

# ПРОБЛЕМЫ МЕТОДОЛОГИИ

УДК 37.001.76

DOI: 10.17853/1994-5639-2019-4-9-35

## ПРИНЦИП СИММЕТРИИ КАК ОСНОВА ИНТЕГРАЦИИ В НАУКЕ И ЕГО ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ

В. Л. Гапонцев<sup>1</sup>, В. А. Федоров<sup>2</sup>, М. Г. Гапонцева

*Российский государственный профессионально-педагогический университет,  
Екатеринбург, Россия.*

*E-mail: <sup>1</sup>vlgap@mail.ru, <sup>2</sup>Fedorov1950@gmail.com*

**Аннотация.** Введение. В последние десятилетия в сфере образования резко обострилась проблема формирования у обучающихся целостного восприятия окружающей действительности. Нарастание научного знания, выступающего детерминантом структуры содержания образования, происходит стремительными темпами. Вследствие непомерного, продолжающегося непрерывно увеличиваться объема информации, который предъявляется для усвоения, но не может быть полностью освоен учащимися, у них вырабатываются фрагментарные сознание и мышление, обусловленные разбалансированием в учебных программах уровней интеграции и дифференциации (с креном в сторону последней). Чтобы компенсировать сложившийся дисбаланс и переломить опасную ситуацию, угрожающую обществу крайне негативными последствиями, требуется ревизия структуры содержания образования и поиск его новых концептуальных моделей.

*Цель публикации* – показать значимость использования феномена симметрии в построении структур научного знания и содержания образования.

*Методология и методики.* Исследование проводилось с опорой на идеологию Эрлангенской программы Ф. Клейна; схему Е. Вигнера, отображающую деление областей научных знаний; обобщенную идею симметрии Г. Вейля; усовершенствованный В. С. Ледневым личностно-деятельностный подход к структурированию содержания образования; а также на теоретико-методологический анализ других научных источников, касающихся обсуждаемой темы.

*Результаты и научная новизна.* В качестве основы систематизации разделов научного знания и структурирующего начала содержания современного образования предлагается общая идея симметрии, заимствованная из геометрии, но обладающая тем не менее общеметодологическим, а не частным характером. Способность симметрии объединять достоинства первичного дуктивного понятия и общего индуктивного понятия отражает громадную ра-

боту, проделанную человечеством в ходе истории, по выявлению устойчивых закономерностей, наборов инвариантов (выделение которых является базовым условием развития интеллекта), и соответствующих форм симметрии. То есть формы обобщенной симметрии аккумулируют в компактном виде все имеющиеся знания и служат инструментом, выработанным социумом для систематизации явлений и законов окружающей действительности. На примерах убедительно продемонстрировано интегративное свойство форм симметрии, проявляющееся в соотношениях между ее принципами, законами природы и явлениями природы. Принципы симметрии задают структуру областям законов природы и явлений природы, которые, в свою очередь, в виде сквозных линий (по В. С. Ледневу) могут определять содержание образования. Кроме того, обосновывается целесообразность введения специальной сквозной линии «Симметрия», состоящей из системы курсов – апикальных элементов, дополненной имплицитными элементами, рассеянными в курсах других сквозных линий. Подобный подход позволит устранить узкую специализацию в процессе обучения и избежать фрагментарности восприятия учебной информации и окружающих реалий.

*Практическая значимость.* Материалы исследования, изложенного в публикации, могут быть полезны как для ученых-педагогов, изучающих вопросы содержания образования, так и для практиков, занимающихся отбором учебного материала при разработке образовательных программ разного уровня.

**Ключевые слова:** симметрия, структура научного знания, структура содержания образования, сквозные линии в содержании образования, Эрлангенская программа.

**Для цитирования:** Гапонцев В. Л., Федоров В. А., Гапонцева М. Г. Принцип симметрии как основа интеграции в науке и его значение для образования // Образование и наука. 2019. Т. 21. № 4. С. 9–35. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-4-9-35

## SYMMETRY PRINCIPLE AS A BASIS FOR INTEGRATION IN SCIENCE AND ITS VALUE FOR EDUCATION

V. L. Gapontsev<sup>1</sup>, V. A. Fedorov<sup>2</sup>, M. G. Gapontseva

*Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.*

*E-mail: <sup>1</sup>vlgap@mail.ru, <sup>2</sup>Fedorov1950@gmail.com*

**Abstract. Introduction.** In recent decades, the problem of the formation of a holistic perception in students' minds of the surrounding reality in the field of education has become acute. The buildup of scientific knowledge, which is a determinant of the structure of the content of education, occurs impetuously. Students' thinking and

consciousness become fragmented due to the exorbitant, permanently increasing amount of information that is presented for learning, but cannot be fully mastered by students. The root cause is imbalance in the curriculum levels of integration and differentiation (with a roll in the direction of the latter). To compensate the current imbalance and reverse the dangerous situation that threatens society with extremely negative consequences, an audit of the structure of educational content and the search for its new conceptual models are required.

The *aim* of the publication was to show the importance of using the phenomenon of symmetry in the construction of structures of scientific knowledge and the content of education.

*Methodology and research methods.* The study was based on the ideology of F. Klein “Erlangen programme”; E. Wigner’s scheme, showing the division of areas of scientific knowledge; generalised idea of symmetry by G. Weyl; the personal-activity approach to structuring the content of education, improved by V. S. Lednev; and also on the theoretical and methodological analysis of other scientific sources related to the topic under discussion.

*Results and scientific novelty.* The general idea of symmetry, borrowed from geometry, but nonetheless having a general methodological rather than a particular character, is proposed as the basis for systematising sections of scientific knowledge and structuring foundation of the content of modern education. The ability of symmetry to combine the merits of the primary deductive concept and the general inductive concept reflects the tremendous work performed by mankind in the course of history to identify stable patterns, sets of invariants (the allocation of which is the basic condition for the development of intelligence) and the corresponding forms of symmetry. That is, the forms of generalised symmetry accumulate in a compact form all the available knowledge and serve as a tool developed by society for systematising the phenomena and laws of the surrounding reality. The examples convincingly demonstrated the integrative property of forms of symmetry, manifested in the relationship between its principles, the laws of nature and natural phenomena. The principles of symmetry set the structure to areas of the laws of nature and natural phenomena, which, in turn, in the form of cross-cutting lines (according to V. S. Lednev) can determine the content of education. In addition, it justifies the expediency of introducing a special cross-cutting Symmetry line, consisting of a course system – apical elements, supplemented by implicit elements scattered in courses of other cross-cutting lines. Such an approach will eliminate the narrow specialisation in the learning process and avoid fragmentary perception of educational information and the surrounding reality.

*Practical significance.* The research materials presented in the publication can be useful both for scholars and educators, who study the content of education, as well as for practitioners involved in the selection of educational material in the development of educational programmes at various levels.

**Keywords:** symmetry, structure of scientific knowledge, structure of the content of education, cross-cutting lines in the content of education, the Erlangen programme.

**For citation:** Gapontsev V. L., Fedorov V. A., Gapontseva M. G. Symmetry principle as a basis for integration in science and its value for education. *The Education and Science Journal*. 2019; 4 (21): 9–35. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-4-9-35

## Введение

Одна из важнейших проблем современного образования – преодоление тенденции узкой специализации, которая находит свое логическое завершение, как нам представляется, в «компетентностном подходе» [1, 2]. В конечном счете данная тенденция ведет к формированию фрагментарного, так называемого клипового мышления, массовое распространение которого имеет отрицательные социальные последствия, так как у обучающихся сужаются возможности формирования целостной картины действительности, что в дальнейшем препятствует стратегическому планированию как на уровне отдельных личностей, так и общества в целом. Возможно, именно это и является причиной деградации, в частности, в культуре международных отношений и культуре в целом.

На фундаментальном уровне усилению специализации способствует дифференциация знаний, связанная с интенсивным ростом их объема. Исторически корреляция между увеличивающимся объемом знаний и их разграничением прослеживается, по крайней мере, с момента перехода от индуктивного этапа развития науки к дедуктивному<sup>1</sup>. Момент этого перехода можно отождествить с возникновением первой аксиоматической системы, которая была выражена в свернутой форме в первых теоремах геометрии, доказанных Фалесом Милетским (ок. 625 – ок. 547 г. до н. э.). По мнению известного математика И. М. Яглома, основная заслуга Фалеса заключается не в доказательстве данных теорем, а в том, что для этого доказательства впервые был использован логический метод [3]. Аксиоматическая система Фалеса не была сформулирована в явном виде и опиралась на свойства симметрии геометрических объектов, принимав-

---

<sup>1</sup> На индуктивном этапе научное знание формировалось, главным образом, эмпирически, на основе непосредственного наблюдения явлений природы и первичного обобщения опытных закономерностей. Дедуктивный этап характеризуется увеличивающимся целенаправленным применением логических методов для получения нового знания.

шиеся в качестве постулатов. С того времени логика стала целенаправленно использоваться для получения новых знаний. В последующий период, известный как «золотой век древнегреческой науки», от ствола научного знания отделились математика, механика и физика, биология, философия и гуманитарные науки. Такая дифференциация научного знания потребовала в качестве компенсации его междисциплинарной интеграции, которая осуществлялась посредством перекрестного применения методов различных разделов науки и имела естественный характер, поскольку весь объем знаний мог быть усвоен отдельной личностью за приемлемое время и целостное видение картины окружающего мира не требовало выхода за рамки индивидуального восприятия.

Подобная ситуация сохранялась, как минимум, до появления энциклопедистов. Когда все знание перестало, образно говоря, помещаться в одной голове, возникла необходимость профессиональной специализации, а значит, и реорганизации образования, дифференциация которого была неразрывно связана с дифференциацией научного знания. Из-за продолжившихся поступательного роста его объема и расслоения пришлось пожертвовать интегративными элементами, позволяющими формировать целостную картину действительности на уровне каждой отдельной личности<sup>1</sup>. Заключительной стадией этого процесса, как было сказано выше, стало внедрение в систему образования компетентностного подхода. В итоге к настоящему времени произошло разбалансирование уровней интеграции и дифференциации научного знания (с отклонением в сторону последней), а следовательно, и образования, что обусловило снижение его фундаментальности, угрожающее серьезными последствиями как для самого образования, так и для всей социальной сферы в целом.

В последние десятилетия проблема формирования у представителей нового поколения целостного восприятия окружающей действительности резко обострилась в связи с широким распространением компьютерных технологий и непрерывным лавинообразным потоком неструктурированной и некритически воспринимаемой информации, обрушивающейся на индивида. В результате возник феномен клипового мышления, который не стоит считать исключительной характеристикой массового сознания – он укореняется и в области профессиональной деятельности. Так, например, медик, погруженный в море различного рода детальных анализов,

---

<sup>1</sup> Классическим отражением этой ситуации является, по-видимому, феномен формирования «двух культур», описанный Чарльзом Сноу [5].

перестает воспринимать пациента в целом, что приводит к ошибкам в постановке общего диагноза. Это означает, что новый виток технологического развития бросает нам вызов, ответ на который определит перспективу существования общества.

В теории «вызов – ответ» А. Дж. Тойнби [4] первый концептуальный элемент обладал, как правило, частным характером, т. е. от адекватности реакции на вызов зависела успешная будущность лишь некоторой части общества. Современный вызов, выражающийся в непомерном увеличении объема информации и распаде ее восприятия на отдельные фрагменты, является общим, и ответ на него надо искать на уровне универсальных социальных институтов, к которым относится и сфера образования.

Таким образом, для облегчения формирования целостного восприятия действительности требуется компенсация сложившегося дисбаланса между уровнями интеграции и дифференциации в образовании.

Направление поиска правильного решения проблемы может подсказать исследование, проведенное Анри Пуанкаре, изучавшим особенности учащихся, проявляющих способности к математике. Согласно расчетам ученого, доля таких учеников стабильно составляет одну десятую от общего количества. Практически все учащиеся, за которыми наблюдал Пуанкаре, уверенно пользовались в быту короткими логическими построениями. Однако те, кто демонстрировал способности к математике, отличались от остальных умением оперировать длинными логическими цепочками. Пуанкаре подчеркивал, что эти умения зависят не от свойств памяти, а от другого обстоятельства: 90% обучаемых воспринимают только фрагменты длинных логических построений, тогда как 10% манипулируют сложной структурой как целым, не детализируя ее, и в то же время могут, обладая интуицией особого рода, свободно обращаться, если нужно, к любому ее элементу [6]. На наш взгляд, ключевое понятие здесь – «структура».

Для того чтобы справиться с проблемой распада целостного знания на фрагменты в восприятии обучающихся, с нашей точки зрения, необходимо пересмотреть сложившиеся представления о структуре научного знания и внести соответствующие корректировки в структуру содержания образования. В процессе развития интуитивного восприятия структуры А. Пуанкаре особую роль отводил красоте и гармонии, которые тесно связаны с понятием симметрии. Учитывая, что в работах выдающегося ученого в области математики и физики вопросы симметрии занимают важное место, представляется обоснованным рассмотреть ее значение в формировании структур научного знания и содержания образования.

## Материалы и методы

В предпринятом исследовании мы опирались, прежде всего, на идеологию Феликса Клейна (идеологию Эрлангенской программы), схему деления области научных знаний, предложенную Е. Вигнером, и обобщенную идею симметрии Г. Вейля. Совокупность этих идей использовалась в качестве инструментария для описания структуры научного знания и структуры содержания образования, детерминантом которой выступает научное знание. Кроме того, важной составляющей методологической базы изыскания послужил личностно-деятельностный подход, развитый В. С. Ледневым для формирования и структурирования содержания образования. Был проведен также анализ других научных публикаций, касающихся разработки теории содержания образования и описывающих эмпирически зафиксированные характеристики его структуры.

## Результаты исследования

**Принцип симметрии.** В ключевом положении Эрлангенской программы Ф. Клейна утверждается, что в основе каждого раздела математики лежит своя специфическая группа симметрий<sup>1</sup> [7]. Например, Евклидову геометрию на плоскости порождает группа пространственных движений плоскости<sup>2</sup> и связанная с ней симметрия, инвариантами которой являются длины преобразуемых отрезков и углы между отрезками [9]. Проективную геометрию представляет группа проективных преобразований<sup>3</sup> [10].

---

<sup>1</sup> В математике под группой преобразований понимают их набор, обладающий следующими свойствами: 1) последовательное выполнение любых двух преобразований набора (их композиция) является преобразованием этого же набора, т. е. композиция характеризуется теми же самыми инвариантами; 2) перемена местами преобразований участвующих в композиции не меняет ее результата; 3) среди преобразований набора имеется тождественное преобразование, которое оставляет неизменным объект в целом; 4) каждое преобразование данной группы имеет обратное преобразование, так что их композиция является тождественным преобразованием (см., например, [8]).

<sup>2</sup> К этой группе относятся преобразования инверсии относительно центра, преобразование зеркального отражения относительно прямой, повороты относительно центра и трансляции, т. е. параллельные переносы относительно выделенной прямой [9].

<sup>3</sup> Подгруппой группы проективных преобразований является группа аффинных преобразований, которая, в свою очередь состоит из подгрупп однородного растяжения и растяжения относительно выделенного центра и подгруппы движений. Инварианты группы движений – длины и углы; подгрупп растяжения – отношения длин и углы; группы аффинных преобразований – отношения длин параллельных отрезков. Инвариантами группы проективных преобразований являются, например, принадлежность точки прямой и отношение разделенности пар точек. Проективная геометрия в отличие от Евклидовой не изучает метрических свойств фигур. Это придает ей общность, позволившую охватить в своем описании геометрию Евклида, геометрию Лобачевского и геометрию Римана.

Изначально Эрлангенская программа была сформулирована в рамках геометрии, но впоследствии область ее действия распространена на все разделы математики. Позднее обнаружилась возможность ее приложения в ряде разделов теоретической физики<sup>1</sup>. В настоящее время все популярнее становится мнение о том, что идеология Ф. Клейна справедлива для всех разделов научного знания. Это имеет существенное значение для наших рассуждений, поскольку позволяет использовать данную идеологию как инструмент для описания структуры *всего* научного знания и, следовательно, структуры содержания образования<sup>2</sup>.

Поскольку исходно понятие группы симметрий возникло в области геометрии, для его применения к другим разделам научного знания необходимо дать обобщенное определение понятия «симметрия». Такое определение было предложено Германом Вейлем, согласно которому, объект обладает свойством симметрии относительно некоторой группы преобразований, если при действии преобразований этой группы у объекта имеются свойства, остающиеся неизменными, – их называют инвариантами данной группы преобразований [11].

Важнейшим свойством группы преобразований является ее замкнутость. Она выражается в первом свойстве, т. е. в том, что, применяя композицию преобразований неограниченное число раз, мы получим все элементы группы и ни на одном этапе не выйдем за ее пределы. Такое ограничение целесообразно с точки зрения математики и физики. Оно позволило развить теорию групп, ставшую специальным разделом математики, и сформировать аксиоматическое построение ряда разделов математики и теоретической физики, при котором в качестве исходных постулатов берется соответствующая, специфическая для каждого раздела группа симметрий. Эта группа симметрий играет двойную роль:

1) она позволяет сформулировать аксиоматическую систему этого раздела науки<sup>3</sup>;

2) является естественным маркером этого конкретного раздела, т. е. однозначно указывает именно на этот раздел.

---

<sup>1</sup> К ним относятся аналитическая механика, классическая электродинамика, термодинамика, общая теория относительности и квантовая теория поля [12].

<sup>2</sup> Научное знание является одним из детерминантов содержания образования, и структура научного знания предопределяет структуру содержания образования [13].

<sup>3</sup> Аксиоматическая система позволяет получить все содержательные результаты данного раздела науки строго логическими методами, не прибегая ни к каким дополнительным источникам, в том числе к эмпирическим данным или данным, содержащимся в других разделах науки.



В первом случае принято говорить о принципе симметрии (принципе инвариантности). Так, в основе электродинамики лежит принцип калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Он утверждает, что все законы электродинамики инвариантны относительно сдвига начала отсчета потенциала поля. В результате становится возможным получить вид всех уравнений поля и многие другие результаты, например, закон сохранения электрического заряда. С точки зрения позитивной науки именно это является основным результатом Эрлангенской программы Ф. Клейна.

В данной работе для нас большее значение имеет второй аспект, связанный с ролью групп симметрии, поскольку он позволяет сформировать естественный каталог разделов науки. Действительно, перечисление групп симметрий равносильно перечислению разделов науки, в результате чего и образуется указанный каталог, важная особенность которого состоит в том, что это не формальный, а содержательный перечень различных наук, поскольку тождество «группа симметрии = название соответствующего раздела» теоретически позволяет получить все содержание данного раздела.

Другое существенное свойство этого каталога связано с тем, что он упорядочен и имеет иерархическое строение. Дело в том, что в нетривиальных случаях группа преобразований выступает частью другой, более широкой группы преобразований и в то же время сама состоит из самостоятельных подгрупп. Лучше всего это видно на примере геометрии.

Выше упоминалась группа преобразований подобия, которая конструируется как объединение групп пространственных движений и равномерных растяжений пространства. С одной стороны, группа преобразований подобия – это подгруппа группы произвольных непрерывных деформаций пространства<sup>1</sup>. Последняя, в свою очередь, является подгруппой группы автоморфизмов<sup>2</sup>, в которой помимо непрерывных деформаций допускаются преобразования, связанные с разрезами пространства (вырезание частей, стягивание образовавшихся лакун и склеивание их краев, а также перемещение вырезанных частей в лакуны, образованные растяжением разрезов в других местах при склеивании новых границ). С другой стороны, группа пространственных движений состоит из под-

---

<sup>1</sup> Инвариантами группы непрерывных деформаций являются отношения принадлежности элемента множества к окрестности другого элемента этого множества.

<sup>2</sup> Инвариантом группы автоморфизмов является заранее заданная структура разбиения множества на части.

групп: инверсий относительно центра, зеркальных отражений относительно прямой (или плоскости в случае трехмерного пространства), дискретного набора групп вращения и дискретного набора групп трансляции.

С понятием симметрии неразрывно соединена пара связанных понятий: набор преобразований, составляющий данную группу симметрии, и набор инвариантов – величин и характеристик, остающихся неизменными при этих преобразованиях. Их связь однозначна: каждому набору преобразований соответствует определенный набор инвариантов. Поэтому в физике понятие «принцип симметрии» тождественно понятию «принцип инвариантности».

По мысли Ф. Клейна, конкретная наука изучает те закономерности (величины, соотношения и т. п.), которые устойчивы относительно каких-либо преобразований, т. е. это инварианты некоторой группы симметрии. В своем историческом развитии каждая наука вначале эмпирически выделяет некоторый круг закономерностей, т. е. инвариантов, и только на следующем этапе фиксирует соответствующий набор преобразований. Например, в механике первоначально были зафиксированы такие частные закономерности, как зависимость периода колебаний маятника от длины подвеса, зависимость пройденного расстояния тела, скользящего по наклонной плоскости, от времени перемещения и т. п. На следующем этапе Галилей установил, что ход опытов не меняется при перемещении судна, на котором проводят опыты, с постоянной скоростью относительно земли. Теперь это утверждение о независимости механических явлений от скорости системы отсчета называется «принцип относительности Галилея». Его содержание есть фактически инвариантность законов механики, лежащих в основе рассматриваемых механических явлений относительно таких преобразований, как перемена места, перемена времени и изменение скорости перемещения системы отсчета (при условии ее неизменности в ходе проведения наблюдений). И лишь много позднее было дано формальное описание набора преобразований, известного теперь как преобразования Галилея, инвариантом которых является, в частности, второе начало Ньютона – основной закон механики.

Аналогичный ход событий можно проследить в геометрии. Вначале эмпирически были выделены некоторые виды симметрий группы движения. Их многочисленное присутствие легко обнаружить в орнаментах [11]. Древность подобных орнаментов подтверждает археология. Особо следует отметить удивительную устойчивость формы орнаментов. Некоторые из них, например меандрический узор, повторяются в неизменном виде от времени охоты на мамонтов до вышивок на полотенцах XIX в. [14]. Таким

образом, трансляционная, поворотная и зеркальная симметрия были усвоены задолго до того, как Фалес Милетский взял их за основу для доказательства первых пяти теорем геометрии<sup>1</sup>. Напомним, что аксиоматическая система геометрии Фалеса не была явно сформулирована и вскоре ее заменила Евклидова аксиоматика геометрии, поскольку непосредственными последователям Фалеса его представления показались менее определенными в сравнении с теми, что были реализованы в пяти постулатах Евклида. Тем удивительнее, что более чем через две тысячи лет при реализации Эрлангенской программы Ф. Клейна было установлено, что симметрии группы движений могут быть положены в основу аксиоматики геометрии Евклида.

Даже в геометрии, одном из древних разделов математики, путь от фиксации системы инвариантов до построения группы преобразований симметрии, соответствующей им, потребовал пару тысяч лет. Поэтому не следует недоумевать по поводу того, что в большинстве других наук мы находимся на этапе, когда специфические инварианты уже выделены, поскольку данная наука изучает устойчивые закономерности, но соответствующая им группа симметрии еще не установлена, не сформулирован принцип симметрии (принцип инвариантности), специфичный для данной науки, и не построена на его основе аксиоматическая система этого раздела научного знания. Приведенный пример не позволяет рассчитывать на немедленную реализацию Эрлангенской программы для всех разделов научного знания в полном объеме. Однако это не препятствует ее частичной реализации в форме систематизации разделов научного знания в соответствии с уже выделенными группами инвариантов, однозначно маркирующих разделы научного знания, в согласии с пока еще формально не описанными группами симметрии. На основе соотношения наборов инвариантов, специфичных для различных разделов научного знания, уже можно установить определенную, основанную на соотношении «группа – подгруппа» иерархию, подобную приведенной выше для геометрических групп.

Рассмотрим пример попытки построения такого рода систематизации. Один из постулатов теории биологической эволюции – устойчивость наследу-

---

<sup>1</sup> Советский математик И. М. Яглом полагал, что главная заслуга Фалеса состояла не в доказательстве первых теорем геометрии, а в примере создания первой аксиоматической системы, где в качестве аксиом использовались симметрии группы движений [3]. Это послужило началом целенаправленного применения логики как метода получения новых знаний. Поэтому история развития научного знания делится на два периода: индуктивный – до Фалеса, когда знания формировались на основе опыта и наблюдений; и дедуктивный – после Фалеса, когда в получении новых знаний начинают все большую роль играть логические методы.

емых признаков, точнее устойчивое соотношение признаков потомства, наследуемых от родителей<sup>1</sup>, которое можно считать инвариантом классической генетики. Основой законов Менделя в молекулярной генетике является устойчивость генов, переносчиков наследственной информации, по отношению к условиям среды, в которой существует популяция живых организмов. Таким образом, набор аллелей генов можно представить в качестве инварианта молекулярной генетики. Ген – часть молекулы ДНК, и устойчивость генов обеспечивается устойчивостью самих молекул ДНК по отношению к вариации физических условий окружающей их среды. Такая устойчивость молекул ДНК – частный случай реализации закона Дальтона о постоянстве состава вещества, в основе которого находится независимость атомарного состава молекулы от условий протекания и вида химических реакций, в результате которых она возникает. То есть молекулы веществ следует понимать как инварианты химии.

Строение молекулы характеризуется свойствами электронных оболочек атомов, входящих в ее состав. Но строение электронных оболочек определяется составом атомных ядер и законами квантовой механики, в частности принципом запрета Паули<sup>2</sup>. Состав атомных ядер описывается числом протонов и нейтронов и силами ядерного взаимодействия. Силы ядерного взаимодействия нуклонов многократно превышают силы электромагнитного взаимодействия, чем и объясняется неизменность состава атомных ядер в ходе химических реакций, в процессе которых меняются только электронные оболочки. Значит, состав атомных ядер можно рассматривать как инвариант, лежащий в основе закона Дальтона о постоянстве состава вещества (т. е. фактически о постоянстве атомарного состава молекулы данного вещества).

В современной квантовой теории поля свойства сильных взаимодействий, формирующих ядерные силы и свойства электромагнитных сил, объясняются с позиций стандартной модели, которая строится с учетом принципов калибровочной инвариантности силовых полей<sup>3</sup>. Одним из следствий этого вида симметрии является закон сохранения заряда,

---

<sup>1</sup> Это соотношение признаков выражается в законах Менделя.

<sup>2</sup> Принцип запрета Паули – следствие закона сохранения четности волновой функции в применении к фермионам, элементарным частицам с нечетной волновой функцией. Таким образом, четность волновой функции – это один из инвариантов квантовой механики.

<sup>3</sup> Примером принципа калибровочной инвариантности является утверждение о наличии специфической симметрии электромагнитных явлений, в частности инвариантности уравнений электромагнитного поля относительно трансляции начала отсчета вдоль оси потенциала электрического поля.

в том числе электрического. То есть заряды различных силовых полей – инварианты квантовой теории поля.

Итак, мы последовательно перешли от инвариантов биологии к инвариантам химии, а затем к инвариантам квантовой теории поля. С фундаментальной точки зрения этот переход от одних видов симметрии к другим ее видам можно трактовать согласно модели соотношения «группа – подгруппа». Но необходимо иметь в виду, что эти переходы, как правило, не бывают отчетливыми и прямолинейными, в них присутствуют логические разрывы, обусловленные необходимостью учета факторов, извлекаемых из опытных данных. Ведь даже в квантовой теории поля, наиболее строгом разделе физики, реализованном в Стандартной модели, имеются внешние параметры, которые вводятся в теорию из эксперимента. К ним, в частности, относятся массы лептонов и кварков (девять параметров), параметры, характеризующие относительные интенсивности электромагнитного слабого и сильного взаимодействия (три параметра), и еще шесть специфических параметров, среди которых масса бозона Хиггса [15, 16].

Следовательно, полная реализация идей Эрлангенской программы, хотя бы только в области естественных наук, на современном этапе представляется невыполнимой. Вместе с тем из примера построения связей естественно-научных дисциплин (связи их инвариантов) можно сделать вполне резонное предположение, что данная идеология в отношении применения групп симметрии и их инвариантов с целью систематизации научного знания может быть эффективным инструментом выстраивания содержательного каталога научного знания, формирующего его наиболее компактную и целостную картину.

Таким образом, общую идею симметрии возможно использовать в качестве основы систематизации не только разделов геометрии, как сформулировал Ф. Клейн в далеком 1872 г., но и разделов научного знания в целом, поскольку каждый из них изучает некоторые устойчивые закономерности, т. е. имеет свой специфический набор инвариантов. По-видимому, в этом контексте следует воспринимать «принцип симметрии», о котором говорил В. И. Вернадский на своих лекциях в 30-е гг. прошлого века [17]. Правда, в работе «Принцип симметрии в науке и философии» он не дал четкой формулировки этого принципа, а только обосновал его необходимость.

Рассуждения создателя биогеохимии, историка и организатора науки строятся на связях феномена «симметрия» с такими понятиями, как «пространство-время» и «энергия». Ученый подчеркивал, что именно им,

этим понятиям, стало уделяться самое пристальное внимание в современный ему период, когда их содержание, сложившееся еще в эпоху Древней Греции, впервые подверглось кардинальному пересмотру по причине радикальных революционных изменений в физике, знаменовавшихся становлением квантовой механики и разработанной Альбертом Эйнштейном теории относительности, перевернувшей общепринятые научные представления о мире. В период написания названной выше работы В. И. Вернадского (1921–1927 гг.) уже были известны идеи Ф. Клейна о группах симметрии (1872 г.) и уже была доказана знаменитая теорема Э. Нетер о связи физических инвариантов (энергии, импульса, момента количества движения) с симметрией физических законов относительно некоторых групп непрерывных преобразований. Но в этих, безусловно, архизначимых исследованиях речь идет о частных принципах симметрии (принципах инвариантности), относящихся к конкретным областям математики и физики, а в изложении В. И. Вернадского принцип симметрии приобретал общенаучный характер.

Уточнить смысл, который, вероятнее всего, вкладывал в понятие «принцип симметрии» В. И. Вернадский, позволяет предложение известного физика-теоретика середины XX в. Е. Вигнера, трудившегося в области квантовой теории поля и специализировавшегося на изучении принципов калибровочной инвариантности. Для того чтобы отделить последние от классических принципов инвариантности, связанных с преобразованием Галилео Галилея и преобразованием Х. А. Лоренца, Е. Вигнер разделил структуру научного знания на три уровня: область явлений природы, область законов природы и область принципов инвариантности (принципов симметрии), которая, в свою очередь, состоит из двух подобластей – геометрических и динамических принципов симметрии. Первые формулируются на языке явлений природы, а вторые – на языке законов природы [18].

Согласно Е. Вигнеру, законы природы наделяют область явлений природы структурой<sup>1</sup>. Каждому закону природы отвечает бесконечное множество явлений природы. Например, закон всемирного тяготения и второй закон механики Ньютона описывают все бесчисленные положения планет Солнечной системы и положения всех звезд Галактики в прошлом, настоящем и будущем. Иначе говоря, множество законов при-

---

<sup>1</sup> Каждому закону природы соответствует свой круг явлений природы. Так, закону Кулона подчинены все электрические явления, а закону вязкого трения Стокса – явления течения вязких жидкостей и их взаимодействия с твердыми телами.

роды состоит из меньшего числа элементов, чем множество явлений природы. Такие же соотношения имеют место между множествами принципов симметрии и законов природы<sup>1</sup>, т. е. принципы симметрии наделяют область законов природы структурой и их множество содержит «меньшее» число элементов, чем множество законов природы, поэтому символически структуру области научного знания можно представить в виде усеченной пирамиды (рисунок).



Схема деления области научных знаний, сформированная согласно представлениям Е. Вигнера [18]

The scheme of division of scientific knowledge areas formed according to E. Wigner's representations [18]

Привычное деление научных дисциплин на математические, естественно-научные и гуманитарные, включая философию, восходящее к классификации наук, в свою очередь, восходящей к идеям Ф. Энгельса [19, 20], можно отождествить со структурой горизонтального сечения, расположенного в области законов природы. Действительно, законы природы естественным образом разделяются на законы математических дисциплин (алгебры, теории дифференциальных уравнений, ...) и естественно-научных дисциплин (физики, химии, биологии, ...), а также законы и правила философии и гуманитарных дисциплин (истории, диалектической логики, стихосложения, ...).

<sup>1</sup> Это утверждение Е. Вигнер обосновывал тем, что, например, из принципа калибровочной инвариантности электромагнитного поля можно вывести все законы взаимодействия заряженных частиц.

Теперь наконец можно дать определение принципа симметрии, которое согласуется с его изложением у В. И. Вернадского. В нашем понимании, это существование иерархии форм обобщенной симметрии, надеющейся структурой множество законов природы и опосредованно формирующей структуру множества явлений природы.

**Формы симметрии как сквозная линия содержания образования.** Одно из положений разработанной В. С. Ледневым теории содержания образования состоит в том, что одной из двух его детерминант является научное знание [13]. Его структура отображается в содержании образования в виде сквозных линий<sup>1</sup> математики и ее частных разделов, естественно-научных предметов (физики, химии, биологии и т. д.), гуманитарных (русский язык, литература, искусствоведение...) и философских дисциплин. Эти сквозные линии соответствуют традиционной классификации наук [13, 19]. С точки зрения схемы деления области научных знаний (рисунок), как указано выше, эта классификация отражает структуру горизонтального сечения, расположенного в области законов природы. Область явлений природы также опосредованно присутствует в структуре содержания образования, поскольку изучение законов природы предполагает их иллюстрацию примерами явлений природы. И только область принципов симметрии не находит места в структуре содержания образования в форме специальной сквозной линии, состоящей из системы курсов (апикальных элементов), дополненной имплицитными элементами, рассеянными в курсах других сквозных линий.

Во всем школьном цикле обучения только в одном из разделов геометрии отведено 19 часов на тему «симметрия»; при обучении высшей математике в университете студенты некоторых специальностей сталкиваются с курсом «теория групп». Эта ситуация, очевидно, связана с устаревшим представлением о симметрии как о чисто геометрическом аспекте научного знания.

Интегративная роль форм симметрии как структурирующего начала всего научного знания в современном образовании игнорируется. Именно это обстоятельство в условиях непрерывного увеличения предлагаемого к усвоению объема информации приводит к формированию уз-

---

<sup>1</sup> Сквозная линия состоит из автономных (апикальных, в терминологии В. С. Леднева) и «рассеянных» (имплицитных, по В. С. Ледневу) элементов. Так, сквозная линия геометрии складывается из автономных курсов (планиметрии, стереометрии, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и т. д.), которые дополняются элементами геометрии, рассеянными в других дисциплинах, например: треугольником Паскаля в арифметике, координатной сеткой в географии, орнаментами в археологии и искусствоведении и т. п.



кой специализации обучения и, как следствие, к фрагментарному восприятию окружающей действительности и отсутствию ее целостной картины.

Сквозную линию «симметрия» в структуре содержания образования удобно выстраивать, переходя от наглядных и образных форм симметрии к более общим и абстрактным, что фактически повторяет траекторию развития сознания – общественного и индивидуального. Путь общественного сознания проходят все науки. Так, в математике вначале сформировались и были зафиксированы геометрические формы симметрии, представленные многообразными орнаментами [11, 14]. На их основе возник первый неразвернутый вариант аксиоматической системы Евклидовой геометрии. Спустя более чем две тысячи лет оформилось понятие групп симметрии, и несколько позднее были выделены такие разделы математики, как теория дискретных групп и теория непрерывных групп<sup>1</sup>, а также теория неприводимых представлений. Теория дискретных групп является основой кристаллографии, а теория непрерывных групп – это фундамент классической и квантовой теории поля<sup>2</sup>. Теория неприводимых представлений имеет применение в термодинамике конденсированных сред<sup>3</sup>.

В приведенных примерах просматривается важная характерная особенность понятия «симметрия» – она имеет двойной логический статус. С одной стороны, симметрия – общее индуктивное понятие: она имеет многочисленные эмпирические подтверждения, причем ее восприятие обладает высоким эмоциональным воздействием<sup>4</sup>, так как симметрия неразрывно связана с представлением о гармонии и красоте. С другой стороны, симметрия – это первичное дедуктивное понятие: на ее основе построены аксиоматические системы в математике, теоретической физике, химии и биологии. Академик Н. С. Курнаков обратил внимание на то, что первичные дедуктивные понятия имеют малый объем, но большое содержание, в то время как общие индуктивные понятия характеризуются большим объемом, но малым содержанием [24].

Понятие «симметрия» объединяет достоинства первичного дедуктивного понятия и общего индуктивного понятия. Это свойство всего лишь отра-

---

<sup>1</sup> Создателем теории дискретных групп является Ф. Клейн, а теорию непрерывных групп развил С. Ли.

<sup>2</sup> Основой кристаллографии являются дискретные пространственные группы, так называемые «федоровские группы» [21], в квантовой теории поля применяется теория Янга-Милса, опирающаяся на непрерывные группы преобразований [21].

<sup>3</sup> Работы Пьера Кюри в области симметрии [23].

<sup>4</sup> Например, ритмы в поэзии и музыке – это проявление одной из форм симметрии, как и геометрические ритмы в цветомузыке.

жение громадной работы, проделанной человечеством в ходе истории, по выявлению устойчивых закономерностей, связанных с ними наборов характерных инвариантов и соответствующих форм симметрии. То есть формы обобщенной симметрии аккумулируют в компактном виде всё знание человечества и служат инструментом, выработанным социумом для систематизации явлений и законов окружающей действительности.

Еще одна важная для педагогики и образования особенность форм симметрии связана с ее ролью в индивидуальном развитии человека, чему посвящены, например, многочисленные работы основателя Женевской школы психологии Жана Пиаже. В частности, он с учениками исследовал роль формирования представления об инвариантности состава дискретных и непрерывных множеств в понимании человеком, что есть число, арифметические операции и логика [25]. Эмпирически были установлены возрастные границы в развитии интеллекта человека<sup>1</sup>. Собственно, навык выделения инвариантов является основой формирования интеллекта. Так, играя с погремушкой, ребенок начинает радоваться, когда он устанавливает устойчивую корреляцию между сенсомоторными реакциями и слуховым и зрительным восприятием [25].

В свете сказанного выше сквозную линию «симметрия» в структуре содержания образования удобно строить на основе ряда курсов, восходящих от индуктивного содержания понятия «симметрия» к дедуктивному содержанию этого понятия. Пока рано говорить о конкретных курсах этой новой сквозной линии содержания образования – достаточно охарактеризовать ее возможное содержание, разбив учебный процесс на три последовательных этапа.

На первом этапе изложение должно строиться на основе эмоционального восприятия примеров различных форм симметрии, взятых из области живописи [11, 26, 27], орнаментов на предметах, найденных при проведении археологических и этнографических экспедиций [11, 28], анализа ритмов, встречающихся в музыке и поэзии [11, 26, 27]. Такого рода курс или набор кратких курсов целесообразно приурочить к периоду обучения с 1-го по 8-й класс средней общеобразовательной школы.

На втором этапе, в старших классах школы и на первых курсах университетов, акцент должен ставиться на анализе роли форм симмет-

---

<sup>1</sup> Так, первая возрастная граница (4–5 лет) связана, по Пиаже, с формированием у ребенка представления об инвариантности величины множества относительно различных вариантов деления его на части. В более раннем возрасте ребенок может освоить процедуру сложения, но процедурой вычитания он способен овладеть только после прохождения первой границы Пиаже.

рии в ходе исторического развития различных дисциплин, относящихся как к точным, так и гуманитарным наукам<sup>1</sup>.

На третьем, завершающем этапе основное внимание следует уделить курсу, целью которого должна быть иллюстрация реализации идей Эрлангенской программы Клейна в математических и естественно-научных дисциплинах. Уровень изложения может варьироваться от популярного до строгого математического, в зависимости от специализации обучающихся. Преподаватель курса должен показать существование иерархии групп симметрии, специфичных для различных разделов научного знания, на основе демонстрации связи между наборами инвариантов, характерных для изучаемых разделов научного знания. Пример фрагмента, иллюстрирующего возможность такого подхода, приведен выше, и, конечно, он может быть развит для более глубокого и широкого охвата научных дисциплин. Но в силу того, что Эрлангенская программа в полном объеме может быть реализована только для некоторых разделов точных наук и далека от завершения для большей части науки в целом, на данный момент времени от рассматриваемого курса нельзя требовать точного определения групп симметрии для всех разделов науки.

### **Обсуждение и заключения**

Название нашей статьи «Принцип симметрии как основа интеграции в науке и его значение для образования» перекликается с названием известной работы В. И. Вернадского: «Принцип симметрии в науке и философии». Однако в нашей работе отсутствует философский аспект. В качестве основного мы приняли прикладной вектор в связи с поставленной задачей исследования – показать возможности пересмотра структуры содержания образования для усиления в нем *интегративного начала*. Тем не менее полностью игнорировать философскую составляющую «принципа симметрии» невозможно. Действительно, уже из его формулировки как

---

<sup>1</sup> Здесь можно использовать уже существующие курсы, такие как «Концепции современного естествознания» и «Естественно-научная картина мира», перестроив их содержание в соответствии с задачей анализа роли форм симметрии в истории развития научных дисциплин. Такого рода курс читался на протяжении двадцати лет в РГППУ (г. Екатеринбург) студентам дневного и заочного обучения всех специальностей, а его элементы были использованы при преподавании математики в Музыкальной школе-лицее при Уральской государственной консерватории им. М. П. Мусоргского. Во всех случаях внимание аудитории было гарантированно высоким, а восприятие содержания учащимися четко коррелировало с уровнем их интеллектуального развития и степенью положительной мотивации на обучение в целом [29] (см. также: Гапонцева М. Г. Интегративный подход в содержании непрерывного естественно-научного образования: дис. ... канд. пед. наук. Екатеринбург, 2002. 145 с.).

утверждения о существовании иерархии форм обобщенной симметрии, наделяющей структурой множество законов природы и опосредованно формирующей структуру множества явлений природы, следует, что он не носит частного характера, а относится ко всей области научного знания. Это неизбежно связывает его с проблемами общеметодологического характера, приобретающими философское значение.

Так, например, в свете предложенного Е. Вигнером разбиения всего научного знания на три уровня: области «явления природы», «законы природы» и «принципы симметрии» – возникает естественный вопрос о его границах [18]. Как показал анализ определения понятия «явление природы»<sup>1</sup>, границы области научного знания связаны с процедурой пространственно-временной локализации наблюдаемых нами объектов окружающей нас реальности. В работах [30–33]<sup>2</sup> проведен анализ этого определения Е. Вигнера, кратко изложенный ниже.

Эффективность применяемых процедур локализации зависит от двух оснований. Первое связано с формальным описанием локализации объекта. Оно различно для макроскопических тел, силовых полей и микроскопических тел (элементарных частиц, описываемых квантовой механикой). Второе основание касается степени свободы вариации поведения объекта, которая неодинакова, например, для макроскопических тел, таких как неорганическое тело (планета, гора, дом, ...), органическое неодушевленное (дерево, цветок, водоросль, ...), органическое одушевленное (собака, слон, дельфин, рыба, ...) и человек – одушевленное создание, обладающее интеллектом и свободой воли.

Оба ряда природных объектов, согласно определению Е. Вигнера, относятся к явлениям природы, т. е. попадают в область научного знания. И оба ряда указанных явлений природы выстроены так, что по мере перехода от одних классов объектов к другим возникают все большие затруднения при осуществлении пространственно-временной локализации объекта. Выделим основания, по которым построены эти ряды. Для пер-

---

<sup>1</sup> Определение: «Явление природы – это то, что можно наблюдать непосредственно с помощью органов чувств или опосредованно с помощью приборов» [18], – приобретает конструктивный характер, если, кроме явлений природы, могут существовать, хотя бы гипотетически, некоторые другие явления, например, духовного мира (Бог, ангелы, душа...), признаваемые религиозным сознанием. Таким образом, определение Е. Вигнера делит область знания на две части: область научного знания и область религиозного знания. При этом вопрос о существовании объектов религиозного сознания признается лежащим вне рамок научного знания.

<sup>2</sup> См. также: Гапонцева М. Г. Интегративный подход в содержании непрерывного естественно-научного образования: дис. ... канд. пед. наук. Екатеринбург, 2002. 145 с.

вого ряда – это способ математического описания локализации объекта, а для второго – вариативность поведения, связанная со степенью «интеллекта» рассматриваемого объекта. Образно говоря, два данных ряда явлений природы можно отождествить с двумя непараллельными прямыми, двигаясь вдоль которых мы переходим к объектам, которые все труднее и труднее локализовать. С точки зрения научного знания нельзя отрицать возможность пересечения этих двух линий. Но те гипотетические объекты, которые лежат в точке пересечения, выходят за пределы области научного знания, так как нет возможности локализовать их доступными нам средствами. Иначе говоря, за пределами области научного знания лежит область, объекты которой имеют природу, не позволяющую контролировать их принятыми в современной науке методами<sup>1</sup>.

Еще одно обстоятельство, имеющее общенаучное значение, – характер представлений о пространстве-времени. В. И. Вернадский строил свои рассуждения о необходимости пересмотра в науке роли симметрии исходя из связи последней с понятиями пространства и времени, воззрения на которые радикально изменились при возникновении теории относительности и квантовой механики. Поменявшиеся представления нельзя считать окончательно устоявшимися и сейчас, спустя более чем сто лет. Успешное развитие науки в период начиная со времен Фалеса и Аристотеля и до начала XX в. во многом было обеспечено тем, что исключалась возможность нелокального пространственно-временного описания событий<sup>2</sup>. Это конструктивное решение обусловило прогресс всех научных направлений на протяжении более чем двух тысячелетий. Но в конце XIX – начале XX в. появились признаки исчерпанности данной парадигмы<sup>3</sup>. Поэтому, по логике В. И. Вернадского,

---

<sup>1</sup> Возможность осуществлять опыты является основой современной науки. Согласно общепринятому определению, опыт – это наблюдение, проводимое в контролируемых условиях. То есть отсутствие возможности контроля условий некоторого наблюдения автоматически выводит его за пределы научного знания, что прямо не связано с самой возможностью осуществления этого наблюдения.

<sup>2</sup> Это нашло свое выражение в безусловном принятии принципа причинности в качестве инструмента анализа хода событий и принятии идеи локального реализма, которую А. Эйнштейн рассматривал как необходимое условие существования науки.

<sup>3</sup> К ним относятся: идея Э. Маха о зависимости инертной массы тела от его взаимодействия со всеми телами вселенной; мгновенная передача информации о состоянии пары запутанных квантовых частиц независимо от расстояния между ними, подтвержденная экспериментально (парадокс Розена – Подольского – Эйнштейна), и ряд явлений (сверхпроводимость, сверхтекучесть, спинодальный распад сплавов и явления, изучаемые нелинейной кинетикой, в частности эффект Бенара и ход реакции Белоусова-Жаботинского [34]), которые объясняются на основе применения функционала плотности свободной энергии Гинзбурга – Ландау.

можно ожидать ревизии и наших представлений о симметрии и, соответственно, ревизии идеологии, заложенной в Эрлангенской программе Ф. Клейна. Подобное утверждение опирается на общие соображения эвристического характера. Недавно было предложено построенное на гипотезе слабой нелокальности [35] описание непрерывных гетерогенных систем с помощью методов термодинамики неравновесных процессов. Предельным случаем гипотезы слабой нелокальности является гипотеза локального равновесия, многократно апробированная в неравновесной термодинамике непрерывных гомогенных систем [36]. Таким образом, учет пространственно-временной нелокальности в XX веке становится методом, систематически используемым в физике и химической кинетике. Следовательно, если принять во внимание указание В. И. Вернадского о связи представлений о симметрии и наших представлений о пространстве-времени, может возникнуть вопрос о необходимости коррекции положений Эрлангенской программы Ф. Клейна и опирающейся на нее систематики научного знания.

Независимо от этого проблема возрастающего фрагментарного восприятия окружающей действительности и отсутствия ее целостной картины в условиях непрерывного увеличения объема информации, стимулирующего узкую специализацию формируемого содержания образования, ожидает своего решения. Перспективным вариантом, как мы попытались показать выше, представляется использование интегративного свойства форм симметрии в качестве структурирующего начала всего научного знания в современном образовании.

Данное свойство обнаруживается в соотношениях между принципами симметрии, законами природы и явлениями природы. Каждому принципу симметрии отвечает множество законов природы, а каждому закону природы – бесконечное множество явлений природы. Принципы симметрии наделяют структурой области законов природы и явлений природы, которые, в свою очередь, в виде сквозных линий (по В. С. Ледневу) определяют содержание образования. Поэтому при постоянном приросте объема информации, предъявляемой обучающимся для усвоения, в структуру содержания образования целесообразно ввести специальную сквозную линию симметрии, состоящую из системы курсов (апикальных элементов), дополненной имплицитными элементами, рассеянными в курсах других сквозных линий. Полагаем, что для описания содержания образования и его структуры большим потенциалом обладают положения фрактальной геометрии [37, 38].

### **Список использованных источников**

1. Зеер Э. Ф. Компетентностный подход к образованию // *Образование и наука*. 2005. № 3 (33). С. 27–40.
2. Зеер Э. Ф., Сыманюк Э. Э. Компетентностный подход к модернизации профессионального образования // *Высшее образование в России*. 2005. № 4. С. 23–30.
3. Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. Москва: Наука, 1980. 227 с.
4. Тойнби А. Дж. Постигание истории: пер. с англ. / сост. А. П. Огурцов. Москва: Прогресс, 1991. 736 с.
5. Сноу Ч. П. Две культуры // Сноу Ч. П. Портреты и размышления: сборник публицистических работ. Москва: Прогресс, 1985. С. 195–226.
6. Пуанкаре А. О науке. Москва: Наука, 1983. 560 с.
7. Визгин В. П. К истории «Эрлангенской программы» Ф. Клейна // *Историко-математические исследования*. 1973. № 18. С. 218–248.
8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука. 1982. 288 с.
9. Яглом И. М. Геометрические преобразования. Т. 1. Движения и преобразования подобия. Москва: ГИТТЛ, 1955. 284 с. (Библиотека математического кружка)
10. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. Москва: Мир, 1970. 160 с.
11. Вейль Г. Симметрия. Москва: Наука, 1968. 191 с.
12. Визгин В. П. Эрлангенской программа и физика. Москва: Наука, 1975. 111 с.
13. Леднев В. С. Содержание образования. Москва: Высшая школа, 1989. 360 с.
14. Рыбаков Б. А. Язычество древних славян. Т. 1. Москва: Наука, 1981. 608 с.
15. Емельянов В. М. Стандартная модель и ее расширения. Москва: Физматлит, 2007. 584 с.
16. Schwartz M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013. 952 p.
17. Вернадский В. И. Философские мысли натуралиста. Москва: Наука, 1988. 520 с.
18. Вигнер Е. Этюды о симметрии. Москва: Мир, 1971. 318 с.
19. Леднев В. С. Классификация наук. Москва: Высшая школа, 1971. 59 с.
20. Кедров Б. М. Классификация наук. Т. I. Москва, 1961. 472 с.
21. Егоров-Тисменко Ю. К., Литвинская Г. П. Теория симметрии кристаллов: учебник для высшей школы / под ред. В. С. Урусова. Москва: ГЕОС, 2000. 410 с.
22. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. Москва: Наука, 1978. С. 240.
23. Шубников В. А. О работах Пьера Кюри в области симметрии // *Успехи физических наук*. 1956. Т. 59, вып. 4. С. 591–602.

24. Курнаков Н. С. Избранные труды. Т. 1. Москва, 1960. 596 с.
25. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Москва: Международная педагогическая академия, 1994. 680 с.
26. Волошинов А. В. Математика и искусство. Москва: Просвещение, 1992. 335 с.
27. Волошинов А. В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. Москва: Просвещение, 1993. 224 с.
28. Рыбаков Б. А. Язычество древних славян. Москва: Наука, 1981. 608 с.
29. Гапонцева М. Г., Федоров В. А. Интегративный подход в математике и естествознании как средство развития познавательной активности учащихся // Образование и наука. 2002. № 4 (16). С. 123–140.
30. Гапонцев В. А., Гапонцева М. Г. Естественнонаучное образование: соотношение научного и религиозного знания в свете принципа симметрии. Ч. 1. Содержание принципа симметрии // Образование и наука. 2015. № 4 (123). С. 4–21.
31. Гапонцев В. А., Гапонцева М. Г. Естественнонаучное образование: соотношение научного и религиозного знания в свете принципа симметрии. Ч. 2. Примеры отбора содержания общего естественнонаучного курса на основе принципа симметрии // Образование и наука. 2015. № 6 (125). С. 4–20.
32. Гапонцев В. А., Гапонцева М. Г. Принцип симметрии В. И. Вернадского // Диалог науки и религии: сборник. Екатеринбург: Екатеринбургская духовная семинария, 2018. 176 с. С. 71–79.
33. Гапонцев В. А., Гапонцева М. Г. Включение элементов религиозного содержания в естественнонаучные дисциплины // Диалог науки и религии: сборник. Екатеринбург: Екатеринбургская духовная семинария, 2018. С. 80–94.
34. Эбеллинг В. Образование структур при необратимых процессах. Москва: Мир, 1979. 280 с.
35. Гапонцев В. А., Селезнев В. Д., Гапонцев А. В. Распад равновесной межфазной границы в сплавах замещения при механосплавлении // Физика металлов и металловедение. 2017. Т. 118, № 7. С. 665–678.
36. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. Москва: Мир, 1974. 304 с.
37. Гапонцев В. А., Федоров В. А., Гапонцева М. Г. Язык описания структуры содержания образования: возможности современной математики // Педагогический журнал Башкортостана. 2018. № 5 (78). С. 75–94.
38. Gapontsev V. L., Fedorov V. A., Gapontseva M. G., Khuziakhmetov A. N. Description language of educational content structure: possibilities of modern mathematics // EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2019. № 15 (3). em1678.

## References

1. Zeer E. F. Competence-based approach to education. *Obrazovanie i nauka = The Education and Science Journal*. 2005; 3 (33): 27–40. (In Russ.)
2. Zeer E. F., Symanyuk E. E. Competence-based approach to the modernisation of vocational education. *Vysshee obrazovanie v Rossii = Higher Education in Russia*. 2005; 4: 23–30. (In Russ.)



3. Yaglom I. M. *Matematicheskie struktury i matematicheskoe modelirovanie* = Mathematical structures and mathematical modeling. Moscow: Publishing House Nauka; 1980. 227 p. (In Russ.)
4. Toynbee A. J. *Postizhenie istorii* = Comprehension of history. Translated by A. P. Ogurtsov. Moscow: Publishing House Progress; 1991. 736 p. (In Russ.)
5. Snow Ch. P. *Dve kul'tury* = Two cultures. Portraits and reflections: A collection of scientific publications. Moscow: Publishing House Progress; 1985. P. 195–226. (In Russ.)
6. Poincare A. *O nauke* = About science. Moscow: Publishing House Nauka; 1983. 560 p. (In Russ.)
7. Vizgin V. P. To the history of the “Erlangen Programme” by F. Klein. *Istoriiko-matematicheskie issledovaniya* = Historical and Mathematical Studies. 1973; 18: 218–248. (In Russ.)
8. Kargapolov M. I., Merzlyakov Yu. I. *Osnovy teorii grupp* = Basics of the theory of groups. 3<sup>rd</sup> ed. Moscow: Publishing House Nauka; 1982. 288 p. (In Russ.)
9. Yaglom I. M. *Geometricheskie preobrazovaniya* = Geometric transformations. V. 1. *Dvizheniya i preobrazovaniya podobija* = Motions and similarity transformations. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature; 1955. 284 p. (Biblioteka matematicheskogo krughka = Math Circle Library). (In Russ.)
10. Hartshorn R. *Osnovy proektivnoj geometrii* = Basics of projective geometry. Moscow: Publishing House Mir; 1970. 160 p. (In Russ.)
11. Weyl G. *Simmetriya* = Symmetry. Moscow: Publishing House Nauka; 1968. 191 p. (In Russ.)
12. Vizgin V. P. *erlangenskoj programma i fizika* = Erlangen Programme and Physics. Moscow: Publishing House Nauka; 1975. 111 p. (In Russ.)
13. Lednev V. S. *Soderzhanie obrazovaniya* = Content of education. Moscow: Publishing House Vysshaja shkola; 1989. 360 p. (In Russ.)
14. Rybakov B. A. *Jazychestvo drevnih slavjan* = Paganism of the ancient Slavs. Vol. 1. Moscow: Publishing House Nauka; 1981. 608 p. (In Russ.)
15. Emelyanov V. M. *Standartnaja model' i ee rasshireniya* = Standard model and its extensions. Moscow: Publishing House Fizmatlit; 2007. 584 p. (In Russ.)
16. Schwartz M. D. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press; 2013. 952 p.
17. Vernadsky V. I. *Filosofskie mysli naturalista* = Philosophical thoughts of a naturalist. Moscow: Publishing House Nauka; 1988. 520 p. (In Russ.)
18. Wigner E. *Jetjudy o simmetrii* = Studies on symmetry. Moscow: Publishing House Mir; 1971. 318 p. (In Russ.)
19. Lednev V. S. *Klassifikacija nauk* = Classification of sciences. Moscow: Publishing House Vysshaja shkola; 1971. 59 p. (In Russ.)
20. Kedrov B. M. *Klassifikacija nauk* = Classification of sciences. V. I. Moscow; 1961. 472 p. (In Russ.)
21. Egorov-Tismenko Yu. K., Litvinskaya G. P. *Teorija simmetrii kristallov* = The theory of crystal symmetry. Ed. by V. S. Urusov. Moscow: Publishing House GEOS; 2000. 410 p. (In Russ.)

22. Slavnov A. A., Faddeev L. D. Vvedenie v kvantovuju teoriju kalibrovochnykh polej = Introduction to the quantum theory of gauge fields. Moscow: Publishing House Science; 1978. p. 240. (In Russ.)
23. Shubnikov V. On the works of Pierre Curie in the field of symmetry. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* = *Advances in Physical Sciences*. 1956; 59, 4: 591–602. (In Russ.)
24. Kurnakov N. Izbrannye trudy = Selected Works. Vol. 1. Moscow; 1960. 596 p. (In Russ.)
25. Piaget J. Izbrannye psihologicheskie trudy = Selected psychological works. Moscow: International Pedagogical Academy; 1994. 680 p. (In Russ.)
26. Voloshinov A. V. Matematika i iskusstvo = Mathematics and art. Moscow: Publishing House Prosveshhenie; 1992. 335 p. (In Russ.)
27. Voloshinov A. V. Pifagor: sojuz istiny, dobra i krasoty = Pythagoras: The union of truth, goodness and beauty. Moscow: Publishing House Prosveshhenie; 1993. 224 p. (In Russ.)
28. Rybakov B. A. Jazychestvo drevnih slavjan = Paganism of the ancient Slavs. Moscow: Publishing House Nauka; 1981. 608 p. (In Russ.)
29. Gapontseva M. G., Fedorov V. A. Integrative approach in mathematics and natural science as a means of developing students' cognitive activity. *Obrazovanie i nauka* = *The Education and Science Journal*. 2002; 4 (16): 123–140. (In Russ.)
30. Gapontsev V. L., Gapontseva M. G. Natural science education: The relationship of scientific and religious knowledge in the light of the principle of symmetry. Part 1. The content of the principle of symmetry. *Obrazovanie i nauka* = *The Education and Science Journal*. 2015; 4 (123): 4–21. (In Russ.)
31. Gapontsev V. L., Gapontseva M. G. Natural science education: The relationship of scientific and religious knowledge in the light of the principle of symmetry. Part 2. Examples of selecting the content of a general science course based on the principle of symmetry. *Obrazovanie i nauka* = *The Education and Science Journal*. 2015; 6 (125): 4–20. (In Russ.)
32. Gapontsev V. L., Gapontseva M. G. Princip simmetrii V. I. Vernadskogo = The principle of symmetry of V. I. Vernadsky. *Dialog nauki i religii: sbornik* = *Dialogue of science and religion: Collection*. Ekaterinburg: Ekaterinburg Theological Seminary; 2018. p. 71–79. (In Russ.)
33. Gapontsev V. L., Gapontseva M. G. Vkljuchenie jelementov religioznogo sodержaniya v estestvennonauchnye discipliny = The inclusion of elements of religious content in natural sciences. *Dialogue of Science and Religion: Collection*. Ekaterinburg: Ekaterinburg Theological Seminary; 2018. P. 80–94. (In Russ.)
34. Ebeling V. Formation of structures in irreversible processes. Moscow: Publishing House Mir; 1979. 280 p. (In Russ.)
35. Gapontsev V. L., Seleznev V. D., Gapontsev A. V. Disintegration of the equilibrium interphase boundary in substitution alloys during mechanical alloying. *Fizika metallov i metallovedenie* = *Physics of Metals and Metallography*. 2017; 118, 7: 665–678. (In Russ.)
36. Dyarmati I. Neravnovesnaja termodinamika = Non-equilibrium thermodynamics. *Teorija polja i variacionnye principy* = *Field theory and variational principles*. Moscow: Publishing House Mir; 1974. 304 p. (In Russ.)

37. Gapontsev V. L., Fedorov V. A., Gapontseva M. G. Language for describing the structure of the content of education: the possibilities of modern mathematics. *Pedagogicheskij zhurnal Bashkortostana = Pedagogical Journal of Bashkortostan*. 2018; 5 (78): 75–94.

38. Gapontsev V. L., Fedorov V. A., Gapontseva M. G., Khuziakme-tov A. N. Description language of educational content structure: possibilities of modern mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 2019; 15 (3): em1678.

**Информация об авторах:**

**Гапонцев Виталий Леонидович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Российского государственного профессионально-педагогического университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: vlgap@mail.ru

**Федоров Владимир Анатольевич** – доктор педагогических наук, профессор, директор Научно-образовательного центра профессионально-педагогического образования Российского государственного профессионально-педагогического университета; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7941-7818>; Екатеринбург, Россия. E-mail: Fedorov1950@gmail.com

**Гапонцева Марина Германовна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Российского государственного профессионально-педагогического университета; Екатеринбург, Россия. E-mail: m.gapontseva@gmail.com

Статья поступила в редакцию 12.10.2018; принята в печать 13.02.2019.  
Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

**Information about the authors:**

**Vitaliy L. Gapontsev** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical and Natural Sciences, Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia. E-mail: vlgap@mail.ru

**Vladimir A. Fedorov** – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Scientific and Educational Center of Vocational and Pedagogical Education, Russian State Vocational Pedagogical University; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7941-7818>; Ekaterinburg, Russia. E-mail: Fedorov1950@gmail.com

**Marina G. Gapontseva** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical and Natural Sciences, Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia. E-mail: m.gapontseva@gmail.com

Received 12.10.2018; accepted for publication 13.02.2019

The authors have read and approved the final manuscript.