4]$. Вместе с каждой своей точкой x интервал (x_1, x_2) содержит и некоторый шар $O(x, r)$. В самом деле, пусть x – точка, очень близкая к x_1. Другими словами, число $\rho(x, x_1)$ достаточно мало. Однако ввиду бесконечной делимости пространства R всегда найдется число $\delta < \rho(x, x_1)$. Найдется также и точка x', лежащая *между* x и x_1, для которой $\rho(x, x') \le \delta < \rho(x, x_1)$. Например, $\delta = \dfrac{\rho(x, x_1)}{2}$ и x' – середина отрезка $[x, x_1]$. Следовательно, шар с центром в точке x и радиусом $r = \rho(x, x')$ будет целиком лежать в интервале (x_1, x_2). Аналогичные рассуждения можно провести и относительно точки x_2.

Поскольку $a \in (x_1, x_2)$ и (x_1, x_2) – открытое подмножество, то (x_1, x_2) есть одна из многочисленных окрестностей точки a: $\delta(a) = (x_1, x_2)$. Полуинтервал $(x_1, x_3]$ не является окрестностью точки a, поскольку не является открытым подмножеством.

Отрезок $[x_3, x_4]$ содержит две граничные точки. Для любой точки x отрезка $[x_3, x_4]$ выполняется нестрогое двойное неравенство $x_3 \le x \le x_4$. Хотя $b \in [x_3, x_4]$, отрезок $[x_3, x_4]$ не входит во множество окрестностей точки b, поскольку не является открытым подмножеством.

Ориентируясь на этот же рисунок, рассмотрим понятие *предела переменной величины*. Пусть $a \in (x_1, x_3]$. Будем двигаться вправо от точки a, *оставаясь все время в указанном полуинтервале*. Финальная точка нашего «путешествия» – точка x_3, принадлежащая полуинтервалу $(x_1, x_3]$. Иная картина будет при движении влево от точки a. Точка x_1 не принадлежит полуинтервалу. Двигаясь внутри него, можно приблизится к x_1 на сколь угодно малое, но все же не равное нулю, расстояние. Если x – переменная из полуинтервала $(x_1, x_3]$, то процесс приближения точки к левой границе интервала можно описать в символах $\lim\limits_{x \to x_1} x = x_1$, но в то же время $x \ne x_1$, или, по-другому, $\lim\limits_{x \to x_1} \rho(x, x_1) = 0$, но при этом $\forall x (x \in (x_1, x_3]) : \rho(x, x_1) > 0$.

Двигаясь вправо, имеем:

$$\lim_{x \to x_3} \rho(x, x_3) = 0, \text{ при этом } \exists x (x \in (x_1, x_3]) : \rho(x, x_3) = 0.$$

Точки x_1 и x_3 являются *предельными точками* полуинтервала $(x_1, x_3]$, но $x_1 \notin (x_1, x_3]$, а $x_3 \in (x_1, x_3]$.

В отличие от полуинтервала $(x_1, x_3]$, отрезок $[x_3, x_4]$ содержит все свои предельные точки. Множество, содержащее все свои предельные точки, является *замкнутым множеством*.

Определение 5.8. Последовательность точек $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ метрического пространства (X, ρ) называется ***сходящейся к точке*** a, если любая окрестность точки a содержит *все точки последовательности, за исключением конечного их числа*.

Если последовательность $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ сходится к точке a, то пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

5.1.3. Гомеоморфные отображения

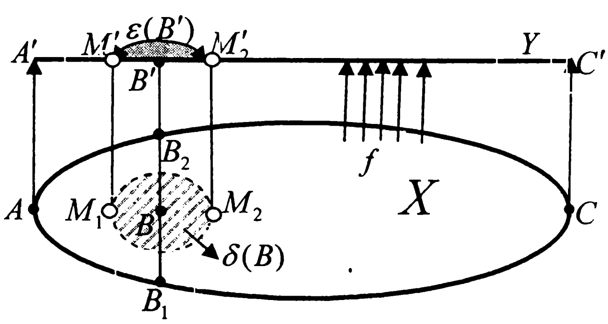
Введем обозначения:

- (X,ρ), (Y,ρ_0) – два метрических пространства с метриками ρ и ρ_0. (В общем случае метрики определены разными формулами);
- $X \xrightarrow{f} Y$ – отображение f метрического пространства (X,ρ) в пространство (Y,ρ_0), причем каждый элемент множества Y является образом какого-либо элемента из множества X (иными словами, $X \xrightarrow{f} Y$ есть сюръективное отображение X в Y);
- $y = f(x)$ – образ точки x $(x \in X)$ во множестве Y;
- $\delta(x)$ – окрестность точки x ($\delta(x) \subseteq X$);
- $O(x,\delta)$ – шар с центром в точке x и радиусом, равным δ ($O(x,\delta) \subset X$, $\forall x'(x' \in O(x,\delta)) : \rho(x,x') < \delta$);
- $\varepsilon(y)$ – окрестность точки y ($y \in Y$, $\varepsilon(y) \subseteq Y$);
- $O(y,\varepsilon)$ – шар с центром в точке y и радиусом, равным ε ($O(y,\varepsilon) \subset Y$, $\forall y'(y' \in O(y,\varepsilon)) : \rho_0(y,y') < \varepsilon$);
- $f(\delta(x))$ – множество образов всех точек из окрестности $\delta(x)$ во множестве Y (иначе, образ окрестности $\delta(x)$ во множестве Y).

Определение 5.9. Отображение f называют ***непрерывным в точке*** x, если для каждой окрестности $\varepsilon(y)$ точки $y = f(x)$ ($y \in Y$, $\varepsilon(y) \subseteq Y$) найдется окрестность $\delta(x)$ точки x ($x \in X$, $\delta(x) \subseteq X$) такая, что $f(\delta(x)) \subset \varepsilon(y)$ (образ окрестности точки x есть подмножество окрестности образа этой точки).

Если отображение f непрерывно в точке x_0, то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x)$.

Пример 1

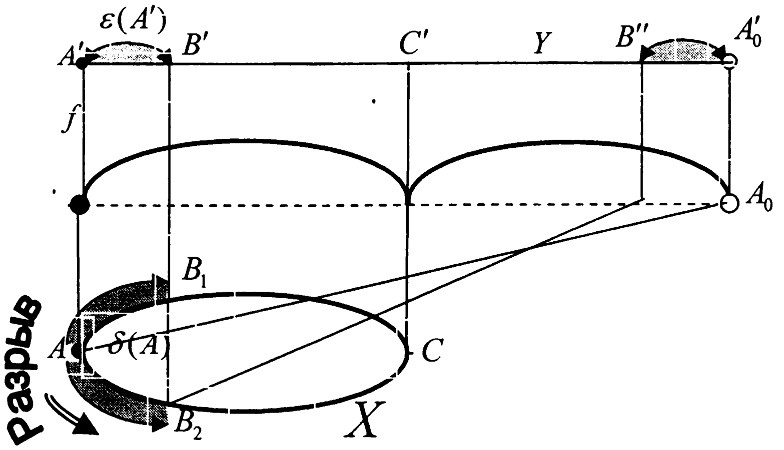


На рисунке показано отображение точек эллипса (множество X) в точки отрезка $A'C'$. Отрезок параллелен большой оси эллипса, и его длина равна длине большой оси (множество Y). Образ точки x есть проекция этой точки на отрезок $A'C'$: $y = f(x) = np_{A'C'}x$.

Покажем, что $f(x)$ является непрерывным отображением. Пусть $f(B) = B'$. Возьмем любую окрестность точки B'. Пусть это будет шар $O(B',\varepsilon) = \varepsilon(B')$. Окрестность $O(B',\varepsilon)$ есть интервал, удовлетворяющий строгому неравенству $\varepsilon < \frac{1}{2}\rho(M_1',M_2')$. Восстановим из точек M_1' и M_2' перпендикуляры к $A'C'$ и проведем окружность с центром в точке B', касающуюся этих перпендикуляров. Точки M_1 и M_2 – точки касания. Если выбрать в качестве окрестности точки B полученный открытый круг $\delta(B) = O(B,\delta)$, где $\delta < \rho(B,M_1)$, то проекции всех точек этого круга попадают в $O(B',\varepsilon)$. Это и означает, что $f(\delta(B)) \subset \varepsilon(B')$. Следовательно, отображение f непрерывно в точке B.

Обратим внимание на то, что обратное соответствие $f^{-1}(y)$ не является отображением: например, прообразами точки B' являются все точки отрезка B_1B_2. Чтобы преобразовать эллипс в отрезок, надо «склеить» внутренние точки эллипса, а также его верхнюю и нижнюю границы. Это означает, что рассмотренное отображение не является взаимно однозначным соответствием.

Пример 2



Преобразуем границу эллипса (множество X) в отрезок $A'A_0'$ (множество Y), длина которого равна удвоенной длине большой оси эллипса.

Для этого разорвем линию эллипса в точке A и повернем нижнюю часть линии так, как показано на рисунке. Точки линии эллипса сохраняют свое положение и на разорванном эллипсе. Это справедливо для всех точек за исключением точки A, в которой произведен разрыв. Точка A не может находиться одновременно в двух местах. Поэтому слева на преобразованной линии оказалась выколотая точка A_0.

Спроецировав точки разорванного эллипса на отрезок $A'A_0'$, получим отображение f точек линии эллипса на точки отрезка $A_0'A'$. Отображение f непрерывно в каждой точке эллипса за исключением точки A. Точки, близкие к точке A на самом эллипсе, имеют весьма далекие образы на отрезке $A'A_0'$.

Итак, отображение f не является непрерывным, или, по-другому, отображение f терпит разрыв в точке A. Покажем, что нарушение непрерывности действительно имеет место. Точка $A' = f(A)$. Пусть $\varepsilon(A') = (A'B')$ – окрестность точки A'. Прообразами точек этой окрестности являются точки линии эллипса, принадлежащие дуге $\delta(A)=B_1\breve{A}B_2$. Половина окрестности $\delta_1(A)=B_1\breve{A}$ отображается в $\varepsilon(A')$, но вторая половина отображается в окрестность точки A'_0: $\varepsilon(A'_0)=(A'_0B'')$. Получаем: $f(\delta(A))=(A'B')\cup(A'_0B'')$. Следовательно, $f(\delta(A))\not\subset\varepsilon(f(A))$, т. е. по определению A является точкой разрыва отображения f.

Чтобы преобразовать линию эллипса в отрезок, пришлось ее «разорвать». Это означает, что рассмотренное отображение не является непрерывным.

Определение 5.10. Отображение $f:\ X\xrightarrow{f}Y$ называют ***непрерывным во множестве*** X, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Определение 5.11. Взаимно однозначное соответствие[1] $f:\ X\xrightarrow{f}Y$ называют ***гомеоморфизмом*** метрического пространства (X,ρ) в метрическое пространство (Y,ρ_0), если f непрерывно во множестве X и f^{-1} непрерывно во множестве Y.

Напомним, что гомоморфизм из X в Y – это отображение $f:X\xrightarrow{f}Y$, сохраняющее предикаты и операции, т. е. *алгебраическую структуру* множества X. Гомеоморфизм сохраняет *топологическую структуру* множества X.

Топологическое пространство является естественным обобщением метрического пространства. Как мы уже говорили, введение метрики дает возможность описывать *близость* или *отдаленность* точек пространства, позволяет вести строгое определение *конечного* и *бесконечного*, *предела* и *непрерывности*. Все эти достаточно важные, как с математической, так и с мировоззренческой точки зрения, понятия опираются на понятие *открытого множества*.

Приведем аксиоматическое определение топологического пространства.

Определение 5.12. Пусть на множестве X задана система подмножеств $\{\Sigma\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $X\in\{\Sigma\}$ и $\varnothing\in\{\Sigma\}$;

2) пересечение конечного числа подмножеств из $\{\Sigma\}$ и объединение

---

[1] Напомним, что отображение $X\xrightarrow{f}Y$ называют взаимно однозначным соответствием, если каждый элемент множества Y имеет единственный прообраз во множестве X. По-другому можно сказать так: отображение $X\xrightarrow{f}Y$ является взаимно однозначным соответствием, если обратное соответствие $Y\xrightarrow{f^{-1}}X$ также является отображением.

любого числа подмножеств из $\{\Sigma\}$ принадлежат $\{\Sigma\}$;

3) для любых двух не равных друг другу точек x и y из множества X найдутся два подмножества Σ_x и Σ_y такие, что $x \in \Sigma_x$, $y \in \Sigma_y$ и $\Sigma_x \cap \Sigma_y = \varnothing$.

Систему подмножеств $\{\Sigma\}$, обладающую данными свойствами, называют ***топологией***, элементы топологии Σ – ***открытыми множествами***, множество X – ***носителем топологии***, а пару $T = (X, \{\Sigma\})$ – ***топологическим пространством***[1].

В любом метрическом пространстве (X, ρ) топологией Σ является множество всех открытых подмножеств этого пространства. Например, в пространстве $(R, \rho(x,y))$ топология – это множество всех интервалов числовой оси.

Топологией называют также раздел математики, изучающий топологические пространства. Назначение топологии – выяснение и исследование в рамках математики идеи непрерывности, которая выражает коренное свойство пространства и времени[2]. Предметом топологии являются топологические инварианты, т. е. те свойства фигур и их взаимного расположения, которые сохраняются гомеоморфизмами.

5.2. Линейные пространства

5.2.1. Аксиоматическое определение линейного пространства

Изучение метрических и топологических пространств мы начали с их наиболее известной интерпретации – множества действительных чисел и числовой прямой. Завершилось изучение топологических пространств моделью системы аксиом этого пространства.

Рассмотрение линейного пространства будет происходить в обратном порядке: от модели системы аксиом этого пространства – к нескольким ее интерпретациям.

Определение 5.13. ***Линейным пространством над числовым полем*** K называют структуру $\{V, K, +, \cdot\}$, где V – множество-носитель, $(+)$ – бинарная операция, условно называемая сложением, $(\cdot)$ – операция, условно называемая умножением на число из поля K, причем выполняются следующие аксиомы:

---

[1] Подробнее об этом см.: *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Вл. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979. С. 512–522.

[2] Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1988. С.582–584.

1. Аксиомы сложения:

1) выполнимость сложения: $\forall v_1, v_2, \exists v_3 : v_1 + v_2 = v_3$, (для любой пары элементов из множества V найдется элемент этого же множества, равный их сумме);

2) существование элемента o, нейтрального по сложению: $\exists o \forall v : (v + o = = o + v = v)$;

3) существование противоположного элемента: $\forall v \exists (-v) : v + (-v) = = (-v) + v = o$ (для любого элемента v множества V найдется противоположный ему элемент $-v$);

4) ассоциативность сложения: $\forall v_1, v_2, v_3 : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;

5) коммутативность сложения: $\forall v_1, v_2 : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

2. Аксиомы умножения на число:

1) выполнимость умножения на число:
$\forall v_1 (v_1 \in V), \forall k (k \in K), \exists v_2 (v_2 \in V) : k \cdot v_1 = v_2$ (для любого элемента множества V и любого числа из поля K найдется элемент множества V, равный их произведению);

2) законы дистрибутивности умножения относительно сложения:

1-й закон: $\forall v_1, v_2 \forall k : k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$;

2-й закон: $\forall k_1, k_2 \forall v : (k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$;

3) ассоциативность умножения: $\forall k_1, k_2 \forall v : (k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$;

4) свойство единицы: $\forall v : 1 \cdot v = v$.

Аксиомы сложения делают структуру $G = \{V, +\}$ коммутативной группой по сложению. Линейная алгебра – результат взаимодействия группы G и поля K через операцию умножения.

Следствия из аксиом линейной алгебры:

1) нейтральный элемент o является единственным;

2) противоположный элемент для каждого элемента является единственным;

3) умножение на противоположное число дает противоположный элемент: $(-k) \cdot v = k \cdot (-v)$;

4) умножение на 0 дает элемент, нейтральный по сложению: $0 \cdot v = o$.

Примечание. В дальнейшем знак умножения $(\cdot)$ будем опускать.

5.2.2. Трехмерные аффинные пространства

Пространство состоит из точек. Точка – неопределяемое понятие. В геометрии точки принято обозначать заглавными латинскими буквами: A, B, C, ... Все множество точек пространства обозначим символом L_3. Индекс «3» подчеркивает, что наше пространство трехмерное: оно имеет длину, ширину и высоту. Чтобы перейти из одной точки в другую, надо указать направление движения. Например, начальная точка движения $-A$, конечная $-B$, начальная и конечная точки определяют направление движения: $\overrightarrow{AB}$. Отрезок, на котором указаны начальная и конечная точки, называют вектором.

Универсальный способ указания маршрута из одной точки пространства в другую − использование ***систем координат***. Из всего множества систем существующих систем координат рассмотрим ***декартову прямоугольную систему координат***,[1] которая используется наиболее часто.

Декартова система координат – это три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy и Oz, проходящие через заранее выбранную «удобную» точку O – начало координат (рис. 5.3). Векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, лежащие на осях координат, называют ***базисными векторами***.

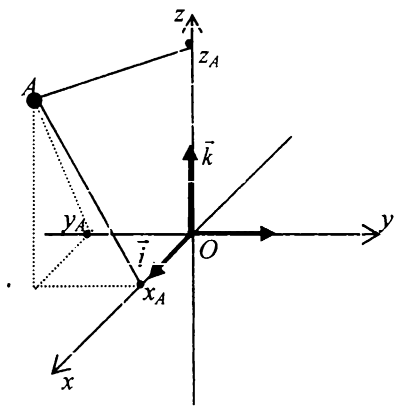


Рис. 5.3. Декартова система координат

Оси координат имеют названия: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат.

Если задана система координат, то любой точке A пространства L_3 соответствуют три числа – координаты точки. Чтобы найти координаты

[1] Впервые прямоугольную систему координат ввел Рене Декарт в своей работе «Рассуждение о методе» в 1637 г. Координатный метод для трехмерного пространства впервые применил Леонард Эйлер в XVIII в.

точки A, надо опустить из нее перпендикуляры на оси (см. рис. 5.3). Точки x_A, y_A, z_A – основания перпендикуляров; числа на осях, соответствующие этим точкам, – координаты точки A. Принято записывать: $A(x_A, y_A, z_A)$. Верно и обратное утверждение: если заданы три числа, то они являются координатами единственной точки в заданной системе координат. Отложив на осях эти числа, получим точки C_1, B_1, O_1. Построив параллелепипед, как показано на рис. 5.4, получим точку A – вершину параллелепипеда, противолежащую точке O.

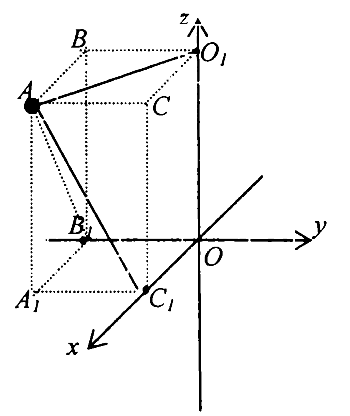


Рис. 5.4. Построение точки A по ее координатам

Итак, *система координат* – это способ установления взаимно однозначного соответствия между множеством L_3 – точек пространства, и элементами множества R^3 – тройками действительных чисел: $L_3 \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} R^3$.

Тройки чисел принято записывать либо в строку: $a = (x, y, z)$, либо в виде столбца: $a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Переход от строки к столбцу (так же, как и обратный переход) называют операцией ***транспонирования***:

$$(x, y, z)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T = (x, y, z),$$

где T – знак операции транспонирования.

Элементы множества R^3 также называют ***точками***, или ***арифметическими векторами***, само множество R^3 – ***множеством трехмерных арифметических векторов***.

Каждая пара точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ пространства L_3 определяет вектор $\overrightarrow{AB}$. Каждой паре точек из R^3 соответствует вектор $a = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$.

Определение 5.14. Множество $\mathcal{L}$ называют ***аффинным***[1] ***пространством***, если оно содержит множество L, элементами которого являются точки, и множество V, элементами которого являются векторы, причем выполняются аксиомы:

1. Каждой упорядоченной паре точек (A,B) $(A,B \in L)$ соответствует единственный вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $(\vec{a} \in V)$.

2. Для любой точки A $(A \in L)$ и любого вектора $\vec{a}$ $(\vec{a} \in V)$ найдется единственная точка B $(B \in L)$ такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

3. Для любых точек A, B и C выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Примечание. Поясним геометрический смысл аксиом:

- аксиома 1 является определением геометрического вектора;
- аксиома 2 говорит о том, что из каждой точки пространства можно отложить любой вектор. Это означает, что в аффинном пространстве (L, V) определен параллельный перенос векторов;
- аксиома 3 определяет сложение векторов как перемещение из начальной точки первого вектора в конечную точку второго вектора.

В определении 5.14 первичным заявлено множество точек L, из элементов которого построены векторы множества V. Такой порядок не принципиален. Если взять множество всех векторов V_0, приложенных к точке O, то концы этих векторов образуют точечное пространство L, а все векторы, не приложенные к точке O, являются разностями векторов из V_0 (рис. 5.5).

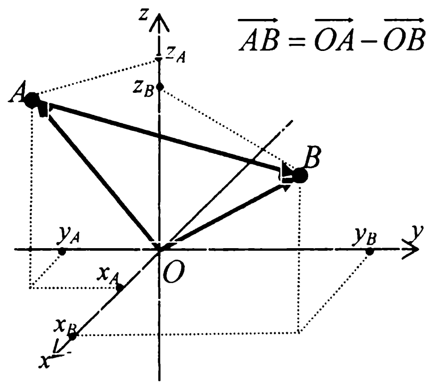


Рис. 5.5. Нахождение координат вектора $\overrightarrow{AB}$

[1] От лат. *affinis* – родственный.

Итак, пусть V – множество геометрических векторов, L – множество точек пространства. Тогда пара (V, L) с операциями сложения, умножения на число и параллельным переносом векторов есть ***геометрическое трехмерное аффинное пространство***.

Во множестве R^3 также не имеет значения, какой смысл приписывать его элементам: если $a=(x_1,y_1,z_1)$ и $b=(x_2,y_2,z_2)$ – точки, то $c=b-a=$ $=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=(x,y,z)$ – вектор, если же $a=(x_1,y_1,z_1)$ и $b=(x_2,y_2,z_2)$ – векторы, то всегда найдется такая точка $c=(x,y,z)$, что $c+a=(x_2,y_2,z_2)=b$. Во множестве R^3 нет смысла отделять точки от векторов. Если геометрически точка и вектор принципиально разные объекты, то тройку чисел можно рассматривать как точку или как вектор, в зависимости от конкретной задачи. Множество R^3 с операциями сложения и умножения на число называют ***арифметическим трехмерным аффинным пространством***.

Геометрическое пространство точек и векторов и трехмерное арифметическое пространство R^3 изоморфны друг другу. Взаимно однозначное соответствие между множествами (L, V) и R^3 устанавливают с помощью систем координат.

На рис. 5.6 показана связь между геометрическим и арифметическим аффинными трехмерными пространствами.

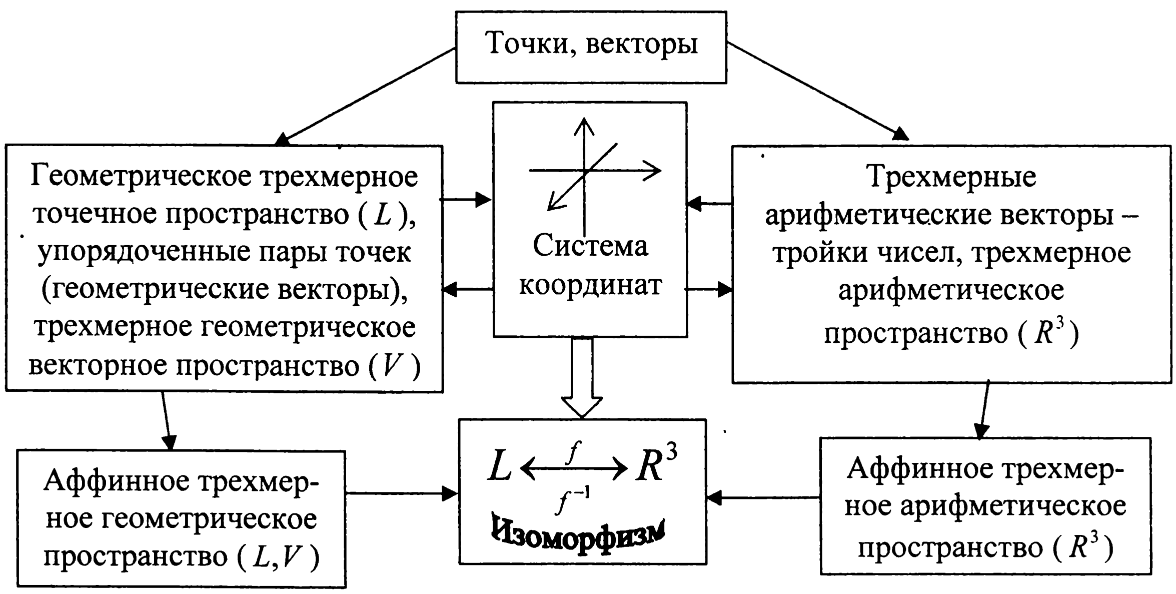


Рис. 5.6. Связь между геометрическим и арифметическим аффинными трехмерными пространствами

5.2.3. Многомерное аффинное пространство

Геометрическое трехмерное пространство и пространство трехмерных арифметических векторов неразличимы в силу их изоморфизма. Мы будем рассматривать арифметические пространства, в случае необходимости обращаясь к геометрическим иллюстрациям.

Рассуждая об арифметических пространствах, вполне логично говорить не только о тройках, но и о четверках, пятерках, ..., n-х действительных чисел, или, по-другому, четырехмерных, пятимерных, ..., n-мерных векторах и, соответственно, четырехмерных, пятимерных, ..., n-мерных векторных аффинных пространствах R^n.

По аналогии с трехмерным пространством выберем в R^n систему базисных векторов: $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Определение 5.15. Систему векторов $(e_1, e_2, ..., e_n)$ называют ***базисной***, если любой вектор пространства может быть представлен как *линейная комбинация* базисных векторов:

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ \dots + x_ne_n,$$

где $a \in R^n$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют координатами вектора a в базисе $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

К базису предъявляется требование минимальности: ни один вектор базиса не может быть представлен линейной комбинацией *других* векторов этого же базиса. Можно доказать, что минимальная система базисных векторов в пространстве R^n содержит n векторов.

Базис векторного пространства не единственен: существует много базисов пространства, но при решении конкретных задач всегда выбирают определенный базис. В курсе линейной алгебры большое внимание уделяется вопросу перехода от одного базиса линейного пространства к другому[1].

В аффинных пространствах расстояние не рассматривается. На пер-

---

[1] Например, см.: *Беклемешев Д. В.* Курс аналитической геометрии и векторной алгебры: учеб. для вузов. М.: ФМЛ, 2005. 304 с.

вый взгляд рассмотрение пространств, в которых понятие расстояния между двумя точками не имеет смысла, может показаться странным. Между тем, такими пространствами часто пользуются. Классическим примером может служить трехмерное пространство, в котором по координатным осям откладываются давление, удельный объем и температура[1]. Очевидно, что общей единицы измерения для этих величин не существует, а потому понятие расстояния между двумя точками этого пространства не имеет смысла.

В физике и математике широко используются многомерные *фазовые пространства.* В простейшем случае, описывающем движение одной частицы, фазовое пространство шестимерно: векторы этого пространства содержат три пространственные координаты и три координаты импульса частицы.

В специальной и общей теории относительности Эйнштейна, а также при исследовании космогонических проблем используется четырехмерное пространство Минковского[2]. Четырехмерный вектор, который Минковский называет «мировой точкой»[3], имеет три пространственные координаты (x, y, z) и координату времени (ct).

Можно привести еще много примеров аффинных пространств различной размерности, широко используемых в качестве математических моделей в физике, астрофизике, химии и других науках.

5.2.4. Метризация аффинных пространств. Евклидовы пространства

Аффинное пространство в случае необходимости можно метризовать, превратив его в метрическое, а следовательно, и топологическое пространство. Чаще всего используется метрика, называемая ***евклидовой.*** Евклидова метрика основана на теореме Пифагора (рис. 5.7).

---

[1] Пример взят из кн.: *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965. С. 238.

[2] Герман Минковский (1864–1909) – немецкий математик.

[3] Например, см.: *Александр* (Урбанович) (иеродьякон). Возникновение мира: современная наука и святоотеческая экзегеза. Ч. 2 [Электронный ресурс]. URL: http://www.pravoslavie.ru/sm/31086.htm.

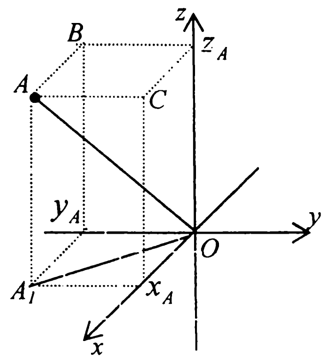


Рис. 5.7. Вычисление длины вектора по его координатам
с использованием теоремы Пифагора: $|OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2$

В пространстве R^n *длина вектора* $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$ по евклидовой метрике находится по формуле

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

расстояние между точками $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $b = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – по формуле

$$|a - b| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Если в аффинном пространстве введена метрика, то можно определить углы между векторами. Углы вводят через скалярное произведение векторов. Напомним, что в геометрии[1] скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, равное произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$ (рис. 5.8).

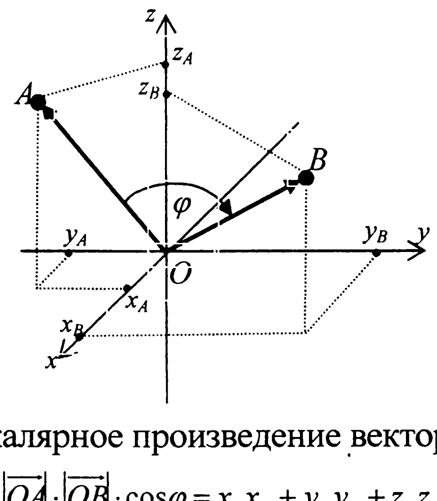


Рис. 5.8. Скалярное произведение векторов:
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\varphi = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$

[1] Вспомним школьный курс геометрии.

Скалярное произведение векторов также можно найти по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2,$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно (см. рис. 5.8).

По аналогии для векторов пространства R^n:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\widehat{ab} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n,$$

где $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $b = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Учитывая, что $|a| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots \ + x_n^2}$ и $|b| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ \ldots \ y_n^2}$, находим косинус угла между n-мерными векторами:

$$\cos\widehat{ab} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ \ldots \ + x_n \cdot y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots \ + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ \ldots \ + y_n^2}}.$$

Следовательно, формула угла между n-мерными векторами имеет вид

$$\widehat{ab} = \arccos\frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ \ldots \ + x_n \cdot y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots \ + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ \ldots \ + y_n^2}}.$$

Косинус угла между векторами равен нулю тогда и только тогда, когда векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, в n-мерном пространстве R^n векторы взаимно перпендикулярны, если выполняется равенство

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = 0.$$

Линейное метрическое пространство со скалярным произведением называют ***евклидовым пространством***.

Иерархия пространств изображена на рис. 5.9.

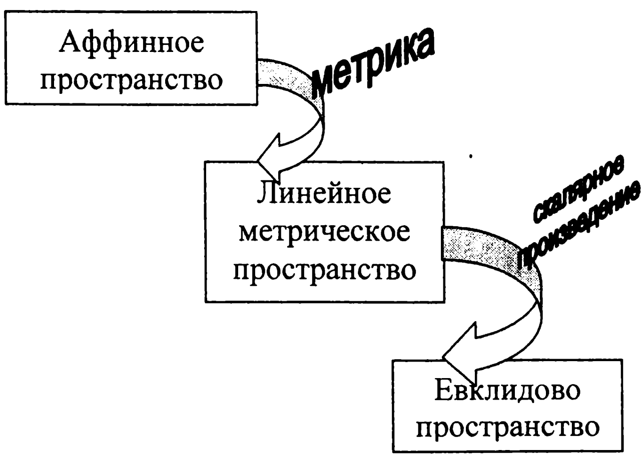


Рис. 5.9. Иерархия пространств

5.3. Размерность пространства

Пространство, в котором мы живем, трехмерно: у него есть длина, ширина и высота. Пространство в математике – это множество, элементы которого называются точками или векторами. Ко всем точечным множествам применимо понятие «размерность пространства». Рассмотрим это понятие более подробно.

Линейное пространство. Размерностью линейного пространства называют число векторов в базисе этого пространства. Напомним, что систему векторов $(e_1, e_2, ..., e_n)$ линейного пространства L над числовым полем K называют базисной, если любой вектор пространства L может быть представлен как линейная комбинация базисных векторов:

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,$$

где $a \in L$, $x_1, x_2, ..., x_n \in K$, причем ни один вектор базиса не может быть представлен линейной комбинацией *других* векторов этого же базиса.

Покажем, что система базисных векторов в пространстве R^n содержит n векторов. Выберем в качестве базиса векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что любой другой вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$ из R^n можно представить как линейную комбинацию этих векторов:

$$a = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \ \dots\ + a_n \cdot e_n = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \ \dots\ + a_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

В то же время ни один из базисных векторов не может быть выражен через другие базисные векторы. В самом деле, составим линейную комбинацию базисных векторов и приравняем ее к нуль-вектору:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \ \dots\ + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \dots \\ x_n = 0. \end{matrix}$$

Полученные формулы доказывают, что линейная комбинация базисных векторов равна нуль-вектору тогда и только тогда, когда все числовые множители линейной комбинации – нули. Предположим, что вектор e_1 можно выразить через другие базисные векторы. Для этого придется все числовые коэффициенты разделить на $x_1 = 0$. Но на нуль делить нельзя! Аналогичный запрет возникает и при попытке выразить базисные векторы $(e_2, e_3, ..., e_n)$.

Можно показать, что и другие базисы пространства R^n также содержат ровно n векторов. Поэтому пространство R^n является n-мерным. Также n-мерным является и любое другое аффинное пространство, изоморфное R^n.

Топологическая размерность. Напомним, что топологическое пространство T – это пространство, в котором тем или иным способом устанавливается близость или отдаленность точек. Топологией называют раздел математики, предметом которого являются свойства фигур и их взаимное расположение, сохраняющиеся гомеоморфизмами. Один из таких инвариантов – размерность топологического пространства.

Размерность «обычных» фигур определяется интуитивно: размерность точки – 0, размерность линии – 1, размерность поверхности – 2, размерность тела – 3. Однако существует множество практически важных случаев, когда интуиция не срабатывает. Например, какую размерность имеет морозный узор на стекле? Что это – линия или поверхность? Какую размерность имеет облако? Что это – тело или поверхность отдельных капель?

На необходимость более точного определения размерности впервые обратил внимание Пуанкаре[1]. Он заметил, что прямая или кривая имеет размерность 1, так как любые две точки на ней можно разделить, удаляя одну единственную точку – множество размерности 0 (рис. 5.10, *а*). Поверхность имеет размерность 2 по той причине, что для разделения двух точек на поверхности надо удалить целую замкнутую кривую – множество размерности 1 (рис. 5.10, *б*), и т. д.

В общем случае некоторому пространству надо приписать размерность n, если две его точки разделяются при удалении подмножества, размерность которого равна $n-1$.

---

[1] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: Изд-во МЦНМО, 2001. С. 273–277.

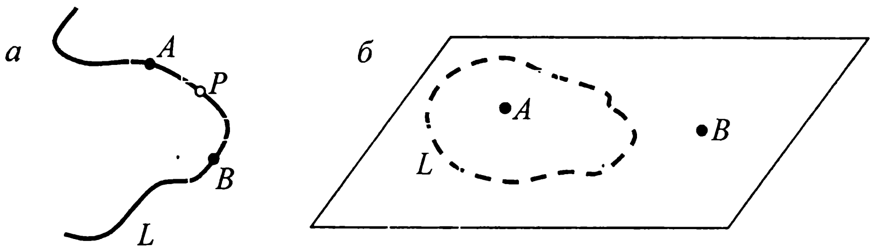


Рис. 5.10. Размерность точечного пространства:
а – размерность линии; *б* – размерность поверхности

Примечание. На рис 5.10, *а* показано, что для разделения двух любых точек A и B на линии L необходимо и достаточно выколоть точку P, лежащую между ними. Разделяющая точка P имеет размерность нуль, значит, размерность линии L следует принять равной единице. На рис 5.10, *б* показано, что для разделения двух любых точек A и B плоскости (поверхности) необходимо и достаточно удалить из плоскости линию L. Поскольку размерность линии равна единице, размерность плоскости (поверхности) следует принять равной двум.

Современная теория размерности вводит определение размерности множества индуктивно. Договариваются, что размерность пустого множества $\varnothing$, не содержащего ни одной точки, равна (-1). Множество T_0 имеет размерность 0, если каждая его точка может быть заключена в область, граница которой не содержит других точек этого множества. Множество T_1 имеет размерность 1, если его размерность не равна (-1) и 0, причем каждая точка T_1 может быть заключена в область, граница которой пересекается с T_1 по множеству размерности 0. Аналогичным образом можно дать определение множеств размерности 2, 3, ..., n. Множество T_n имеет размерность n, если оно не является множеством более низкой размерности и каждая точка множества T_n может быть заключена в область, граница которой пересекается с T_n по множеству размерности $n-1$. Такая размерность пространства назвается ***топологической размерностью.***

Фрактальная размерность. Определение топологической размерности вытекает непосредственно из процесса измерения фигур (точечных множеств). Возьмем, например, отрезок AB длиною 1 дм и будем измерять его длину T_1 сантиметровой линейкой. Процесс измерения можно рассматривать как заключение каждой точки отрезка AB в область δ длиною $1\,см = \frac{1}{10}\,дм$, причем любые две соседние области имеют одну общую точку. Множество полученных областей называют ***покрытием*** отрезка AB. Процесс измерения отрезка можно рассматривать как нахождение числа областей, вошедших в покрытие: $N=\frac{1}{\delta}=\frac{1}{1/10}=10$. Длина отрезка – 10 см.

Теперь возьмем квадрат со стороной 1дм и будем измерять его площадь T_2, покрывая квадратиками со стороной 1 см. По-другому можно сказать, что мы покрываем T_2 областями δ^2, причем площадь каждой области равна 1 см^2, т. е. $\delta^2=\frac{1}{10^2}$ дм^2. Ясно, что число квадратиков, покрывающих большой квадрат, – $N=\frac{1}{\delta^2}=\frac{1}{1/10^2}=10^2$.

Аналогично, измеряя объем куба, ребро которого 1 дм, получим число измерительных кубиков δ^3 объемом $\frac{1}{10^3}$ дм^3: $N=\frac{1}{\delta^3}=\frac{1}{1/10^3}=10^3$. Если бы можно было измерять четырехмерные, пятимерные, $\ldots, n$-мерные кубы, мы получали бы $N=\frac{1}{\delta^4}=10^4$, $N=\frac{1}{\delta^5}=10^5$, ..., $N=\frac{1}{\delta^n}=10^n$.

Получена последовательность: 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, ..., 10^n. Размерность измеряемых объектов заключена в показателях степеней.

Приходим к выводам:

1. Размер геометрического объекта характеризуется числом клеток (отрезков, квадратов, кубов и т. п.), необходимых для покрытия объекта.

2. Число, определяющее размерность D множества точек геометрической фигуры, появляется как показатель степени в соотношении, связывающем число N клеток покрытия и их размер δ:

$$N\sim\frac{1}{\delta^D}$$

(«~» – знак пропорциональности).

Логарифмируя это соотношение по натуральному основанию, получаем:

$$\ln N\sim -D\ln\delta \Rightarrow D\sim -\frac{\ln N}{\ln\delta}.$$

Если требуется измерить более сложный объект, например, длину ломаной линии с достаточно большим числом малых звеньев, то клетки покрытия берутся малых размеров. Очевидно, что при уменьшении размеров клеток число их в покрытии возрастает: если $\delta\to 0$, то $N=N(\delta)\to\infty$.

Величина $D=-\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\ln N(\delta)}{\ln\delta}$ называется ***фрактальной размерностью***, или размерностью Хаусдорфа-Безиковича.

Топологическая размерность – это всегда целое число, фрактальная размерность может быть дробной. Пространства, имеющие дробную размерность, называются ***фракталами.***

Пример

На рисунке представлен алгоритм построения фрактала, называемого «снежинка Коха»:

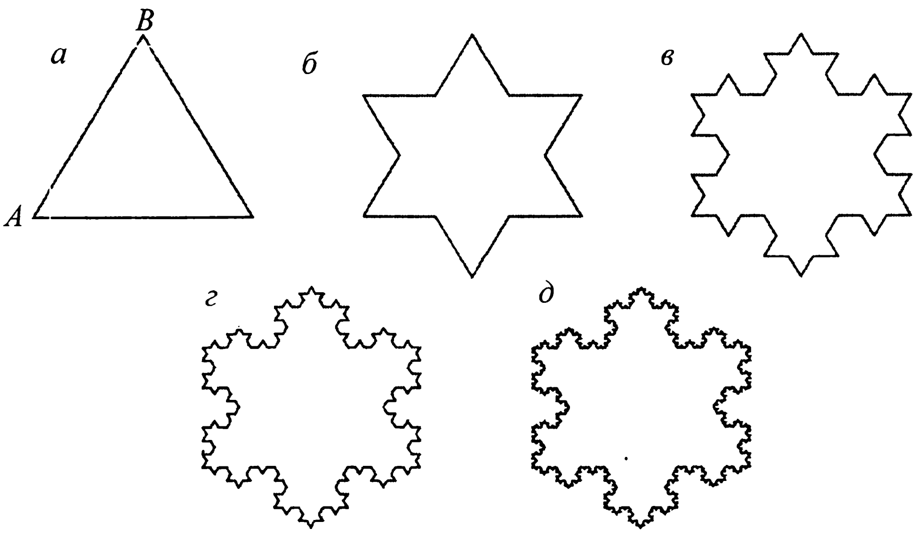
а) исходная фигура – правильный треугольник. Примем длину его стороны равной 1: $AB = 1$. Размер клетки покрытия $\delta_1 = 1$; число элементов покрытия $N_1 = 3$; периметр треугольника $P_1 = 3$;

б) превратим треугольник в шестиконечную звезду. На каждой из сторон треугольника имеем $\delta_2 = \frac{1}{3}$, $N_2 = 4$. $P_2 = 4$;

в) для каждого звена ломаной повторим процедуру пункта *б*. Получим: $\delta_3 = \frac{1}{9}$; $N_3 = 3 \cdot (4 \cdot 4) = 3 \cdot 4^2$; $P_3 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$;

г) на четвертом этапе получаем: $\delta_4 = \frac{1}{27}$; $N_4 = 3 \cdot 4^3$; $P_4 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$;

д) на пятом этапе получаем: $\delta_5 = \frac{1}{81}$; $N_5 = 3 \cdot 4^4$; $P_5 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4$.



На этапе k получаем: $\delta_k = \frac{1}{3^{k-1}}$; $N_k = 3 \cdot 4^{k-1}$; $P_k = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$

Устремляем k к бесконечности. Имеем:

$$P = \lim_{k \to \infty} P_k = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty .$$

Периметр замкнутой линии бесконечен.

$$D=-\lim_{k\to\infty}\frac{\ln N_k}{\ln\delta_k}=-\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(3\cdot4^{k-1})}{\ln\frac{1}{3^{k-1}}}=-\lim_{k\to\infty}\frac{\ln3+(k-1)\cdot\ln4}{-(k-1)\ln3}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k-1}+\frac{\ln4}{\ln3}\approx1{,}264\,.$$

Размерность множества дробная. Множество является фракталом.

В настоящее время фракталы широко применяются в компьютерной графике, в физике нелинейных процессов, в экономике и многих других областях науки и практики.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Дайте определение метрического пространства.
2. Запишите аксиомы метрики.
3. Дайте определение окрестности точки метрического пространства.
4. Дайте определение непрерывности отображения в точке.
5. Запишите аксиоматическое определение топологического пространства.
6. Дайте определение линейного пространства над числовым полем.
7. Постройте в декартовой системе координат векторы, заданные координатами: $(0, 2, -1)$, $(-\frac{4}{5}, 0{,}7, 3)$, $(-2, -1, -\frac{4}{5})$, $(0{,}7, 3, -2)$. Найдите их длины.
8. Найдите углы между векторами: $(0, 2, -1)$ и $(-\frac{4}{5}, 0{,}7, 3)$; $(0, 2, -1)$ и $(-2, -1, -\frac{4}{5})$.
9. Как происходит переход от аффинного пространства к евклидову пространству?
10. Дайте определение размерности: а) топологической; б) фрактальной.

6. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В первой половине XX в. с особой остротой встал вопрос: можно ли считать математику единой наукой или это совокупность далеких друг от друга, никак не связанных теорий? Или так: существует одна математика или много разных математик?

На рубеже XIX и XX вв. великий немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) выступил на II Международном конгрессе математиков (Париж, 6–12.08.1900) с докладом «Математические проблемы».

Академик П. С. Александров писал о его выступлении: «Ни до доклада Гильберта 1900 г., ни после этого доклада математики... не выступали с научными сообщениями, охватывавшими проблемы математики в целом. Таким образом, доклад Гильберта оказывается вполне уникальным явлением в истории математики и в математической литературе...

Гильберт постоянно делает упор на то, что математика едина, что различные ее части находятся в постоянном взаимодействии между собой и с науками о природе и что в этом взаимодействии не только ключ к пониманию самой сущности математики, но и лучшее средство против расщепления математики на отдельные, не связанные друг с другом части... С большой силой и убежденностью говорит Гильберт... о целостном характере математики как основе всего точного естественнонаучного познания»[1].

В докладе сформулированы 23 математические проблемы («проблемы Гильберта»), которые на долгий период определили развитие математики. Формулировку этих проблем предваряет так называемый тезис Гильберта: «...каждая определенная математическая проблема непременно должна быть доступна *строгому решению* или в том смысле, что удается получить ответ на поставленный вопрос, или же в том смысле, что будет установлена невозможность ее решения и вместе с тем доказана неизбежность неудачи всех попыток ее решить»[2].

Первоначально предполагалось, что фундаментом математики, основанием, объединяющим все ее ветви, может служить теория множеств.

---

[1] *Гильберт Д.* Математические проблемы [Электронный ресурс]. URL: http://vivovoco. rsl.ru/VV/PAPERS/NATURE/GILBERT_R.HTM.

[2] Там же.

Однако вскоре в этом предполагаемом «фундаменте» обнаружился ряд противоречий, обычно называемых парадоксами[1].

После обнаружения противоречий в теории множеств стало ясно, что необходимо создать такие методы построения математических теорий, которые гарантировали бы их непротиворечивость. Как пишет профессор Ю. И. Янов, «жизнеспособным и даже единственным путем дальнейшего развития математики явился путь, намеченный Д. Гильбертом в его "программе"... Гильберт фактически предложил строить именно синтаксическую компоненту теории по чисто формальным правилам в виде аксиоматического исчисления... Очень важной для развития математики оказалась сама идея отделения синтаксиса от семантики»[2].

В настоящее время при рассмотрении математики как единой науки чаще всего используется систематизация, предложенная группой французских математиков, которые печатали свои работы под псевдонимом Николя Бурбаки. В своей знаменитой статье «Архитектура математики»[3] они предложили считать предметом математики как единой науки математические структуры. Структуру группа Бурбаки определяет следующим образом: «Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множеству объектов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся ее элементы; затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям – аксиомам рассматриваемой структуры. Построить аксиоматическую теорию данной структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предположений относительно рассматриваемых элементов (в частности, от всяких гипотез относительно их природы)»[4].

Группа Бурбаки выделяет три основных вида структур:

---

[1] Наиболее известным является парадокс Рассела. Существует несколько его популярных формулировок. Одна из них традиционно называется парадоксом брадобрея и звучит так: «Одному деревенскому брадобрею приказали *брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется.* Как он должен поступить с собой?». Этот парадокс разбивает интуитивную веру в то, что относительно любого элемента x универсального множества U и любого подмножества A истинно одно и только одно из высказываний: $x \in A$ или $x \notin A$.

[2] *Янов Ю. Н.* Математика, метаматематика и истина [Электронный ресурс]. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2006/prep77/prep2006_77.html.

[3] *Бурбаки Н.* Архитектура математики: очерки по истории математики [Электронный ресурс]. URL: http://ega-math.narod.ru/Math/Bourbaki.htm.

[4] Там же.

- алгебраические;
- порядковые;
- топологические.

Классификация, предложенная Бурбаки, является актуальной и в настоящее время.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Какая проблема возникла перед математиками на рубеже XIX–XX вв.?
2. Дайте определение математической структуры.
3. Дайте определение и приведите примеры структуры: *а*) алгебраической; *б*) порядковой; *в*) топологической.
4. Может ли множество двумерных геометрических векторов быть носителем порядковой структуры?
5. В информатике применяется понятие «топология компьютерной сети», которое подразумевает способ соединения компьютеров в сеть. Есть ли связь между этим понятием и понятием топологической структуры в математике? Ответ поясните.
6. Носителями каких структур могут быть множества R, R^2, R^3?

Заключение

Центром, ядром курса математики для теологов является понятие математической модели, рассматриваемой как с содержательной, так и с формальной стороны. Именно математические модели, начиная от самых абстрактных и общих и заканчивая теми, которые используются в практической деятельности, являются формой приложения математики ко всем областям знаний.

Рассматривать сложное и абстрактное понятие математической модели невозможно без предварительной подготовки. Такой подготовкой является достаточно детальная проработка разделов «Величина», «Математическая логика», «Множества» и «Бинарные отношения».

Освоив понятие математической модели, можно приступить к изучению аксиоматических теорий. Примерами таких теорий являются теории топологических и аффинных пространств.

Укажем на концентричность изложения материала. Ряд понятий в начале курса просто упоминается с апелляцией к школьным знаниям. Затем происходит детальная проработка этих понятий и все большая их формализация.

Изучая математику, следует помнить, что усвоение математических понятий возможно только через решение задач. Поэтому наряду с освоением теории большое внимание следует уделять практическим занятиям.

Библиографический список

Акимова О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы / О. Е. Акимова. Москва: Лаборатория базовых знаний, 2001. 376 с.

Александр (Урбанович) (иеродиакон). Возникновение мира: современная наука и святоотеческая экзогеза [Электронный ресурс] / Александр (Урбанович). Режим доступа: http://hll-konstantin-helena-koeln.ortodoxy.ru/VozniknovenieMira.htm.

Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. Москва: Наука, 1965. 778 с.

Беклемешев Д. В. Курс аналитической геометрии и векторной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемешев. 10-е изд. Москва: ФизМатЛит, 2005. 304 с.

Бондарев В. П. Концепции современного естествознания [Электронный ресурс] / В. П. Бондарев // Электронная библиотека социологического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Режим доступа: http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Science/bond/index.php.

Бурбаки Николя. Архитектура математики: очерки по истории математики [Электронный ресурс] / Николя Бурбаки. Режим доступа: http://ega-math.narod.ru/Math/Bourbaki.htm.

Вейль Г. Симметрия / Г. Вейль. Москва: Наука, 1968. 192 с.

Гастев Ю. Л. Исчисление [Электронный ресурс] / Ю. Л. Гастев // Большая советская энциклопедия. Режим доступа: http://slovari.yandex.ru/.

Голод А. Краткий определитель научного шарлатанства / А. Голод // Наука и жизнь. 2009. № 3. С. 50–51.

Игнатий (Брянчанинов) (святитель). Слово о смерти / Игнатий (Брянчанинов). Москва: Отчий дом, 2008. 448 с.

Ильин В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Вл. Х. Сендов. Москва: Наука, 1979. 719 с.

Карпов Ю. Г. Теория автоматов / Ю. Г. Карпов. Санкт-Петербург: Питер, 2003. 206 с.

Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. 3-е изд., испр. и доп. Москва: Изд-во МЦНМО, 2001. 568 с.

Курош А. П. Лекции 1969–1970 учебного года / А. П. Курош. Москва: Наука, 1974. 159 с.

Математика. Бог. Вселенная: мудрые мысли / сост. И. С. Малаховский. Калининград: Янтарь: Сказ, 2005. 256 с.

Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. Москва: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.

Налимов В. В. Вероятностная модель языка / В. В. Налимов. Москва: Наука, 1979. 303 с.

Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 301 с.

Челпанов Г. И. Учебник логики [Электронный ресурс] / И. Г. Челпанов. Режим доступа: http://krotov.info/lib_sec/shso/37_chelpanov.html.

Чернин А. Д. Физика времени / А. Д. Чернин. Москва: Наука, 1987. 224 с.

Янов Ю. И. Математика, метаматематика и истина [Электронный ресурс] / Ю. И. Янов. Режим доступа: http://lib.atheo-club.ru/index.php?action=...article&a_id=73.

Предметный указатель

Приложение 1

Некоторые математические знаки[1]

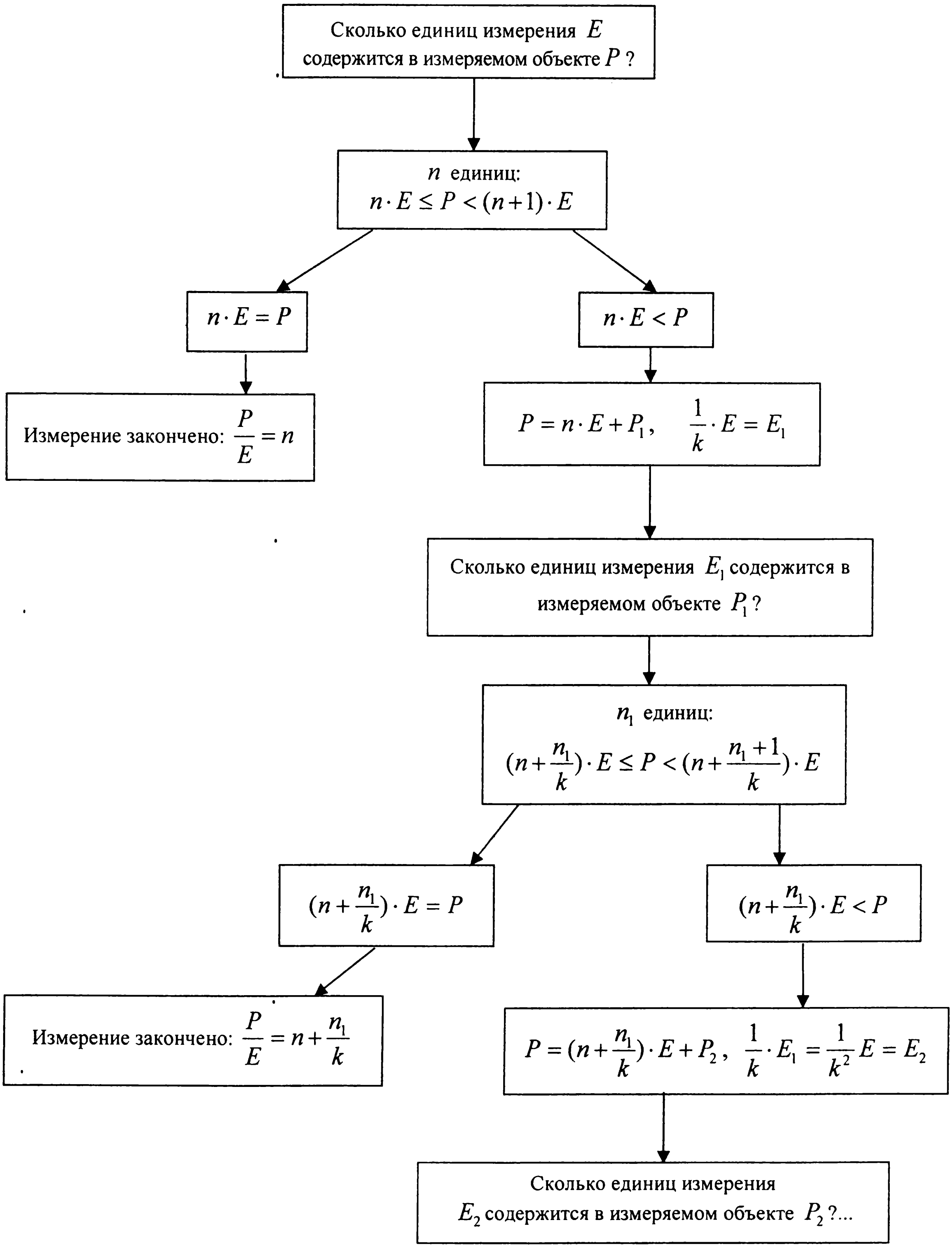
Знак	Значение	Кто ввел	Год введения
1	2	3	4
∞	Бесконечность	Дж. Валлис	1633
e	Основание натурального логарифма	Л. Эйлер	1736
π	Отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс Л. Эйлер	1706 1736
i	Корень квадратный из –1	Л. Эйлер	1777
$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$	Единичные векторы на осях координат	У. Гамильтон	1853
$x,\ y,\ z$	Неизвестные или переменные величины	Я. Видман	1489
$\vec{r}$	Вектор	О. Коши	1853
$+$	Сложение	Я. Видман	1489
$-$	Вычитание	Я. Видман	1489
$\times$	Умножение	У. Оутред	1631
$\cdot$	Умножение	Г. Лейбниц	1698
$:$	Деление	Г. Лейбниц	1684
$a^2, a^3, \ldots, a^n$	Степени	Р. Декарт И. Ньютон	1637 1676
$\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \ldots, \sqrt[n]{\ }$	Корни	К. Рудольф	1525
log	Логарифм	Б. Кавальери	1632
ln	Натуральный логарифм	А. Принсхейм	1893
sin	Синус	Л. Эйлер	1748
cos	Косинус	Л. Эйлер	1748
tg	Тангенс	Л. Эйлер	1753
arcsin	Арксинус	Ж. Лагранж	1772
Δx	Разность, приращение	Л. Эйлер	1755
$\sum$	Сумма	Л. Эйлер	1755

[1] Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1988. 847 с.

Окончание таблицы

1	2	3	4
!	Факториал	К. Крамп	1808
$\|x\|$	Модуль	К. Вейерштрасс	1841
lim	Предел	У. Гамильтон	1853
$\lim\limits_{n\to\infty}$	Предел	–	–
$f(x)$	Функция	Л. Эйлер	1734
$=$	Равно	Р. Рекорд	1557
$\approx$	Приближенно равно	А. Гюнтер	1882
$>$	Больше	Т. Гарриот	1631
$<$	Меньше	Т. Гарриот	1631
$\equiv$	Тождество	Б. Риман	1857
$\parallel$	Параллельно	У. Оутред	1677
$\perp$	Перпендикулярно	П. Эригон	1634
$\cap$	Пересечение	Дж. Пеано	1888
$\cup$	Объединение	Дж. Пеано	1888
$\subset$	Содержится	Э. Шредер	1890
$\supset$	Включается	Э. Шредер	1890
$\in$	Принадлежность	Дж. Пеано	1895

Алгоритм процедуры измерения



и т. д.

Приложение 3

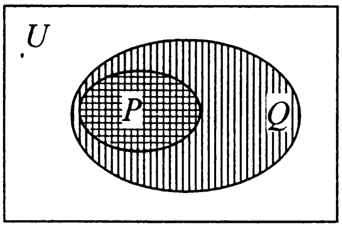
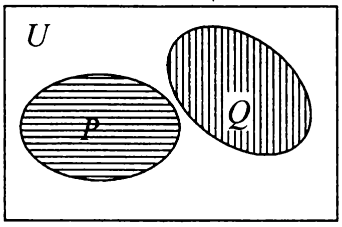
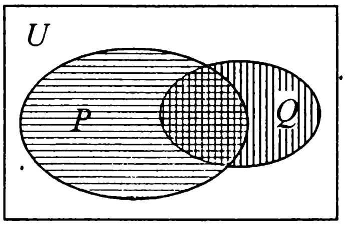
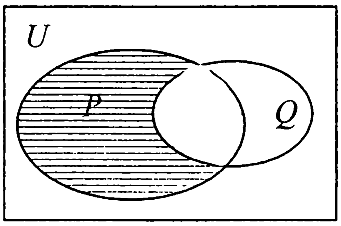
Основные формально-логические законы

Название	Формулировка	Тождественно истинная формула
Закон тождества	Объем и содержание мысли о каком-либо предмете должны быть строго определены и оставаться постоянными в процессе рассуждения о нем	$A = A$, A суть A
Закон противоречия	В процессе рассуждения о каком-либо определенном предмете нельзя одновременно утверждать и отрицать что-либо в одном и том же отношении, в противном случае оба суждения не могут быть вместе истинными	$\overline{A \wedge \overline{A}}$
Закон исключения третьего	В процессе рассуждения необходимо доводить дело до определенного утверждения или отрицания, в этом случае оказывается истинным одно из двух отрицающих друг друга суждений	$A \vee \overline{A}$
Закон достаточного основания	В процессе рассуждения достоверными следует считать лишь те суждения, относительно истинности которых могут быть приведены достаточные основания	$p \to q$, $P \subseteq Q$

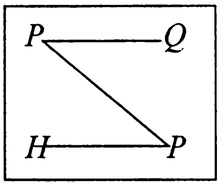
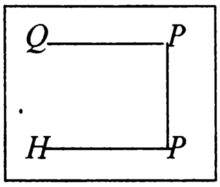
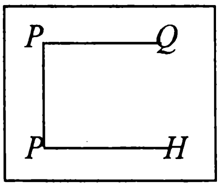
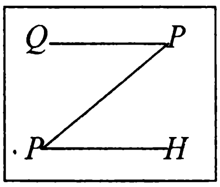
Приложение 4

Построение силлогизмов

Соотношения между множествами
и соответствующие им высказывания с кванторами

Диаграмма Эйлера-Венна	Соотношение между множествами	Истинное высказывание с квантором	Логическое обозначение высказывания
	$P \subseteq Q$ или $P \setminus Q = \varnothing$	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$A(P,Q)$
	$P \cap Q = \varnothing$	$\forall x(P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x))$ или $\overline{\forall x(P(x) \wedge Q(x))}$	$E(P,Q)$
	$P \cap Q \neq \varnothing$	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$I(P,Q)$
	$P \setminus Q \neq \varnothing$ или $\overline{P \subseteq Q}$	$\exists x(P(x) \wedge \overline{Q}(x))$	$O(P,Q)$

Схемы и модусы фигур силлогизма

Фигуры силлогизма	Геометрическая схема	Логическая схема	Модус (вид)
Фигура 1		$\begin{array}{c}(P,Q)\\(H,P)\\\hline\therefore(H,Q)\end{array}$	*AAA* *EAE* *AII* *EIO*
Фигура 2		$\begin{array}{c}(Q,P)\\(H,P)\\\hline\therefore(H,Q)\end{array}$	*EAE* *AEE* *EIO* *AOO*
Фигура 3		$\begin{array}{c}(P,Q)\\(P,H)\\\hline\therefore(H,Q)\end{array}$	*AAI* *IAI* *AII* *EAO* *OAO* *EIO*
Фигура 4		$\begin{array}{c}(Q,P)\\(P,H)\\\hline\therefore(H,Q)\end{array}$	*AAI* *AEE* *IAI* *EAO* *EIO*

Учебное издание

Конышева Людмила Константиновна
Слесарев Юрий Владимирович

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор О. Е. Мелкозерова
Компьютерная верстка Л. К. Конышевой
Дизайн обложки О. О. Орехиной

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 26.09.12. Формат 70×108/16. Бумага для множ. аппаратов. Печать плоская. Усл. печ. л. 9,7. Уч.-изд. л. 10,2. Тираж 100 экз. Заказ № 906.
Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

Отпечатано ООО "ТРИКС"
Свердловская обл., г. Верхняя Пышма, ул. Феофанова, 4
www.printvp.ru