

Компьютер прочно занял свое место практически во всех сферах человеческой деятельности. Пройдя долгий эволюционный путь, он стал почти универсальным средством, без которого немислимы теперь все современные пути развития как науки и техники, так и жизни в целом. Применение ЭВМ простирается от сложных инженерных расчетов, автоматизации управления различными технологическими процессами, анализа больших объемов данных и до применения в искусстве, археологии, истории и других науках. Однако первым и по важности, и в исторической хронологии является назначение компьютера для эффективного использования в нуждах прикладной математики и физики.

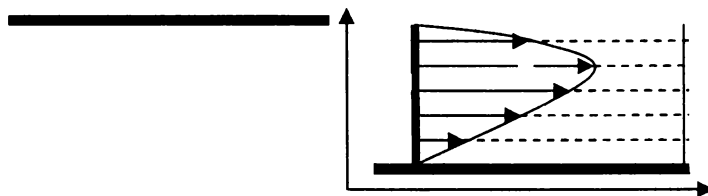
На ранних стадиях для осуществления вычислительных экспериментов и моделирования от исследователей требовалось знание того или иного языка программирования, т.к. не существовало встроенных готовых подпрограмм, осуществлявших тот или иной алгоритм. Однако эта ситуация стала меняться с начала 80-х годов с появлением первых математических пакетов — специализированных программных продуктов, предназначенных для научных и инженерных расчетов. С этого времени стали производиться исследования, не получавшие раньше развития и широкого применения из-за непреодолимых трудностей, носивших, как правило, технический характер. В настоящее время на рынке программных продуктов существует множество математических программ, соответствующих различным потребностям.

Однако такая большая популярность некоторых приложений имеет и отрицательные стороны. Она порождает среди разработчиков программного обеспечения достаточно жесткую конкуренцию, в условиях которой происходит подавление небольших компаний, что заставляет их присоединяться к ведущим мировым производителям, усиливая и укрупняя последних. Анализ ситуации показывает, что использование такого ПО не всегда оправдывается как по экономическим, так и по качественным соображениям. Кроме того, лицензионное программное обеспечение стоит достаточно дорого, а ввиду отсутствия (или слабой) конкуренции альтернативу этому обеспечению иногда подобрать трудно. Для устранения наблюдаемого перекоса на рынке программ появляется большое число продуктов «сторонних» разработчиков, которые могут распространять свое ПО как в условно-бесплатной форме, так и абсолютно бесплатно. Ввиду этого в настоящее время стала наблюдаться положительная динамика в области перехода на бесплатные (или свободные) программные продукты. Например, спрос на альтернативное математическое ПО продиктован не только указанными причинами, но и, например, избыточной функциональностью — для учебного процесса не требуются столь мощные программы, упомянутые выше — более половины их возможностей никак не используется. Таким образом, излишняя перегруженность отдельных предлагаемых решений начинает преобладать над универсальностью. Хотя не стоит упускать и тот факт, что некоторые бесплатные (или свободные) программные продукты могут и превосходить по функционалу коммерческие версии.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые с помощью альтернативных вычислительных систем, делая вначале, как принято, краткую математическую постановку задачи, а затем ее решение на ЭВМ.

В гидромеханике часто встречаются задачи на движение жидкости по различным каналам и трубам. Для решения подобных задач используется широко распространенный метод конечных элементов (МКЭ). С математическими основами этого метода можно ознакомиться в книге [2], а более общие сведения о МКЭ изложены в [3].

Исследуем, например, задачу о ламинарном движении жидкости [1, с.158] с использованием МКЭ. Пусть водный раствор глицерина движется по узкому каналу (см. рис.):



Температура у верхней стенки поддерживается постоянно при 50°C, а нижняя — при 20°C. Значения плотности и вязкости данного раствора приводятся в зависимости от температуры в табл. 1. Кроме того, известно, что градиент давления постояен по всему каналу и равен 120 Па/м. Геометрические размеры канала — длина 3 м, ширина 40 см, высота 9 см. Требуется определить профиль скоростей жидкости и ее расход в единицу времени.

Табл. 1. Зависимость вязкости и плотности раствора от температуры

Температура, °С	Вязкость, кг/м · с	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
20	0,90	1255
25	0,65	1253
30	0,40	1250

35	0,28	1247
40	0,20	1243
45	0,12	1238
50	0,10	1233

Ламинарное течение жидкости с постоянной внутри канала вязкостью основано на балансе сил, вызывающих сдвиг слоев друг относительно друга и противодействующего им градиента давления на каждый элементарную частицу жидкости. Это может быть записано в следующем виде:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями  $u(0) = 0$  и  $u(h) = 0$ . Здесь  $u$  — скорость жидкости,  $\mu$  — ее динамическая вязкость, слагаемое  $\frac{dp}{dx}$  выражает градиент давления в направлении движения жидкости.

Вязкость рассматриваемого раствора изменяется с высотой, поэтому, в соответствии с МКЭ, разобьем канал по высоте на семь конечных элементов. Для дальнейших расчетов матриц сопротивления потребуются осредненные значения вязкости и плотности для каждого элемента. Эти значения даны в таблице 2.

Табл.2. Осредненные параметры для каждого элемента.

Элемент	Средняя вязкость, кг/м · с	Средняя плотность, кг/м <sup>3</sup>
1	0,775	1254
2	0,525	1252
3	0,34	1249
4	0,24	1245
5	0,16	1241
6	0,11	1236

Используя данные табл.2, составим матрицы сопротивления для каждого элемента:

$$[K]^{(1)} = \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{0.775}{1.5 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.67 & -51.67 \\ -51.67 & 51.67 \end{bmatrix} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{0.525}{1.5 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & -35 \\ -35 & 35 \end{bmatrix} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$[K]^{(3)} = \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{0.340}{1.5 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.67 & -22.67 \\ -22.67 & 22.67 \end{bmatrix} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$[K]^{(4)} = \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{0.240}{1.5 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$[K]^{(5)} = \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{0.160}{1.5 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.67 & -10.67 \\ -10.67 & 10.67 \end{bmatrix} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$[K]^{(6)} = \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{0.110}{1.5 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.33 & -7.33 \\ -7.33 & 7.33 \end{bmatrix} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

Матрицы  $[K]$  отражают первое слагаемое уравнения (1) на каждом элементе. Второе слагаемое также нужно представить в матричном виде. Так как градиент давления по условию постоянен, то для каждого из элементов матрица для второго слагаемого на каждом элементе будет одинакова:

$$[F]^{(1)} = \dots = [F]^{(6)} = \frac{-\frac{dp}{dx} L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-(-120)(1.5 \times 10^{-2})}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix} \frac{N}{m^2}$$

Отрицательные значения в матрицах сопротивления объясняются уменьшением давления по направлению движения жидкости. Таким образом, получим общую матрицу сопротивления:

$$[K]^{(G)} = \begin{bmatrix} 51.67 & -51.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -51.67 & 51.67+35 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 35+22.67 & -22.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22.67 & 22.67+16 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 16+10.67 & -10.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10.67 & 10.67+7.33 & -7.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.33 & 7.33 \end{bmatrix}$$

Аналогично находится общая матрица для второго слагаемого:

$$[F]^{(G)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9+0.9 \\ 0.9+0.9 \\ 0.9+0.9 \\ 0.9+0.9 \\ 0.9+0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

Добавляя граничные условия, окончательно получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -51.67 & 86.67 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 57.67 & -22.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22.67 & 38.67 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 26.67 & -10.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10.67 & 18 & -7.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8 \\ 1.8 \\ 1.8 \\ 1.8 \\ 1.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решая получившуюся систему с трехдиагональной матрицей, получим распределение скоростей:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1233 \\ 0.2538 \\ 0.3760 \\ 0.4366 \\ 0.3588 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

Остается теперь рассчитать расход жидкости — он будет равен суммарному значению расходов, полученных для каждого элемента.

$$M = \sum_k m^{(k)}, \quad (2)$$

$$m^{(k)} = \int_{y_i}^{y_j} \rho u W dy = \int_{y_i}^{y_j} \rho W (S_i u_i + S_j u_j) dy = \rho W L \left( \frac{u_i + u_j}{2} \right), \quad (3)$$

где  $W$  — ширина канала. Таким образом, имеем:

$$m^{(1)} = \rho W L \left( \frac{u_i + u_j}{2} \right) = 1254 \times 0.4 \times 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{0 + 0.1233}{2} = 0.4638 \text{ kg/s}$$

$$m^{(2)} = 1252 \times 0.4 \times 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{0.1233 + 0.2538}{2} = 1.4164 \text{ kg/s}$$

$$m^{(3)} = 1249 \times 0.4 \times 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{0.2538 + 0.3760}{2} = 2.3598 \text{ kg/s}$$

$$m^{(4)} = 1245 \times 0.4 \times 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{0.3760 + 0.4366}{2} = 3.0350 \text{ kg/s}$$

$$m^{(5)} = 1241 \times 0.4 \times 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{0.4366 + 0.3588}{2} = 2.9612 \text{ kg/s}$$

$$m^{(6)} = 1236 \times 0.4 \times 1.5 \times 10^{-2} \times \frac{0.3588 + 0}{2} = 1.3304 \text{ kg/s}$$

$$M = 11.566 \text{ kg/s}$$

Таким образом, поставленная задача решена полностью.

Большое количество задач требует иллюстрации того или иного полученного решения. Это в значительной степени относится к уравнениям математической физики и математическому моделированию различных физических процессов и явлений. В качестве примера рассмотрим одно из важнейших уравнений — уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (4)$$

где  $u = u(x, y)$  — функция двух переменных. Уравнениями такого типа описывается все многообразие стационарных полей различной физической природы — электрических, магнитных, тепловых [4, 5]. Если на границе некоторой прямоугольной области  $a \times b$  задать условия

$$u(\pm a, y) = 0, -b \leq y \leq b, \\ u(x, \pm b) = f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), -a \leq x \leq a, \quad (5)$$

то получим т.н. первую краевую задачу или задачу Дирихле. Из курса математической физики известно аналитическое решение этой задачи. Оно имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cosh \frac{(2n+1)\pi y}{2a}, \quad (6)$$

где коэффициенты  $A_n$  даются формулой

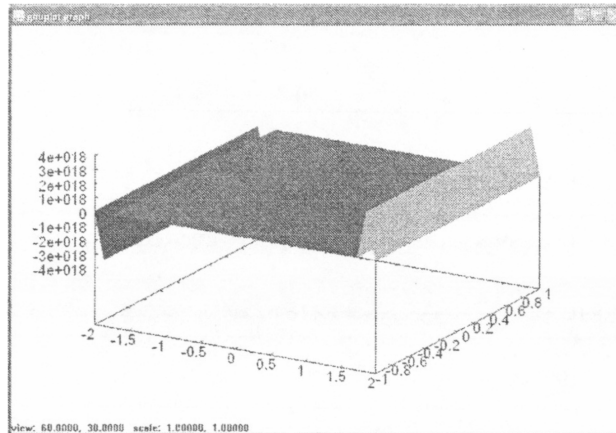
$$A_n = \frac{1}{a \cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \int_{-a}^a f(\xi) \cos \frac{(2n+1)\pi \xi}{2a} d\xi}, \quad (7)$$

Построим, используя систему компьютерной математики Mathematica, трехмерный график указанного решения, приняв  $a = 2, b = 1, n = 50$ :

```
(%i1)
trigsimp(a(n):='(integrate(cos(%pi*x/2)*
cos((2*n+1)*%pi*x/4), x, -2, 2))/(2*cosh(2*n+1)*%pi*x/4));
(16 n - 8) sin(2 %pi n + 3 %pi) + (16 n + 24) sin(2 %pi n - %pi)
(%o1) a(n):=-----
(4 %pi^2 n^2 + 4 %pi^2 n - 3 %pi^2) cosh(2 n + 1) x

(%i2)
sum(a(n)*cos((2*n+1)*%pi*x/4)*cosh((2*n+1)*%pi*x/4),
n, 1, 50), simpsum;

(%i3) plot3d(% , [x,-2,2], [y,-1,1], [plot_format,gnuplot],
[gnuplot_preamble, "set pm3d at s; unset surf;
unset colorbox"])$
```



Таким образом, в данном сообщении были кратко рассмотрены основные практические функциональные возможности применения некоторых вычислительных сред.

Анализируя возможности, предоставляемые бесплатными математическими программами, можно убедиться, что они по своим функциональным показателям не уступают популярным вычислительным системам.

#### Литература

1. Моавени С. Finite element method. Theory and analysis with ANSYS (PH, 1999)
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. М.:Наука, 1972.
5. Ferdinand F. Cap. Mathematical methods in physics and engineering with MATHEMATICA. CRC Press Company, Florida, 2003.