

## Библиографический список

1. Knap I., Sluzale A. Spawalność wysokowytrzymałej stali 25GSM w stanie ulepszym ciepłe // Przegląd spawalnictwa. 1988. 40, № 5–9.
2. Сварка и свариваемые материалы: Справ.: В 3 т. М., 1991. Т. 1.: Свариваемость материалов.
3. Технология электродуговой сварки / Под ред. Б. Е. Патона. М., 1972.

А. В. Шитиков, С. А. Шитиков

## ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

При численном решении задачи циклического деформирования используется модель упрочняющегося упругопластического тела, впервые предложенная в работе [1] и подробно исследованная и конкретизированная в работах [2, 3]. В работе [2] рассматривается случай малых деформаций, когда справедливо разложение полных деформаций  $\epsilon_{ij} = 0,5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  в виде суммы упругих  $e$  и пластических  $p$ :  $\epsilon = e + p$ . Здесь  $u(x, t) = x(t) - x_0$ ,  $t$  – время,  $x, x_0$  – вектора текущего и начального положения материальной точки в декартовой системе координат. Для тензора  $p$  постулируется  $\dot{p}(x, t) = 0$  при разгрузке. Точка сверху означает материальную производную по времени. Под разгрузкой подразумевается, что для рассматриваемого материального элемента выполняется  $\varphi < 0$ , где  $\varphi = 0$  – уравнение поверхности нагружения. В качестве параметров состояния среды принимаются тензоры  $e, p$ , энтропия на единицу массы  $S$  и тензор внутренних переменных  $k$ , с помощью которого описывается часть мощности диссипации механической энергии, условно названная энергией, идущей на перестройку «внутренней структуры» элемента. Для этого тензора также постулируется  $\dot{k} = 0$  при разгрузке. В качестве математического выражения II начала термодинамики часто принимается неравенство Планка:

$$P = T\dot{S} + \rho^{-1} I \cdot \partial q / \partial x \geq 0, \quad (1)$$

где  $T$  – абсолютная температура;  $\rho$  – плотность;  $q$  – вектор потока тепла;  $I$  – единичный тензор;  $A \cdot B = A_{ij} B_{ij}$ . В рассматриваемой модели наряду с нера-

венством (1) требуется выполнение условия неотрицательности мощности диссипации механической энергии:

$$D = P + F_k \cdot \dot{k} \geq 0, \quad F(e, p, k, T) = U(e, p, k, T) - TS.$$

$F$  и  $U$  – свободная и внутренняя энергии на единицу массы,  $(\dots)_A = \partial(\dots)/\partial A_{ij}$ . Слагаемое  $F_k \cdot \dot{k} = U_k \cdot \dot{k}$  – часть диссипации, идущая на перестройку «внутренней структуры» элемента [1]. Из закона сохранения энергии  $\rho \dot{U} = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} - I \cdot \partial q / \partial x$  и требования  $D = P = 0$  при разгрузке следует связь напряжений  $\sigma$  с параметрами состояния  $\sigma = \rho F_e$ . Считая эту связь справедливой и при активном нагружении, имеем  $D = (F_e - F_p) \cdot \dot{p}$  [2]. Для случая пластически несжимаемой среды  $p = \bar{p}$ ,  $k = \bar{k}$ , где  $\bar{A} = A - A \cdot I/3$ . Разложение свободной энергии и связь  $\sigma = \sigma(\bar{e}, k, T)$  записаны в виде

$$\begin{aligned} F(e, p, k, T) = & a_0(T - T_0) + \frac{a_1}{2}(I \cdot e)^2 + \frac{a_2}{2}\bar{e} \cdot \bar{e} + \frac{a_3}{2}p \cdot p + a_4 p \cdot k + \\ & + \frac{a_5}{2}k \cdot k + \frac{a_6}{2}(T - T_0)^2 + a_7(T - T_0)I \cdot e + a_8 k \cdot \bar{e}, \\ \sigma = & \rho \left[ a_1(I \cdot e)I + a_2 \bar{e} + a_7(T - T_0)I + a_8 k \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) видно, что в общем случае нет совпадения пластических деформаций с остаточными, так как при  $\bar{\sigma} = 0$  имеем  $\bar{\varepsilon}_{ост} = -(a_8/a_2)k + \bar{p}$ . Уравнения упругопластичности при изотермическом процессе строятся из требования экстремальности функционала Лагранжа:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} [D - \lambda \varphi] dt. \quad (3)$$

$L = L(p, k, \dot{p}, t)$ ,  $\lambda$  – неопределенный множитель Лагранжа. Экстремаль функционала (3) ищется варьированием по  $p$  и  $k$  при фиксированных  $p(t_1) = p_1$ ,  $p(t_2) = p_2$ , произвольных  $k(t_1)$  и  $k(t_2)$ . Считается заданным путь в пространстве напряжений или полных деформаций. Условия трансвер-

сальности при этом выполняются автоматически. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (3) дают

$$a_4 \dot{p} = -\lambda \varphi_k, \quad a_4 \dot{k} = \lambda \varphi_p + \rho_0^{-1} \dot{\bar{\sigma}}, \quad (4)$$

где задавался путь в пространстве напряжений,  $\varphi(\bar{\sigma}, p, k)$ . Для задания модели требуется определить вид поверхности нагружения и множитель  $\lambda$ . Как показано в [2], требование независимости определяющих уравнений упругопластичности от пути (напряжений или полных деформаций), в котором изначально задается процесс деформирования, накладывает определенные ограничения на вид поверхности нагружения, с учетом которых

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\sigma}, p, k) &\equiv \psi(\bar{\varepsilon}, p, k) \equiv \bar{\varphi}(\bar{\varepsilon}, p, k) = \kappa \cdot \kappa - c_2 p \cdot p - \kappa_0^2 = 0, \\ \kappa &= a_2 \bar{\varepsilon} - (a_4 - a_8) k - c_1 p, \end{aligned}$$

где  $c_i, \kappa_0$  – материальные константы. Вышеупомянутые ограничения приводят к тому, что условие  $\dot{\varphi} = 0$  (при активном нагружении) оставляет множитель Лагранжа  $\lambda$  неопределенным.

Уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= 2\lambda \kappa, \\ \dot{k} &= -2\lambda (a_4 - a_8)^{-1} [(c_1 + a_2)\kappa + c_2 p] + a_2 (a_4 - a_8)^{-1} \dot{\bar{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Введем далее функцию параметров состояния  $n$ , определением которой служит равенство  $D = n \psi_{\bar{\varepsilon}} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}$ . Из условия активного нагружения  $\psi_{\bar{\varepsilon}} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} \geq 0$  следует, что для выполнения неравенства диссипации  $D \geq 0$  необходимо и достаточно  $n \geq 0$ .  $\lambda$  однозначно выражается через  $n$ :  $\lambda = a_2 n (\psi_{\bar{\varepsilon}} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}) / ((F_{\bar{\varepsilon}} - F_{\bar{p}}) \cdot \psi_{\bar{\varepsilon}})$ . Отсюда видно, что уравнения упругопластичности (4) удовлетворяют требованию инвариантности относительно масштаба времени, если функция  $n$  является однородной нулевого порядка относительно скоростей параметров состояния. Будем полагать, что  $n$  является функцией (или функционалом) только параметров состояния и не зависит от их скоростей. Введем параметр  $\mu_\sigma$  по определению:  $\mu_\sigma = (\rho_0 a_2)^{-1} (\psi_{\bar{\varepsilon}} \cdot \dot{\bar{\sigma}}) / (\psi_{\bar{\varepsilon}} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}})$ .  $\mu_\sigma$  связан с углом наклона касательной к кривой  $\sigma - \varepsilon$  при простом растяжении (сжатии), кручении. При  $\mu_\sigma = 1$  этот угол

совпадает с углом наклона упругого участка, а при  $\mu_\sigma=0$  равен нулю. Для выполнения неравенства  $P \geq 0$  при любых путях нагружения необходимо и достаточно [2]:

$$\begin{aligned} (1 + \eta(1 - \beta))\mu_\sigma &\leq 1 - \eta\beta, \quad c_2 = -a_2 a_4 / a_8, \\ a_5 &= (a_8 - a_4)a_8 / a_2, \quad a_8 / (a_8 - a_4) \geq 0, \\ \eta &= a_2(a_3 - c_1) / c_2, \quad \beta = a_4 / a_8 < 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Условия (5) не зависят от конкретного вида  $n$ . Из (5) следует, что число независимых материальных констант уменьшается на две единицы ( $c_1$  и  $a_5$  выражаются через другие константы). Константы  $a_4$  и  $a_8$  входят в определяющие уравнения только в виде комбинации  $\beta = a_4 / a_8$ , что является следствием возможности изменения масштаба тензора  $k$ . Из  $a_8 / (a_8 - a_4) \geq 0$  следует также условие  $\beta < 1$ . Первое неравенство (5) ограничивает возможные значения. В работе [2] представлены соображения, из которых следует, что область изменения  $\beta$  должна быть ограничена условием  $\beta < 0$ . При этом условии угол наклона касательной к графику  $\sigma - \varepsilon$  простого нагружения первоначально изотропного тела в начальный момент активного процесса  $\mu_{\sigma 0} = \beta / (\beta - 1)$  больше нуля, но меньше упругого значения. Первое ограничение (5) представлено на рис. 1. На плоскости  $\mu_\sigma - \eta$  выделяются три разрешенных квадранта (IV квадрант запрещен из-за возможности стягивания поверхности нагружения в точку). Каждому из них при простом нагружении первоначально изотропного тела соответствуют свои интервалы изменения  $\eta$  и  $c_2$ . В I квадранте —  $\eta \geq 0, c_2 > 0$ , во II —  $\eta < 0, c_2 > 0$ , в III —  $\eta < 0, c_2 < 0$ . Материалам, соответствующим разным квадрантам, отвечают разные ограничения на возможные значения  $\mu_\sigma$ .

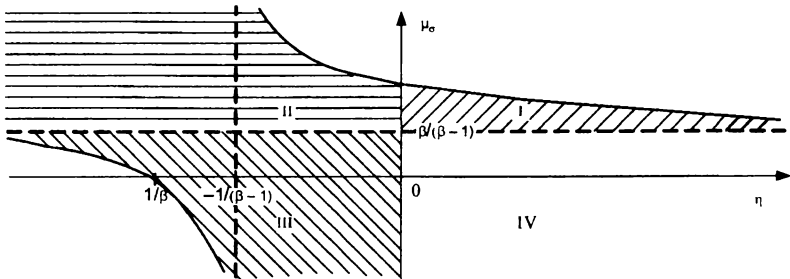


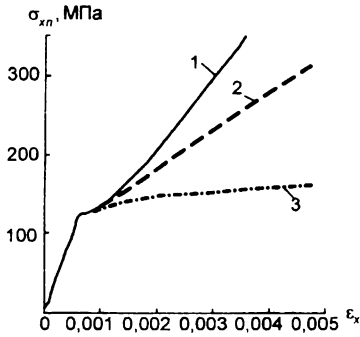
Рис. 1. Области возможного изменения материальных констант  $\mu_\sigma, \eta$

Существует область значений  $\eta$ ,  $c_2$ , где  $0 \leq \mu_0 \leq 1$  (I квадрант и часть III квадранта). Обычно подобное ограничение получают исходя из не имеющего термодинамического обоснования постулата Друкера. В другой части III квадранта допускаются значения  $\mu_0 < 0$ , соответствующие наличию падающих участков на кривых  $\sigma - \epsilon$ . Дальнейшее исследование потребовало конкретизации вида функции  $n$ . Пусть  $n = n' a_2 \left[ \frac{((F_{\bar{\epsilon}} - F_{\bar{p}}) \cdot \psi_{\bar{\epsilon}})}{(\psi_{\bar{\epsilon}} \cdot \psi_{\bar{\epsilon}})} \right]^2$ . Такой выбор устранил неограниченный рост параметра  $\lambda$  в случае, если  $(F_{\bar{\epsilon}} - F_{\bar{p}}) \cdot \psi_{\bar{\epsilon}} \rightarrow 0$  и означает не более чем одну из возможностей конкретизации модели. В работе [2] найдены ограничения на  $n'$ :  $0 \leq n' = \alpha N \leq N$ ,  $\alpha$ , обеспечивающие выполнение неравенств  $P \geq 0$ ,  $\mu_0 \leq 1$  при любых процессах деформирования.  $N$  выражается только через  $a_2$ ,  $c_2$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ . В некоторых областях значений материальных констант найденные ограничения обеспечивают выполнение условия  $\mu_0 \geq 0$ . В других случаях это условие выполняется при дополнительных ограничениях на  $N$ .

При численном исследовании циклического нагружения в  $n' = \alpha N$  введем зависимость от аналога параметра Одквиста  $R$ :  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 (1 - e^{-c_R R})$ ,  $\dot{R} = \sqrt{\dot{k} \cdot \dot{k}}$ . Это позволило описать циклически упрочняющиеся и разупрочняющиеся материалы. На рис. 2–6 приведены некоторые результаты численных расчетов. В [2] было показано, что I квадрант рис. 1 можно разбить на три зоны. В первой из них на кривой простого растяжения  $\sigma - \epsilon$  (кривая 1 на рис. 2 а, б) выпуклость на участке активного нагружения направлена вниз. Для материалов второй зоны (кривая 2 на рис. 2 а, б) существует точка перегиба на графике  $\sigma - \epsilon$ , но предел  $\mu_0$  при  $\epsilon \rightarrow \infty$  больше  $\mu_{00}$ . В третьей зоне (кривая 3 на рис. 2 а, б)  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \mu_0 = \mu_{00}$  и пластические деформации ограничены. Графики циклического растяжения-сжатия показывают существование предельного цикла как для циклически упрочняющихся, так и для циклически разупрочняющихся материалов. Для материалов первой зоны I квадранта предельным циклом является отрезок прямой, проходящей через начало координат (см. рис. 3). При достаточно малых значениях амплитуды продольной деформации первые циклы практически повторяют друг друга и лишь затем начинается циклическое упрочнение. Такое упрочнение наблюдается и при  $n' = \text{const}$ .

Графики простого и циклического нагружения для материалов, соответствующих II квадранту рис. 1 качественно напоминают графики для материалов первой зоны I квадранта.

*a*



*б*

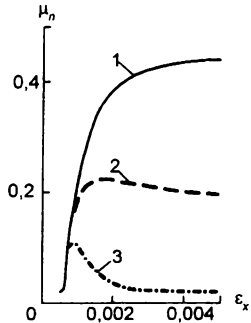
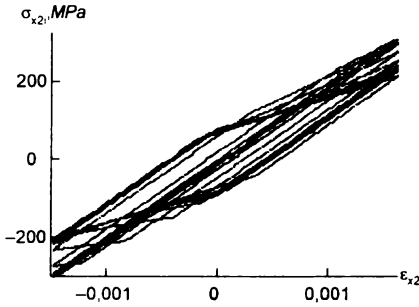


Рис. 2. Графики  $\sigma - \epsilon$ ,  $\mu_\sigma - \epsilon$ , при простом растяжении (I квадрант рис. 1):  
 $\rho_0=1$ ,  $k_0=100$  МПа,  $a_1=1,3 \cdot 10^5$  МПа,  $a_2=a_4=1,6 \cdot 10^5$  МПа,  
 $\beta = -0,02$ ,  $c_2 = (10c_1)^2$ ,  $\alpha=1$ ,  $\eta = (a_2/\sqrt{c_2}) s_i$ ;  $s_1=0,25$ ,  $s_2=0,75$ ,  $s_3=2$ ;  
*a*: 1 -  $\sigma_{x1}$ ; 2 -  $\sigma_{x2}$ ; 3 -  $\sigma_{x3}$ ; *б*: 1 -  $\mu_1$ ; 2 -  $\mu_2$ ; 3 -  $\mu_3$

*a*



*б*

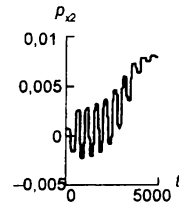


Рис. 3. Графики: *a*:  $\sigma - \epsilon$ ; *б*:  $p - t$ . 10 циклов.  $\rho_0$ ,  $k_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  соответствуют рис. 2,  $\eta = 0,1$  ( $a_2/\sqrt{c_2}$ ) – первая зона I квадранта рис. 1,  $c_2 = (0,2c_1)^2$ ,  
 $\beta = -0,7$ , ( $N = 7,2$ ),  $c_R=500$ ,  $\alpha_0 = 0,2$ ,  $\alpha_1=0,8$ ,  $\epsilon_{\max} = 0,0015$

На рис. 4 показан график  $\sigma - \epsilon$  циклического растяжения-сжатия для циклически упрочняющегося материала второй зоны I квадранта рис. 1.

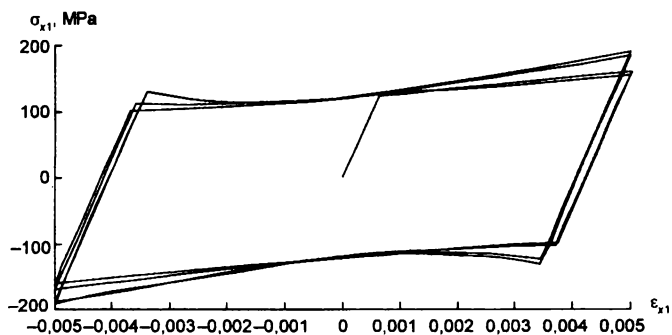


Рис. 4. График  $\sigma - \varepsilon$ . 6 циклов.  $\eta = 0,75 (a_2/\sqrt{c_2})$  – вторая зона I квадранта рис. 1,  $\rho_0, \kappa_0, a_1, a_2, a_4$  соответствуют рис. 2,  $c_2 = (c_1)^2$ ,  $\beta = -0,03$ ,  $(N = 7,5)$ ,  $c_R = 2 \cdot 10^3$ ,  $\alpha_0 = 0,2$ ,  $\alpha_1 = 0,8$

Кривые простого растяжения для материалов, соответствующих III квадранту рис. 1, показаны на рис. 5. Для этих материалов возможно наличие падающего участка на кривых  $\sigma - \varepsilon$ ; пластические деформации ограничены.

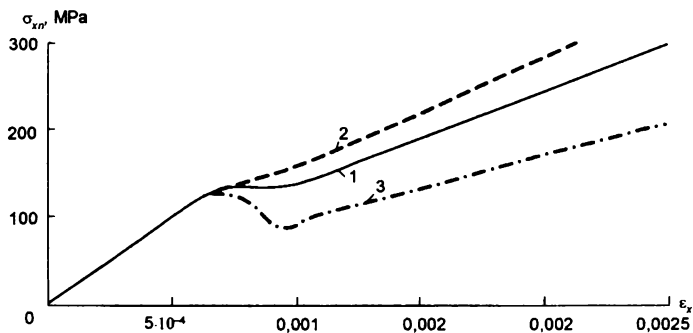


Рис. 5. Графики  $\sigma - \varepsilon$  (III квадрант рис. 1).  $\rho_0, \kappa_0, a_1, a_2, a_4$  соответствуют рис. 2,  $\alpha = 1$ ,  $\eta = -1$ ,  $c_2 = -(0,5c_1)^2$ ,  $\beta = -s_i$ ;  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1,5$ ,  $s_3 = 0,5$ :  
1 –  $\sigma_{x1}$ ; 2 –  $\sigma_{x2}$ ; 3 –  $\sigma_{x3}$

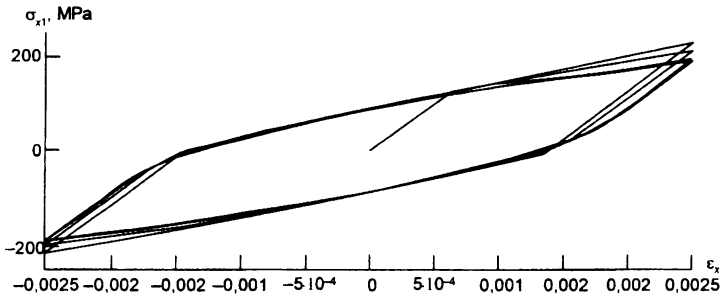


Рис. 6. Графики  $\sigma - \varepsilon$ . 5 циклов.  $\rho_0, \kappa_0, a_1, a_2, a_4$  соответствуют рис. 2,  $\eta = -3, c_2 = -(0,5c_1)^2$  – III квадрант рис. 1.  $\beta = -0,33, (N=3), \alpha_0 = 0,4, \alpha_1 = 0,6, c_R = 1,3 \cdot 10^3$

На кривой циклического растяжения-сжатия после прохождения упругого участка выпуклость направлена во внешнюю сторону от центра  $\sigma = 0, \varepsilon = 0$  (см. рис. 6).

Представленные численные расчеты показывают, что, несмотря на относительную простоту модели, они описывают широкий класс материалов, которым соответствуют сложные кривые простого и циклического нагружений.

### Библиографический список

1. Шитиков А. В. О вариационном принципе построения уравнений упругопластичности при конечных деформациях // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, № 1.
2. Шитиков А. В., Шитиков С. А. Термодинамический подход к построению модели упрочняющегося упругопластического тела // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: Сб. науч. тр. к 60-летию проф. Г. И. Быковцева. Владивосток, 1999.
3. Шитиков С. А. Построение и исследование математической модели упрочняющегося упругопластического тела при малых деформациях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ин-т автоматизации процессов управления. Владивосток, 1998.