УДК 512.562

Титов Г. Н., Тимофеева В. В.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СТУПЕНЕЙ ПОЛУМОДУЛЯРНОСТИ КОНЕЧНОЙ РЕШЁТКИ

Георгий Николаевич Титов

кандидат физико - математических наук, доцент

georgii_titov@mail.ru

Вера Владимировна Тимофеева

магистрант

v.kanazirskaya@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар

ALGORITHM FOR FINDING STEPS OF SEMI-MODULAR FINITE LATTICE

Georgiy Nikolaevich Titov

Vera Vladimirovna Timofeeva

Kuban state University, Russia, Krasnodar

Аннотация. *В работе приводится с теоретическим обоснованием алгоритм нахождения ступеней верхней и нижней полумодулярности конечной решётки, которая задаётся матрицей своего частичного порядка.*

Abstract. *Algorithm for finding steps of upper and lower semi-modular finite lattice, which is set by the partial order matrix, is provided with theoretical justification in the article.*

Ключевые слова: *частично упорядоченное множество, решётка, длина максимальной цепи, ступень полумодулярности решётки.*

Keywords: *partially ordered set, lattice, maximum trail length, step of semi-modular lattice.*

Статья посвящена разработке алгоритма, позволяющего по матрице частичного порядка конечной решётки определить ступени верхней (SU) и нижней (SL) полумодулярности этой решётки.

Работа состоит из двух частей. В первой части приведены все необходимые обозначения, определения и некоторые утверждения, которые обосновывают алгоритм, а во второй части описан сам алгоритм. Приведенный в работе результат является новым.

1. Обоснование теоретических фактов, на которые опирается процесс построения алгоритма.

1.1 Общепринятые обозначения и некоторые определения.

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup N$.

n — натуральное число.

$\mathbb{N}_n = \{1,2, \dots, n\}$.

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$\mathbb{Z}_2^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_2\}$.

S_n — симметрическая группа подстановок степени n.

$\langle X, \rho \rangle$ — некоторое непустое множество X с определенным на нем бинарным отношением ρ ($\rho \subseteq X^2$). Полагаем, что $\overline{\rho} = X^2 \setminus \rho$.

Если ρ — частичный порядок на множестве X, то вместо символа ρ будем использовать символ $\leq_0$ или $\leq_1$, то есть $\langle X, \leq_0 \rangle$ — некоторое частично упорядоченное множество. Когда по тексту ясно, о каком частичном порядке на множестве X идет речь, то просто говорим, что X — частично упорядоченное множество.

Если $\langle X, \leq_0 \rangle$ — решетка и $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, то точную нижнюю грань и точную верхнюю грань для подмножества $\{x_1, x_2\}$ обозначаем $x_1 \wedge x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.

Укажем еще пять связанных с частичным порядком $\leq_0$ бинарных отношений на множестве X, которые для любых $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ определяются по правилам:

- $x_1 \geq_0 x_2 \Leftrightarrow x_2 \leq_0 x_1$,

- $x_1 <_0 x_2 \Leftrightarrow (x_1 \leq_0 x_2$ и $x_1 \neq x_2)$,

- $x_1 >_0 x_2 \Leftrightarrow x_2 <_0 x_1$,

- $x_1 \lhd x_2 \Leftrightarrow (x_1 <_0 x_2$ и для любых $x \in X$ из $x_1 \leq_0 x \leq_0 x_2$ следует, что $x = x_1$ или $x = x_2)$,

- $x_1 \rhd x_2 \Leftrightarrow x_2 \lhd x_1$.

Набор элементов $y_0, y_1, \dots, y_k \in$ X, где $k \in \mathbb{N}$ и $x_1 = y_0, x_2 = y_k$, называем максимальной цепью длины k от x_1 до x_2, если $y_0 \lhd y_1 \lhd \dots \lhd y_k$.

$d(x_2 : x_1)$, где $x_1, x_2 \in$ X и $x_1 <_0 x_2$, — максимальная длина среди длин всех максимальных цепей от x_1 до x_2.

Если $x_1 = x_2$ или $\left(x_1 \overline{\leq}_0 x_2 \text{ и } x_2 \overline{\leq}_0 x_1\right)$ при $x_1, x_2 \in$ X, то будем полагать, что $d(x_2 : x_1) = 0$.

Если ρ — некоторое бинарное отношение на множестве $\mathbb{N}_n$, то $[\rho]$ — матрица этого отношения, то есть матрица, определенная по правилу:

$$[\rho]_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \; \rho \; j \\ 0, \text{если } i \; \overline{\rho} \; j \end{cases}, \text{ для любых } i, j \in \mathbb{N}_n.$$

Приведённые выше обозначения и определения некоторых понятий известны и могут быть найдены, например, в работах [1-3, 8] однако, в этих и других источниках обозначения и одних и тех же понятий различаются, поэтому для единообразия и удобства изложения материала мы их привели в начале статьи. Теперь нам понадобятся обозначения и определения понятий, имеющих прямое отношение к результатам, изложенным в статье.

1.2 Необходимые обозначения, определения и утверждения.

Для частично упорядоченного множества $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ введем обозначения некоторых матриц, которые нам ниже понадобятся:

$\mathrm{A}_{n \times n} = [\leq_0]$;

$\mathrm{B}_{n \times n}$: $\mathrm{B}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \lhd j, \\ 0, \text{если } i \; \overline{\lhd} \; j \end{cases}$;

$C_{n \times n \times (n-1)}$: $C_{ijk} = (\mathrm{B}^k)_{ij}$;

$D_{n \times n}$: $D_{ij} = d(j : i)$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_n$ и $k \in \mathbb{N}_{n-1}$.

В случае, когда $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ — решётка, введем обозначения еще трёх матриц:

$Q_{n\times n}$: $Q_{ij} = i \wedge j, R_{n\times n}$: $R_{ij} = i \vee j$ и $F_{n\times n}$: $F_{ij} = d(i \vee j : i) - d(j : i \wedge i)$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Определение 1 [4], [5].

Конечная решётка $\langle X, \leq_0 \rangle$ называется k — верхне (k — нижне) полумодулярной ($k \in \mathbb{N}_0$), если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство:

$$d(x_1 \vee x_2 : x_1) \leq d(x_2 : x_1 \wedge x_2) + k$$
$$(d(x_1 : x_1 \wedge x_2) \leq d(x_1 \vee x_2 : x_2) + k).$$

Классы конечных k — верхне и k — нижне полумодулярных решёток обозначаем соответственно $\mathbb{M}^k$ и $\mathbb{M}_k$ [4].

Определение 2 [6], [7]. Число $k \in \mathbb{N}$ называется ступенью верхней (нижней) полумодулярности конечной решётки, если это решётка принадлежит $\mathbb{M}^k(\mathbb{M}_k)$ и не принадлежит $\mathbb{M}^{k-1}(\mathbb{M}_{k-1})$. В случае принадлежности решётки классу $\mathbb{M}^0(\mathbb{M}_0)$ полагаем, что ступень её верхней (нижней) полумодулярности равна нулю.

Для решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ ступени верхней и нижней полумодулярности обозначим SU и SL соответственно.

Утверждение 1. Пусть $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ — частично упорядоченное множество, $i, j \in \mathbb{N}_n$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда число максимальных цепей от i до j, имеющих длину k, равно числу $(B^k)_{ij}$, то есть элементу, стоящему в i-й строке и j-м столбце k-й степени матрицы $B_{n\times n}$.

Доказательство проводим индукцией по k. Пусть $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ — частично упорядоченное множество. Ясно, что $B_{ij} = 1 \Leftrightarrow i \lhd j$, а также $B_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \overline{\lhd} j$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Проверим базу индукции при $k = 1$. Надо показать, что если при $i, j \in \mathbb{N}_n$ от i до j существует ровно l максимальных цепей длины 1 (l может равняться нулю, когда таких цепей нет), то $B_{ij} = l$.

Ясно, что если $l = 0$, то есть от i до j нет максимальных цепей длины 1, то $i \overline{\lhd} j$ (так как в противном случае есть хотя бы одна максимальная цепь длины 1 от i до j вида $i = w_0 \lhd w_1 = j$), а значит $B_{ij} = 0$. Поэтому при $l = 0$ имеем $B_{ij} =$

l. Теперь рассмотрим случай, когда $l \geq 1$, то есть существует хотя бы одна максимальная цепь длины 1 от i до j. Пусть эта цепь имеет вид $i \lhd j$. Ясно, что других максимальных цепей длины 1 от i до j не может быть, то есть $l = 1$, а в силу $i \lhd j$ имеем $\mathrm{B}_{ij} = 1$. Таким образом, при $l \geq 1$ получаем $\mathrm{B}_{ij} = l$. База индукции проверена.

Предположим, что для всех $u, v \in \mathbb{N}_n$ число максимальных цепей от u до v длины $k-1$ равно $(\mathrm{B}^{k-1})_{uv}$. Нам надо доказать, что для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$ число максимальных цепей длины k от i до j равно $(\mathrm{B}^k)_{ij}$. Пусть $i, j \in \mathbb{N}_n$ и l — число максимальных цепей длины k от i до j. Покажем, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} = l$.

Рассмотрим случай, когда $l = 0$, то есть когда максимальных цепей длины k от i до j нет. Покажем, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} = 0$, то есть $(\mathrm{B}^k)_{ij} = l$. Предположим противное, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} \neq 0$. Ясно, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} > 0$. Так как имеем $(\mathrm{B}^k)_{ij} = (\mathrm{B}^{k-1} \cdot \mathrm{B})_{ij} = \sum_{s=1}^{n} (\mathrm{B}^{k-1})_{is} \cdot \mathrm{B}_{sj}$, то при некотором $s_0 \in \mathbb{N}_n$ получим, что $(\mathrm{B}^{k-1})_{is_0} \cdot \mathrm{B}_{s_0 j} \neq 0$. Поэтому $\mathrm{B}_{s_0 j} = 1$ и по предположению индукции число максимальных цепей длины $k-1$ от i до s_0 равно $(\mathrm{B}^{k-1})_{sk} > 0$, то есть существует хотя бы одна максимальная цепь длины $k-1$ от i до s_0. Тогда найдутся $w_0, \dots, w_{k-1} \in \mathbb{N}_n$ такие, что $i = w_0 \lhd w_1 \lhd \cdots \lhd w_{k-1} = s_0$ и в силу $\mathrm{B}_{s_0 j} = 1$ имеем $s_0 \lhd j$. Откуда следует, что найдется максимальная цепь вида $i = w_0 \lhd \cdots \lhd w_{k-1} \lhd w_k = j$. Так как длина этой цепи равна k, то число l максимальных цепей от i до j длины k не равно нулю. Пришли к противоречию, которое и означает, что в случае, когда $l = 0$, имеем $(\mathrm{B}^k)_{ij} = l$.

Теперь рассмотрим случай, когда $l \neq 0$. Выпишем все l различных максимальных цепей длины k от i до j:

$$\begin{array}{c} i = w_{10} \lhd w_{11} \lhd \cdots \lhd w_{1,k-1} \lhd w_{1k} = j, \\ i = w_{20} \lhd w_{21} \lhd \cdots \lhd w_{2,k-1} \lhd w_{2k} = j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i = w_{l0} \lhd w_{l1} \lhd \cdots \lhd w_{l,k-1} \lhd w_{lk} = j. \end{array} \qquad (1)$$

Среди чисел $w_{1,k-1}, \dots, w_{l,k-1}$ могут быть равные. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $w_{1,k-1} = \cdots = w_{s_1,k-1} = w_1$, $w_{s_1+1,k-1} =$

$\dots = w_{s_2,k-1} = w_2$,…, $w_{s_{q-1}+1,k-1} = \dots = w_{s_q,k-1} = w_q$, где $s_q = l$ и числа $w_1, \dots, w_q$ — попарно различны.

Тогда из условий (1) следует, что от i до w_1 существует ровно s_1 максимальных цепей длины $k-1$, от i до w_2 существует ровно $s_2 - s_1$ максимальных цепей длины $k-1$, … , от i до w_q существует ровно $s_q - s_{q-1}$ максимальных цепей длины $k-1$. По предположению индукции должны выполняться равенства: $(\mathrm{B}^{k-1})_{iw_1} = s_1$, $(\mathrm{B}^{k-1})_{iw_2} = s_2 - s_1$,…,$(\mathrm{B}^{k-1})_{iw_q} = s_q - s_{q-1}$, где $s_1, \dots, s_q$ — возрастающий набор натуральных чисел и $s_q = l$.

Также из (1) следует, что $w_1 \lhd j, w_2 \lhd j$,…, $w_q \lhd j$, а значит $\mathrm{B}_{w_1 j} = \mathrm{B}_{w_2 j} = \dots = \mathrm{B}_{w_q j} = 1$. Откуда получаем, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} (\mathrm{B}^{k-1})_{ir} \cdot \mathrm{B}_{rj} \geq (\mathrm{B}^{k-1})_{iw_1} \cdot \mathrm{B}_{w_1 j} + (\mathrm{B}^{k-1})_{iw_2} \cdot \mathrm{B}_{w_2 j} + \dots + (\mathrm{B}^{k-1})_{iw_q} \cdot \mathrm{B}_{w_2 j} = s_1 + (s_2 - s_1) + \dots + \left(s_q - s_{q-1}\right) = s_q = l$ (получая неравенство, учли, что элемент матрицы B^k и В неотрицательные, а значит все слагаемые суммы $\sum_{r=1}^{n} (\mathrm{B}^{k-1})_{ir} \cdot \mathrm{B}_{rj}$ тоже неотрицательны).

Итак, мы показали, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} \geq l$. Нам надо доказать, что $(\mathrm{B}^k)_{ij} = l$. Предположим противное, то есть $(\mathrm{B}^k)_{ij} > l$. Тогда в сумме $\sum_{r=1}^{n} (\mathrm{B}^{k-1})_{ir} \cdot \mathrm{B}_{rj}$ кроме слагаемых при $r = w_1, w_2, \dots, w_q$ найдётся ещё какое-то положительное слагаемое, например, при $r = w'$, то есть $(\mathrm{B}^{k-1})_{iw'} \cdot \mathrm{B}_{w'j} > 0$, а $w' \notin \left\{w_1, \dots, w_q\right\}$. Откуда $(\mathrm{B}^{k-1})_{iw'} > 0$ и $\mathrm{B}_{w'j} = 1$. По предположению индукции $(\mathrm{B}^{k-1})_{iw'}$ — число максимальных цепей длины $k-1$ от i до w', а также в виду $\mathrm{B}_{w'j} = 1$ имеем $w' \lhd j$. Если взять какую-то максимальную цепь длины $k-1$ от i до w' (такие цепи существуют, так как их число равно $(\mathrm{B}^{k-1})_{iw'} > 0$), а затем в силу $w' \lhd j$ мы сможем ее продлить до максимальной цепи длины k от i до j. Предпоследний элемент w' построенной цепи отличен от предпоследних элементов в цепях (1), а значит, мы построили новую не из списка (1) максимальную цепь длины k от i до j. Пришли к противоречию, которое и означает, что всё же $(\mathrm{B}^k)_{ij} = l$. Это завершает индуктивное доказательство утверждения 1.

Утверждение 2. Если $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ — частично упорядоченное множество, то $B_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (A^2)_{ij} = 2 \\ 0, \text{если } (A^2)_{ij} \neq 2 \end{cases}$, где $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Доказательство. Замечаем, что $(A^2)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} \cdot A_{lj}$.

Рассмотрим слагаемые $A_{il} \cdot A_{lj}$ $(l = 1, \ldots, n)$. Так как $A = [\leq_0]$, то имеем $A_{uv} = \begin{cases} 1, \text{если } u \leq_0 v \\ 0, \text{если } u \overline{\leq}_0 v \end{cases}$, при $u, v \in \mathbb{N}_n$. Поэтому $A_{il} \cdot A_{lj} = 1$ тогда и только тогда, когда $A_{il} = A_{lj} = 1$, то есть $i \leq_0 l$ и $l \leq_0 j$. Откуда по транзитивному свойству частичного порядка получаем $i \leq_0 j$.

Таким образом, в сумме слагаемых вида $A_{il} \cdot A_{lj}$ количество слагаемых, равных 1, равно числу таких $l \in \mathbb{N}_n$, для которых выполняется условие $i \leq_0 l \leq_0 j$. Откуда следует, что число $(A^2)_{ij}$ равно числу элементов решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$, содержащихся в отрезке $[i; j]$, то есть числу $|[i, j]|$. Заметим, что $i \lhd j$ тогда и только тогда, когда $|[i, j]| = 2$. Последнее замечание доказывает утверждение 2.

Известно, что частично упорядоченное множество $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ и $\langle \mathbb{N}_n, \leq_1 \rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдется такая подстановка $w \in S_n$, для которой выполняется условие $i \leq_0 j \Leftrightarrow w(i) \leq_1 w(j)$ для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$. Если одно из этих частично упорядоченных множеств решётка, то второе тоже. Матрицы частичных порядков A и A_1, а также матрицы точных нижних (верхних) граней $Q(R)$ и $Q_1(R_1)$ по отношениям $\leq_0$ и $\leq_1$ соответственно для любых значений $i, j \in \mathbb{N}_n$ связаны соотношениями:

$$(A_1)_{ij} = A_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)}, \quad (2)$$

$$(Q_1)_{ij} = w\left(Q_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)}\right), \quad (3)$$

$$(R_1)_{ij} = w\left(R_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)}\right). \quad (4)$$

Утверждение 3. Пусть σ_j — сумма элементов j-го столбца матрицы A $(j = 1, \ldots, n)$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — такая перестановка n символов из $\mathbb{N}_n$, что $\sigma_{t_1} \leq \sigma_{t_2} \leq$

$\dots \leq \sigma_{t_n}$. Тогда для подстановки $w = \binom{t_1\ t_2\ \dots\ t_n}{1\ \ 2\ \dots\ n}$ из группы S_n матрица A_1, полученная из A согласно равенству (2) при всех $i, j \in \mathbb{N}_n$, имеет верхне треугольный вид.

Доказательство. Согласно введенным обозначениям $A = [\leq_0]$, где $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ — частично упорядоченное множество. Если матрица A_1 получена из A согласно равенству (2), то для бинарного отношения $\leq_1$ на множестве $\mathbb{N}_n$, для которого $[\leq_0] = A_1$, $\langle \mathbb{N}_n, \leq_1 \rangle$ — тоже частично упорядоченное множество, изоморфное $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$, причём частичные порядки $\leq_0$ и $\leq_1$ связаны условием (2) для указанной в формулировке утверждения 3 подстановки w.

Теперь пусть $i, j \in \mathbb{N}_n$ и $i <_1 j$. Тогда $(A_1)_{ij} = [\leq_1]_{ij} = 1$. Согласно (2) $A_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)} = (A_1)_{ij} = 1$, а также ввиду $i \neq j$ имеем $w^{-1}(i) \neq w^{-1}(j)$. Поэтому $w^{-1}(i) <_0 w^{-1}(j)$. Для некоторых $u, v \in \mathbb{N}_n$ имеем $w^{-1}(i) = u$ и $w^{-1}(j) = v$, то есть $u <_0 v$. Это означает, что в -м столбце матрицы $[\leq_0] = A$ количество единиц должно быть меньше, чем количество единиц в её v-м столбце. Тогда $\sigma_u < \sigma_v$. Найдутся такие числа $k, l \in \mathbb{N}_n$, что $u = t_k, v = t_l$ и согласно выбору перестановки $t_1, t_2, \dots, t_n$ ещё будет выполнено условие $k < l$. Замечаем, что $i = w(u) = w(t_k) = k, j = w(v) = w(t_l) = l$, то есть $i = k, j = l$. Откуда следует $i < j$.

Таким образом, мы показали, что из $i <_1 j$ следует $i < j$. Откуда для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$ из $i \leq_1 j$ следует, что $i \leq j$. Последнее и означает, что матрица A_1 является верхней треугольной. Утверждение 3 доказано.

2. Описание алгоритма

В 1.2 мы определили для частично упорядоченного множества $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ матрицы A, B, C и D, а в случае, когда $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ — решётка, то определили еще матрицы Q, R и F.

Полагаем, что матрица $A = [\leq_0]$ известна. Опишем процесс получения матриц B, C и D в пункте 2.1, а также матриц Q и R в пункте 2.2. В пункте 2.3 мы построим матрицу F и покажем, как используя матрицу F, можно определить ступени SU верхней и SL нижней полумодулярности рассматриваемой решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$.

2.1. Зная матрицу A, находим ее квадрат A^2. Затем на местах расположения двоек пишем число 1, а на остальных местах — число 0. Согласно утверждению 2 получим таким образом из матрицы A^2 матрицу B. Затем находим степени матрицы B вида $B, B^2, \dots, B^{n-1}$.

Далее строим трехмерную матрицу $C[1..n],[1..n],[1..n-1]$, у которой k-ый горизонтальный срез $C[k]$ при $k \in \mathbb{N}_{n-1}$совпадает с матрицей B^k.

Замечаем, что в частично упорядоченном множестве $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ наибольшая из длин различных максимальных цепей не может превышать числа $n-1$. Согласно этому замечанию и утверждению 1 мы видим, что матрицы $B^n, B^{n+1}, \dots$ гарантировано являются нулевыми. Этим и объясняется ограничение третьего измерения матрицы C числом $n-1$.

Теперь перейдём к построению матрицы D, для которой $D_{ij} = d(j{:}\,i)$ при $i,j \in \mathbb{N}_n$. Для фиксированных чисел $i,j \in \mathbb{N}_n$ рассмотрим набор чисел $B_{ij}, (B^2)_{ij}, \dots, (B^{n-1})_{ij}$, то есть согласно определению матрицы C — набор чисел $C_{ij1}, C_{ij2}, .., C_{ijn-1}$. Из утверждения 1 следует, что номер k места в этом списке самого правого ненулевого числа совпадает с наибольшей длиной среди длин максимальных цепей от i до j (если в этом списке имеются ненулевые числа). Поэтому $k = d(j{:}\,i)$. Если в списке все числа равны нулю, то полагаем $d(j{:}\,i) = 0$. Эти рассуждения позволяют для любых $i,j \in \mathbb{N}_n$ находить числа $d(j{:}\,i)$, то есть позволяют окончательно построить матрицу D.

2.2. В этом пункте полагаем, что $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$, где $n \geq 2$, — решётка и также, как и в 2.1, считаем, что матрица $A = [\leq_0]$ является известной. Опишем рассуждения , позволяющие найти матрицы Q, R и F.

Найдем сумму элементов σ_j каждого j-го столбца матрицы A, где $j \in \mathbb{N}_n$. Затем выберем такую перестановку $t_1, t_2, \dots, t_n$ символов из $\mathbb{N}_n$, чтобы выполнялось условие $\sigma_{t_1} \leq \sigma_{t_2} \leq \dots \leq \sigma_{t_n}$. Согласно утверждению 3 подстановка $w = \binom{t_1\, t_2\, \dots\, t_n}{1\;\, 2\; \dots\; n}$ из S_n триангулирует матрицу A, то есть матрица A_1, полученная по правилу: $(A_1)_{ij} = A_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)}$ для всех $i,j \in \mathbb{N}_n$, имеет верхне треугольный вид. Матрица A_1 является матрицей некоторого частичного порядка $\leq_1$ на множестве $\mathbb{N}_n$ и решётка $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle \mathbb{N}_n, \leq_1 \rangle$, которое ввиду изоморфности тоже является решёткой.

Далее, обозначая в решётке $\langle \mathbb{N}_n, \leq_1 \rangle$ точную верхнюю и точную нижнюю грани каждого подмножества вида $\{i; j\}$ множества $\mathbb{N}_n$ через $i \vee_1 j$ и $i \wedge_1 j$ соответственно, строим матрицу Q_1 и матрицу R_1 по правилам: $(Q_1)_{ij} = i \wedge_1 j$ и $(R_1)_{ij} = i \vee_1 j$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Опишем процесс построения матрицы Q_1. При $i = j$, где $i, j \in \mathbb{N}_n$, очевидно, полагаем $(Q_1)_{ij} = i$. Замечаем, что ввиду $i \wedge_1 j = j \vee_1 i$ матрица Q_1 является симметричной. Поэтому достаточно описать её элемент $(Q_1)_{ij}$, где $i, j \in \mathbb{N}_n$ при условии $i < j$, а затем положить, что $(Q_1)_{ji} = (Q_1)_{ij}$. Итак, пусть $i, j \in \mathbb{N}_n$ и $i < j$. Рассмотрим строки $((A_1)_{1i}, \dots, (A_1)_{ni})$ и $\left((A_1)_{1j}, \dots, (A_1)_{nj}\right)$, являющиеся транспонированными i-ым и j-ым столбцами соответственно матрицы A_1. С помощью этих строк строим ещё одну строку, имеющую вид $\left((A_1)_{1i} \cdot (A_1)_{1j}, \dots, (A_1)_{ni} \cdot (A_1)_{nj}\right)$. Оказывается, что в силу верхней треугольности матрицы A_1 номер места самого правого ненулевого элемента в этой строке является точной нижней гранью подмножества $\{i; j\}$, то есть равен числу $i \wedge_1 j$.

Матрица R_1 строится похожим образом. При $i = j$, где $i, j \in \mathbb{N}_n$, полагаем $(R_1)_{ij} = i$. В силу симметричности матрицы R_1достаточно рассмотреть ситуацию, когда $1 \leq i < j \leq n$. Оказывается, что номер места левого ненулевого элемента в строке $\left((A_1)_{i1} \cdot (A_1)_{j1}, \dots, (A_1)_{in} \cdot (A_1)_{jn}\right)$ равен числу $i \vee_1 j$.

Итак, мы показали, как строятся матрицы точных нижних и точных верхних граней Q_1 и R_1 для решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_1 \rangle$. Теперь, используя равенства (3) и (4) в пункте 1.2, мы строим матрицы Q и R для решетки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$.

2.3. По определению матрицы F для решетки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ в пункте 1.2 имеем $F_{ij} = d(i \vee j : i) - d(j : i \vee j)$ для всех $i, j \in \mathbb{N}_n$. Но $D_{ij} = d(j : i)$, $Q_{ij} = i \wedge j$ и $R_{ij} = i \vee j$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_n$, а значит матрица F теперь после построения матриц D, Q и R может быть построена по правилу: $F_{ij} = D_{i,R_{ij}} - D_{Q_{ij},j}$, где $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Таким образом, мы построим для решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ матрицу F.

По определению ступени верхней полумодулярности SU и ступени нижней полумодулярности SL решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$ наибольший элемент матрицы F будет равен SU, а модуль наименьшего элемента матрицы F будет равен SL.

На этом завершаем описание алгоритма нахождения ступеней полумодулярности решётки $\langle \mathbb{N}_n, \leq_0 \rangle$, заданной матрицей $[\leq_0]$ своего частичного порядка.

В заключении отметим, что этот алгоритм прошёл компьютерную проверку для некоторых конечных решёток.

Для иллюстрации приведём некоторые фрагменты (рисунки 1 - 4) из окна вывода работы программы, написанной на языке PascalABC.NET по указанному выше алгоритму.

Исходная матрица A, являющаяся матрицей частичного порядка решётки $\langle \mathbb{N}_{10}, \leq_0 \rangle$ имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 1 приводится результат работы программы в ходе выполнения пункта 2.1, на рисунках 2 и 3 — пункта 2.2, на рисунке 4 — пункта 2.3 из описания алгоритма.

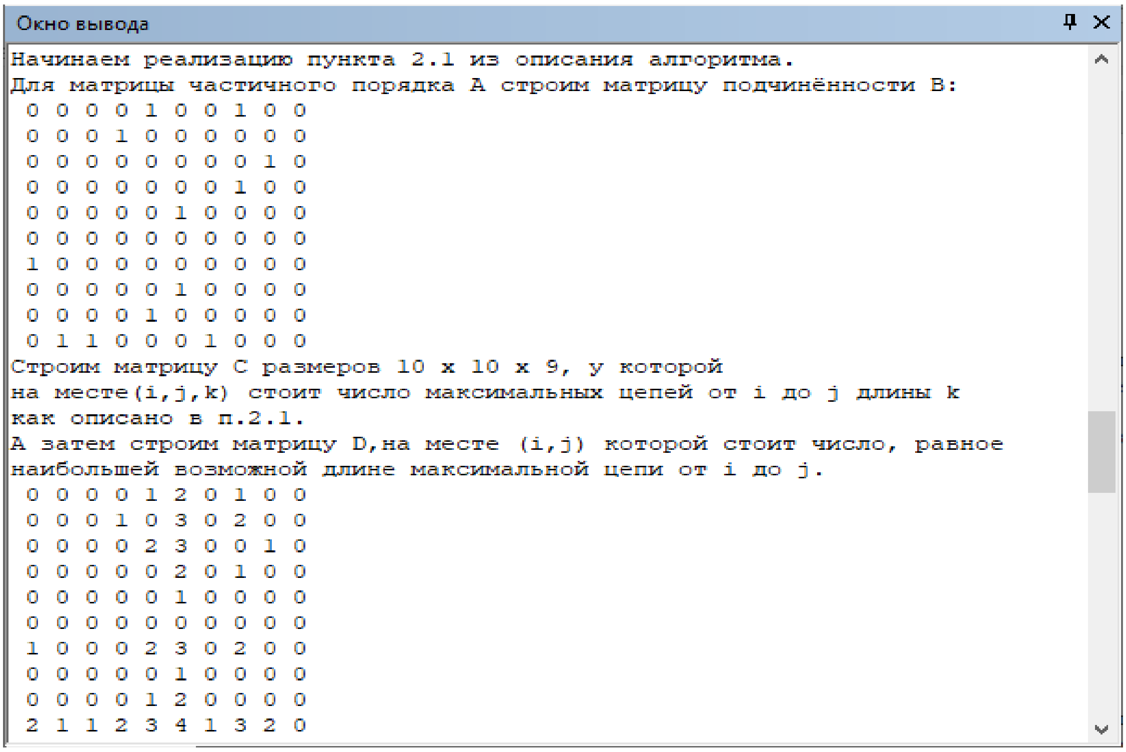

Рисунок 1 — Построение матриц B и D

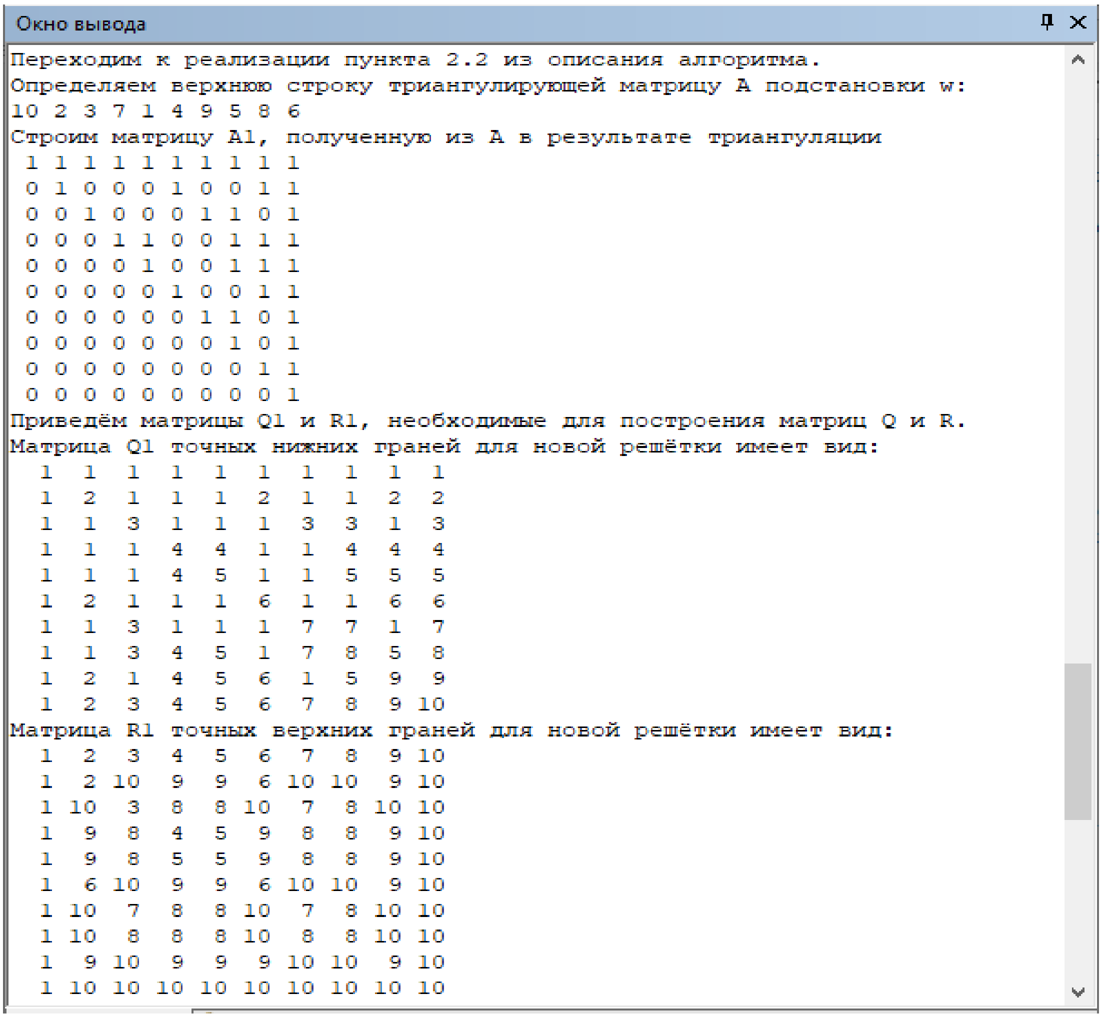

Рисунок 2 — Построение матриц A1, Q1 и R1

```
Окно вывода
Матрица точных нижних граней Q исходной решётки имеет вид:
  1 10 10 10  1  1  7  1 10 10
 10  2 10  2 10  2 10  2 10 10
 10 10  3 10  3  3 10 10  3 10
 10  2 10  4 10  4 10  4 10 10
  1 10  3 10  5  5  7  1  9 10
  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
  7 10 10 10  7  7  7  7 10 10
  1  2 10  4  1  8  7  8 10 10
 10 10  3 10  9  9 10 10  9 10
 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10
Матрица точных верхних граней R исходной решётки имеет вид:
  1  8  5  8  5  6  1  8  5 10
  8  2  6  4  6  6  8  8  6 10
  5  6  3  6  5  6  5  6  9 10
  8  4  6  4  6  6  8  8  6 10
  5  6  5  6  5  6  5  6  5 10
  6  6  6  6  6  6  6  6  6 10
  1  8  5  8  5  6  7  8  5 10
  8  8  6  8  6  6  8  8  6 10
  5  6  9  6  5  6  5  6  9 10
  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Рисунок 3 — Построение матриц Q и R

```
Окно вывода
Переходим к реализации пункта 2.3 из описания алгоритма.
Строим матрицу F:
  0  0  0 -1  0  0  0  0 -1  0
  0  0  2  0  0  0  1  0  1  0
  0  2  0  1  0  0  1  0  0  0
 -1  0  1  0 -1  0  0  0  0  0
  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0
  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
  0  1  1  0  0  0  0  0  0  0
  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0
 -1  1  0  0  0  0  0 -1  0  0
  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
Находим ступени нижней и верхней полумодулярности решётки:
SL = 1
SU = 2
```

Рисунок 4 — Построение матрицы F с указанием ступеней полумодулярности решётки

Список литературы

1. Белоусов, А. И. Дискретная математика: учебник / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 744 с.

2. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгофю. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 568 с.

3. Судзуки, М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп / М. Судзуки. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1960. – 158 с.

4. Титов, Г. Н. О разрешимости обобщенно полумодулярных конечных групп / Г. Н. Титов // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества. – 2010. – № 1. – С. 66–69.

5. Титов, Г. Н. Об одном обобщении LM-групп / Г. Н. Титов, Е. В. Сидорова // Известия Кубанского государственного университета. – 2013. – № 1. – С. 70.

6. Titov, G. N., Resulting Nilpotent Group with a Generalized Condition Of The Subgroup Lattice Emimodularity / G. N. Titov, K. S. Deinekin // British Journal of Innovation in Science and technology. – 2016. – Т. 1, № 1. – С. 41–48.

7. Титов, Г. Н. Несверхразрешимые группы с обобщенным условием полумодулярности системы подгрупп / Г. Н. Титов, Т. А. Крюкова // British Journal of Innovation in science and technology. – 2019. – Т. 4, № 1. – С. 19–24.

8. Холл М. Теория групп. / М. Холл. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. – 468 с.