4. Ивойлова, И. В этом году выпускникам школ будет проще поступить в вузы [Электронный ресурс] / И. Ивойлова // Российская газета. – 2017. – Федер. вып. – № 7505 (42). – Режим доступа: https://rg.ru/2018/02/26/na-kakih-specialnostiah-v-vuzah-bolshe-vsego-besplatnyh-mest.html.

УДК 005.53:005.311.6

Тумашев В. И.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВЫБОРА УПРАВЛЕНЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Валентин Ильич Тумашев
доцент
tum64894@mail.ru
Челябинский филиал Автономной некоммерческой организации высшего образования «Российская академия предпринимательства» (АНО ВО «РАП»)

EXAMPLE SELECTION DECISIONS UPRAVLENCHESKOGO OF DECISIONS UNDER RISK

Valentin Ilyich Tumashev
associate Professor
Chelyabinsk branch of the Autonomous non-profit organization of higher education "Russian Academy of entrepreneurship "(ANO VO "RAP")

Аннотация. *В современном мире большое значение уделяется открытию своего собственного дела, с целью извлечения прибыли и получения постоянного материального дохода. Многие начинающие бизнесмены открывают свой маленький магазинчик, но зачастую дело приходится закрыть, так как это становится невыгодным, или даже приводит к значительным потерям и кредитам. Это связано с тем, что решения начинающего предпринимателя приходится принимать в условиях неопределённости. Такие ситуации широко рассматриваются в теории матричных игр. В данной работе описана* *постановка и решение конкретной задачи об открытии новой коллекции по изготовлению мебели.*

***Annotation**. In today's world, great importance is given to opening your own business, in order to make a profit and receive a permanent material income. Many start-up businessmen open their own small shop, but often the business has to be closed, as it becomes unprofitable, or even leads to significant losses and loans. This is due to the fact that the decisions of a novice entrepreneur have to be taken in conditions of uncertainty. Such situations are widely considered in the theory of matrix games. This work describes the formulation and solution of the specific problem of opening a new collection of furniture.*

***Ключевые слова**: матрица, алгоритм, смешанные стратегии, оптимальное решение, цена игры, линейное программирование, симплексный метод, двойственная задача.*

***Keyword:** matrix, algorithm, mixed strategies, optimal solution, game price, linear programming, simplex method, dual problem.*

Предприятие по изготовлению мебели запустило новую коллекцию. Стоимость каждого комплекта составляет 55 тыс. рублей. Требуется определить, какой объём комплектов новой коллекции (5, 10, 15) выгоднее всего поставлять на склады розничной торговой сети для ежемесячной реализации, если в случае низкого спроса (покупателя нет, а товар есть) затраты на хранение каждого комплекта составляют 15 тыс. руб., а в случае повышенного спроса (покупатель есть, а товара нет) недополученная прибыль с каждого комплекта составляет 10 тыс. рублей? Какая стратегия поставок будет наиболее выигрышной для розничной сети? На основе имеющихся данных составим матрицу: заголовки строк — вероятности ***p*** — стратегии игрока А (предложение или наличие товара на складе), заголовки столбцов — вероятности ***q*** — стратегии игрока В (спрос или количество продаж).

Таблица 1 — Исходная матрица

B	**5**	**10**	**15**

A			
5	275	225	175
10	200	550	500
15	125	475	825

Напротив каждой строки выписываем ее минимальное (min) значение и среди этих значений выделяем максимальное (max). А напротив каждого столбца выписываем его maxзначение и среди этих значений выделяемmin.

Таблица 2 — Матрица, дополненная min/max значениями

B / **A**	**5**	**10**	**15**	α
5	275	225	175	175
10	200	550	500	***200***
15	125	475	825	125
β	***275***	550	825	

По ходу решения установлено, что α = 200, а β = 275. Поскольку$\alpha \neq \beta$ ($\alpha < \beta$), то решение матрицы будем производить в смешанных стратегиях. Алгоритм поиска решения матричной антагонистической игры, заданной платежной матрицей, имеющей размерность $m \times n$ при значениях m и n, сводится к алгоритму симплекс-методу решения пары взаимно двойственных задач линейного программирования. Пусть антагонистическая игра задана платёжной матрицей, имеющей размерность $m \times n$ и эта игра является не вполне определённой. Необходимо найти решение игры, т.е. определить оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков:

$$P^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*), \qquad Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$$

где P^*и Q^*–векторы, компоненты которых p_i^*и q_j^*характеризуют вероятности применения чистых стратегий i и j соответственно первым и вторым игроками и соответственно для них выполняются соотношения:

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1; \qquad q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1$$

Задачи обоих игроков образуют пару симметричных взаимно двойственных задач линейного программирования, и поэтому нет необходимости решать обе эти задачи, т.к. найдя решение одной из них, можно найти и решение другой. Найдём оптимальную стратегию $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ игрока В. Эта стратегия должна обеспечить выигрыш второму игроку (по сути — это его проигрыш) не больше V (т. е. ≤ V) при любом поведении первого игрока и выигрыш, равный V, при его оптимальном поведении (т. е. при стратегии P^*). Цена игры V нам пока неизвестна. Без ограничения общности, можно предположить её равной некоторому положительному числу V>0. Действительно, для того, чтобы выполнялось условие V>0, достаточно, чтобы все элементы матрицы были неотрицательными. Этого всегда можно добиться с помощью аффинных преобразований, прибавляя ко всем элементам матрицы одну и ту же достаточно большую положительную константу М; при этом цена игры увеличится на М, а решение не изменится. Итак, будем считать V>0. Предположим, что второй игрок В применяет свою оптимальную стратегию Q^*, а первый игрок А свою чистую стратегию i-ю, тогда средний выигрыш (математическое ожидание) второго игрока В будет равен:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = a_{i1} q_1^* + a_{i2} q_2^* + \cdots + a_{in} q_n^*$$

Оптимальная стратегия второго игрока (В) обладает тем свойством, что при любом поведении первого игрока (А) обеспечивает выигрыш второму игроку не больший, чем цена игры V, значит, любое из чисел a_i не может быть больше V (т.е. $a_i \leq$ V). Следовательно, при оптимальной стратегии должна выполняться следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} q_1^* + a_{12} q_2^* + \cdots + a_{1n} q_n^* \leq V \\ a_{21} q_1^* + a_{22} q_2^* + \cdots + a_{2n} q_n^* \leq V \\ \cdots \quad + \cdots \quad + \cdots + \cdots \quad \leq V \\ a_{m1} q_1^* + a_{m2} q_2^* + \cdots + a_{mn} q_n^* \leq V \end{cases} \tag{1}$$

Разделим неравенства (1) на положительную величину V (левые и правые части системы (1)) и введём обозначения:

$$y_1 = \frac{q_1^*}{V}, y_2 = \frac{q_2^*}{V}, \quad \cdots, \quad y_n = \frac{q_n^*}{V} \tag{2}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad \cdots, \quad y_n \geq 0 \tag{3}$$

Тогда условия (1) запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \cdots \quad + \cdots \quad + \cdots + \cdots \quad \le 1 \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

где $y_1, y_2, \dots , y_n$ – неотрицательные переменные.

В силу (2) и того, что $q_1^* + q_2^* + \dots + q_n^* = 1$, то переменные $y_1, y_2, ..., y_n$ удовлетворяют условию, которое обозначим через $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\varphi = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} + \cdots + \frac{q_n}{V} = \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}{V} = \frac{1}{V}. \tag{5}$$

Поскольку второй игрок В свой гарантированный выигрыш (V) старается сделать минимально возможным ($V \rightarrow \min$), то очевидно, что при этом правая часть (5) принимает максимальное значение ($\frac{1}{V} \rightarrow \max$). Таким образом, задача решения антагонистической игры для второго игрока В свелась к следующей математической задаче: определить неотрицательные значения переменных $y_1 , y_2 , \cdots , y_n$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств (4), системе общих ограничений (3) и максимизировали бы целевую функцию φ:

$$\varphi = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \rightarrow \max .$$

Это типичная задача линейного программирования, и она может быть решена симплекс-методом. Таким образом, решая задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ игрока В. Вернёмся к нашей задаче. По каждой строке записываемее ценуV (цена игры каждой стратегии):

$275q_1 + 225q_2 + 175q_3 \le V$ // ÷ V⇨ $275\frac{q_1}{V} + 225\frac{q_2}{V} + 175\frac{q_3}{V} \le 1$

$200q_1 + 550q_2 + 500q_3 \le V$ // ÷ V⇨ $275\frac{q_1}{V} + 225\frac{q_2}{V} + 175\frac{q_3}{V} \le 1$

$125q_1 + 475q_2 + 825q_3 \le V$ // ÷ V⇨ $275\frac{q_1}{V} + 225\frac{q_2}{V} + 175\frac{q_3}{V} \le 1$

Введём обозначения: $\frac{q_n}{V} = y_n$ таким образом, преобразовав дробь, получаем:

$$275y_1 + 225y_2 + 175y_3 \leq 1$$

$$200y_1 + 550y_2 + 500y_3 \leq 1$$

$$125y_1 + 475y_2 + 825y_3 \leq 1$$

И затем записываем функцию цели $\boldsymbol{\varphi}$ (прибыль):

$$\varphi = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} + \frac{q_3}{V} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = \frac{1}{V}, \text{поскольку} \sum q_n = 1$$

$$\varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to max$$

Решим эту задачу линейного программирования симплекс-методом.

Симплекс-метод– это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения. Все неравенства обращаем в равенства путём введения доп. переменных (их ещё называют базисными переменными), экономический смысл которых — неиспользованные ресурсы I, IIи III видов соответственно.

$$275y_1 + 225y_2 + 175y_3 + y_4 = 1$$

$$200y_1 + 550y_2 + 500y_3 + y_5 = 1$$

$$125y_1 + 475y_2 + 825y_3 + y_6 = 1$$

Функцию цел в виде уравнения $\varphi - y_1 - y_2 - y_3 = 0$, а это есть каноническая запись задачи линейного программирования

Решим систему уравнений симплекс методом [1], придем к оптимальному решению, представленному таблицей 3.

Таблица 3 — Оптимальное решение

План	**Базис**	b_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
2	y_1	0,0035	1	0,5	0	0,0044	0	-0,0009
	y_5	0,001	0	200,001	0	-0,5	1	-0,5
	y_3	0,0007	0	0,5	1	-0,0006	0	0,001
Индексная строка	φ	0,0043	0	0	0	0,0038	0	0,0005

Конец итераций: найден оптимальный план. Оптимальный план можно записать так: $y_1 = 0,0035$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0,0007$; $\varphi = 0,0043$.

Найдём цену игры: $V = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{0,0043} = 232,558$

Проверяем, верно ли найденное решение, т.е. удовлетворяет ли оно неравенству $\alpha \le V \le \beta$. Напомним, что $\alpha = 200$, а $\beta = 275$. Неравенство верно.

Теперь, из формулы $y_n = \frac{q_n}{V}$, можно найти вероятностиq_n — стратегии игрока B (спрос или количество продаж):

$$q_1 = y_1 \cdot V = 0,0035 \cdot 232,558 = 0,8$$

$$q_3 = y_3 \cdot V = 0,0007 \cdot 232,558 = 0,2$$

Проверяем, верно ли найденное решение, т.е. удовлетворяет ли оно тождеству $\sum q_n = 1$: $q_1 + q_2 + q_3 = 0,8 + 0 + 0,2 = 1$. Стратегии игрока B найдены верно. Таким образом, двойственная задача решена.

Теперь найдём вероятности p_i — стратегии игрока A: значения $\boldsymbol{x_m}$, находящиеся на пересечении индексной строки $\boldsymbol{\varphi}$ со столбцами дополнительных переменных $\boldsymbol{y_4}$; $\boldsymbol{y_5}$; $\boldsymbol{y_6}$, умножаем на цену игры V :

$x_1 = 0,0038$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0,0005$.

$p_1 = x_1 \cdot V = 0,0038 \cdot 232,558 = 0,8837$

$p_3 = x_3 \cdot V = 0,0005 \cdot 232,558 = 0,1163$

Проверяем, верно ли найденное решение, т.е. удовлетворяет ли оно тождеству $\sum p_m = 1$: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,8837 + 0,1163 = 1$. Стратегии игрока A найдены верно.

Вывод: Стратегию 1 использовать с вероятностью 0,8837, стратегию 3 — с вероятностью 0,1163. Стратегию 2 использовать нецелесообразно.

Список литературы

1. Теория игр. Лекции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://math.semestr.ru/games/games_lectures.php.