УДК 519.6:004.9

Рожков А. В. Барсукова В. Ю.

МНОГОЧЛЕН ЭЙЛЕРА И ЛОКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ*

Александр Викторович Рожков
доктор физико-математических наук, профессор
great.ros.marine2@gmail.com
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар
Виктория Юрьевна Барсукова
кандидат физико-математических наук, доцент
barsukova.v.y@gmail.com
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар

THE EULER POLYNOMIAL AND THE LOCAL DISTRIBUTION OF PRIMES

Alexander Viktorovich Rozhkov
Kuban State University, Russia, Krasnodar
Victoria Yurievna Barsukova
Kuban State University, Russia, Krasnodar

Аннотация. *Исследование локального расположения простых чисел, проводимое в КубГУ с 2015 г. Поддержана грантом Благотворительного фонда Владимира Потанина. В данной статье исследуется простые числа, связанные с многочленом Эйлера.*

Abstract. *A study of the local location of prime numbers conducted at KubGU since 2015. Supported by grant of the Vladimir Potanin Charitable Foundation. In this paper, we study the prime numbers associated with the Euler polynomial.*

Ключевые слова: *Теория чисел, язык программирования Julia, функция Эйлера, локальное распределение простых чисел.*

Keywords: *Number theory, Julia programming language, Euler's function, local distribution of prime numbers.*

Цель проекта — проведение разведочных вычислений в области нерешенных проблем алгебры и теории чисел, с использованием нового перспективного языка программирования Julia. Официальный сайт https://julialang.org/ текущая версия 1.8.5. Проект поддержан Благотворительным фондом Владимира Потанина. Промежуточные итоги проделанной работы представлены в [1–3]. В данной статье речь идет о локальном распределении простых чисел, порождаемых многочленом Эйлера и его обобщениями.

Новогодняя задача

Наступил 2023 г. и начались поиски математических свойств числа 2023. Прежде всего — число это составное 2023 = 17*7*17. Простые числа 7 и 17 очень примечательны: 7 — простое число Мерсенна, 17 — простое число Ферма.

Один из блогеров заметил, что если вычислять суммы n-х степеней цифр числа 2023, то при n = 0,1,2,3,4,5,6 получаются простые числа: 3,7,17,43,113,307,857.

Неужели это формула, дающая только простые числа? Или, хотя бы много простых чисел. Мы решили это проверить. Вычисления велись на 16 ядерном Intel Core i9 12900k, приобретенном на средства гранта Благотворительного фонда Владимира Потанина и заняли около сотни часов. Программу была написана на языке Julia 1.8.5, с подключением пакета Nemo 0.32.7.

Программа работает с любым 4-значным числом. Мы запустили программу с параметрами Roz(2,0,2,3,10^5). Следует отметить, что 3 в 100 тыс. степени — 47 000-значное число. Julia умеет проверять на простоту такие числа, используя формат BigInt.

```
using Nemo
function Roz(a::Int64, b::Int64, c::Int64, d::Int64, n::Int64)
      for k = 1:n
          p=BigInt(a)^BigInt(k)+BigInt(b)^BigInt(k)+
            BigInt(c)^BigInt(k)+BigInt(d)^BigInt(k)
             if isprobable_prime(ZZ(BigInt(p)))
                println("k=",k)
             end
      end
  end
```

Рисунок 1 — Программа, вычисляющая степени цифр 4-значного числа

Результат вычислений. Числа $2^n+0^n+2^n+3^n$ при $n\le 10^5$ являются простыми только для 58 значений показателя n:

{0-6,9;11,12,15,17,22,32,33,35,36,46,47,59,63,80;
101,154,159,173,221,225,236,250,281,347,789,992;1607,1631,1983,2072,3616,
3702,5076,5957,6335,8771; 10203,10984,12203,12350,13660,14891,29205,
30286,33220,34383,40992,50192,61515,76870}.

Получившиеся простые числа выписать нет возможности, поскольку последнее из них имеет в десятичной записи почти 37 тыс. знаков, что 4 раза превышает объем данной статьи.

Обобщенный многочлен Эйлера и простые числа, меньшие f(p-1)

Многочлен Эйлера x^2+x+41 знаменит тем, что задает простые числа для всех x= 0,1,2,…,39. Интересно было бы найти многочлен вида $f(\mathrm{x})=x^2+x+p$ такой, что простые числа получаются при всех x= 0,1,2,…,p-2.

Очевидно, такими p являются $\{3, 5, 11, 17, 41\}$. Других простых чисел с таким свойством, пока, не найдено. Мы провели численный эксперимент и проверили для первых 10 тыс. простых чисел p какая часть чисел $f(0), f(1),..., f(\mathrm{p}-2)$ является простыми.

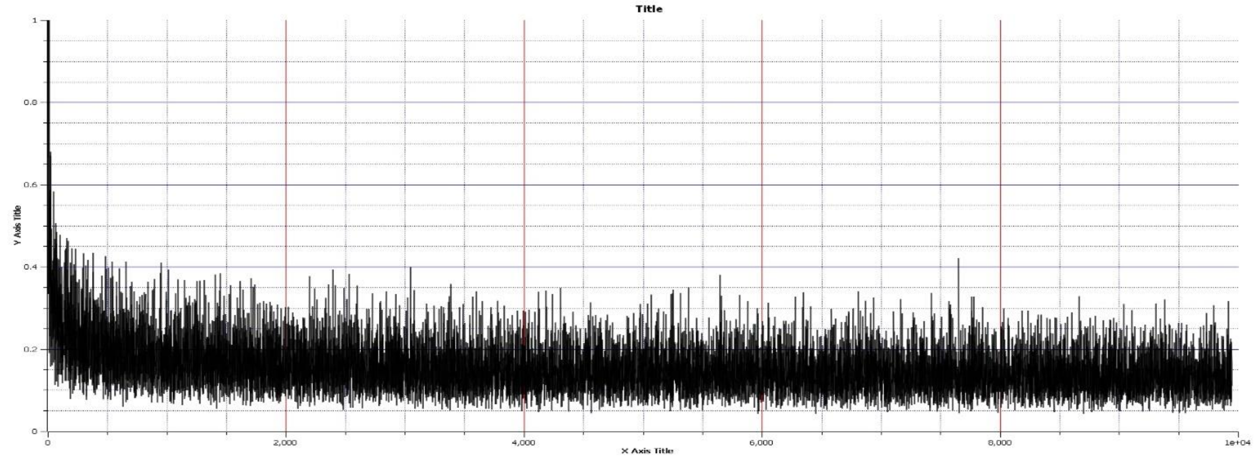

Рисунок 2 — График доли простых чисел для первых 10 тыс. простых чисел.

График построен по 10 тыс. точек при помощи бесплатной программы SciDAVis (https://scidavis.sourceforge.net/).

Результаты вычислений. *Выяснилось, что максимальные значения достигаются при p=101 — 0.68 и при p=107 — 0.67. То есть, соответственно 68 из 100 и 71 из 106 чисел являются простыми. Это очень много.*

Минимальные значения достигаются при p=59053 — 0.0417 и при p=90403 — 0.0419. В обоих случаях простыми являются только одно число из 25.

В среднем же, как наглядно видно из графика, простыми являются примерно 15 % чисел, т.е. каждое 6-7 число.

Ниже приведена программа на Julia, которая позволила получить эти результаты. Первый модуль Ros1 создает массив простых чисел P, взятых из интервала (2m, 2n+2). Модуль Ros2, используя массив P, подсчитывает и выводит на печать искомую долю простых чисел, меньших f(p-1).

```
using Nemo
function Ros1(m,n)
        P = [];
            for i= m:n
                if isprobable_prime(ZZ(2*i+1))
                   P = push!(P,2*i+1)
                 end
            end
       return P
end
     P=Ros(m,n)

function Ros2(P)
        for p in P
             t=1
             for i in 1:(p-1)
                 q=i^2+i+p
                   if isprobable_prime(ZZ(q))
                       t=t+1
                   end
                      if i% (p-1)== 0
                         println("p=",p,",",t/(p-1))
                      end
              end
          end
end
```

Рисунок 3 — Код модулей Ros1 и Ros2.

Обобщенный многочлен Эйлера и его простые значения I

Теперь рассмотрим другую задачу: сколько значений многочлена $f(\mathrm{x}) = x^2 + x + p$ являются простыми числами? То есть рассмотрим весь ряд значений $f(0), f(1), ..., f(\mathrm{n}), \cdots$, а не только его первые p-1 членов.

Конечно, нам необходимо не просто количество простых чисел, а какова их доля среди чисел $[f(0), f(1), ..., f(\mathrm{n})]$ и каково отношение этой доли к частоте появления простых чисел в последовательности [1,2,…,n]?

Согласно теореме П.Л. Чебышева среди чисел, меньших n, простыми являются примерно $\frac{n}{\ln(\mathrm{n}) - 1}$. Поскольку в последовательности $[f(0), f(1), ..., f(\mathrm{n})]$ все числа нечетные, то и в последовательности 1,2,…,n тоже нужно ограничиться нечетными числами.

По теореме Чебышева среди чисел, меньших n, простыми являются каждое $\frac{2}{\ln(\text{n})-1}$ - е нечетное число. Поэтому была составлена программа, вычисляющая отношение $T=\frac{t}{n}:\frac{2}{\ln(\text{n})-1}=\frac{t\cdot(\ln(\text{n})-1)}{2\cdot n}$, где t — это количество простых чисел в последовательности $[f(0), f(1),..., f(\text{n})]$.

Результаты вычислений. *Для первых 10 тыс. простых чисел р было вычислено по 10 млн. начальных значений многочлена* $f(\text{x})=x^2+x+p$ *результаты представлены на Рис. 4. По графику видно, что среднее значение равно примерно 0.7. Максимальные значения представлены в таб. 1.*

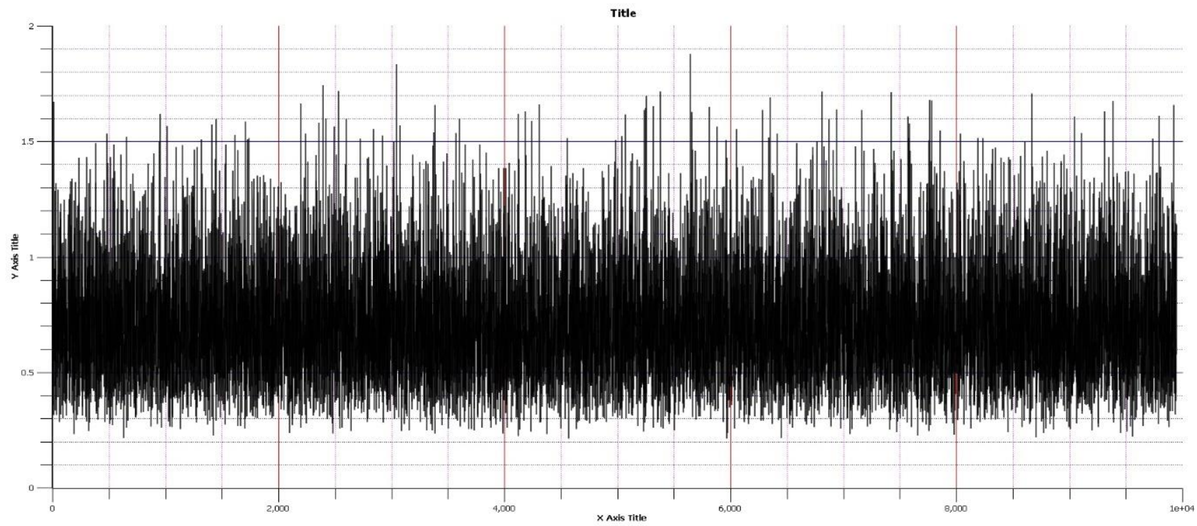

Рисунок 4 — Ось x– номер простого числа p, ось y – значение функции T.

Таблица 1 — Максимальные значения функции T

p	41	213 77	226 97	279 41	527 27	**556 61**
T	1.66	1.74	1.71	1.82	1.71	**1.87**
p	685 01	753 47	798 11	799 67	900 17	982 97
T	1.71	1.70	1.67	1.67	1.70	1.67

Таким образом, среди значений многочлена $f(\text{x})=x^2+x+55661$ простые числа встречаются почти в 2 раза чаще, чем среди нечетных чисел натурального ряда.

Если говорить образно и представать, что натуральный ряд — это лес, а простые числа — это грибы. То в лесу есть тропки, на которых грибы встречаются существенно чаще, чем в лесу в среднем.

Обратим внимание, что для многочлена Эйлера $f(\mathrm{x}) = x^2 + x + 41$ функция Т принимает значение 1.66… То есть он хорош для нахождения простых чисел. Для этого знаменитого многочлена мы решили проверить как ведет себя функция Т при увеличении интервала на котором вычисляются значения многочлена. И увеличили интервал с 10 млн. до 1 трлн., т.е. в 100 тыс. раз. При скорости вычисления на 1 ядре процессора 5 млрд. чисел в час — это заняло чуть больше недели.

Выяснилось, что функция Т все медленнее и медленнее уменьшается. Причем иногда и возрастая. Мы выводили на печать результаты с шагом 100 млн. Получилось 10 тыс. точек. По всем этим точкам SciDAVis построила график Рис. 5. На Рис. 6. детально показан интервал от 10 млрд, где уменьшение настолько мало, что на Рис. 5 кривая на этом промежутки выглядит как прямая линия.

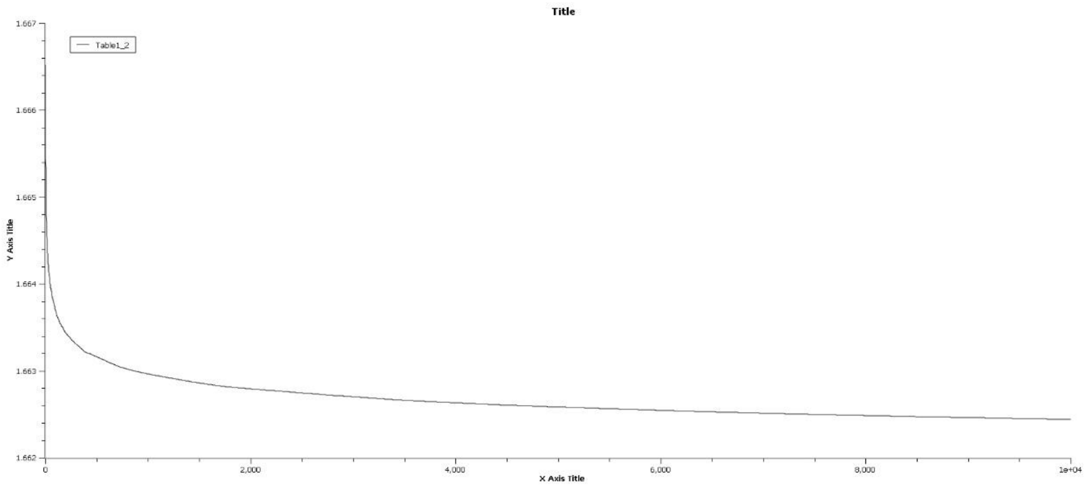

Рисунок 5 — Функция Т многочлена Эйлера до 1 трлн., шаг 100 млн.

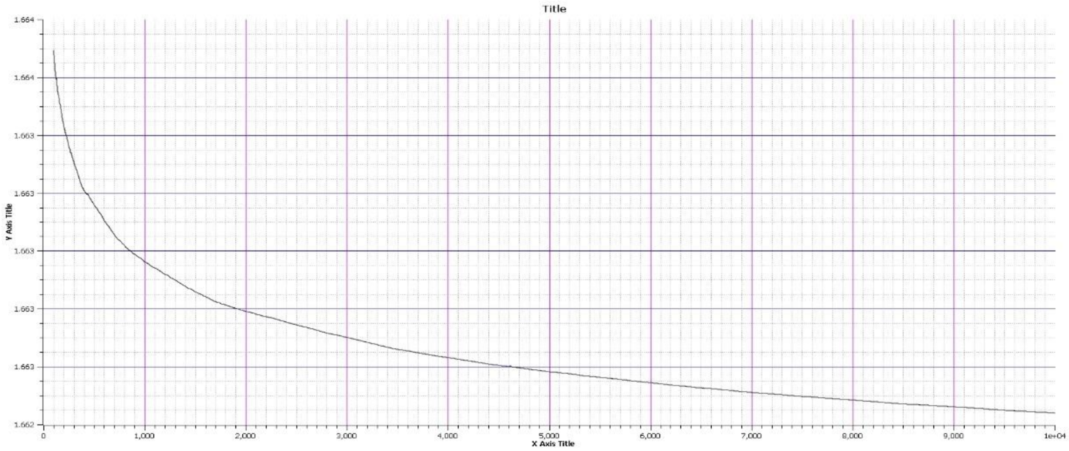

Рисунок 6 — Функция T многочлена Эйлера от 10 млрд. до 1 трлн., шаг 100 млн.

Гипотеза. Для любого натурального n (проверено до 1 трлн.) простые числа встречаются среди значений многочлена Эйлера $[f(0), f(1),..., f(\mathrm{n})]$ в 1.662 раза чаще, чем среди нечётных чисел меньших числа n.

Обобщенный многочлен Эйлера и его простые значения II

Предыдущая модель сравнения частот появление простых чисел в последовательностях [1,2,…,n] и $[f(0), f(1),..., f(\mathrm{n})]$ имеет существенный изъян. Конечно, множества [1,2,…,n], $[f(0), f(1),..., f(\mathrm{n})]$ равномощны, но натуральные числа [1,2,…,n] ограничены числом n, а значения многочлена $[f(0), f(1),..., f(\mathrm{n})]$ числом n^2.

Но в районе n^2, согласно теореме Чебышева, простые числа встречаются в 2 раза реже, чем вблизи n. Поэтому значения многочлена находят простые числа в тех местах, где их в 2 раза меньше, чем там, где их ищет натуральный ряд [1,2,…,n].

Поэтому рассмотрим вторую модель, более правильно отражающую реальную плотность распределения простых чисел.

Доля простых чисел, меньших n^2, среди всех натуральных чисел, составляет, согласно теореме П.Л. Чебышева, $\frac{1}{\ln(\mathrm{n}^2)-1} = \frac{1}{2\ln(\mathrm{n})-1}$, а среди нечетных в 2 раза больше, т. е. $\frac{2}{2\ln(n)-1}$. Поэтому, если выбрать наугад n нечетных чисел, меньших n^2, то простых среди них будет $\frac{2n}{2\ln(n)-1}$. Поэтому отношение плотности распределения простых чисел на значениях многочлена и на натуральном ряде нужно искать по формуле:

$$T = t : \frac{2n}{2\ln(n)-1} = \frac{t(2\ln(n)-1)}{2n}, \text{ а было } T = \frac{t(\ln(n)-1)}{2n},$$

где t — число простых чисел среди членов последовательности $[f(0), f(1),..., f(n)]$.

Т. о. нынешняя функция Т более, чем в 2 раза превосходит [2ln(n)-1 > 2(ln(n)-1)] функцию Т, вычисленную нами ранее. То есть существуют такие тропки, где грибы встречаются в 4 раза чаще, чем в лесу в среднем. А это уже реально полезно для практики.

Компьютерная программа, вычисляющая новую функцию Т, состоит из двух модулей. Первый нам уже известен Ros1 — он создает массив Р простых чисел. Второй модуль ros3 производит реальные вычисления.

```
function ros3(m,n,P)
         for p in P
             t=0
              for i = m:n
                     q=i^2+i+p
                       if  isprobable_prime(ZZ(q))
                           t=t+1
                       end
               end
                  T= t*(2*log(n)-1)/(2*n)
                              if T > 3.5
                            println("p=",p,",","T=",T)
                              end
          end
 end
```

Рисунок 7 — Вывод на печать значений Т > 3.5

Результаты вычислений. Были проверены все простые числа до 8 млн., их примерно 540 тыс. Для каждого простого числа р вычислялось 1 млн. первых значений многочлена $f(x) = x^2 + x + p$.

а) Функция T приняла значение больше 3.5 для 528 простых чисел, т.е. примерно для одного числа из тысячи.

б) Для p=41 новая функция T равна 3.44.

в) Максимум функции T (до 8 млн.) равен T=4.18, p=1544987.

г) Функция T > 4 для 12 простых чисел, примерно одно число на 45 тыс. простых чисел.

д) Для p = 55661 получилось T =3.9.

Всего было проверено на простоту примерно 500 млрд. чисел.

Выводы

Поиск формулы простого числа не прекращается уже сотни лет. Тема вечная. Неожиданно, что даже работая со значениями многочлена 2-1 степени мы можем получить множество, где простые числа встречаются в 4 раза чаще, чем простые числа среди нечетных простых чисел натурального ряда.

Мы планируем проводить дальнейшие вычислительные эксперименты в трех направлениях. Искать простые числа среди значений:

1. Многочленов вида $f(\mathrm{x}) = x^2 + x + p$, при p больше 8 млн.
2. Других квадратных многочленов.
3. Многочленов произвольной степени; произвольных функций $f : N \to N$, где N — множество натуральных чисел. Используя и I и II модели вычисления плотности распределения простых чисел.

* Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина

Список литературы

1. *Рожков, А. В.* Экспериментальная математика в КубГУ – первые результаты / А. В. Рожков. Текст: электронный // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы XIV международной научно-практической конференции, Екатеринбург, 1–5 марта 2021 г. Екатеринбург: Рос. гос. проф.-пед. ун-т, 2021, С. 163–172. URL: https://elar.rsvpu.ru/handle/123456789/34886?ysclid=lhtlajkpfx212940379.

2. *Рожков, А. В.* Экспериментальная математика и язык Julia – локальное распределение простых чисел / А. В. Рожков, А. Барсукова. Текст: электронный // Новые информационные технологии в образовании и науке. 2022. № 2 (6). С. 82–88. URL: https://elar.rsvpu.ru/handle/123456789/42071?ysclid=lhtlf57exw853488510.

3. *Рожков, А. В.* Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера / А. В. Рожков, М. В. Рожкова. Текст: непосредственный // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы II Международной научной конференции, Майкоп, 20–24 октября 2017 г. Барнаул: Алтайский гос. ун-т, 2017. Т. 2. С. 198–203.