статей и методических рекомендаций по материалам Всероссийской научно-практической конференции, Иваново, 29 марта 2019 г. Иваново: Изд-во Иван. гос. ун-та, 2019. С. 95–102.

21. *Маякова, А.В.* Реальные и потенциальные риски проекта «Российская электронная школа» / А. В. Маякова, Е. Б. Семенихина. Текст: непосредственный // Вызовы новой реальности в образовании и науке: сборник научных статей Международной научно-практической online-конференции, Курск, 20 мая 2020 г. Курск: Изд-во Юго-Зап. гос. ун-та, 2020. С. 122–125.

УДК 51.7
DOI:10.17853/2587-6910-2021-04-109-113

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ ФОРМАЛИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

INFORMATION SYSTEMS IN PROBLEMS OF FORMALIZATION OF GEOMETRIC PHASE TRANSITIONS

Александр Иванович Ходанович
доктор педагогических наук, профессор
akhodanovich@yandex.ru
ФГОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный институт кино и телевидения», Санкт-Петербург, Россия

Alexander Ivanovich Khodanovich
Saint-Petersburg State Institute of Film and Television, Saint-Petersburg, Russia

Ирина Викторовна Сорокина
кандидат педагогических наук, доцент
sorokinair2011@yandex.ru
ФГОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный институт кино и телевидения», Санкт-Петербург, Россия

Irina Viktorovna Sorokina
Saint-Petersburg State Institute of Film and Television, Saint-Petersburg, Russia

Аннотация. *Рассматриваются задачи моделирования и формализации геометрических фазовых переходов в теории перколяции с использованием современных систем программирования и математических пакетов. Приводятся результаты прецизионных вычислений порога перколяции для квадратной решетки и иллюстрации статистической обработки данных в критической области.*

Abstract. *The article deals with the problems of modeling and formalization of geometric phase transitions in percolation theory using modern programming systems and mathematical packages. The results of precision calculations of the percolation threshold for a square lattice and illustrations of statistical data processing in the critical region are presented.*

Ключевые слова: *информационная система, формализация, перколяция, геометрический фазовый переход.*

Keywords: *information system, formalization, percolation, geometric phase transition.*

В статье рассматриваются задачи моделирования и формализации геометрических фазовых переходов в теории перколяции с использованием современных систем программирования и математических пакетов. На примере задачи о перколяции вводятся понятия, относящиеся к теории протекания и критическим явлениям, например, понятие «геометрический фазовый переход». Теория протекания (перколяции теория, от лат. *percolatio* — процеживание; просачивания теория) — это теория изучения процессов, происходящих в неоднородных средах со случайными свойствами. Она возникла в 1957 г. в результате публикации работ J. Hammersley. В теории протекания различают решеточные задачи теории протекания, вероятностно-клеточные автоматы (методы Монте-Карло в дискретном поле), континуальные задачи и так называемые задачи на случайных узлах [1].

Известные американские физики B. Watson и P. Leath провели важный исторический опыт в 1974 г., в котором они использовали обычную экранную сетку. Сетка имела квадратную форму и содержала 137 × 137 узлов с расстоянием несколько миллиметров между соседними узлами. К двум противоположным концам сетки были припаяны два электрода. В опыте определялся критический параметр разрыва цепи (появления соединяющего кластера на квадратной решетке) (рис. 1) [2].

Отметим, что в качестве проводящей среды может выступать любое устройство или целая сеть устройств. Обыкновенная электрическая плата является проводящей средой для электричества, а радиоэлементы на ней – это проводящие узлы. Зависимость функционирования всей платы от функционирования отдельных элементов является одной из прикладных задач о перколяции. Компьютерная сеть любых масштабов представляет собой проводящую среду для информации, а доступ одного компьютера к другому определяется функционированием промежуточных компьютеров-узлов.

Изучение геометрических фазовых переходов не требует обширных познаний квантовой или статистической физики. В самом деле, все, что требуется, ограничивается некоторыми понятиями геометрии и теории вероятностей. Главной притягательной силой геометрических фазовых переходов является их интуитивная простота. С другой стороны, знание основ физики фазовых переходов позволяет использовать такие важные представления, как «мас-

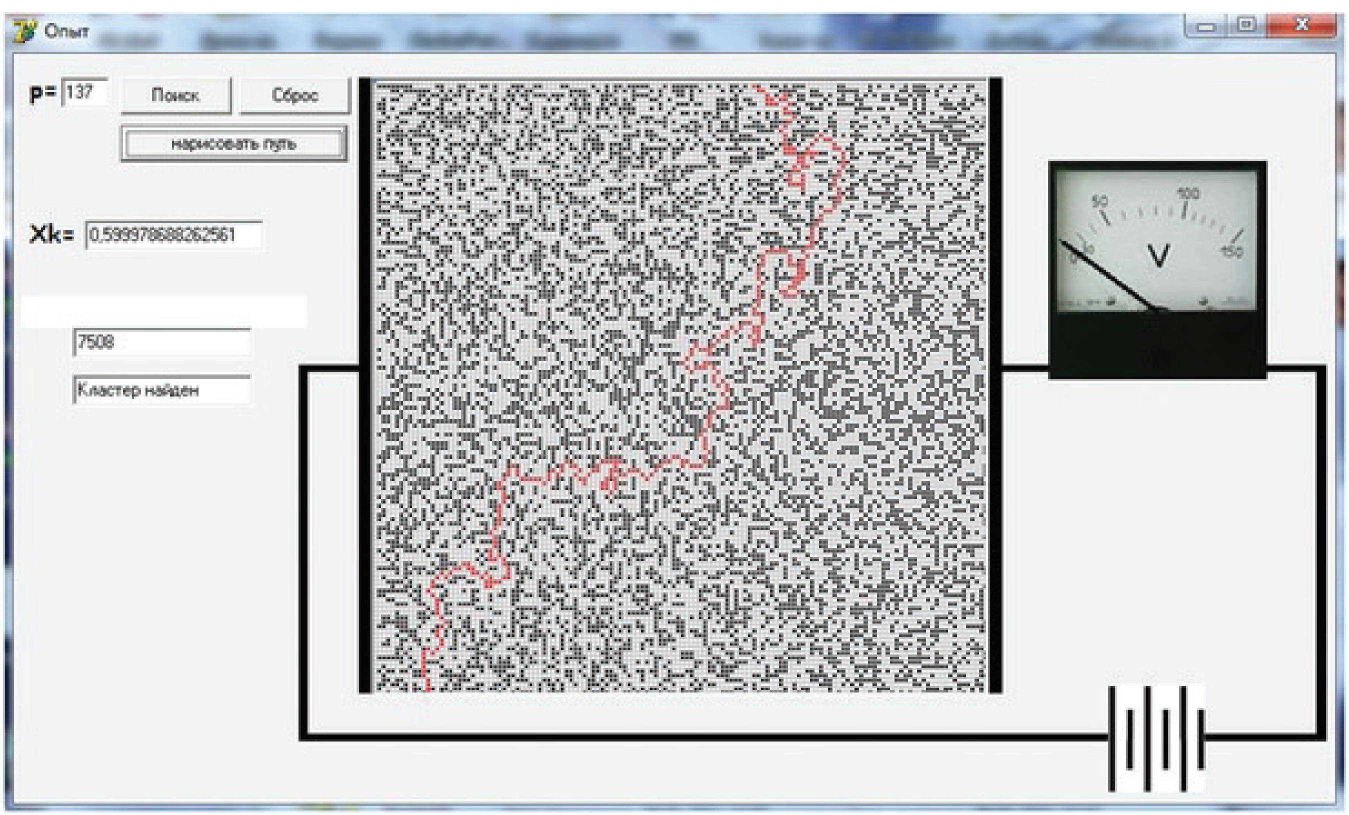

Рис. 1. Компьютерная модель перколяционного процесса в среде Delphi

штабирование», «критические показатели» и «ренорм-группа».

Представим шахматную доску как квадратную решетку и предположим, что каждый квадрат (или ячейка) может находиться в двух состояниях: «занято» или «пусто». Данная модель называется *ячеечной* перколяцией. Занятые ячейки либо изолированы друг о друга, либо образуют группы, состоящие из ближайших соседей. Определим *кластер* как группу занятых ячеек решетки, связанных с ближайшим соседом по стороне ячейки (рис. 2).

Одним из способов изучения процесса перколяции является метод Монте-Карло с генератором случайных чисел [3]. Алгоритм сводится к тому, чтобы сгенерировать случайное число, а затем занять ячейку решетки, если случайное число меньше некоторого параметра. Эта процедура выполняется для каждой ячейки решетки. Если вероятность p~1, то ожидается, что большинство занятых ячеек образуют один большой кластер, который протянется от одной стороны решетки до другой (см. рис. 2). О таком кластере говорят, что он «перекидывается» через решетку, и называется соединяющим или перколяционным кластером, причем, в пределе бесконечной решетки существует вполне определенная «пороговая» вероятность или порог перколяции p_c для появления соединяющего кластера. Для $p \geq p_c$ существует один соединяющий кластер, или путь; для $p<p_c$ нет ни одного соединяющего кластера и все кластеры конечны.

Следует подчеркнуть, что характерной особенностью, присущей перколяции, является связность. Поскольку связность обнаруживает качественное изменение при конкретном значении некоторого параметра, который можно менять непрерывно, переход в состояние с одним соединяющим кластером представляет собой геометрический фазовый переход. Приложения явлений протекания относятся к переходам металл-изолятор и проводимости электрической сетки (случайная резисторная цепь), а также магнитам, содержащим примеси.

Рассмотрим квадратную решетку с определенным числом ячеек и присвоим каждой ячейке этой решетки случайные числа от нуля до единицы. Ячейка занимается, если присвоенное ей случайное число меньше p .

Поскольку нам необходимо применить правило «протекания» для конечной решетки, мы определим $p_c(n)$ как среднее значение p , при котором впервые появляется соединяющий кластер. Для конечной решетки вычисленное значение зависит от критерия протекания. Соединяющий путь может связывать решетку либо в горизонтальном, либо в вертикальном направлении. Любые граничные условия должны приводить к одному и тому же экстраполированному значению с помощью конечномер-

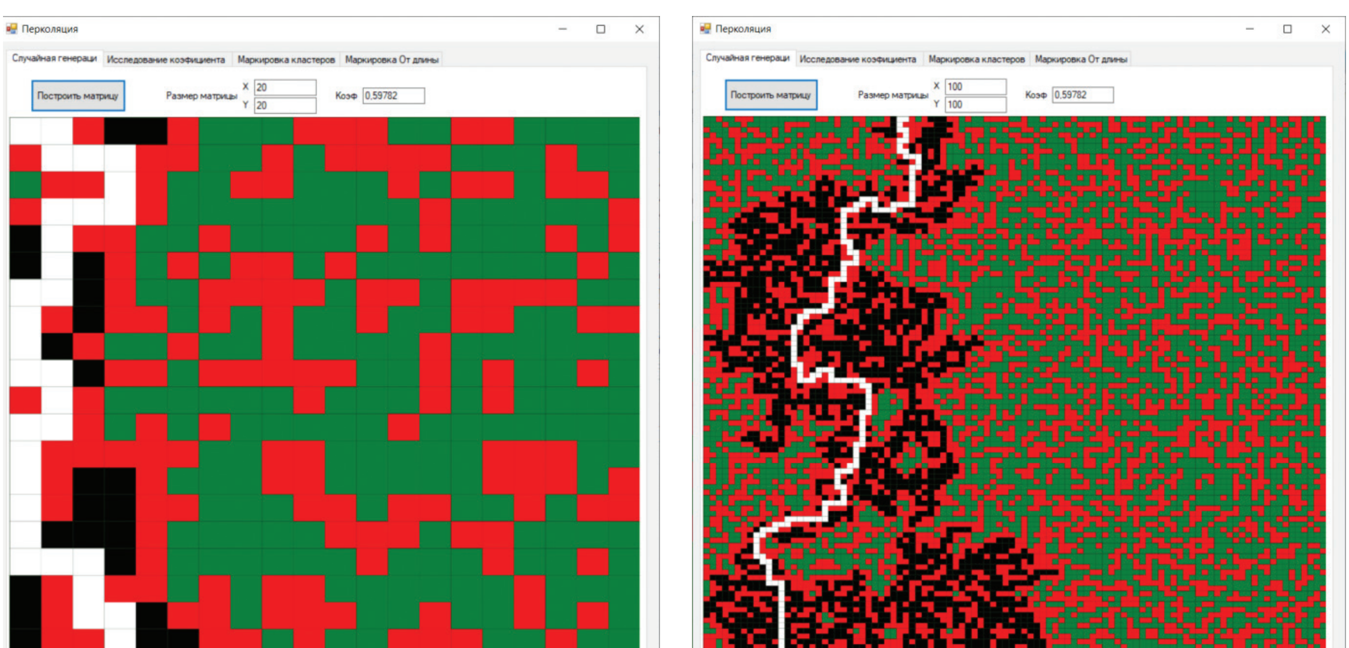

Рис. 2. Вероятностно-клеточный автомат на языке С++

ного масштабирования, т. е. $p \to p_c$=0.5927 при $n \to \infty$ Получено приближенное значение порога протекания для квадратной решетки с точностью до 10 % [1].

Современный компьютерный эксперимент позволяет проводить прецизионные вычисления со статистической обработкой данных в критической области, т. е. в малой окрестности порога перколяции (рис. 3).

Воспользуемся аналогией измерения некоторой физической величины в натурном эксперименте и вычислений в компьютерном эксперименте с вероятностно-клеточными автоматами [4].

В математической статистике по данным выборки можно построить случайную величину

$$T = \frac{< X > - a}{S / \sqrt{n}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы; здесь $< X >$ – выборочная средняя, S – среднее квадратичное отклонение, п – объем выборки. Плотность распределения Стьюдента

$$S(t,n) = B_n (1 + \frac{t^2}{n-1})^{-n/2},$$

где

$$B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma((n-1)/2)}.$$

Заметим, что $\Gamma(n+1)=n!$, поэтому вводить Γ-функцию можно, не прибегая к определению спецфункции.

Из предельных соотношений

$$Lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad Lim_{n\to\infty} (1 + \frac{t^2}{n-1})^{-n/2} = e^{-t^2/2}$$

следует, что при неограниченном возрастании объема выборки распределение Стьюдента стремится к нормальному закону. Мы видим, что распределение Стьюдента определяется параметром п – объемом выборки (или числом степеней свободы k = n – 1) и не зависит от неизвестных параметров a и σ. Поскольку S(t, n) – четная функция от t, вероятность осуществления неравенства

$$\left| \frac{< X > - a}{S / \sqrt{n}} \right| < \gamma$$

определяется следующим образом:

$$P(\left| \frac{< X > - a}{S / \sqrt{n}} \right| < t_\gamma) = \int_0^{t_\gamma} S(t,n) dt = \gamma / 2.$$

Итак, пользуясь распределением Стьюдента, находим доверительный интервал

$$(< x > - t_\gamma s / \sqrt{n} < a < \ x > + t_\gamma s / \sqrt{n}) = \gamma,$$

покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ . Здесь

$$s = \sqrt{\frac{(x_i - < x >)^2}{n-1}}$$

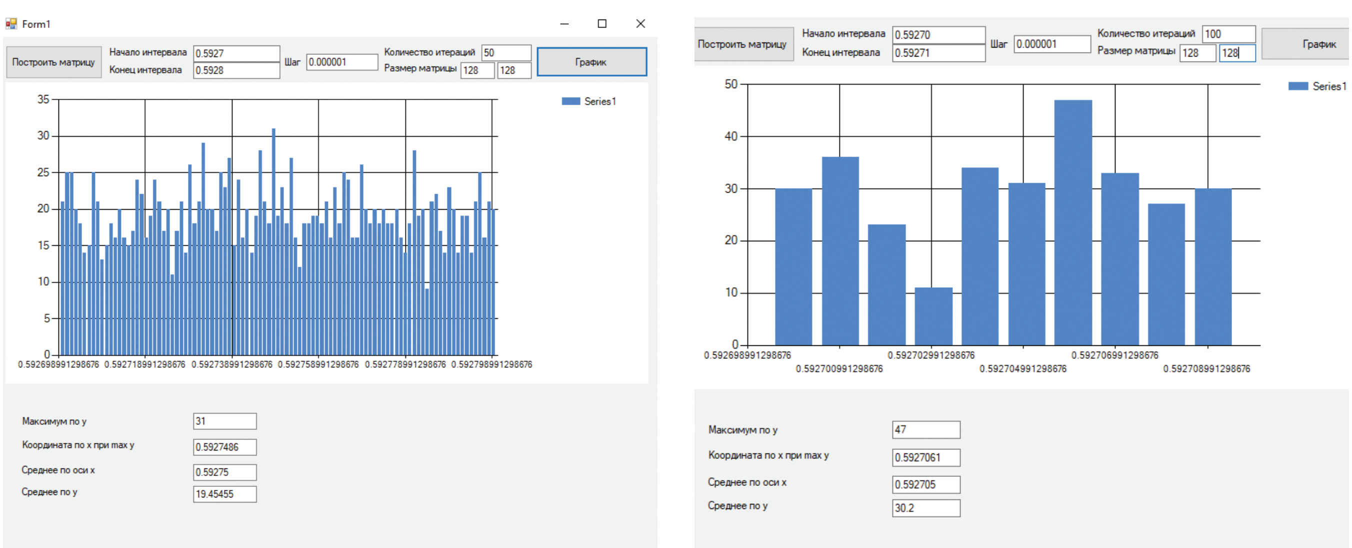

Рис. 3. Статистическая обработка данных в критической области

– среднее квадратичное отклонение. На компьютере (например, в системе символьной математики Maple) по заданным n и γ рассчитываем t_γ. Причем при большой выборке данных, характерной для компьютерного эксперимента плотность распределения Стьюдента можно заменить асимптотической функцией Гаусса, т. е.

$$S(t,n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}},$$

а стандартное отклонение $s=\sqrt{D(x)}$.

Для равномерно распределенной случайной величины, измеренной в малой критической области

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, асимптотический коэффициент Стьюдента является графическим или численным решением уравнения

$$\frac{1}{2}erf\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\gamma}{2},$$

где *erf* – функция ошибок, γ – доверительная вероятность (рис. 4).

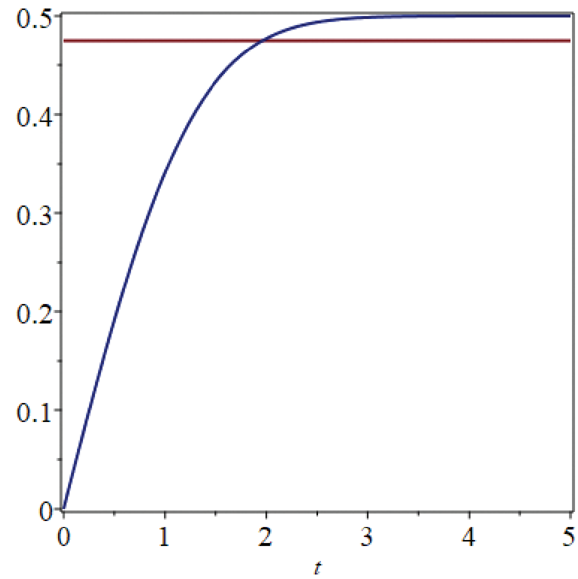

Рис. 4. Оценка асимптотического коэффициента Стьюдента в графике Maple

Свойства геометрических фазовых переходов в задачах перколяции и термодинамических фазовых переходов качественно подобны. Поэтому дальнейшее изучение фазовых переходов в задачах перколяции может служить введением в теорию термодинамических фазовых переходов.

Список литературы

1. *Гулд, Х.* Компьютерное моделирование в физике: в 2 томах: перевод с английского / Х. Гулд, Я. Тобочник. Москва: Мир, 1990. Т. 1, 2. Текст: непосредственный.
2. *Зыков, Д. С.* Информационно-методическое обеспечение профориентационной работы / Д. С. Зыков, А. И. Ходанович. Текст: непосредственный // Физика в школе и вузе: Международный сборник научных статей. Санкт-Петербург: Изд-во Рос. гос. пед. ун-та им. А. И. Герцена, 2011. Вып. 13.
3. *Ходанович, А. И.* Вероятностно-статистические методы и модели в учебном компьютерном эксперименте / А. И. Ходанович, И. В. Сорокина, Д. С. Скоморохов. Текст: непосредственный // Мир науки, культуры, образования: Международный научный журнал. 2017. № 1 (62). С 210–214.
4. *Ходанович, А. И.* Математическое моделирование на компьютере. Сборник задач и упражнений / А. И. Ходанович. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. гос. ин-та кино и телевидения, 2009. 118 с. Текст: непосредственный.