УДК 378.016:[519+004]

Рожков А. В.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В КУБГУ — ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Александр Викторович Рожков

доктор физико-математических наук, профессор

great.ros.marine2@gmail.com

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар

EXPERIMENTAL MATHEMATICS IN KUBSU – THE FIRST RESULTS

Alexander Viktorovich Rozhkov

Kuban State University, Russia, Krasnodar

Аннотация. *Научно-методическая инициатива по обучению математике и информатике, реализуемая в КубГУ с 2015 г. Обучение, совмещённое с численными экспериментами в области алгебры и теории чисел: проблема Коллатца, гипотеза Гольдбаха, локальное распределение простых чисел и т. д.*

Abstract. *The scientific and methodical initiative of training in mathematics and informatics realized in KUBSU since 2015. The training combined with numerical experiments in the field of algebra and the number theory: Kollatts's problem, Goldbach's hypothesis, local distribution of prime numbers, etc.*

Ключевые слова: *Теория чисел, ОС Debian, язык программирования Julia, функция Эйлера, теория групп, проблемы Коллатца и Гольдбаха.*

Keywords: *Number theory, Debian OS, Julia programming language, Euler's function, group theory, Kollatts and Goldbach's problems.*

Статья является кратким изложением пленарного доклада, прочитанного автором 14 октября 2020 г. на конференции "Алгебра и ее приложения", посвященной 70-летию пермской алгебраической школы С.Н. Черникова.

Проект задумывался пять лет назад, как средство обучения математике и информатике одновременно. Реализует ту же идею, что и проект GeoGebra (https://www.geogebra.org/) и более масштабный образовательный проект STEM (Science, technology, engineering, and mathematics). Однако, проект годный для индивидуального применения и не требующий практически никаких ресурсов, кроме грамотности преподавателя и его энтузиазма.

Совместно со студентами и магистрантами за 5 лет опубликовано около 40 работ (половина РИНЦ), а результаты доложены на 12 конференциях федерального и международного уровня. Подготовлены заявки на гранты РФФИ и Потанина.

Основные цели проекта:

1. Выбор операционной системы. Мы остановились на ОС Debian (Debra Lynn + Ian Murdock) (https://www.debian.org), по мнению многих, системы идеально подходящей для научных и образовательных целей.

2. Выбор языка программирования. С августа 2018 г. нами используется Julia, разрабатываемая в Massachusetts Institute of Technology. Julia не сложнее Python, но работает на три порядка быстрее его, и примерно в 100 раз быстрее, чем популярный у алгебраистов GAP (http://www.gap-system.org/).

Julia позволяет не профессионалу программисту подключать код, написанный на C/C++, Fortran, Python и др. На уровне базовых возможностей работать с суперкомпьютерами и многопроцессорными системами.

Julia быстро наращивает свои возможности. Официально принятых пакетов около 5000. Последний год новый пакет добавляется примерно каждые 1-2 часа. В области алгебры и теории чисел важны пакеты Nemo, Hecke, AbstractAlgebra, LinearAlgebra, SymPy, GaloisFields.

3. Содержательные цели проекта — проведение разведочных вычислений в области алгебры и теории чисел. Таких как проблема Гольдбаха, задача Коллатца, локальное распределение простых чисел и т. д. Подобных нерешенных задач в теории чисел, понятных даже школьникам, тысячи.

Эти задачи легко программируются и, поэтому, хороши при первоначальном изучении как математики, так и информатики.

Примеры некоторых модельных задач и предварительные результаты.

№ 1. Задача 153

Заметим, что $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. Обобщим задачу

Утверждение. *Пусть* $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$ *натуральное число, и* $F(\mathrm{a}) = a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k$, *тогда при* $k = 3$ *последовательность* $\mathrm{a}, F(\mathrm{a}), \mathrm{F}^2(\mathrm{a}), \mathrm{F}^3(\mathrm{a}), ...$ *может завершиться только следующими циклами:*

4 цикла длины 1: {153}, {370}, {371}, {407}; и по 4 цикла — длины 2 и 3.

При k=2: всего один цикл {4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20};

При k=4: 5 циклов;

При k=5: 15 циклов;

При k=6: 6 циклов;

При k=7: 16 циклов — самый длинный из 93 элементов.

Тут можно варьировать и степень k и систему счисления

№ 2. Задача-шутка о числах Дьявола

Назовем число дьявольским, если $\varphi(\mathrm{n}) = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$, например, $\varphi(666) = 216 = 6 \cdot 6 \cdot 6$. Вычисления показали, что таких чисел ровно 14:

{24, 26, 87, 168, 388, 594, **666**, **1998**, 2688, 5698, 5978, 6786, 7888, 68796}

— «дьявол и его чертова дюжина». Задачу можно обобщить на любую систему счисления.

№ 3. Аддитивный аналог формулы Стирлинга

Формула Стирлинга, удивительна, она связывает самое натуральное из всех натуральных чисел — факториал $n!$, с двумя самыми знаменитыми трансцендентными числами $e = 2.71628..., \pi = 3.14...$:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Пусть n — натуральное число, а S(n)– сумма цифр его десятичной записи. Очень нетривиальный вопрос чему равна сумма $S(n!)$.

Ведем функцию F(n), которая оказалась близка к нулевой функции.

$$F(\mathrm{n}) = \frac{S(n!)}{n} - 2\ln\left(\frac{n}{2}\right) + 2.18\,.$$

Вычисления проводились до $n = 10^6$. Миллион факториал содержит примерно 5 млн. десятичных знаков, удивительно, что современные домашние компьютеры способны работать с такими числами.

Утверждение. *На отрезке [100; 10^6]:*

$$S(n!) \approx 2n\ln\left(\frac{n}{2}\right) - 2.18n\,.$$

1. *И выполняется неравенство |F(n)| < 0.001.*
2. *Математическое ожидание функции F(n) быстро стремится к 0, при n>10000 оно не превышает по модулю 10^{-5}, а при n>10^{5} модуль матожидания не превышает 10^{-6}.*
3. *Дисперсия функции F(n) при n>10^{5} не превышает 0,001.*
4. *Вероятность вхождения всех 10 цифр в запись факториала (не считая последних нулей) одинакова и равна 0.1.*

№ 4. Бинарная проблема Гольдбаха

Речь идет о знаменитой, и до сих пор не решенной проблеме, первого российского криптографа Гольдбаха:

Любое четное число n *можно представить в виде суммы двух простых чисел* n = p + q. *Такая сумма называется разложением Гольдбаха.*

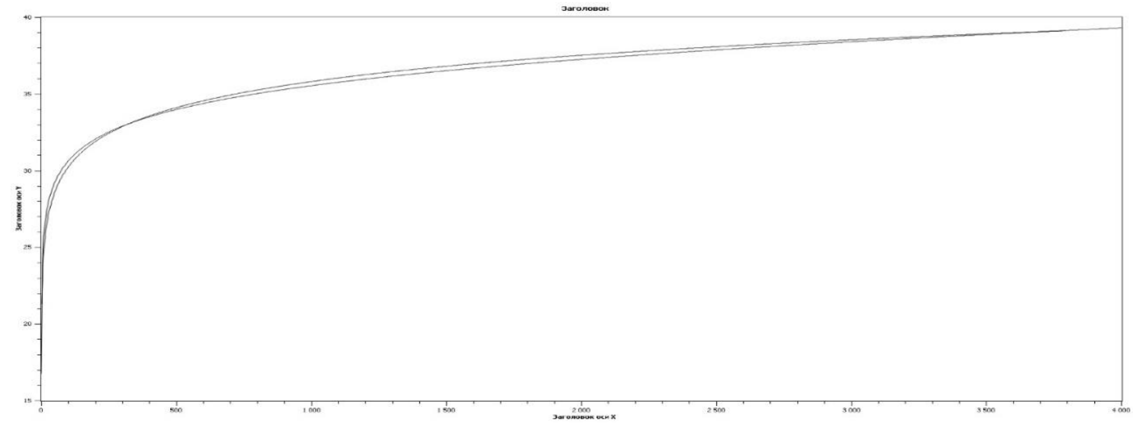

Рисунок 1 — Рост среднего значения минимального слагаемого в сумме n=p + q до 4 млрд. хорошо аппроксимируется логарифмической функцией. На рисунке изображено реальное значение минимального слагаемого и функция $\frac{5}{2}\ln(\mathrm{n}) - 16$

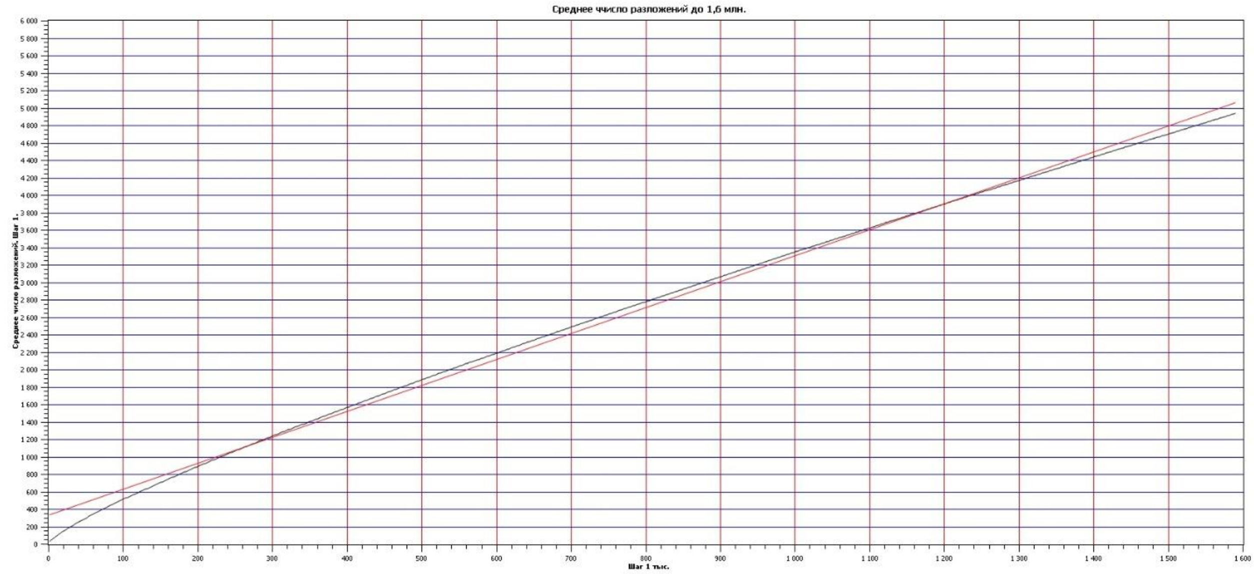

Рисунок 2 — Среднее число разложений до 1.5 млн. хорошо аппроксимируется линейной функцией. Черным выделено реальное число разложений, а красным линейная функция $0.003\cdot x+325$.

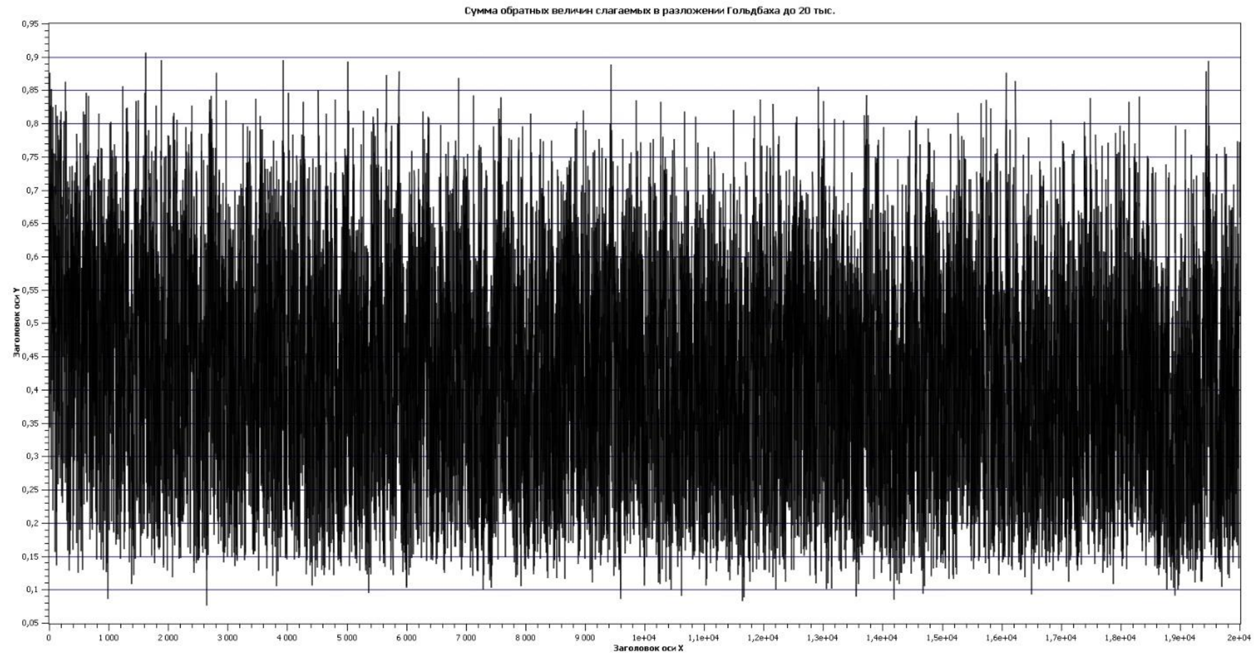

Рисунок 3 — Сумма обратных величин $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ всех разложений Гольдбаха для числа n = p +q, до n =20000.

№ 5. Проблема Коллатца

Преобразованием Коллатца назовем переход от нечетного числа “a” к нечетному числу “b”, которое получается из числа “3a+1” после его деления на максимально возможную степень числа 2.

Поскольку четное число в среднем делится на 4, то гипотеза состоит в том, что матожидание длины цепочки Коллатца числа *“a”* равно $\log_{4/3} a$.

Вычисления до n=100 000 показали, что *матожидание длины цепочки Коллатца для чисел вида* $a = 2^n - 1$ *равно* $2 \cdot \log_{4/3} a \approx 2 \cdot n \cdot \log_{4/3} 2 \approx 4.82 \cdot n$.

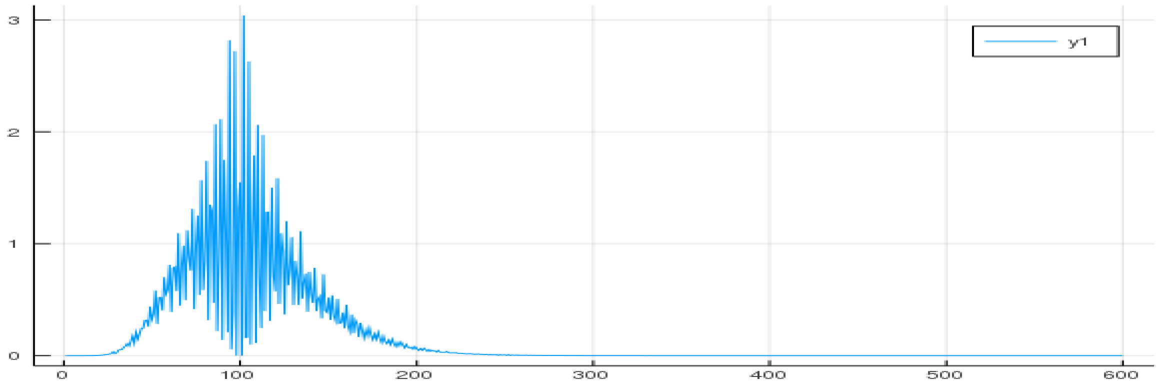

Рисунок 4 — Плотность распределения длин цепочек Коллатца, нормализованная по $\log_{4/3} n$ Здесь 100 — это 1, просто отрезок длины 6 был разбит на 600 частей.

Длина цепочки Коллатца k(n) для числа n удовлетворяет неравенству

Для $10^9 < n < 14*10^{12}$ *выполняется неравенство*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n k(\mathrm{n}) - \log_{4/3} n + 2.1 \right| < 0.01$$

Таким образом, средняя длина цепочки Коллатца числа “a” на 2.1 меньше, чем логарифм $\log_{4/3} a$.

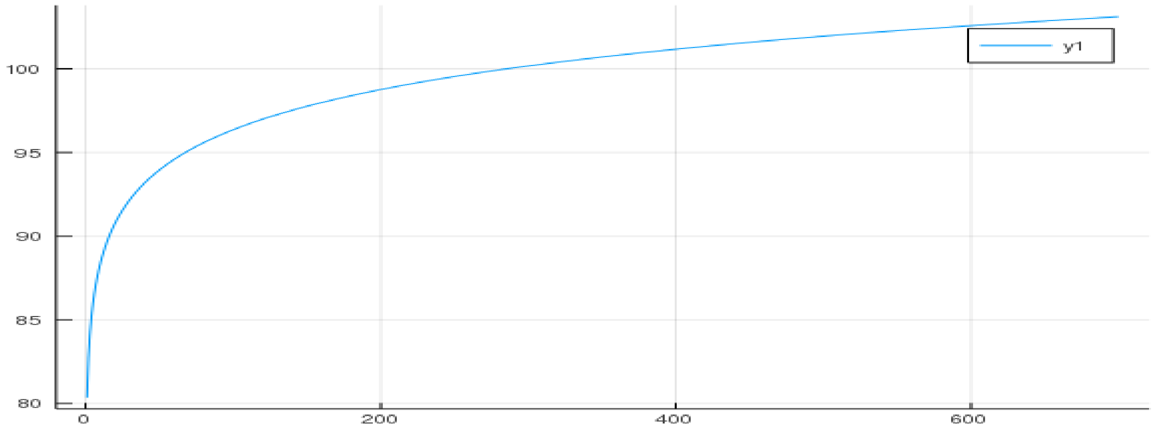

Рисунок 5 — График изменения средней длины цепочек Коллатца

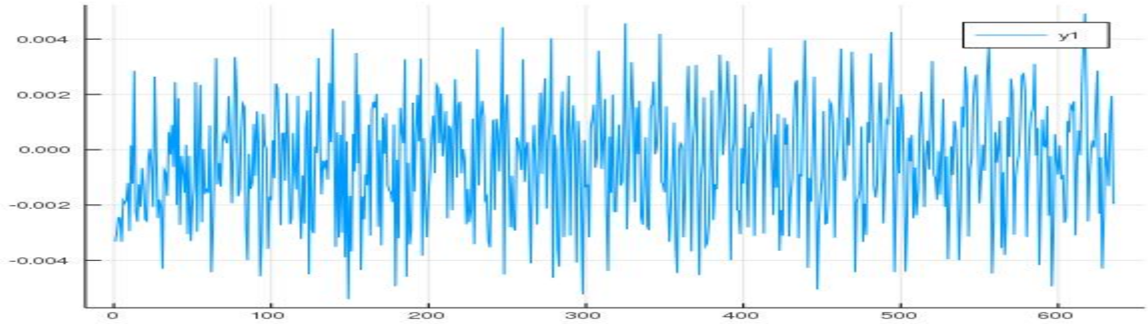

Рисунок 6 — Отклонение реальной средней длины от логарифма. Отклонение знакопеременное и лежит внутри интервала (-0.005, 0.005).

Утверждение. *До 14 триллионов максимальная длина цепочки Коллатца удовлетворяет неравенству* $\mathrm{k(a)} < 6\cdot\log_{4/3} a < 21\cdot\ln(\mathrm{a})$.

Преобразование Коллатца — *это типичная цепь Маркова, когда следующий шаг зависит только от предыдущего. Состояния — это нечетные числа, взятые по модулю 6, 18, 54, 162 и т. д.*

Если мы зафиксируем модуль, например, 54, тогда у нас возникнет 18 состояний и матрица 18×18 переходов этих состояний. Ее 3-я степень становится стационарной, у которой все строки совпадают — вот ее первая строка (записанная в две строчки из-за большого размера)

$$\frac{1}{262143}\begin{pmatrix} 9632,\ 8632,\ 2408,\ 12784,\ 23285,\ 34492,\ 6392,\ 3196,\ 1598, \\ 19264,\ 5240,\ 10480,\ 17264,\ 4816,\ 4316,\ 34528,\ 17246,\ 46570 \end{pmatrix}.$$

Видно, что некоторые остатки (состояния) встречаются в цепочках Коллатца в 30 раз чаще, чем другие. Кроме того, и четные числа (если их восстановить) далеко не все встречаются в этих цепочках. Это особый мир достойный внимательного изучения.

№ 6. Не улучшаемое уточнение теоремы Мертенса

Речь идет о классической теореме Мертенса о среднем значении функции Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(\mathrm{i}) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + r(\mathrm{n}), \mathrm{r(n)} = O(\mathrm{n}\cdot\ln(\mathrm{n}))$$

Требуется уточнить значение остаточного члена r(n).

Теорема 1. Уточнение формулы Мертенса. *Имеет место равенство*

$$
\Phi(\mathrm{n})=\sum_{i=1}^{n}\varphi(\mathrm{i})=\frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)+n\cdot s(\mathrm{n}) \qquad (1)
$$

где для всех $n<3.3*10^{12}$ *выполняется неравенство* $|s(\mathrm{n})|<0.45$.

Дальнейшее уточнение теоремы невозможно по причине, что остаточный член s(n) является знакопеременной функцией, меняющей знак через 1-2 значения.

Теорема 2. Свойства функции s(n).

1. *Функция s(n) знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно* 1.4136 *(*$\sqrt{2}\approx 1.4142$*).*

2. *Среднее положительное значение функции s(n) примерно равно* 0.1189*, отрицательное* — 0.1189.

3. *Дисперсия с точностью до 6 знака равна* 0.01986*, поэтому*

$$
\sigma=0.1409; 3\sigma=0.423.
$$

Правило трех сигм выполняется с большим запасом, за 3 сигма попадает не более, чем одно двухмиллиардное значение функции s(n).

4. *Плотность распределения вероятностей случайной величины* $s(\mathrm{n})$ *приведена на Рис. 1, с шагом 0.001 до 10 млрд. Тут же приведен график нормального распределения с матожиданием 0 и дисперсией* 0.01986.

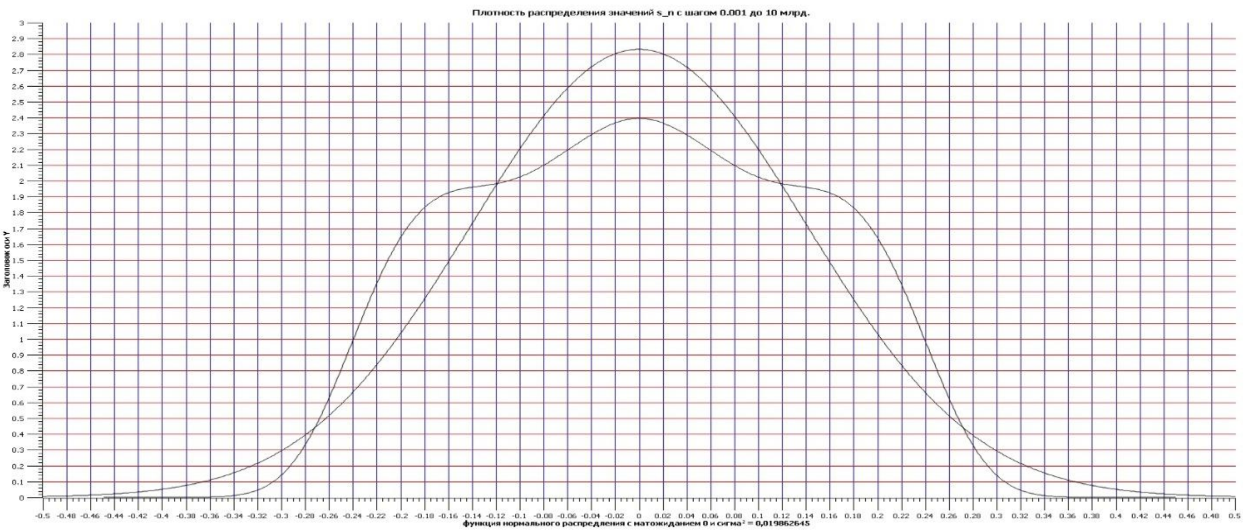

Рисунок 7 — До 10 мдрд. Плотность распределения вероятностей функции s(n) и нормальное распределение с матожиданием 0 и дисперсией 0.01986

5. *Вычислены функции* $S(n)=\sum_{i=1}^{n} s(i)$ *Рис. 2,*

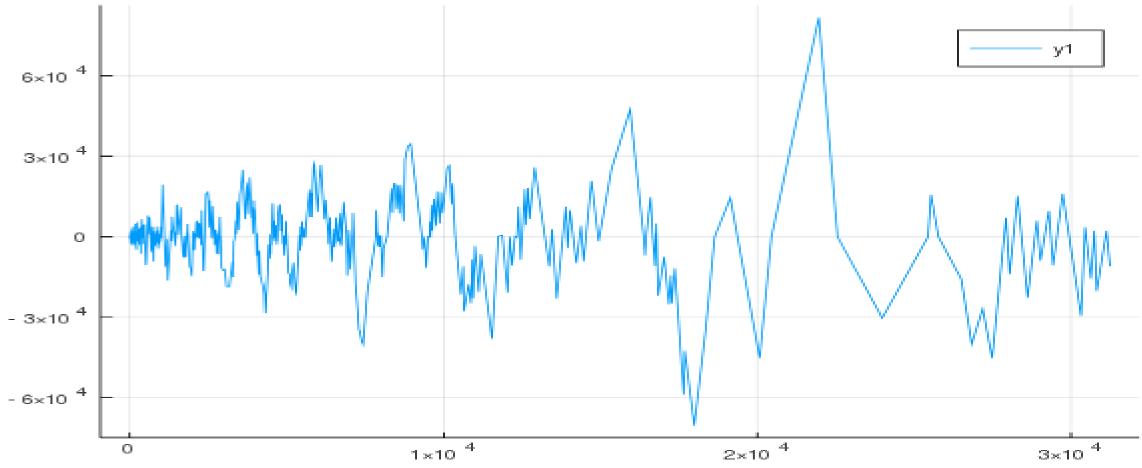

Рисунок 8 — Суммы S(n) на интервале от 1 до 3.2 трлн., шаг по оси ординат равен 100 млн., по оси абсцисс шаг равен 1.

Поведение функции суммы S(n) на рис. 8 при всей ее хаотичности, имеет важную качественную характеристику — она схожа с синусоидой, у которой возростает не только амплитуда, но и период. Можно оценить, как растут максимумы суммы S(n). Они хорошо описываются линейной функцией $y=\frac{1}{6}\cdot 10^{-7}\cdot x+18\cdot 10^{3}$, *а минимумы этой же функцией, но со знаком минус.*

6. Хотя сумма S(n), возможно, растет неограниченно (как в минус, так и в плюс), тем не менее матожидание величины s(n) колеблется около нуля и амплитуда колебаний стремительно уменьшается.

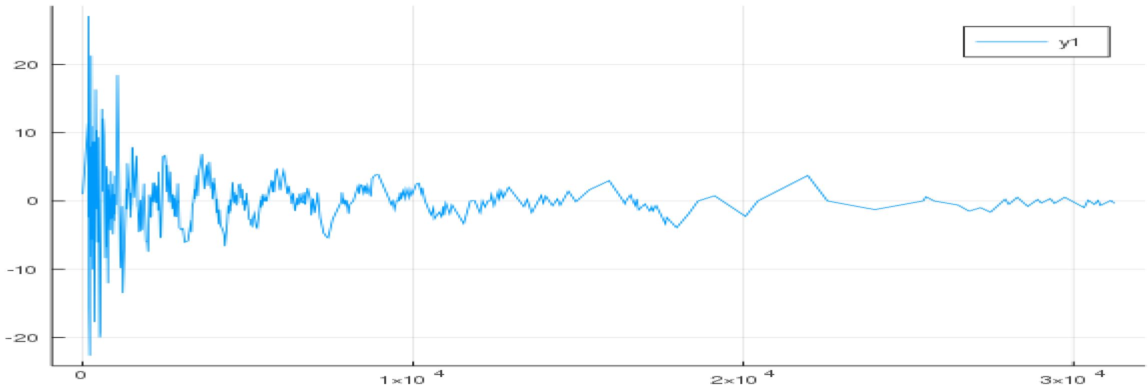

Рисунок 9 — Матожидание отклонения s(n) на интервале от 1 до 3.2 трлн. Шаг по оси ординат равен 100 млн., по оси абсцисс одна сто миллионная.

Различие масштабов 16 порядков! Это говорит о фантастической точности формулы (1).

Функция Эйлера жестко связана с разложением на простые множители. Рис. 1 говорит о том, что “локально простые числа распределены случайно”.

Возможно, что на бесконечности логарифм в оценке остаточного члена в ней все же есть.

Гипотеза. О поведении функции s(n) из теоремы 1 на бесконечности.

При $n > 10^9$ *имеет место неравенство*

$$|\,\mathrm{s(n)}\,| < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\ln(n)}{100}\right),$$

при этом значение большее по модулю, чем $0.42 + 0.01 \cdot m$ *функция* s(n) *принимает не чаще, чем для одного числа из* 10^{9+m}, *где m — натуральное число.*

Список литературы

1. *Рожков, А. В.* Уточнение теоремы Мертенса о среднем значении функции Эйлера / А. В. Рожков. Текст: непосредственный // Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии, Казань, 04–06 ноября 2017 г.: материалы семинара, школы и конференции. Казань: Акад. наук Респ. Татарстан, 2017. С. 223–230.

2. *Рожков, А. В.* Экспериментальная теория чисел. Проблема Коллатца / А. В. Рожков. Текст: электронный // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, Красноярск, 12–13 ноября 2020 г. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 39–42. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44398037&pf=1.