Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет»

Е. А. Перминов

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ В АСПЕКТЕ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Монография

Екатеринбург
РГППУ
2013

УДК 372.251
ББК Ч448.624/629-25
П 26

Перминов, Е. А.

П 26 Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования: монография / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2013. 286 с.

ISBN 978-5-8050-0530-6

Охарактеризованы предмет, функции и интеграционный потенциал современной дискретной математики. Исходя из этого исследованы методологические, теоретические основы, основные методические аспекты обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки и элективного обучения дискретной математике в школе.

Монография адресована преподавателям вузов, колледжей (техникумов), учителям математики и информатики и магистрам, а также всем интересующимся обучением дискретной математике.

УДК 372.251
ББК Ч448.624/629-25

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Е. М. Вечтомов (ГОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет»); д-р пед. наук, проф. В. Б. Полуянов (ФГАОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0530-6

Оглавление

Введение

Последние два десятилетия в отечественной высшей школе ведется интенсивный поиск путей модернизации образования. В этот период на реформирование сферы высшего образования во многом повлияли следующие документы: Меморандум Международного симпозиума ЮНЕСКО «Фундаментальное (естественнонаучное и гуманитарное) университетское образование» (1994); выводы Первой Всемирной конференции по проблемам высшего образования (1998); Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г. (2002); государственные образовательные стандарты высшего профессионального образования (1994, 2000, 2005–2008); Закон РФ «Об образовании» (редакции 2004 и 2007 гг.). Включение России с 2003 г. в Болонский процесс на фоне интеграции в мировое образовательное пространство привело к реальному внедрению новой структуры в высшей школе.

Состояние реформирования, естественно, свойственно и современному высшему педагогическому образованию. Новые государственные стандарты подготовки бакалавров и магистров требуют изменения системы подготовки студентов педагогических специальностей, что влечет за собой изменение программ учебных дисциплин, изучаемых будущими учителями-предметниками и преподавателями колледжей (техникумов), изменение учебников, методического обеспечения учебного процесса и др.

Однако в решении задач, поставленных в приведенных документах, имеется ряд трудностей и принципиальных проблем. Исследования проблем высшего педагогического образования свидетельствуют о том, что в рамках модернизации не решены многие кардинальные задачи развития образования. Учеными констатируется факт падения уровня образования и качества подготовки специалистов для общеобразовательных и специальных средних учебных заведений и училищ. Их подготовка далеко не в полной мере соответствует новым тенденциям совершенствования и развития современного образования, что проявляется, например, в неспособности многих специалистов продуктивно работать в условиях уровневой и профильной дифференциации, вариативности программ и учебников, освоения новых информационно-образовательных технологий.

В наступившую эпоху математизации наук особенно актуальной становится проблема повышения уровня математической подготовки педагогов специальностей, напрямую связанных с математикой или с ее приложениями, а именно будущих учителей математики и информатики и педагогов профессионального обучения в отраслях машиностроения, электротехники и электроэнергетики. Педагоги профессионального обучения в этих отраслях вместе с учителями математики и информатики несут наибольшую ответственность за подготовку современного рабочего, играющего главную роль в высокотехнологичных, автоматизированных отраслях производства. Новый педагог профессионального обучения с высоким уровнем математических знаний и умений особенно нужен в подготовке нового рабочего с высшим образованием.

Анализ состояния математической подготовки педагогов – выпускников математических факультетов, факультетов информатики и факультетов, готовящих педагогов профессионального обучения в названных отраслях, свидетельствует об их невысокой общей и математической культуре, о недостаточном развитии у них математического мышления, об отсутствии должного опыта математической деятельности. У них часто наблюдается отсутствие потребности в осмыслении новых математических фактов, критичности при выборе методов и подходов, используемых в решении математических задач, в том числе математического моделирования с использованием компьютера. Почти у всех выпускников отсутствует реальный опыт поиска новой научной информации из области математики, программирования и вычислительной техники. Отмечаются также рецептурность методических знаний будущих учителей математики и их слабые методические умения, а у будущих учителей информатики – формализм математических знаний и слабые умения применять их в своей профессиональной области, в том числе в области применения информатики в предметных областях [181]. Наблюдается неумение использовать идеи и методы математики в интеграции обучения дисциплинам математического, естественнонаучного и профессионального цикла в колледжах (техникумах), при внедрении инновационных технологий при подготовке современного рабочего.

Таким образом, предпринимаемые попытки решения проблемы повышения уровня математической подготовки студентов названных специальностей не приводят к реальному улучшению качества их профессионального образования.

Следует сказать, что в разные годы состояние математической подготовки студентов математических факультетов и факультетов информатики педвузов, инженерно-педагогических факультетов исследовалось многими авторами, в том числе Я. А. Ваграменко, В. А. Гусевым, В. Л. Гапонцевым, С. Г. Григорьевым, В. В. Гриншкуном, В. А. Далингером, В. И. Игошиным, Э. И. Кузнецовым, В. В. Лаптевым, М. П. Лапчиком, В. Л. Матросовым, А. Г. Мордковичем, И. С. Сафуановым, И. М. Смирновой, В. А. Тестовым, И. Л. Тимофеевой, В. А. Федоровым, М. В. Швецким и др. Исследования названных ученых вносят немалый вклад в дело математической подготовки студентов. Однако до настоящего времени не проводилось систематических исследований, основанных на идеях интеграции образования и играющих важную роль в решении обозначенной проблемы повышения уровня математической подготовки студентов перечисленных факультетов.

Развитие образования возможно на основе интеграции имеющихся и перспективных ресурсов общества (социальных, экономических, управленческих и др.). Поэтому в концепции развития образования [92] важная роль отводится развитию «интегрированных инновационных программ, решающих кадровые и исследовательские задачи развития инновационной экономики на основе интеграции образовательной, научной и производственной деятельности» [92, с. 44]. В ходе интеграционных процессов в образовании в настоящее время выделились содержательное, глобальное, организационно-технологическое, институциональное, личностно-деятельностное, социально-педагогическое направления интеграции.

В математической подготовке будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в отраслях машиностроения, электротехники и электроэнергетики главную роль играет содержательное направление интеграции образования. Действительно, *анализ содержания* подготовки будущих педагогов этих специальностей показывает, что в ней недостаточно используется интеграционный потенциал современной дискретной математики (ДМ), т. е. математики дискретных структур – «структур финитного (конечного) характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений» [123, стб. 207]. Не случайно в свое время один из основоположников информатики В. М. Глушков указывал, что математика в начале XXI в. «будет в большей мере математика дискретных, а не непрерывных величин» [39, с. 122]. Отметим, что ввиду обширности предметного поля дискретной математики в качестве ее синонима используются также термин «конечная математика» и термины «дискретный анализ», «конкретная математика», в которых отражены ее связи с классической («непрерывной») математикой.

В математике значительно возросла роль работ по дискретизации непрерывных объектов, наблюдается бурный рост самой дискретной математики и ее приложений. Как отмечал выдающийся российский математик А. Н. Колмогоров, «по существу все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного… Мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще» [88, с. 15]. Именно поэтому математические модели были в основном непрерывными. Эту же мысль хорошо сформулировал известный американский специалист по дискретной математике Д. Зайлбергер: «Непрерывный анализ и геометрия являются только вырожденными аппроксимациями дискретного мира… Хотя дискретный анализ концептуально проще непрерывного, технически он, как правило, значительно сложнее. Поэтому в отсутствие компьютеров непрерывная геометрия и анализ были необходимыми упрощениями, позволявшими исследователям добиваться успехов в естественных науках и математике» [Цит. по: 228, с. 109].

Стираются прежние границы между классической («непрерывной») и дискретной математикой, поскольку во многих науках все чаще встречаются задачи, при решении которых одновременно используются как непрерывные, так и дискретные модели. Это привело к возникновению новой точки зрения на природу математики, ее характер, изменились взгляды на соотношение в ней непрерывного и дискретного. В результате предмет «Дискретная математика» («Основы дискретной математики») с 1995 г. стал постепенно включаться в государственные стандарты высшего профессионального образования по многим специальностям из подавляющего большинства направлений подготовки. В связи с этим следует отметить, что особенно важную роль в реализации дискретной линии в математическом образовании сыграло включение в 2000 г. этого предмета в государственные стандарты подготовки учителей математики и информатики, инициированное учебным пособием В. Л. Матросова, В. А. Стеценко [124].

Как показывает анализ государственных стандартов, *традиционные* для классических, технических, экономических и других университетов разделы дискретной математики, обычно изучаемые в рамках единого курса, проходятся будущими учителями математики, информатики и педагогами профессионального обучения в названных отраслях в рамках *отдельных* дисциплин (математическая логика, дискретная математика, теория алгоритмов и т. д.) либо входят в качестве разделов в другие дисциплины, что в настоящее время уже не соответствует фундаментальной роли современной дискретной математики в подготовке специалистов. Поэтому проблема использования интеграционного потенциала современной дискретной математики и, в частности, его применения при реализации межпредметных связей и оптимизации содержания подготовки студентов названных специальностей должна быть предметом особого внимания кафедр и преподавателей. Сейчас решением этой проблемы в условиях большой свободы (предоставляемой новыми стандартами подготовки педагогов) в значительной мере занимаются сами вузы, и поэтому эта крайне сложная и трудоемкая проблема решается кафедрами и преподавателями не всегда оптимальным образом. При этом далеко не всегда учитывается важная, подчеркиваемая В. Л. Матросовым, особенность оптимизации подготовки будущих педагогов, заключающаяся в том, что профессиональная компетентность учителя включает в себя фундаментальные знания в области соответствующей науки, основы которой он преподает в школе, мощную психолого-педагогическую и методическую подготовку, высокую общую культуру [125, с. 61].

Дискретная математика имеет фундаментальное значение в решении назревшей проблемы *сотрудничества* учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в отраслях машиностроения, электротехники и электроэнергетики при совместном отборе содержания вариативной математической и профессиональной подготовки студентов колледжей (техникумов). Решение этой проблемы имеет важное значение в углублении интеграции «психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогическая направленность)» рабочих для высокотехнологичных автоматизированных отраслей производства [250, с. 130].

Принимая во внимание изложенное выше, следует подчеркнуть, что в математической подготовке будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях обнаруживаются противоречия:

- между предметоцентрированностью обучения, основанного на недостаточном использовании связей математических, естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, и потребностью в использовании идей содержательного направления интеграции образования в углублении связей этих дисциплин;
- фундаментальной ролью дискретной математики в реализации идей содержательного направления интеграции, широким распространением идей и методов дискретной математики в различных областях науки и производства и отсутствием разработанной методической системы обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей;
- сохраняющейся ориентацией образовательных стандартов и учебных программ математической подготовки будущих педагогов этих направлений и профилей на информационно-знаниевую модель обучения и требованием перехода к компетентностной модели обучения, в которой систематическая научно-исследовательская работа студентов выступает важнейшим средством ее реализации;
- увеличением объема содержания необходимой математической подготовки студентов вследствие объективного расширения предмета математики и реальным сокращением числа учебных часов, отводимых на его освоение в условиях действующих образовательных стандартов;
- рассогласованием содержания обучения дискретной математике в школах, колледжах (техникумах) и в вузах на педагогических направлениях и профилях, что свидетельствует об отсутствии разработанных положений отбора содержания обучения ДМ;
- между узким пониманием профессионально-педагогической направленности математической подготовки студентов, нацеливающим только на обстоятельное овладение ими курсом математики и потребностью в выработке их умений использовать в своей работе идеи и методы современной дискретной и «непрерывной» математики, обеспечивающие широкий, компетентный взгляд на курс математики и информатики в школах, колледжах (техникумах) и возможность творческой организации профильного обучения обучающихся на основе этих предметов.

Важность разрешения данных противоречий делает актуальным *направление* предпринимаемого исследования, характеризуемое разработкой эффективной методической системы математической подготовки к профессиональной деятельности будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения (в отраслях машиностроения, электротехники и электроэнергетики) в аспекте интеграции образования.

Приведенные противоречия определяют проблему исследования, заключающуюся в необходимости разработки методической системы обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях в аспекте идей содержательного направления интеграции образования.

Разработка методической системы требует проведения целостного педагогического исследования, посвященного изучению влияния идей содержательного направления интеграции образования на разработку методологических и теоретических основ обучения студентов дискретной математике на базе этих идей, выявлению роли дискретной математики в углублении связей математических дисциплин и дисциплин профессионального цикла, роли дискретной математики в вариативном обучении и организации систематической научно-исследовательской работы студентов

При выявлении подходов в решении проблемы исследования сформулированы следующие конкретные задачи исследования:

1. Анализ содержательного направления интеграции образования.

2. Методологический анализ предметного содержания дискретной математики и ее роли в реализации идей содержательного направления интеграции в математической подготовке будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях.

3. Разработка научно-методической концепции обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях и, исходя из этого, – теоретически обоснованной и экспериментально проверенной методической системы обучения ДМ.

4. Разработка моделей методической системы обучения дискретной математике, способствующих переходу к компетентностной модели

обучения, в которой систематическая научно-исследовательская работа студентов выступает важнейшим средством ее реализации.

5. Разработка методики отбора конкретного содержания обучения дискретной математике на основе разработанных моделей обучения ДМ, способствующей преодолению рассогласованности содержания обучения дискретной математике в школах, колледжах (техникумах) и в вузах на педагогических специальностях.

6. Исследование методических аспектов обучения дискретной математике, способствующих обстоятельному овладению студентами математических факультетов, факультетов информатики и факультетов, готовящих педагогов профессионального обучения в названных отраслях, курсами математики и информатики; выработке у них умений использовать в своей работе идеи и методы современной дискретной математики, обеспечивающие широкий, компетентный взгляд на курс математики и информатики в школах, колледжах (техникумах) и возможность творческой организации профильного обучения обучающихся на основе этих предметов.

Комплексная методика исследования включала группы взаимодополняющих друг друга методов:

- анализа научно-педагогической, психологической, философской литературы и диссертационных исследований;
- теоретического анализа математической и методической литературы по теме исследования;
- теоретического анализа монографий, обзоров и журналов по дискретной математике и дискретному анализу, абстрактной алгебре, математической логике, теории алгоритмов, системам компьютерной математики (СКМ) и компьютерным технологиям (КТ) и смежным математическим дисциплинам;
- анализа вузовских и школьных программ, учебников и учебных пособий по дискретной математике для студентов вузов (включая более четырех десятков отечественных и зарубежных пособий);
- анализа организации процесса преподавания математики для будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях;
- выборочных исследований педагогической деятельности преподавателей педагогических вузов, профессионально-педагогических вузов и учителей общеобразовательных и средних специальных учеб-

ных заведений и выборочных наблюдений за учебно-познавательной деятельностью учащихся;

- широкого педагогического эксперимента по проверке основных теоретических положений исследования и эффективности методологических и теоретических основ обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях со статистической обработкой результатов эксперимента.

Разработанная научно-методическая концепция обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей в аспекте интеграции образования позволила:

1) создать методическую систему обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в названных отраслях в аспекте интеграции образования, реализующую математическую подготовку будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в перечисленных отраслях к профессиональной деятельности, ориентированную на требования новых государственных образовательных стандартов их подготовки и к содержанию математического образования, и к уровню его усвоения, и к условиям его реализации;

2) охарактеризовать следующие уровни представления содержания обучения дискретной математике студентов вышеуказанных факультетов: общего теоретического представления, учебного предмета, учебного материала;

3) разработать доступный и рациональный подход в изучении дискретной математики в вариативной части дисциплин профессионального цикла обучения будущих учителей математики и информатики на уровне бакалавриата, основанный на систематическом применении основных классических комбинаторных конфигураций и их свойств, производящих функций и асимптотических оценок и приближений в решении перечислительных задач дискретной математики и анализе эффективности алгоритмов решения задач математического моделирования;

4) предложить направления методической специализации учителей математики и информатики на уровне магистратуры в зависимости от направлений обучения дискретной математике, существующих в системе высшего профессионального образования;

5) исследовать подходы в реализации дискретной линии в интеграции психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогической направленности подготовки) педагогов профессионального обучения в названных отраслях на уровне бакалавриата в зависимости от специализации;

6) разработать концепцию отбора содержания дисциплины «Математическое моделирование в профессиональном образовании», предусмотренную в базовой части общенаучного цикла Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) подготовки магистров профессионального обучения.

Предложенная методическая система обучения студентов педагогических специальностей может быть широко внедрена в педагогическую практику различных высших педагогических учебных заведений. Она также может оказаться полезной преподавателям колледжей (техникумов) и училищ, занимающихся подготовкой высококвалифицированных специалистов среднего звена и рабочих для высокотехнологичных автоматизированных областей промышленного производства (машиностроения, энергетики и др.).

Данная работа написана на основе многолетнего опыта автора в преподавании математики в высших учебных заведениях (Российском государственном профессионально-педагогическом университете, Уральском государственном педагогическом университете) и в средних общеобразовательных учреждениях Екатеринбурга. Различные аспекты и результаты исследований, освещенные в книге, неоднократно докладывались автором и обсуждались более чем на сорока научных конференциях и семинарах разного уровня. Выдвинутые в работе положения, методические рекомендации внедрены в учебный процесс высших учебных заведений, колледжей (техникумов) и школ Екатеринбурга, Кирова, Самары, Вологды и других городов.

Глава 1

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ В АСПЕКТЕ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

В главе анализируются основные подходы в содержательном направлении интеграции высшего педагогического образования, предмет и функции современной ДМ и ее роль в современной математической культуре и модельной методологии. Исходя из этого характеризуется интеграционный потенциал дискретной математики в обучении математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения в отраслях машиностроения, электротехники и электроэнергетики (далее кратко – инженеров-педагогов, что естественно детерминирует содержательное поле их педагогической деятельности).

1.1. Понятие интеграции, ее уровни и направления в педагогическом образовании

Как известно, в результате интеграционных процессов в образовании в настоящее время выделились содержательное, глобальное, организационно-технологическое, институциональное, личностно-деятельностное, социально-педагогическое направления интеграции, ставшие основой развития теории интеграции образования. Но несмотря на развивающуюся теорию интеграции образования [9, 54, 81, 204, 258], в педагогической литературе до сих пор не сформировалось однозначной трактовки понятия интеграции образования, о чем свидетельствует использование однокоренных терминов «интегрированные и интегративные курсы», «интегрированная специальность», «интегрированная педагогическая квалификация», «интегрированное обучение», «интегрированный урок» и т. д. Это порождает определенное противоречие между органически цельной природой процесса образования и наличием в настоящее время мощной системы дезинтегрированного образования. Как отмечает

Н. К. Чапаев, в трактовках понятия интеграции часто имеют место редукции этого понятия к одной из его частей – дидактической, а нередко – методической [258]. В то же время для значительного числа работ характерен переход с общих философских положений, касающихся интеграции, на педагогическую область.

Любое научное понятие определяет способ мысленного воспроизведения того объекта, явления или процесса, которое оно определяет. Природа понятия интеграции такова, что оно является понятием об образовании как таковом. Поэтому интеграция может быть определена не в терминах дидактики, методики обучения, философии, а только через понятие современной культуры, отражением которой является образование. По мнению А. Я. Данилюка, интеграция есть понятие, в котором представлен фундаментальный организационный принцип образования как целостного феномена культуры [54]. Поэтому он рассматривает интеграцию как сложный вид коммуникации, в нашем случае – организации в образовательном процессе многосторонних связей различных предметов, изучаемых или не изучаемых будущими педагогами. В результате в образовании возникли различного рода интегрированные («междисциплинарные») программы, интегрированные курсы, интегрированные занятия, модульное обучение, метод проектов и пр.

Интеграция в педагогическом образовании исследовалась на трех основных уровнях ее функционирования – методологическом, теоретическом и практическом. В отечественной педагогической практике рассматривались проблемы методологии и методики объединительных процессов в педагогике и в том числе – межпредметных связей (Г. И. Батурина, В. С. Безрукова, Н. М. Берулава, В. И. Загвязинский и др.); аспекты интеграции производства и образования, научно-технической революции и образования (В. Б. Миронов, В. Г. Осипов, В. Н. Турченко и др.), интеграции педагогики и психологии (Э. Ф. Зеер, К. А. Зимняя, В. П. Зинченко и др.), педагогики и социологии (Р. Г. Гурова, Г. Е. Зборовский и др.). Зарубежными исследователями чаще всего анализировались интеграционные процессы в области содержания образования (А. Блюм, Г. Винтроп и др.), психофизиологические основы учебно-познавательной деятельности (Дж. Брунер, Ж. Пиаже и др.), природа интеллекта (Г. Гарднер, Дж. Кэролл, Дж. Томпсон и др.) и т. д.

В результате интеграции образования расширились его функции, возникли интегрированное обучение и технологии и появились новые средства осуществления интеграции, а образовательная среда стала базой интеграции знаний и развития гуманистических отношений.

В нашем исследовании важную роль играет то, что во всех интеграционных процессах в образовании основными тремя принципами интеграции стали [54]:

1) диалектическое единство интеграции и дифференциации:

2) антропоцентризм;

3) культуросообразность.

Действительно, во-первых, в ходе своего исторического развития образование, отвечая на вызовы современного ему общества, с неизбежностью «пульсирует»: периоды усиленной дифференциации сменяются периодами преимущественной интеграции.

Во-вторых, «антропоцентризм – это особое, исторически складывающееся отношение педагога к образовательному процессу, в котором центральное место и активная роль отводится ученику» [54, с. 265]. В отличие от этого, в традиционной дидактике, в которой педагог занимает центральное место в процессе обучения, главная задача – передать обучаемому определенную сумму научных знаний.

В-третьих, важность принципа культуросообразности в интеграции образования объясняется следующим. Фундаментализация, интеграция, дифференциация, гуманитаризация, компетентностный подход, внедрение информационно-коммуникационных технологий являются широко известными тенденциями модернизации современного образования, в том числе и математического; главной ее целью является гармоничное развитие личности и творческих способностей человека, повышение его интеллектуального и культурного потенциала. Однако анализ разного рода диспропорций между указанными тенденциями дает основание утверждать, что в модернизации образования и, в частности, в устранении этих диспропорций важную роль начинает играть современный культурологический подход, в основе которого лежит принцип культуросообразности как «один из важнейших принципов современного образования» [53, с. 3].

В результате интеграционных процессов в настоящее время, как уже отмечалось, выделились содержательное, организационно-технологическое, институциональное, личностно-деятельностное, социально-педагогическое и глобальное направления интеграции образования [81].

1.2. Анализ содержательного направления интеграции образования

Из всех сформировавшихся направлений интеграции образования подвергнем методологическому анализу содержательное направление интеграции образования, играющего ведущую роль в нашем исследовании.

Как показывает анализ литературы, посвященной интеграции образования [113, 117, 251, 258], содержательное направление является наиболее известным и разработанным к настоящему времени направлением интеграции образования, основными подходами в котором являются:

- интеграция на базе актуализации межпредметных и внутрипредметных связей через внедрение различного рода интегрированных программ, интегрированных курсов, модульного обучения, метода проектов и пр.;
- интеграция на основе фундаментализации образования;
- интеграция на основе компетентностного подхода.

Охарактеризуем важные особенности этих подходов, значимые для нашего исследования.

1.2.1. Интеграция на базе актуализации межпредметных и внутрипредметных связей

Русский мыслитель Д. И. Писарев в работе «Наша университетская наука» в 1863 г. писал о системе образования того времени: «…различные предметы не связываются в общий цикл знаний, не поддерживают друг друга, а стоят каждый сам по себе, стараясь вытеснить своего соседа… Каждый предмет бывает то победителем, то побежденным; история их бесконечных раздоров составляет историю умственной жизни каждого гимназиста; мозг ученика – вечное поле сражения, а пора экзаменов – время самых истребительных войн между отдельными предметами» [184, с. 131].

Прошло уже полтора века, но обрисованная Писаревым ситуация кардинально не изменилась, несмотря на определенные успехи в реализации межпредметных связей в процессе подготовки в средней и высшей школе.

Термин «межпредметные связи», по-видимому, впервые был введен в 1962 г. Ю. А. Самариным [205]. Однако признание и распространение новый термин получил не сразу. Он отсутствует в «Педагогической энциклопедии» (1964–1968), и нет его в учебных пособиях по педагогике, изданных до конца 60-х гг.

Впервые межпредметные связи были подвергнуты интенсивному исследованию в 60-е гг. XX в. в НИИ педагогики Академии педагогических наук РСФСР под руководством Б. Г. Ананьева и Ш. Н. Ганелина. Они рассматривались с позиции их роли в формировании системы знаний и основ научного мировоззрения. В результате, исходя из принципа преемственности, были раскрыты пути последовательного осуществления взаимосвязей между ведущими идеями и понятиями смежных курсов.

В 1970-х гг. межпредметные связи стали трактоваться большинством исследователей как принцип дидактики. «Межпредметные связи, отражая в учебном процессе связи реальной действительности, являются выражением закономерности объективного мира и в силу своего философского и дидактического значения определяют содержание, методы и формы обучения… Поэтому есть все основания считать межпредметные связи одним из принципов советской педагогики (дидактики)» [113, с. 36]. Но межпредметные связи устанавливаются между предметами и полностью от них зависят, поэтому межпредметность является средством развития предметности как стремление качественно усовершенствовать процесс подготовки специалистов и при этом не потерять ничего из изучаемой ими сути предметов. Поэтому, как отмечает А. Я. Данилюк, межпредметность нельзя считать принципом дидактики в противовес высокому дидактическому статусу предметности [54].

В 1970–80-х гг. проблема межпредметных связей становится одной из центральных проблем дидактики. Такое внимание к ней вызвала дискуссия, которая развернулась в 70-х гг. в связи с проведенным под руководством В. Н. Федоровой теоретико-экспериментальным исследованием и появлением первой монографии, посвященной данной проблеме [251]. В результате исследования этой проблемы было выявлено содержание взаимосвязей и даны их классификации. Классификации межпредметных и внутрипредметных связей осуществлялась на уровне знаний (язык, теория, приложения) [135], на уровне видов деятельности (методы обучения, организационные формы мыслительной, речевой и других видов деятельности обучающихся) [15], на уровне методов научного исследования и научного мышления, с позиции целостности процесса обучения (содержательно-информационные, операционно-деятельностные, организационно-методические) [117]. Постепенно одним из главных результатов исследований проблемы межпредметных связей стало осознание того, что реализация межпредметных и внутрипредметных связей возможна только на основе единства содержательной и процессуальной сторон обучения. Другим важным итогом исследований стало осознание того, что реализацию межпредметных связей надо рассматривать как средство интеграции, порождающее обобщенные системы знаний как междисциплинарных, так и внутрипредметных.

В нашем исследовании важно, в каких аспектах проявляется действие межпредметных связей и каково их назначение. В связи с этим А. И. Еремкин выделяет диалектические, логические, психологические и дидактические функции связей [65]. Основой типизации связей, по его мнению, могут служить *содержание наук, учебные знания и деятельность по их усвоению*. При этом «под путями осуществления межпредметных связей следует понимать способы и средства, с помощью которых преподаватель создает условия для реализации взаимосвязанного межпредметного обучения и соответствующим образом организует мыслительную деятельность студентов. По своему значению понятие "пути осуществления связей" приближается к понятию "методы", поскольку и методы, и пути осуществления связей предназначены для достижения определенных учебно-воспитательных целей. И те, и другие предполагают понимание цели, осознание ее достижения, а также выбор средств» [65, с. 103]. В соответствии с этим А. И. Еремкин выделяет информационно-рецептивный, репродуктивный, исследовательский и проблемный пути формирования межпредметной структуры учебных знаний.

Интерес к межпредметным связям усиливается; в настоящее время данный термин уже широко используется в педагогических исследованиях. Вместе с тем педагоги так и не пришли к единству во взглядах на межпредметные связи. Одним из главных результатов исследования межпредметных связей стал вывод о том, что реализация межпредметных (и внутрипредметных) связей должна основываться на единстве содержательной и процессуальной сторон обучения, лежащего в основе протекания *объединительных процессов* по всем элементам учебно-воспитательного процесса (содержание, формы, методы, средства и др.).

В свою очередь, эти объединительные процессы играют фундаментальную роль в системе подготовки будущих специалистов, в том числе и педагогов, что является главным аспектом нашего исследования.

Другим не менее важным результатом является теоретическое обоснование интегративной природы деятельности по внедрению в обучение межпредметных и внутрипредметных связей. Для нашего исследования важно то, что межпредметные связи стали рассматриваться как подход, на основе которого создаются *обобщенные системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний*, играющие фундаментальную роль в подготовке будущих учителей. Основной целью интегрированного междисциплинарного содержания профессионально-педагогической подготовки стало развитие их способностей решать педагогические проблемы различной сложности на основе обобщенных систем междисциплинарных знаний.

Интеграция на базе актуализации межпредметных и внутрипредметных связей стала первой «интеграционной идеей», появившейся в образовании. В дальнейшем идеи интеграции стали развиваться в рамках фундаментализации образования, вслед за тем – развивающего и личностно ориентированного подходов и, наконец, – компетентностного подхода, наиболее выпукло отражающего характерные особенности развивающего и личностно ориентированного подходов.

1.2.2. Интеграция на базе фундаментализации образования

Ректор Московского государственного университета (МГУ) В. Я. Садовничий называет *эталонным* лишь *фундаментальное научное образование*, главной целью которого служит распространение научного знания как части мировой культуры (см., например, [198]). Различные трактовки феномена фундаментализации «группируются» вокруг следующих направлений или тенденций [62, 63]:

1) **интеграция, или сближение, науки и образования**, предполагающая установление связей между ними:

2) универсализация знаний, умений, навыков, которая обусловливает **выделение структурных единиц научного знания**, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений;

3) **формирование общекультурных основ** в процессе обучения, при этом термин «общекультурные» понимается широко – в соответствии с объемным спектром трактовок понятия «культура».

Заметим, что в универсализации знаний важную роль играют межпредметные связи как подход, на основе которого создаются обобщенные системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний. В свою очередь, при формировании общекультурных основ в процессе обучения важную роль в последние десятилетия начинает играть современный культурологический подход, в основе которого – принцип культуросообразности как один из важнейших принципов интеграции современного образования.

В работах В. А. Тестова [230, 231], «вписывающиеся» в рамки содержательного направления интеграции образования, проблема фундаментальности современного образования обсуждается с позиций характеристики концепций содержания образования. Автор подчеркивает, что в педагогике отсутствует единое понимание термина «фундаментальность образования», к тому же он толкуется весьма противоречиво. Отмечаются, в частности, следующие направления трактовки понятия:

1) фундаментальность образования предусматривает более углубленную подготовку по заданному (в нашем случае педагогическому) направлению, изучение сложного круга вопросов по соответствующим областям науки;

2) фундаментальность образования предстает как сочетание разностороннего гуманитарного и естественнонаучного знания, возникающее вследствие изучения определенных вопросов по основополагающим областям знаний как соответствующего направления науки, так и общеобразовательных дисциплин (в нашем случае еще и инженерного знания в подготовке инженеров-педагогов);

3) фундаментальность высшего образования являет собой соединение научного знания и образовательного процесса (добавим – в том числе и *объединительного процесса* по всем элементам учебно-воспитательной работы, что уже отмечалось в подп. 1.2.1).

Последняя трактовка соответствует ранее отмечавшейся позиции В. А. Садовничего в отношении этого важнейшего понятия. В связи со вторым направлением трактовки этого понятия показательно мнение авторов пособия [214], высказанное, правда, в отношении общего образования: «Преодолеть дегуманизацию общего образования позволяет принцип *фундаментализации его содержания*. Он требует интеграции гуманитарного и естественнонаучного знания, установления преемственности и междисциплинарных связей, опоры на осознание учащимися сущности методологии познавательной и практической преобразующей деятельности. Обучение в этой связи предстает не только как способ получения знания и формирования умений и навыков, но и как средство вооружения школьников методами добывания новых знаний, самостоятельного приобретения умений и навыков» [214, с. 224].

В. А. Тестов обосновывает особенно важный в нашем исследовании вывод о том, что «фундаментальность образования означает направленность содержания образования на методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала обучаемого, обеспечивающие качественно новый уровень его интеллектуальной и эмоционально-нравственной культуры, создающие внутреннюю потребность в саморазвитии и самообразовании на протяжении всей жизни человека, способствующие адаптации личности в быстроизменяющихся социально-экономических и технологических условиях» [231, с. 8].

Методологически важные долгоживущие инвариантные элементы человеческой культуры характеризуются в работе Н. В. Садовникова как цельное, обобщающее знание, которое является «ядром и основой всех полученных студентом знаний, которое объединяло бы получаемые в процессе обучения знания в единую мировоззренческую систему» [201, с. 12].

При реализации принципа фундаментальности в профессиональной подготовке педагогов важно мнение В. Л. Матросова о том, что «в условиях быстро изменяющейся социокультурной среды лишь основательная научная подготовка может обеспечить профессиональную мобильность педагога. Резкий крен от фундаментальности и научности в сторону прагматизма грозит серьезными последствиями» [125, с. 89].

1.2.3. Интеграция на основе компетентностного подхода

При реализации принципа интеграции на основе компетентностного подхода будем исходить из классификации, примененной в проекте TUNING, в котором приняли участие более 100 университетов из 16 стран, подписавших Болонскую декларацию. В соответствии с этой классификацией были выделены две основные группы компетенций – общие и специальные (профессиональные). К общим компетенциям относят прежде всего когнитивные и методологические способности, в частности способность принятия решений и разрешения проблем.

В подготовке выпускников высшего профессионального учебного заведения особенно важны профессиональные компетенции специалиста. Содержание этого понятия известными учеными раскрывается различным образом, например (см. [64, с. 19]):

- как уровень образованности и общей культуры личности, характеризующейся овладением теоретическими средствами познавательной и практической деятельности (Б. С. Гершунский);
- психическое состояние, позволяющее действовать самостоятельно и ответственно; обладание человеком способностью и умением выполнять определенные трудовые функции (В. М. Монахов);
- как система знаний, умений и навыков, профессионально значимых качеств личности, обеспечивающих возможность выполнения профессиональных обязанностей определенного уровня (Н. И. Запрудский).

В настоящее время существует достаточно трудно и неоднозначно решаемая проблема определения содержания понятия профессиональных компетенций, в том числе и самих оснований их разграничения, классификации. Несмотря на все методологические и другие трудности в реализации компетентностного подхода в ФГОС профессионального образования по каждой специальности все же был выработан общий подход в разграничении ключевых компетенций на общекультурные и профессиональные.

Важность интеграции на основе компетентностного подхода отражена в ФГОС подготовки педагогов-бакалавров, например, в формулировке общекультурной компетенции как владения «культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения» (ОК-1) [247, с. 5]. Для формирования этой компетенции необходимы уже отмечавшиеся в подп. 1.2.2 методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, необходимые каждому специалисту в эпоху математизации наук [197].

В свою очередь, для формирования профессиональной компетенции «разрабатывать и реализовывать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях (ПК-1)» [247, с. 7] наряду с долгоживущими и инвариантными элементами человеческой культуры необходимо упоминавшееся ранее умение сочетать разносторонние гуманитарные и естественнонаучные знания и обобщенные системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний в соответствующей предметной области (см. подп. 1.2.1).

Значимость интеграции на основе компетентностного подхода отражена также в ФГОС подготовки педагогов-бакалавров профессионального обучения, например, в формулировке общекультурных компетенций: осознание «культурных ценностей, понимание роли [математической] культуры в жизнедеятельности человека (ОК-1)» [248, с. 7], способность «выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессионально-педагогической деятельности (ОК-16)», владение «процессом творчества (поиск идей, рефлексия, моделирование) (ОК-28)» [248, с. 9] и др. Актуальность интеграции отражена, например, в формулировке профессиональных компетенций как готовность «к участию в исследованиях проблем, возникающих в подготовке рабочих (специалистов)» (ПК-12).

Отметим, что анализ ФГОС подготовки педагогов-магистров и педагогов-магистров профессионального обучения также свидетельствует о важности интеграции их подготовки на основе компетентностного подхода. Например, в структуре основной образовательной программы ФГОС подготовки педагогов-магистров профессионального обучения предусмотрены дисциплины «История и методология научного исследования» и «Математическое моделирование в профессиональном образовании», для обучения которым необходим ряд ранее уже сформированных у студентов общекультурных и профессиональных компетенций (среди них и некоторые уже упоминавшиеся).

Дальнейший системный анализ общекультурных и профессиональных компетенций педагогов показывает их «интегральный» характер: «педагогическая компетенция – интегральное качество личности учителя, проявляющееся в общей способности и готовности ее к самостоятельной и успешной деятельности в условиях реальной ситуации, основанное на знаниях, умениях, навыках, опыте, ценностях и склонностях; совершенствующееся в процессе непрерывного образования и саморазвития» [116, с. 59].

В настоящее время в педагогическом сообществе идут дискуссии по поводу относительно новых понятий «профессионально-педагогическая компетенция» и «компетентность», возникших, по-видимому, в связи с широко известным принципом профессионально-педагогической направленности подготовки педагогов [130]. Ряд исследователей сущности и структуры этой компетентности – «В. А. Адольф, Н. В. Кузьмина, А. К. Маркова, Е. Л. Пупышева, Г. С. Саволайнен, Л. В. Шкерина и др. справедливо выделяют в профессионально-педагогической компетентности различные ее виды: методологическую, предметную, психолого-педагогическую, социокультурную, методическую и др.» [234, с. 65].

Как известно, существуют различные подходы в исследовании очень сложной проблемы развития методической компетентности будущего учителя, и в силу этого возникают различные трактовки понятия методической компетентности. Многие исследователи понимают под методической компетентностью развернутую систему знаний по вопросам конкретного построения обучения той или иной дисциплине или способность распознавать и решать различные методические задачи, возникающие в ходе педагогической деятельности, и др.

В настоящее время представляется наиболее важным аксиологический подход в определении этого понятия, отражающий его ценность в повышении профессионального уровня учителей математики и в подготовке будущих учителей математики в условиях вариативности современного образования. Поэтому нам ближе трактовка, согласно которой «компетентным следует называть такого учителя, который хорошо *владеет методикой обучения* и к тому же четко определил свое отношение к различным *методическим системам* и обладает *индивидуальным стилем деятельности*» (курсив мой. – *Е. П.*) [129, с. 10–11].

В исследовании методологии обучения ДМ студентов педагогических специальностей наряду с проведенным анализом основных подходов в содержательном направлении интеграции образования необходимы системный анализ истоков формирования дискретной математики как области науки, *анализ предмета и функций современной* ДМ и на этой основе – *ее роли в содержательном направлении интеграции образования.*

1.3. Предмет и функции современной дискретной математики

1.3.1. Системный анализ истоков формирования современной дискретной математики

Математика и совершаемая на ее основе компьютерная «революция» в последние два десятилетия стали объектами многочисленных исследований философов, психологов, педагогов и других ученых [1, 131, 133, 197, 198, 202, 221]. Исследование объекта и предмета современной математики служит основой для выявления разнообразных аспектов процесса математизации наук, под которым понимают процесс проникновения разнообразных математических методов в конкретные науки.

Для исследования гносеологических истоков формирования дискретной математики как области науки необходимо выявить те объективные основы в историческом и логическом развитии математики, которые привели к ее формированию. Объективные основы формирования ДМ выявляются в процессе краткого исторического и логического анализа *математического моделирования* в рамках всей современной модельной методологии как «связующего звена между научным знанием высокого уровня общности и конкретными задачами, требующими для своего решения приложения этого знания» [133, с. 4].

Ключевым в математическом моделировании является понятие «модель», происходящее от латинского *modulus*, что значит «образец». Оно возникло в античные времена в связи с обработкой металлов литьем. В ходе развития науки и техники это понятие постоянно трансформировалось. В современном понимании термин «модель» обозначает необозримое множество материальных и идеальных объектов, начиная с образцов одежды и обуви и заканчивая информационными моделями. Любая модель несет информацию о свойствах или характеристиках изучаемого объекта (оригинала), существенную для решаемой субъектом задачи.

Модели различаются в зависимости от классов решаемых на их основе задач, классов изучаемых на их основе объектов и формы представления информации для решения задач [133]. Так, по форме представления информации выделяют материальные и идеальные модели. К идеальным относятся модели, существующие в сознании человека и описываемые, как правило, на языке математики в виде тех или иных научных законов. В свою очередь, идеальные модели подразделяются на неформализованные, частично формализованные и вполне формализованные. Вполне формализованными являются *математические* и информационные модели. С философской точки зрения математические модели представляют собой «описания объектов с помощью математических символов» [197, с. 66]. В математике модель определяется как множество с заданным набором операций и отношений [82, 118]. При этом *тип* операции и отношения (т. е. способ определения или задания, арность, свойства и т. д.) имеет такое же важное значение в классификации математических моделей, как и атомный вес элемента в периодической системе элементов Менделеева. Например, математики, изучающие алгебраические операции и их свойства, называют себя *групповиками, полугрупповиками, кольцевиками, решеточниками* и т. д. в зависимости от конкретного типа алгебраических операций и их свойств, которые лежат в основе их исследований. Отметим, что понятие отображения и его разновидности (гомоморфизм, изоморфизм и т. д.) играют важнейшую роль при классификации или описании всех моделей из изучаемого класса.

Появление первых нетривиальных математических моделей было обусловлено развитием классической механики. Благодаря этим моделям, описываемым на языке математического анализа, были получены впечатляющие результаты – открытие И. Ньютоном законов небесной механики и, как следствие, новых планет Солнечной системы.

Исследования явлений живой природы (в частности, дарвиновская теория естественного отбора) привели позднее к появлению моделей теории вероятностей в биологии. Вероятностные математические модели проникли и в физику. Благодаря им созданы молекулярно-кинетическая теория газов и затем статистическая и квантовая механика. Квантовая теория вызвала качественное изменение естественнонаучных представлений о причинных связях и закономерностях объективно существующего мира.

На этом этапе развития математики возникает особый *стиль* мышления, характерный для начавшегося исторического периода высокой эффективности математического моделирования в изучении явлений природы и общества. Математическое моделирование становится инструментом открытия новых закономерностей, которые нельзя установить экспериментально. Открытие «на кончике пера» П. Дираком частицы позитрона и Х. Юкавой частицы мезона является ярким тому подтверждением. Наступил этап «опережающего развития математики по отношению к потребностям других наук и техники» [1, с. 12]. Причем для нас важным является то, что формализованный язык математики был *расширен* формализованным на его основе содержанием отличных от него областей знания: квантовой и статистической механики и биологии. В результате этого возникла следующая цепочка математического моделирования: реальная задача – перевод задачи на адекватный математический язык – разработка математической модели решения задачи.

Следующий этап в математическом моделировании связан со становлением математической логики, первоначальное предназначение которой состояло в исследовании основ самой математики. Благодаря трудам целой плеяды выдающихся математиков (П. Бернайса, Г. Вейля, К. Геделя, Д. Гильберта, А. Н. Колмогорова А. Черча и др.) были достигнуты основополагающие результаты: логика стала строиться в виде аксиоматической теории, и (что принципиально важно) на основе формализованного языка логики возникла тенденция к дальнейшей *логической формализации всей науки* (образно говоря, математической «стандартизации» любого научного исследования). На основе интеграции идей математической логики и абстрактной алгебры в 1930–40-е гг. в трудах выдающихся математиков А. И. Мальцева, Э. Поста, А. Робинсона, А. М. Тьюринга и других ученых были заложены основы теории математических моделей и алгоритмов, что ознаменовало *начало* эпохи всеобщей компьютеризации.

Созданные воображением их создателей на бумаге машины Э. Поста и А. М. Тьюринга и разработанные на этой теоретической основе в 1940–50-х гг. первые ЭВМ дали мощнейший толчок развитию математического моделирования. Оказалось, что первые ЭВМ, предназначенные для автоматизации счета, могут быть универсальными преобразователями информации и выполнять не только вычислительные, но и логические операции, и, вследствие этого, обрабатывать самую разнообразную научную информацию (экономическую, социологическую и др.). Благодаря ЭВМ стало возможно управлять технологическими процессами, осуществлять планирование и управление, моделировать процессы живой природы. Проверка гипотез путем проведения реального эксперимента с изучаемым объектом или явлением (натурный эксперимент), которая часто бывает невозможна, стала все чаще заменяться проверкой гипотезы с помощью математической модели и дальнейших расчетов на ЭВМ («машинный» эксперимент). Постепенно в обиход вошло понятие *этапов*, или *полной цепочки*, использования компьютера в решении задач [99]: реальная задача, перевод задачи на адекватный математический язык, разработка математической модели решения задачи, составление алгоритма решения и соответствующей ему программы для ЭВМ, симуляция решения, анализ результатов. Впервые стал возможен так называемый машинный, или вычислительный, эксперимент. Вычислительный эксперимент и стал *гносеологической причиной* появления и формирования ДМ.

В дальнейшем основы предмета ДМ углублялись как в процессе развития самой математики, так и в процессе совершенствования математического моделирования. В результате этого в 60-е гг. XX в. произошла повсеместная замена натурного эксперимента на математический. Для осуществления такого эксперимента нет необходимости изготовлять натурную экспериментальную установку. Суть математического эксперимента состоит в том, что в его процессе на основе анализа промежуточных результатов первоначальная математическая модель изучаемого объекта заменяется последующей, более точно описывающей объект. Серия заменяющих друг друга моделей позволяет найти модель, наилучшим образом описывающую исследуемый объект. Поэтому очевидное преимущество математического эксперимента перед натурным заключается в его большей точности, дешевизне и доступности.

Распространившийся во всех областях производства математический эксперимент послужил основной причиной совершенствования ЭВМ и их программного обеспечения, в результате чего расширялись возможности использования ЭВМ в математическом моделировании. Еще большую роль в исследованиях стало играть построение полной цепочки использования компьютера. Концептуальнообразующими терминами ДМ стали «математический язык», «математическая модель», «алгоритм». Поскольку процесс вычисления на ЭВМ дискретный, слово «дискретный» в названии «дискретная математика» подчеркивает ее фундаментальную роль в математическом моделировании с использованием ЭВМ.

Наряду с понятиями «математический язык», «модель», «алгоритм» такие ключевые понятия ДМ, как «отображение», «изоморфизм», «алгебраическая операция», «высказывание», «предикат», «частичный порядок» являются *фундаментальными* для всей математики, играют объединяющую роль внутри самой математики и лежат в основе *обобщенной системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний*, имеющих важное значение при интеграции обучения на основе реализации межпредметных связей и поэтому играющих фундаментальную роль в подготовке будущих учителей (см. подп. 1.2.2). При этом важно, что благодаря понятию математической модели динамические, стохастические, топологические, порядковые, алгебраические модели (структуры) стали синонимами соответствующих областей *единого* математического «пространства». Отображение одной модели на другую является эффективным средством решения внутриматематических задач – от доказательства справедливости той или иной теоремы или формулы до проверки непротиворечивости аксиоматики вновь разрабатываемой математической теории. Примеры фундаментальности понятий ДМ трудно перечислить.

В настоящее время происходит процесс математизации наук, выражающийся в применении математических методов для поиска новых закономерностей в науках, построения более глубоких теорий и в особенности создания специальных формализованных языков наук [23]. При этом моделирование определяет суть и направления современной математизации наук, а дискретная математика наряду с классической «непрерывной» математикой стала основой математического моделирования с использованием компьютера во многих областях исследований и поэтому важнейшим звеном математического образования. Таковы гносеологические истоки формирования современной ДМ.

1.3.2. Предмет современной дискретной математики

1.3.2.1. Об онтологии дискретной математики

О предмете дискретной математики можно говорить как о модели или об особой стороне реального объекта науки дискретной математики, «замещающей» исследуемый объект. Так же, как и предмет методики обучения математике [208, с. 26], предмет дискретной математики является самостоятельной научной областью со своими методологией, теорией, приложениями и концепциями. При этом любой предмет, в том числе и предмет ДМ, как сторона объекта, всегда онтологичен, т. е. может быть выражен в общих категориях и закономерностях бытия. Поэтому под предметом науки понимают зафиксированные в опыте и включенные в процесс практической деятельности стороны, свойства и отношения исследуемого объекта данной отрасли знания [138].

Как уже установлено ранее, главным элементом онтологии дискретной математики является понятие полной цепочки использования компьютера в математическом моделировании, которая и стала *объективной основой* появления и формирования дискретной математики. Понятия математического языка, модели, алгоритма и др., являющиеся терминологической основой указанной цепочки, существовали и ранее. Но они стали ключевыми понятиями дискретной математики только после того, как появились первые ЭВМ и примеры реализации полной цепочки использования компьютера.

Формирование ДМ как предмета неразрывно связано со становлением «кибернетики как науки об общих закономерностях управления в технических системах и живой природе» [197, с. 43]. В результате развития кибернетики современная дискретная математика стала математической основой информатизации и, в частности, моделирования с использованием компьютеров. При изучении (моделировании) сложных промышленных, социальных и других систем, разработке методов управления ими «роль дискретного чрезвычайно велика» [87, с. 4].

В процессе формирования предмета ДМ появились существенно различающиеся трактовки и даже разные названия предмета «Дискретная математика»: конечная математика [83], дискретный анализ (по аналогии с функциональным анализом) [123], компьютерная математика [105].

Для дальнейшего выявления специфики и содержания предмета «Дискретная математика» кратко охарактеризуем данные термины.

1.3.2.2. Конечная математика

Редактор русского издания книги Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» (1963) И. М. Ягломв предисловии к ней пишет: «Возникшие в последние два десятилетия (1945–1965 гг. – *Е. П.*) новые пути приложения математики, связанные с комплексом идей и методов, ныне объединяемых собирательным термином кибернетика, повлекли глубокие изменения в самой математической науке. Они не только вызвали к жизни новые большие направления теоретической математики… но и способствовали изменению установившихся взглядов на ранее сложившиеся разделы. При этом наиболее существенным здесь является, по-видимому, то, что разделы математики, не связанные с представлением о бесконечных множествах, пределах и непрерывности, представляются нам теперь гораздо более содержательными и важными, чем это думали математики XIX в. или первой половины XX в. Если, начиная с XVII в., главенствующее положение в математике занимало изучение гладких функций непрерывно меняющегося аргумента, являющееся основой всех приложений математики к физике и к технике, то сегодня (в 60-е гг. – *Е. П.*) можно говорить о возрождении интереса к так сказать "доньютоновской" или "конечной" математике, оперирующей лишь с конечными множествами; при этом возникли новые подходы к этой ветви математики, идущие в основном от математической логики.

Этот поворот в науке связан в первую очередь с появлением универсальных электронных цифровых вычислительных машин… Прилагательное "цифровая" в названии этих машин подчеркивает принципиально дискретный, "конечный" их характер, связанный со специфическими особенностями используемых в них электронных устройств» [83, с. 5].

Основное содержание книги формировалось под влиянием бихевиоризма, поэтому в него вошли следующие темы (главы): «Составные высказывания», «Множества и подмножества», «Разбиения и сочетания», «Теория вероятностей», «Векторы и матрицы», «Линейное программирование» и «Теория игр», а также тема, посвященная бихевиористским проблемам. Напомним, что сторонники бихевиоризма ставят во главу угла те факты поведения человека и животных, которые поддаются непосредственному наблюдению. При этом считается, что действующие в человеческом обществе законы могут быть выведены из наблюдений над поведением людей в различных ситуациях. Наряду с отмеченной «бихевиористской» тематикой содержание книги в значительной мере определялось особенностями математического моделирования в социологии, генетике, психологии, антропологии, экономике.

Таким образом, ДМ отождествлялась с той конечной математикой, которая необходима для развития кибернетики и математического моделирования (в гуманитарной области) на ЭВМ.

1.3.2.3. Дискретный анализ

В «Математической энциклопедии» дискретный анализ определяется как «область математики, занимающаяся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений» [123, т. 2, стб. 207]. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, например, конечные группы, конечные графы, а также некоторые математические модели преобразователей дискретной информации, конечные автоматы, машины Тьюринга и др.

В упомянутой энциклопедии констатируется, что в математике допускается расширение предмета дискретного анализа до произвольных дискретных структур, в результате чего приходят к дискретной математике, отождествляемой с дискретным анализом. К числу таких структур могут быть отнесены некоторые алгебраические системы, бесконечные графы, некоторые виды вычислительных сред (например, однородные структуры и т. п.). Отмечается, что «в качестве синонима понятий дискретного анализа и дискретной математики иногда употребляется термин “конечная математика”» [123, т. 2, стб. 208].

Во избежание двусмысленности подчеркнем, что нами, так же как и в энциклопедии, «дискретный анализ понимается в широком смысле, включающем дискретную математику» [123, т. 2, стб. 208].

«В отличие от дискретного анализа, классическая математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь и, в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает – дискретную или непрерывную. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой – часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих одновременно как дискретными, так и непрерывными свойствами» [123, т. 2, стб. 208]. Необходимость исследования таких моделей привела к появлению понятия конкретной математики [49]. Слово «*concrete*» здесь используется не в своем обычном значении (это не только «конкретный», а еще и «бетонный»), а как комбинация слов «*contunious*» и «*discrete*», что символизирует единство и гармонию методов непрерывного и дискретного анализа [195]. Это особенно важно в стохастическом и численном моделировании. К. К. Рыбников считает, что наряду с изучением обычных курсов высшей математики необходимо формировать культуру численного дискретного моделирования, основанного на связях непрерывного и дискретного начал математических исследований [199].

«Дискретный анализ представляет собой важное направление в математике, имеющее характерные для него предмет исследования, методы и задачи, специфика которых обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа в дискретном анализе от основополагающих понятий классической математики – предела и непрерывности – и (в связи с этим) тем, что для многих задач дискретного анализа сильные средства классической математики оказываются, как правило, мало приемлемыми» [123, т. 2, стб. 208]. Поэтому с помощью термина «дискретность» (как антипода термина «непрерывность») впервые стали выделять дискретный анализ как некую объективно существующую область математики, необходимую в физических и технических исследованиях.

К разделам дискретного анализа в первую очередь отнесены комбинаторный анализ, теория графов, теория кодирования и декодирования, теория функциональных систем и некоторые другие [123]. «Часто под термином “дискретный анализ” (в предположении, что его предмет исчерпывается конечными структурами) понимается именно совокупность перечисленных дисциплин. За счет расширения понимания его круга вопросов возможно и более широкое толкование дискретного анализа. С этой точки зрения к дискретному анализу могут быть *отнесены* также как целые разделы математики, например, математическая логика, так и части таких разделов, как теория чисел, алгебра, вычислительная математика, теория вероятностей и некоторые другие, в которых изучаемый объект носит дискретный характер» [123, т. 2, стб. 208]. Важную роль в зарождении дискретного анализа сыграли элементы комбинаторного анализа («комбинаторных вычислений») и дискретной теории вероятностей [45, с. 4]. Важнейшие понятия алгебры (группа, поле, кольцо и др.) имеют по существу дискретную природу.

«Наибольшего расцвета дискретный анализ достиг в связи с появлением кибернетики и ее теоретической части – математической кибернетики» [123, т. 2, стб. 208], которая является важным поставщиком идей и задач для дискретного анализа, вызывая в нем новые направления. Так, в процессе решения разнообразных прикладных вопросов анализ понятий вычислимости и алгоритма привел к возникновению важнейшего раздела математической логики – теории алгоритмов. В то же время в математической кибернетике (и «взаимосвязанной» с ней информатике) используются результаты дискретного анализа.

Итак, в рамках предмета «Дискретная математика» допускается использование бесконечных структур [123], что необходимо для разработки новых поколений ЭВМ, программного обеспечения (в вычислительной математике, стохастическом моделировании и др.). При этом методологическим содержанием предмета «Дискретная математика» фактически объявляется совокупность идей, методов «кибернетического» характера, исключающего использование тем или иным образом бесконечности в достижении результата математических исследований (в частности, использование бесконечности в операциях и операции той или иной формы предельного перехода).

1.3.2.4. Компьютерная математика

Книга «Компьютерная математика» Д. Кука и Г. Гейза «содержит материал из тех областей современной математики, которые имеют отношения к вычислениям и, как следствие, обеспечивает читателя средством для сжатого и точного описания многих проблем компьютерной науки (теоретической информатики. – *Е. П.*)» [105, с. 7]. При этом особое внимание обращается на определение понятий математики «конструктивным» образом, т. е., иными словами, в рамках конструктивной математики [123, т. 2, стб. 1042]. Авторы книги «Компьютерная математика» ставили перед собой цель – изложить важные разделы современной математики, представляющие общий интерес, а не только прикладной. В частности, авторы стремились отразить в содержании влияние компьютерной науки на внутриматематические исследования. Поэтому, по-видимому, впервые в книгу включена глава «Языки и грамматики», имеющая большое значение в компьютерной компиляции, системах моделирования, теории вычислений, компьютерной графике, вычислительной геометрии и автоматическом проектировании. Кроме того, в книге изложены основные теоретико-множественные понятия и факты, отношения и функции, конечные арифметики, основные алгебраические структуры, элементы теории графов, конечные автоматы, компьютерная геометрия, а также матрицы на конечных множествах и матрицы некоторого другого вида.

1.3.3. Дискретная математика – математическая основа информатики

Итак, можно сделать вывод, что важное значение в описании дискретных процессов и явлений имеют методы конструктивной математики и особенно конструктивной логики. Следует отметить, что в вышедшей недавно книге Б. Б. Самсонова, Е. М. Плохова, А. И. Филоненкова «Компьютерная математика (основание информатики)» [206] особое внимание уделено конструктивной алгебре, которая необходима для изучения теоретических основ цифровой информатики и эффективных алгоритмов обработки кодов и цифровых сигналов. Интересно отметить, что в содержание этой книги впервые вошел раздел современной алгебры «Теория характеров конечных алгебраических структур (и некоторых преобразований на них)».

Таким образом, в обеих книгах [105, 206] излагаются теоретические основы создания программного обеспечения.

В книгах, посвященных ДМ, наряду с теоретическими основами моделирования и программного обеспечения излагаются теоретические основы разработки новой вычислительной техники [45, 104, 224], например, элементы теории автоматов, необходимые для проектирования цифровых устройств [217], анализ и синтез основных элементов вычислительных устройств (контактных схем, мультиплексоров и др.) [45, 224].

В более чем двух десятках книг, вышедших после книги Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» [83], утвердилось окончательное название предмета – «Дискретная математика». Концептуальная роль ДМ как учебного предмета в профессиональном обучении выявляется при изучении государственных стандартов высшего профессионального образования. В 1994–2005 гг.

раздел «Дискретная математика» был включен в содержание дисциплины «Математика» для многих специальностей. Следует подчеркнуть, что специальности, профессиональная подготовка по которым предусматривает обучение ДМ, входят в подавляющее большинство направлений подготовки согласно госстандартам. Аналогичная ситуация наблюдается и в системе среднего профессионального образования. В свое время В. М. Глушков указывал, что «расширение области математизации знания… потребует и будет опираться на развитие новых разделов математики, прежде всего – новых разделов дискретной математики» [39, с. 122].

Итак, на основании проанализированной литературы предмет «Дискретная математика» можно охарактеризовать следующим образом. Поскольку процесс вычисления на компьютере дискретный, основной особенностью многих исследований ДМ «является отсутствие предельного перехода и непрерывности, характерных для классической математики» [45, с. 3]. Поэтому с помощью термина «дискретность» как антипода термина «непрерывность» выделяется предмет дискретной математики как объективно существующая область математики, являющаяся математической основой моделирования с использованием компьютера в самых разных областях науки. При этом совокупность идей, методов ДМ исключает использование тем или иным образом бесконечности в достижении результата научных исследований, проводимых с помощью компьютеров (в частности, бесконечности в операциях и операции той или иной формы предельного перехода). Вследствие этого дискретная математика является математической основой информатики, в частности, создания программного обеспечения, разработки вычислительной техники (в том числе и появившихся совсем недавно биовычислительных устройств (ДНК-компьютеров) с уникальными вычислительными возможностями) [147]. Так, в разработке и совершенствовании программирования определяющую роль играет раздел прикладной дискретной математики с названием «*Математические основы информатики и программирования*», основным содержанием которого являются формальные языки и грамматики, алгоритмические системы, языки программирования, структуры и алгоритмы обработки данных, теория вычислительной сложности (см. тематику журнала «Прикладная дискретная математика»).

Благодаря компьютеризации через ДМ отражаются резонансные воздействия практики на внутриматематические исследования современной математики. Поэтому дискретная математика постепенно становится фундаментальной основой внутриматематических исследований, олицетворяющей единство методов современной и классической математики. В дискретной математике появляются новые разделы современной математики, представляющие не только прикладной, но и общематематический интерес.

1.3.4. Функции современной дискретной математики

1.3.4.1. Функции дискретной математики в математическом моделировании

Возрастание роли доминирующих в ДМ алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем (как средств, методов математического познания) в естественнонаучных исследованиях в физике, генетике, молекулярной биологии, кристаллографии и других науках обусловлено тем, что современный компьютер является не столько вычислительным средством, сколько весьма совершенным инструментом для моделирования самых разнообразных явлений и процессов. Как известно, с середины прошлого века методы математизации наук, основанные на использовании абстрактных структур современной математики, начали постепенно проникать не только в конкретные науки, но и в технику [131, с. 118]. Естественно, с возрастанием роли этих структур и схем в математическом моделировании (в частности, в «машинном» эксперименте) они начинают доминировать в ДМ. И это является главной причиной того, что дискретная математика стала основой гармоничного сочетания формального языка математики, неформального языка науки, в области которой проводится исследование, и уникальных возможностей современных компьютеров (например, в исследованиях в области экономики и управления). «Методы так называемой дискретной математики широко используются в современной практике моделирования в управлении, во всех случаях качественного анализа сложных проблем управления, в ситуациях, с которыми сталкиваешься каждый раз, когда испытываешь острую потребность в какой-либо систематизации того, что известно по интересующей проблеме, в ее *структуризации* (курсив мой. – *Е. П.*), представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа как “вручную”, так и с использованием современных средств компьютерной техники» [132, с. 4–5]. В качественном анализе сложных проблем математического моделирования (в том числе и в решении проблем различных систем управления) в последние десятилетия особо важную роль стали играть комбинаторные схемы, поскольку они являются фундаментальной основой методов вероятностно-статистического (в общенаучной терминологии – стохастического [133, 189]) моделирования.

1.3.4.2. Функции дискретной математики в дальнейшем совершенствовании систем компьютерной математики

Системы компьютерной математики «интегрируют в себе современный интерфейс пользователя, решатели математических задач – как численных, так и аналитических (символьных) – и мощные средства графики… Они вторглись в наиболее интеллектуальную сферу деятельности математиков-аналитиков и ученых-теоретиков, традиционно относящихся к элите научных работников, занятой решением особенно сложных и каверзных математических и научно-технических задач – таких, например, как задачи теории поля, аэродинамики, космонавтики, математического моделирования систем и т. д.» [61, с. 15]. К настоящему времени по СКМ, в частности по наиболее распространенной системе Mathematica, выпущены сотни (!) книг. Следует отметить, что важнейшим приложением системы Mathematica (3.0–3.5) является ее использование в обучении математике. Т. В. Капустиной исследованы методологические аспекты ее использования в этом обучении [80].

Совершенствование СКМ происходит на основе разработки теории формальных языков. По мнению А. И. Белоусова и С. Б. Ткачева, «разумно считать, что ядро дискретной математики образует именно математическая теория языков, точнее, область этой теории, называемая теорией формальных языков. Слово «формальный» подчеркивает, что в этой теории изучаются в основном искусственные языки, специально созданные для каких-то целей: языки программирования, языки математики и т. п.» [10, с. 5]. При этом доминирующим в современной теории формальных языков является алгебраический подход, т. е. подход, основанный на алгебраических структурах (в частности, полукольцах). Теория формальных языков также опирается и на теорию полугрупп, т. е. класса моделей, определяемых с помощью одной бинарной алгебраической операции, обладающей ассоциативным свойством [107]. Кроме того, важную роль в разработке этой теории играют логические, алгоритмические и комбинаторные схемы (методы), теория графов.

В связи с изложенным следует еще раз отметить, что в тематике журнала «Прикладная дискретная математика» имеется раздел с названием «Математические основы информатики и программирования», основным содержанием которого являются формальные языки и грамматики, алгоритмические системы, языки программирования, структуры и алгоритмы обработки данных, теория вычислительной сложности.

1.3.4.3. Функции дискретной математики в развитии компьютерных технологий

По мнению Б. Н. Иванова, «сегодня наиболее значимой областью применения методов дискретной математики является область компьютерных технологий. Это объясняется необходимостью создания и эксплуатации электронных вычислительных машин, средств передачи и обработки информации, автоматизированных систем управления и проектирования» [70, с. 6].

Фундаментальной основой совершенствования компьютерных технологий служит такой раздел дискретной математики, как теория автоматов. Автомат определяется как многоосновная модель (в общенаучной терминологии – алгебраическая структура), заданная на трех конечных множествах с определенными на них двумя бинарными алгебраическими операциями. Классификация автоматов осуществляется с помощью отображений многоосновных моделей, являющихся гомо- и изоморфизмами. Доминирующим в компьютерных технологиях по-прежнему является подход, основанный на алгебраических структурах, в частности, группах и булевых алгебрах. Кроме того, важную роль в разработке КТ играют алгоритмические схемы (методы) и теория графов [13, 70, 107].

В связи с изложенным интересно отметить, что в журнале «Дискретный анализ и исследование операций» имеются разделы с названиями «Теория автоматов», «Теория функциональных систем», «Синтез и сложность управляющих систем», играющие определяющую роль в разработке и совершенствовании КТ (более узко – вычислительной техники).

Как показывает анализ литературы, СКМ и КТ являются теоретической основой разработки искусственного интеллекта [40, 48, 190, 226], тесно связанного с формализацией мыслительных процессов [40].

1.3.4.4. Функции дискретной математики во внутриматематических исследованиях

Возрастание роли ДМ во внутриматематических исследованиях основано на математическом эксперименте, занимающем промежуточное место между классическим дедуктивным и классическим экспериментальным методами исследования [131, с. 141]. Вследствие этого довольно часто при установлении истинности тех или иных утверждений об исследуемых математических структурах сначала проверяют их справедливость на «малых» структурах, т. е. структурах с небольшим числом элементов, которые играют роль своеобразного полигона при проверке истинности утверждения. Для этого в последние годы созданы самые разнообразные пакеты прикладных программ (например, для исследований алгебраических структур).

1.3.4.5. Функции дискретной математики в стохастическом моделировании

В последние десятилетия вследствие всеобщей компьютеризации важнейшую роль стало играть так называемое стохастическое моделирование, поскольку натурный эксперимент заменил эксперимент на компьютере.

В сложившейся сегодня научной терминологии понятию «жестко детерминированный» (т. е. закономерный, причинно обусловленный) противостоит ряд альтернативных понятий: случайный, стохастический, вероятностный, статистический, вероятно-статистический. Все они являются синонимами, констатирующими существование процессов или явлений, в которых состояние объекта исследования или явления нельзя *точно* предсказать по данным о его прошлых состояниях, как нельзя и *точно* описать свойства этого объекта.

Именно по этой причине в 40-х гг. прошлого столетия в связи с развитием средств связи, радиотехники, систем автоматического управления различными процессами фундаментальную математику охватил вероятностно-статистический бум (исследования Н. Винера, А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина и др.). Более того, на базе математической статистики возникли общая статистика и «частные» статистики (в психологии, социологии, медицине и других научных областях).

В настоящее время изучение математической статистики (или ее элементов) предусмотрено на очень многих специальностях из всех направлений подготовки государственных стандартов высшего профессионального образования. Заметим, что статистическая линия в последние десятилетия активно внедряется в содержание школьного математического образования.

Анализ роли в ДМ языка доминирующих в ней математических структур и схем свидетельствует об особой важности в стохастическом моделировании современной комбинаторики (комбинаторных схем).

Действительно, хорошо известна связь между комбинаторными и вероятностными задачами, сыгравшая значительную роль при становлении теории вероятности как науки. Эта связь находит в настоящее время особенно наглядное выражение в начальной стадии изучения теории вероятностей. По этому поводу достаточно упомянуть задачи, решаемые на основе классического определения вероятности, схемы Бернулли и биномиального распределения. Однако подлинное значение комбинаторных схем в стохастическом моделировании особенно ярко раскрывается на языке комбинаторного анализа (см., например, [108, 191] и др.), демонстрирующего много впечатляющих примеров совместного использования языков математического анализа и ДМ. Эта интенсивно развивающаяся область современной математики дает, например, возможность приближенного асимптотического описания с любой степенью точности характеристик трудно прогнозируемых процессов или явлений (в осуществлении связи, в радиотехнике, химических технологиях и т. д.), что невозможно сделать без объединения указанных языков. В подтверждение важности методов комбинаторного анализа отметим, что основные его методы, такие, например, как методы рекуррентных соотношений и производящих функций, постепенно начинают входить в программы обучения математике высших учебных заведений (они были включены в новые Федеральные стандарты обучения ДМ в педагогических вузах по специальности «Информатика»).

Важное значение в стохастическом моделировании имеют порядковые структуры и алгоритмические схемы ДМ, позволяющие так или иначе упорядочить и алгоритмизировать исследование трудно прогнозируемых процессов или явлений. Например, теория графов, бинарные отношения и определяемые на этой основе отношения частичного порядка и решетки играют важнейшую роль в генетических исследованиях в биологии и медицине. Решение подобного рода прикладных системных задач (генетических, социально-экологических, экономических, производственных, оборонных и т. д.) возможно только на основе нестрогих эвристико-комбинаторных, алгоритмических, порядковых «человеко-машинных моделей» [133].

По мере совершенствования методов стохастического моделирования, основанных на комбинаторных, алгоритмических схемах и порядковых структурах, их начинают постепенно включать в программную и учебную литературу для студентов и даже для школьников (для классов и школ с углубленным изучением математики). В этой связи интересно отметить, что изучение начальных элементов комбинаторики и математической статистики предусмотрено в комплекте учебников по математике для 5–10-го классов под ред. Г. В. Дорофеева (для 5–6-го классов – под ред. Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина), изучение логических и комбинаторных схем – в учебнике для 10-го класса из этого же комплекта. Изучение комбинаторных схем и элементов теории вероятностей предусмотрено в учебном пособии для 11-го класса [24]. В последние годы появилось много публикаций, в которых отражена роль доминирующих в ДМ математических структур и схем в стохастическом моделировании. Например, в статьях Е. А. Бунимовича и В. Н. Федосеева приведены вероятностные задачи для школьников, решаемые на языке комбинаторных понятий с использованием графов [21, 252].

1.3.5. Роль дискретной математики в реализации принципа культуросообразности

Как уже отмечалось в п. 1.2, анализ разного рода диспропорций между различными тенденциями современного образования дает основание утверждать, что в модернизации образования и, в частности, в устранении этих диспропорций важную роль начинает играть современный культурологический подход, в основе которого лежит принцип культуросообразности, являющийся одним из трех принципов интеграции образования (см. п. 1.1).

Как известно, «математика – это всечеловеческая наука… Математический язык (в отличие от национального языка) всечеловечен, и математическая истина не имеет национальных границ» [233, с. 3]. Поэтому анализ сути принципа культуросообразности применительно к математическому образованию показывает, что та ступень современной «всечеловеческой» математической культуры, на которой мы находимся в данное время, предъявляет к нам требование, чтобы мы действовали сообразно с ней, если только хотим добиться положительных результатов математического образования.

Возникает закономерный вопрос: «Каким должно быть современное (математическое. – *Е. П.*) образование, чтобы соответствовать духу современной культуры с ее мозаичностью, объемностью, тенденцией к непрерывному обновлению?» [53, с. 7].

Поиск ответа на этот вопрос предполагает анализ историко-философских проблем развития математики, затрагивающих содержательную концептуальную основу модернизации системы математического образования в контексте современной культуры, и организационно-управленческую, обусловливающих формирование базисных оснований различных моделей систем математического образования на трех его уровнях: в профессиональном математическом образовании, общем математическом образовании и математическом просвещении. Как отмечает В. А. Садовничий, все реформы математического образования связаны с попытками навести мосты между этими составляющими [202]. Сразу отметим, что культурологический анализ сложных организационно-управленческих проблем модернизации математического образования лежит вне рамок данного исследования.

Историко-философский анализ проблем развития математики показывает, что в методологии реализации культурологического подхода в математическом образовании определяющую роль играет анализ характерных особенностей процесса математизации наук [197], отражающего формирование на рубеже веков современной культуры приложений математики в самых разнообразных областях исследований. Наиболее яркими проявлениями этой новой ступени «всечеловеческой» культуры, оказывающими наибольшее воздействие на математическое образование, являются *математическое моделирование, дискретная математика* и *вычислительные процессы* [39, 202]. Их роль особенно велика в наведении мостов между всеми уровнями образования.

Анализ методологии математического моделирования и теории вычислительных процессов показывает, что наблюдающийся в последние десятилетия расцвет дискретной математики стал одной из главных причин распространения математического моделирования и вычислительных процессов в самых разных областях науки и производства. Поэтому знания в области ДМ следует отнести к знаниям, имеющим важное общекультурное значение и поэтому их включение в содержание образования обеспечивает его направленность на «методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры» [231, с. 8], что, в свою очередь, способствует интеграции образования на основе его фундаментализации (см. подп. 1.2.3).

Фундаментальная роль дискретной математики в математическом моделировании уже охарактеризована в подп. 1.5.1. В свою очередь, фундаментальная роль вычислительных процессов в различных областях науки и производства объясняется следующими обстоятельствами.

Функционирование сложных систем управления технологическими процессами, энергетическими и другими важными системами обеспечивается вычислительным процессом, реализуемым специализированным или универсальным компьютером, который все чаще становится наиболее важным узлом данных систем. Проблема реализации эффективного вычислительного процесса обеспечивается не только аппаратными возможностями компьютера или локальной сети компьютеров. Существенное значение имеют такие показатели эффективности, как точность вычислений, эффективность используемых алгоритмов, помехозащищенность и т. д. Таким образом, корректное осуществление вычислительного процесса требует от исследователя весьма универсальных познаний не только в какой-то специальной области, где осуществляется вычислительный процесс, но и знания теорий алгоритмов, автоматов, кодирования, асимптотических оценок и приближений и др. (являющихся областями современной дискретной математики).

Культурологическое значение языка дискретной математики в культуре реализаций вычислительных процессов можно проиллюстрировать на примере лишь одного ее раздела, каким является комбинаторика.

В последние десятилетия наблюдалось бурное развитие комбинаторики. Одной из важных причин этого явилась та фундаментальная роль, которую играет комбинаторика, будучи аппаратом информатики и смежных областей. На практике часто возникают задачи, приводящие к большим вычислениям на компьютере (эффект «комбинаторного взрыва»). Увеличение быстродействия компьютера не упрощает ситуацию с большими вычислениями. Поэтому в новой формирующейся культуре вычислений имеют большое значение методы комбинаторики и других алгоритмических разделов современной дискретной математики, позволяющих преодолеть такие ситуации в решении задач. Не случайно в прошлом веке произошло превращение дискретной математики в составную часть магистрального направления современной математики, что особенно необходимо отразить в математическом просвещении.

Таким образом, важное методологическое значение играет закономерно вытекающий из культурологического анализа *основной вывод* о том, что владение идеями и методами дискретной математики стало неотъемлемой частью содержания подготовки специалиста, умело использующего в своей профессиональной деятельности достижения современной математической и информационной культуры. Поэтому предмет «Дискретная математика» («Основы дискретной математики») с 1995 г. стал постепенно включаться в государственные стандарты высшего профессионального образования по многим специальностям из подавляющего большинства направлений подготовки, что уже отмечалось во введении. В результате в содержании математической подготовки студентов возникли направления обучения ДМ, которые можно условно разделить на четыре группы:

1) обучение математиков, программистов и специалистов в области прикладной математики;

2) обучение на инженерно-технических специальностях (электротехнических, машиностроительных и т. д.);

3) обучение на экономических и управленческих специальностях;

4) обучение на гуманитарных (психология, филология и др.) специальностях с фрагментарным изучением тех или иных элементов ДМ.

Реализация дискретной линии необходима и в математическом просвещении для искоренения бытующих среди некоторых специалистов ложных представлений, навеянных им при обучении в школе, что вся математика сводится к тем методам арифметики, элементарной алгебры и геометрии, с которыми знакомится каждый школьник.

Обучение дискретной математике играет важную роль в устранении существующих диспропорций между фундаментализацией образования и чрезмерным увлечением информационно-коммуникационными технологиями, довольно часто порождающим много бесполезной искаженной и даже ложной информации в содержании обучения (так называемых информационных шумов), что не способствует формированию умений корректной обработки и анализа информации. А. П. Ершов подчеркивал базовую роль дискретной математики в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [66, с. 294].

1.4. Роль современной дискретной математики в содержательном направлении интеграции образования

1.4.1. Интеграционный потенциал современной дискретной математики в модельной методологии

1.4.1.1. О модельной методологии

По мнению Я. Г. Неуймина, повышенный интерес к методологии моделирования обусловлен той ролью, которую методы моделирования, особенно математического, приобрели в современных научных исследованиях. Он стимулируется, кроме этого, прогрессирующей сложностью задач общественной практики, возникающей в условиях научно-технической революции, и большими успехами в развитии прикладной математики и информатики [133].

Мнения о месте моделей и модельных методов в исторически сложившейся системе научных представлений «настолько расходятся, что говорить о сколько-нибудь общепринятой системе теоретических взглядов на моделирование, к сожалению, нет оснований» [133, с. 8]. И это естественно, поскольку в эпоху математизации наук и всеобщей компьютеризации появилось практически необозримое число работ (рассеянных по сотням специальных журналов и других изданий), касающихся частных аспектов моделирования (см., например, [131, 133]).

Для нас интересно то, что в этих монографиях заложены основы классификации видов моделирования [131, 133], исследовались основные классы обьектов моделирования [133], инженерно-технический стиль моделирования [198], методы построения моделей [133], логические основы моделирования [238], различные аспекты процесса математизации наук на основе математического моделирования [8, 120, 193].

Предметом модельной методологии являются постановка возникающих задач, их перевод на адекватный научный язык, рациональная разработка моделей исследуемых обьектов или явлений, а также эффективных алгоритмов и компьютерных программ для решения задач на основе созданных моделей. Таким образом, в ее основе – *обобщенные системы междисциплинарных знаний различных наук*, играющие фундаментальную роль. Поэтому модельная методология служит основой решения конкретных задач на новом, качественно более высоком *интеграционном идейном и содержательном уровне* по сравнению с докомпьютерной эпохой.

Модельная методология в эпоху всеобщей компьютеризации может быть охарактеризована на основе единства двух ее аспектов. Первый аспект связан с внешними по отношению к моделированию детерминантами. Эти детерминанты являются *социокультурными*, т. е. выполняющими функцию корректировки развития и совершенствования моделирования в соответствии с общественной культурой и потребностями социума. Второй аспект можно назвать внутренним, отражающим логику развития математики и кибернетики (информатики) и тем самым определяющим методологию моделирования в эпоху компьютеризации. Оба аспекта диалектически связаны, взаимно дополняют друг друга. Только при условии единства социокультурных и математико-кибернетических аспектов моделирования открывается путь к постижению сущности модельной методологии в эпоху информатизации, а на этой основе – к совершенному моделированию в избранной области.

Анализ философской литературы показывает, что в решении ряда важнейших в социальном отношении системных задач (экономических, экологических, социологических, производственных, оборонных и т. п.) наиболее эффективным оказалось сочетание (синтез) творческого потенциала неформального человеческого мышления и практически неограниченных возможностей современных компьютеров в так называемых диалоговых, интегрированных человеко-компьютерных системах. «Можно говорить о зарождении в последние годы нового класса частично формализованных моделей весьма сложных объектов, которые можно назвать имитационными, эвристико-алгоритмическими, причем практика работ в этой области пока значительно опережает теоретические разработки» [133, с. 34].

Модельную методологию как *социокультурный феномен* следует рассматривать в контексте происходящей идейной и содержательной интеграции математики, естественных, технических, общественных и других наук, стимулируемой стоящей над ней общечеловеческой проблематикой. При этом абстрактные структуры и схемы современной математики являются более широкими по своей сущности и сфере применения, чем какие-либо категории из других наук.

1.4.1.2. Роль дискретной математики в интеграции формализованного и неформализованного языков моделирования

Для выявления роли ДМ в гармоничном сочетании (интеграции) формализованного и неформализованного языков моделирования важно представлять значение сочетания формализованного языка математики с неформализованным языком исследования. «В полной мере сила неформализованного и формализованного символического языков, – пишет Б. В. Гнеденко, – проявляется при их совместном использовании. При этом удается подмечать далеко идущие аналогии между явлениями, закономерностями» [41, с. 23].

Гармоничное сочетание формализованного языка математики с неформализованными языками других наук обеспечивается таким универсальным инструментом, как компьютер. Дело в том, что любую информацию и поэтому любую идеальную модель, создаваемую воображением и замещающую объект исследования, можно перекодировать на язык компьютера и ввести в его память. Чтобы идеальная модель была действующей, необходимо заложить в память компьютера правила преобразования информации. Однако любые правила можно разложить на простейшие термы («атомы») и создать таким образом универсальный логико-алгебраический язык компьютеров, реализуемый при помощи выполняемых компьютером операций. «Таким образом, – пишет В. М. Глушков, – в настоящее время факт принципиальной возможности программирования на современных электронных цифровых машинах любых информационных моделей установлен не менее твердо, чем факт возможности разложения любого материального объекта на элементарные частицы. Важно еще раз подчеркнуть, что здесь идет речь именно о моделях любой (а не только математической) природы» [38, с. 15].

Однако возможно возражение скептика в связи с тем, что память машины не бесконечна и поэтому машина не может реализовать бесконечный алгоритм (и соответствующую ему программу). Однако В. М. Глушков опровергает такое возражение. Поскольку «бесконечную память нельзя реализовать ни в каком техническом устройстве, принято называть машину универсальной, если организация ее управления и набор операций таковы, что обеспечили бы возможность реализации любого алгоритма при условии неограниченного объема памяти» [37, с. 235].

Уникальные возможности практически неограниченного объема (для типичного пользователя) оперативной и периферийной памяти современных компьютеров дают возможность реализовать достаточное для практических целей число шагов любого алгоритма. Ввиду этого практически неограничены возможности компьютеров в построении полных цепочек их использования в различных научных исследованиях. Поэтому адекватное знание систем СКМ и КТ, например, правил преобразования информации компьютером в работе с идеальной моделью, необходимо многим специалистам в любой области исследования.

Дискретная математика является математической основой информатизации и, в частности, разработки и совершенствования СКМ и КТ. В моделировании с использованием компьютеров необходимо владение методами как классической («непрерывной»), так и дискретной математики. Поэтому дискретная математика является *математической основой* гармоничного использования формализованного языка математики, неформализованного языка той науки, в области которой проводится исследование, и уникальных возможностей современных компьютеров.

Как уже отмечалось, несмотря на обилие исследований и публикаций по ДМ, в настоящее время нет общепринятой системы подобных представлений о дискретной математике, что приводит к появлению внешне эффективных научных исследований, особенно в социально-экономических и гуманитарных областях знания, где модельные представления размыты и плохо поддаются формализации. Необходимый в исследовании (многократно повторяющийся) компьютерный эксперимент на основе адекватного знания ДМ является противоположностью уже упоминавшемуся псевдомоделированию на основе «четырех арифметических действий», ассоциируемому с поиском или составлением «кухонных рецептов».

1.4.1.3. Роль интеграционного потенциала дискретной математики в формировании математического стиля мышления

Понятие «стиль научного мышления» введено М. Борном и В. Паули в физику в 50-х гг. XX в. [17]. С тех пор оно все шире используется исследователями не только в физике, но и в математике, биологии, химии и других науках для характеристики формы научного мышления в определенный исторический период. В эпоху математизации наук на основе всеобщей компьютеризации фундаментальную роль в научном стиле мышления стало играть математическое мышление. «Успех науки, – пишет Б. В. Гнеденко, – теперь в значительной степени зависит от того, насколько удачно исследователи научатся пользоваться “математическим стилем мышления”, строить качественные модели процессов, ставить математически осмысленные задачи и использовать уже накопленные математические средства исследования» [42, с. 102].

Возрастающая роль математического мышления, основанного на методах математики, обясняется тем, что все увеличивающийся объем поступающей информации делает невозможным ее полное восприятие и переработку в человеческом мозгу в силу его ограниченных функциональных (физиологических и др.) возможностей. По расчетам В. М. Глушкова (1974 г.), для решения задач управления существовавшей тогда экономикой страны (более 10^{16}операций в год) не хватило бы всего взрослого населения страны, так как производительность человеческого мозга в процессах переработки экономической информации составляет 10^6 операций в год [36, с. 13].

Поскольку адекватное знание СКМ, КТ и, в частности, баз данных является основой работы с компьютером, без обучения дискретной математике невозможно научиться точно воспринимать и перерабатывать в исследовании весь объем имеющейся информации по изучаемой проблеме.

Интеграционный потенциал дискретной математики в формировании математического стиля мышления реализуется на основе интеграции изучения доминирующих в ДМ алгебраических, порядковых структур, а также логических, алгоритмических, комбинаторных схем, благодаря чему в мышлении обучаемых формируются когнитивные (познавательные) *структуры* и *схемы*, являющиеся их отражением. Прилагательное «когнитивный», происходящее от латинского слова «*cognitio*», т. е. «знание», подчеркивает, что речь идет о психических процессах в голове человека, а не просто о стимулах и реакциях. Эти когнитивные структуры, или схемы, обеспечивают хранение, упорядочение и преобразование наличной и поступающей информации и отвечают за воспроизведение в психике познающего субъекта устойчивых закономерных аспектов его окружения [256]. Поэтому изучение этих структур и схем, воздействуя указанным образом на развитие мышления обучающихся, способствует выработке умения *структурировать* и тем самым систематизировать информацию. Формирование когнитивных структур и схем необходимо начинать уже с 11–12-летнего возраста [229, 260].

Довольно часто специалисты (особенно в гуманитарной сфере) используют компьютер, не обладая при этом адекватным знанием ДМ (используют только модные узкоспециальные статистические познания, в частности, формулы, забывая при этом, что такое «логарифм», причем иногда в буквальном смысле слова!). Как следует из вышеизложенного, отсутствие адекватной подготовки по дискретной математике не позволяет обучающемуся овладеть математическим стилем мышления, необходимым для качественного моделирования с помощью компьютеров.

1.4.1.4. Границы возможностей использования интеграционного потенциала дискретной математики в модельной методологии

Несмотря на универсальность современных компьютеров и их уникальные возможности, следует помнить о нежелательности всеобщей «панматематизации», в том числе «пандискретизации», т. е. чрезмерного преувеличения роли математики, в частности дискретной математики. Знаменитые теоремы Геделя о неполноте формальной теории, содержащей арифметику, и невозможности установления непротиворечивости такой теории [219] свидетельствуют о невозможности полной формализации достаточно содержательных математических теорий.

Действительно, в процессе формализации всегда остается неформализуемый «остаток», который и обнаруживает противоречие между формализацией и формализуемым содержанием объекта исследования. Поговаривают, что именно по этой причине А. Эйнштейн однажды сказал, что «математика – это наилучший способ водить себя за нос», а С. П. Королев, не доверяя аналитическим докладам космонавтов, вернувшихся на Землю, однажды посетовал: «Если бы я мог послать в космос Лермонтова!» [43, с. 4]. В связи с этим в философской литературе введен специальный термин «структурализм», являющийся синонимом абсолютизации математического стиля мышления, основанного на структурах и схемах современной математики.

Выдающийся французский психолог, основоположник теории операционального мышления Ж. Пиаже пришел к выводу, что структурный метод, т. е. математическое моделирование, основанное на структурах и схемах современной математики, не может быть единственным методом исследования, особенно в гуманитарных науках [266]. Например, структурный метод в языкознании представляет собой частнонаучный метод исследования [86]. Критикуя методику структурного лингвистического анализа, В. И. Кодухов пишет, что «структуралисты ошибаются… тогда, когда… единицы лингвистического анализа и отношения между ними объявляют имманентной сущностью языка» [86, с. 222].

При исследовании сложных систем (экономических, социальных и т. д.) структурный метод успешно используется только при отображении формализованных сторон этих систем, хотя и достаточно хорошо характеризующих эти системы.

Таким образом, возведение в абсолют математического и, в частности, «дискретного» стиля мышления превращает науку в ее противоположность, что на философском языке являет собой эклектику и идеализм. Для преодоления этого необходимо гармонично использовать в исследованиях методы дискретной и непрерывной математики и частные методы других наук.

«Если каждый новый шаг исследования связан с привлечением к рассмотрению качественно новых сторон явления, то математический метод отступает на задний план; в этом случае диалектический анализ всей конкретности явления может быть лишь затемнен математической схематизацией. Если, наоборот, сравнительно простые и устойчивые формы изучаемых явлений охватывают эти явления с большой точностью и полнотой, но зато уже в пределах этих зафиксированных форм возникают достаточно трудные и сложные проблемы, требующие специального математического исследования… то мы попадаем в сферу господства математического метода» [86, с. 464].

Расширение границ возможностей ДМ происходит в процессе развития теории информационных систем (баз данных) [69, 185].

Идеи и методы дискретной математики играют определяющую роль в концепциях «нечеткой» математики [98], в рамках которой возможно решение практических задач, недоступных формализму «обычной» математики (в частности, формализму теории вероятностей и случайных процессов).

На основе изложенного можно уверенно сделать вывод о том, что границы возможностей ДМ в решении какой-либо проблемы ограничены возможностями применения компьютера в решении этой проблемы. Если для ее решения достаточно использовать компьютер как пишущую машинку, то тогда знание дискретной математики совсем не обязательно. Однако круг таких «некомпьютерных» проблем в процессе всеобщей информатизации неуклоннно снижается.

1.4.2. Анализ роли дискретной математики в реализации основных подходов содержательного направления интеграции образования

На основе роли ДМ в методологии математического моделирования и теории вычислительных процессов далее характеризуются основные особенности реализации основных подходов содержательного направления интеграции обучения математическим, естественно-научным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

Как уже отмечалось, межпредметные связи стали рассматриваться в качестве средства интеграции, порождающего обобщенные системы знаний как междисциплинарных, так и внутрипредметных. Поэтому *в интеграции на базе актуализации межпредметных* (а также внутрипредметных) *связей* содержания дисциплин подготовки учителей математики, информатики и инженеров-педагогов важное значение имеет продолжающееся расширение межпредметных связей ДМ с различными областями математики и информатики, такими как математический анализ, исследование операций, математическая логика, абстрактная алгебра, математическая кибернетика, компьютерное моделирование, что отражено в тематике журналов «Дискретный анализ и исследование операций», «Прикладная дискретная математика».

Как уже отмечалось, анализ содержания этих журналов и учебной литературы свидетельствует о фундаментальном значении современной прикладной ДМ в разработке и совершенствовании современных систем компьютерной математики и компьютерных технологий. Таким образом, в интеграции содержания обучения математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла на базе актуализации межпредметных, а также внутрипредметных связей необходимо отразить в содержании обучения базовые понятия и методы ДМ, играющие фундаментальную роль в изучаемых студентами областях математики и информатики и обеспечивающие их обучение математическому моделированию и теории вычислительных процессов на основе корректного использования СКМ и КТ.

О. И. Мельниковым отмечается важность интегрирующей функции обучения ДМ, которая «состоит в установлении связей между знаниями, полученными в различных учебных дисциплинах, и комплексном их применении» [127, с. 77]. Но возможности интеграционного потенциала ДМ гораздо шире, и он реализуется не только посредством установления межпредметных связей дискретной математики и других дисциплин.

Как ранее отмечалось, *интеграция на основе фундаментализации образования* предполагает направленность образования на создание цельного, обобщающего знания, которое являлось бы ядром (основой) всех полученных студентом знаний [201]. Создание цельного, обобщающего знания предполагает изучение языка доминирующих в ДМ алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем. Фундаментальное значение языка этих структур и схем в интеграции содержания обучения математическим дисциплинам будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов будет раскрыто далее, в гл. 2.

При интеграции содержания обучения в рамках компетентностного подхода следует исходить из того, что обучение дискретной математике необходимо для развития у студентов способности критического отслеживания и осмысления развития теории и практики математического моделирования и вычислительных процессов с использованием СКМ и КТ. Поэтому обучение ДМ играет важную роль в выработке у будущих учителей информатики общих (полифункциональных, надпредметных, междисциплинарных и др.) компетенций, подразумевающих наличие умения гармонично сочетать в моделировании формальный язык математики, неформальный язык науки, в области которой проводится исследование, и возможностей компьютера.

Роль ДМ в формировании специальных компетенций проявляется в следующем. Обучение дискретной математике в значительной мере способствует овладению студентами методами математического моделирования на основе дискретных и непрерывных моделей и выработке умений объяснять результаты этих исследований и, следовательно, овладению методикой обучения школьников и студентов колледжей (техникумов) элементам математического моделирования, а также методикой изложения понятий ДМ, имеющих общеобразовательное и общекультурное значение. Стало быть, элементы дискретной математики должны быть адекватно отражены в курсе методики обучения информатике.

Как следует из изложенного, справедливо положение о том, что дискретная математика наряду с непрерывной математикой лежит в основе методологии реализации существующих подходов в содержательном направлении интеграции математической, естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. Тем самым интеграция обучения этим дисциплинам на базе дискретной математики, математического моделирования и теории вычислительных процессов углубляет возможности органического сочетания трех основных составляющих подготовки педагогов – подготовки в избранной предметной области, психолого-педагогической и методической подготовки.

Глава 2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

В главе охарактеризованы доминирующие в ДМ математические структуры, психологические и дидактические основы обучения ДМ, имеющие фундаментальное значение в разработке методики реализации содержательного направления интеграции подготовки будущих учителей. На этой основе разработана концепция обучения ДМ, и затем на базе концепции создана методическая система обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, для реализации которой предлагаются различные модели их обучения ДМ.

2.1. Математические структуры как основа стратегии отбора содержания обучения дискретной математике

Как было установлено, интеграция на базе фундаментализации образования предполагает универсализацию знаний, умений, навыков, которая обусловливает выделение структурных единиц научного знания, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений. Такими структурными единицами в дискретной математике являются доминирующие в ней алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического познания). Эти структуры лежат в основе отбора содержания обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей. Для обоснования этого вывода необходим анализ понятия математической структуры, осуществляемый далее.

2.1.1. Понятие математической структуры и ее роль в обучении моделированию

Математические структуры и схемы являются основой стратегии отбора содержания обучения математике [229]. Исходящий из этой роли математических структур и схем подход в обучении математике называется *системно-структурным* подходом. Он позволяет раскрыть характер соответствия между структурами реальных процессов, операционными структурами мышления и структурами математики [229]. Поэтому не случайно они играют фундаментальную роль в формировании «ядра математического курса» [193] обучения математике в техническом вузе, поскольку являются «ядром (основой) всех полученных студентом знаний» [201, с. 12].

В силу своей фундаментальной роли в различных видах моделирования с использованием компьютера дискретная математика является тем методологическим и методическим «механизмом», который обеспечивает действенность обучения моделированию и тем самым позволяет раскрыть *конкретный* характер этого важного соответствия для каждого профиля обучения. Эти выводы и будут концептуальным ориентиром в нашем анализе.

Прежде чем определить концептуальную роль математических структур в стратегии выбора целей и отбора содержания обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей, кратко охарактеризуем суть самого понятия математической структуры.

Как отмечалось многими крупными учеными (Н. Бурбаки, А. Н. Колмогоров, Л. Д. Кудрявцев и др.), математика – это наука о специальных структурах, называемых математическими. «Под **математической структурой** можно понимать совокупность устойчивых связей, обеспечивающих целостность математического объекта (математической системы, математической модели). Эта совокупность устойчивых связей математического объекта может быть задана различными способами (аксиоматически, конструктивно, описательно, в виде наглядных образов)» [229, с. 25].

«Целью моделирования является выделение не отдельных связей, а целого их *комплекса* для данного объекта или явления, хотя второстепенные связи или составляющие элементы при моделировании чаще всего исключаются» [229, с. 27]. Стратегическую роль в *умении выделять комплекс* основных связей и исключать второстепенные связи или составляющие элементы структуры играют математические структуры и схемы. И это не случайно, поскольку наряду с «аналитическими» методами решения задач, основанными на математическом анализе и его приложениях, возникли и бурно развиваются «численные» методы, основанные на структурах и схемах современной алгебры и математической логики.

Стратегическую роль *системно-структурного подхода* в моделировании с использованием компьютера и на этой основе обучении умению выделять комплекс основных связей исследуемого объекта и исключать второстепенные связи раскрывает описание доминирующих в ДМ математических структур и схем.

2.1.2. Описание доминирующих в дискретной математике математических структур и схем

Доминирующими в ДМ являются (в общенаучной терминологии) алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического исследования) [229]. Для анализа роли этих структур и схем в обучении дискретной математике дадим их краткую характеристику.

Представления об *алгебраических* и *порядковых* структурах постепенно сложились в процессе исторического развития. Вначале люди научились совершать операции сложения и вычитания с наборами конкретных обыденных предметов, вещей и сравнивать различные количества этих предметов между собой. Позднее алгебраические операции стали производиться над более отвлеченными объектами (многочленами, векторами преобразованиями и т. д.). В свою очередь, стали сравниваться отвлеченные «неименованные» числа, сначала натуральные, а затем целые, рациональные и действительные числа, что потребовало введения десятичной записи чисел. В результате развития представлений об упорядоченности и хаосе стали использоваться различные отношения порядка («больше», «меньше», «предшествования», «старшинства» и т. п.). Люди постоянно упорядочивают предметы или явления по какому-либо признаку. Изучение общих свойств различных упорядоченных множеств привело к понятию частичного (неполного) порядка на множестве и затем к возникновению абстрактных порядковых структур (решеток булевых алгебр и т. д.).

Логические схемы (как средства, методы математического исследования) стали зарождаться еще во времена Аристотеля, сформулировавшего основные законы логически правильных рассуждений. Идея построения универсального логического языка (доказательств) выдвинута была для всей математики в XVII в. Г. Лейбницем. В результате в XIX в. появился язык логики предикатов, предметные переменные и кванторы, сыгравшие определяющую роль в анализе полноты и непротиворечивости математических рассуждений (доказательств). На этой основе позднее стал возможен переход к логически точному анализу других областей знания. Возникла математическая логика, ставшая основой логической формализации всей науки (образно говоря, математической «стандартизации» любого научного исследования).

Как уже отмечалось выше, на основе интеграции алгебраических и логических идей и методов возникла теория *алгоритмов*, что ознаменовало начало эпохи всеобщей компьютеризации. Общеизвестно, что понятие алгоритма и его основные свойства играют ключевую роль в создании программного обеспечения при работе с компьютером.

Комбинаторные схемы – это схемы, на основе которых изучаются задачи выбора, расположения и пересчета элементов данного конечного множества в соответствии с заданными правилами. Объекты, конструируемые по этим правилам из элементов данного множества, называются комбинаторными конфигурациями. Комбинаторными конфигурациями могут быть упорядоченные или неупорядоченные подмножества этого множества, совокупности повторяющихся элементов и т. п.

Значительную часть комбинаторики составляют перечислительные задачи, в которых требуется либо осуществить перебор всех конфигураций заданного вида, либо только подсчитать их число, либо выполнить то и другое. Числа, которые получаются при пересчете комбинаторных конфигураций, называются комбинаторными числами. Простейшими комбинаторными числами являются число перестановок элементов данного конечного множества, число выборок заданного объема, составленных из его элементов, и т. п.

Становление комбинаторики как математической дисциплины происходило в XVII в. одновременно с теорией вероятностей. Это объясняется тем, что при решении вероятностных задач постоянно приходится сталкиваться с подсчетом числа выборок, подчиненных определенным условиям.

Комбинаторные методы и результаты получили широкое применение не только в теории вероятностей. Они играют фундаментальную роль в изучении различных ветвей так называемой конечной математики, теории кодирования, криптографии, исследовании операций. Комбинаторный анализ находит самые разнообразные приложения в физике, химии, биологии, экономике, лингвистике и т. д. Считается почти общепризнанным, что сегодня хорошее знание комбинаторного анализа требуется не только математикам (имеющим дело с математическими моделями реальных явлений и процессов) и практикующим программистам, но и их потенциальным заказчикам.

Из приведенной характеризации следует что доминирующие в ДМ математические структуры и схемы играют фундаментальную роль в качественном анализе сложных проблем математического моделирования (в том числе и в решении проблем различных систем управления). Напомним, что эти структуры и схемы играют *ключевую* роль «в систематизации того, что известно по интересующей проблеме, в ее *структуризации* (курсив мой. – *Е. П.*), представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа как "вручную", так и с использованием современных средств компьютерной техники» [132, с. 4–5].

2.1.3. Роль структур и схем дискретной математики в интеграции обучения различным дисциплинам будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов

Фундаментальное значение языка структур и схем ДМ в интеграции обучения дисциплинам математической, естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов заключается в следующем.

Во-первых, в обучении языку этих структур и схем следует исходить из того, что они играют фундаментальную роль в качественном анализе проблем математического моделирования, в систематизации информации по интересующей проблеме, ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего решения проблем с использованием СКМ и КТ. Действительно, язык этих структур и схем играет фундаментальную роль в корректном использовании СКМ и КТ при реализации этапов математического (информационного) моделирования, особенно при оптимальном выборе языка и метода моделирования, разработке алгоритма, программы вычислений и в итоговом анализе всех возникающих погрешностей в реализации всех этапов моделирования. Незнание языка этих структур и схем порождает самые живучие ошибки моделирования – те, что остаются незамеченными в процессе итогового анализа и тестирования результатов моделирования и доходят до этапа внедрения его результатов – это ошибки пропущенной логики рассуждений, т. е. ошибки в использовании математического языка.

В подтверждение важности изучения языка доминирующих в ДМ структур схем достаточно упомянуть понятия рекуррентного соотношения, асимптотической оценки и приближения и их роль в анализе эффективности алгоритмов вычислений в самых разных областях исследований. Асимптотические оценки позволяют, например, приближенно оценить значение функции, когда воспользоваться определением функции для вычисления точного ее значениях с использованием СКМ при очень больших (или очень малых) значениях аргумента слишком трудно. Более того, определение функции может оказаться столь сложным, что для обычных значений переменной легче получить асимптотическую информацию о величине значения функции, чем любую другую.

Во-вторых, обязательное включение в содержание подготовки тех или иных математических структур и схем ДМ обеспечивает своеобразный стандарт подготовки, свидетельствующий о фундаментальном, опережающем практику обучении, позволяющем адекватно реагировать на изменения, постоянно происходящие в информатике.

Как отмечает В. А. Тестов, «преодолеть разобщенность различных математических дисциплин, изолированность отдельных тем и разделов, обеспечить целостность и единство в обучении математике возможно лишь на основе выделения в ней *истоков, основных стержней.* Такими *стержнями в математике* являются *математические структуры*» [229, с. 7]. Отсюда следует, что, в-третьих, язык этих структур и схем ДМ играет фундаментальную роль в формировании у студентов представлений о математике как единой науке и о внутренней логике математики.

Язык структур и схем ДМ играет важную роль в устранении диспропорций между фундаментализацией подготовки студентов и чрезмерным увлечением информационно-коммуникационными технологиями, довольно часто порождающим много бесполезной, искаженной и даже ложной информации в содержании обучения (так называемые информационные шумы), что не способствует формированию умений корректной обработки и анализа информации. Не случайно А. П. Ершов подчеркивал базовую роль дискретной математики в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [66, с. 294]. К сожалению, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии ПО (программного обеспечения. – *Е. П.*). Большая часть усовершенствований средств и методов приводит к увеличению производительности и качества примерно на 5–35 %. Но многие из этих усовершенствований были заявлены как дающие преимущества на “порядок”» [35, с. 23]. Поэтому очень важно «ознакомление педагогов с положительными и отрицательными аспектами использования информационных и телекоммуникационных технологий» [47, с. 15].

2.1.4. О базовых понятиях языка доминирующих в дискретной математике структур и схем

В изучении языка перечисленных структур и схем ключевую роль играют следующие *базовые понятия* дискретной математики:

1) бинарное и *n*-арное отношения;
2) отношения эквивалентности и частичного порядка;
3) группа и кольцо;
4) логическая операция;
5) предикат и квантор;
6) алгебраическая операция;
7) отображение, гомоморфизм и изоморфизм;
8) алгоритм;
9) конечный автомат;
10) формализованный язык;
11) проблема разрешимости;
12) эквивалентные и эффективные алгоритмы.

Конечно, можно спорить, что предложенный список базовых понятий ДМ следует считать полным и что его необходимо уточнить, расширить и т. д. (в том числе и в зависимости от профиля обучения студентов). Но здесь важно то, что понятия из этого или подобного ему списка являются своеобразными *маяками* при отборе содержания профильного обучения дискретной математике студентов различных специальностей, особенно педагогических.

Обязательное включение в содержание обучения ДМ рассматриваемых видов математических структур и схем обеспечивает своеобразный «стандарт» профильного обучения, свидетельствующий об использовании *интеграционного потенциала* этих структур и схем, позволяющем реально научить выделять *комплекс* основных связей исследуемого объекта или явления. Тем самым будет обеспечена направленность содержания образования на «методологически важные долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала обучаемого» [231, с. 8], которые играют важную роль *в интеграции образования на основе его фундаментализации* (что отмечалось в подп. 1.2.3).

Итак, системно-структурный подход в стратегии отбора содержания обучения ДМ обеспечивает единство и целостность обучения математике, в котором занимают свое «крепежное» место базовые понятия ДМ. В результате образуются естественные, устойчивые межпредметные связи, обеспечивающие целостность («объекта») математики и поэтому играющие фундаментальную роль в реализации принципа диалектического единства интеграции и дифференциации в математической подготовке студентов.

Рассматриваемый подход в стратегии отбора содержания обучения ДМ необходим также для составления и согласования учебных программ всех уровней, начиная со школьных, для достижения прикладной направленности обучения математике. В частности, понятия языка математических структур явят собой единую идейную и содержательную основу различных программ обучения ДМ. В действительности сейчас наблюдается разнобой в содержании преподавания дискретной математики в рамках одной (даже одной!) и той же специальности в различных вузах, главной причиной которого является отсутствие системно-структурного подхода в обучении дискретной математике.

Наконец, системно-структурный подход в стратегии отбора содержания обучения ДМ оправдан с исторической точки зрения. Математическое моделирование стало основой формирования и становления дискретной математики как предмета. Поскольку в основе математического моделирования (в том числе и классификации его видов) лежит понятие математической модели, изучение базовых понятий, раскрывающих суть понятия модели, должно быть основой стратегии отбора содержания обучения ДМ.

Из вышеизложенного следует, что необходим *анализ дидактических принципов* в уточнении содержания обучения ДМ на основе базовых понятий *для каждого профиля* обучения студентов педагогических специальностей.

В связи с профильным обучением ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов подчеркнем важную роль языка доминирующих в ДМ математических структур и схем в подготовке математиков и специалистов по системам компьютерной математики и компьютерным технологиям, что отмечается в учебных изданиях [10, 70]. В частности, доминирующим в обучении математиков и специалистов по СКМ и КТ является алгебраический подход, т. е. подход, основанный на алгебраических структурах (в изучении СКМ – на полукольцах, в изучении КТ – на группах и булевых алгебрах) [10]. Кроме того, важную роль в подготовке специалистов этого профиля играют базовые понятия математической логики, теории алгоритмов, комбинаторики и теории графов. Определяющая роль структур и схем ДМ в обучении специалистов-математиков связана с возникновением математического эксперимента, занимающего промежуточное место между классическим дедуктивным и классическим экспериментальным методами исследования [133]. Для реализации такого эксперимента во внутриматематических исследованиях в последние годы созданы многочисленные пакеты прикладных программ СКМ.

Итак, язык охарактеризованных *доминирующих* в ДМ математических структур и схем и есть с методологической точки зрения то, что должно быть отражено в концепции обучения ДМ студентов педагогических специальностей. Изучение математических структур и схем, доминирующих в ДМ, обеспечивает интеграцию содержания их обучения прикладным методам математики и особенно математическому моделированию и теории вычислительных процессов на основе фундаментализации обучения. В силу этого указанные математические структуры являются основой стратегии отбора содержания обучения учебному предмету «Дискретная математика» студентов педагогических специальностей. В свою очередь в изучении языка доминирующих в ДМ структур и схем ключевую роль играют базовые понятия дискретной математики.

2.2. Психологические аспекты обучения дискретной математике

Понятия и факты дискретной математики и особенно язык доминирующих в дискретной математике структур и схем являются весьма трудными и непривычными для восприятия ввиду их абстрактности и нарушения преемственности обучения ДМ между школой и вузом. Поэтому важную роль в использовании интеграционного потенциала ДМ играют психологические аспекты профильного обучения ДМ, необходимые для реализации в обучении *принципа антропоцентризма*, в соответствии с которым во главу угла поставлена личность студента и в том числе особенности его познавательной деятельности.

Поскольку дискретная математика наряду с классической («непрерывной») математикой является основой математического моделирования с использованием компьютера во многих областях науки и производства, для выявления психологических аспектов использования совместного *интеграционного потенциала ДМ и классической математики* необходимо сначала схематично обсудить некоторые аспекты, излагаемые далее.

2.2.1. Психологические истоки и основы моделирования

В последнее время в психологии возникло понятие профессионального образа мира, формирование которого является одной из задач обучения специальности. Вообще процесс обучения может быть понят «как процесс формирования инвариантного образа мира, социально и когнитивно адекватного реальностям этого мира и способного служить ориентировочной основой для эффективной деятельности в нем» [110, с. 272–273].

В гносеологическом и психологическом плане у истоков моделирования стоит, по-видимому, *аналогия*, т. е. выявление сходства между объектами по некоторым признакам, свойствам. При аналогии на основе найденного сходства объектов по некоторым признакам и свойствам выдвигаются предположения об их сходстве по другим признакам и свойствам. Наряду с аналогией психофизиологическим механизмом моделирования может быть образование и актуализация ассоциаций, т. е. связей между психическими явлениями, при которых актуализация одного из них влечет за собой появление другого.

Генезис механизмов моделирования можно увидеть также в становлении и развитии *символической функции* в мышлении, отражающей с помощью символов всеобщность (сущность) некоторых реальных предметов. «Символы … служат основанием для создания человеком различных моделей предметов (эти модели могут иметь вещественную, графическую и словесную форму)… Модели – это форма абстракции особого рода, в которой существенные отношения предметов выражены в наглядно воспринимаемых и представляемых связях и отношениях знаковых элементов. Это своеобразное единство единичного и общего (т. е. чувственного и абстрактного), при котором на первый план выдвинуто общее, существенное» [51, с. 128].

Создание моделей как форм абстракций особого рода предполагает наличие способности действовать «в уме» при решении творческих задач. Я. А. Пономарев вводит понятие *психологического механизма* решения творческих задач, представляющего собой своего рода психологический инвариант содержания накопленного человеком *опыта*. Наличие этого механизма у человека генетически зафиксировано, а возможности его развития предопределены наследственностью. Однако механизм не развивается спонтанно: этот процесс связан с фактическим содержанием приобретаемого опыта, со способами получения того или иного содержания и ограничен возрастным пределом. «Психологический механизм решения творческих задач достаточно отчетливо представлен способностью действовать в уме, хотя способность эта не охватывает его полностью: она представляет ту его часть, которая наиболее доступна изучению» [186, с. 287–288].

Анализ Я. А. Пономаревым решения творческих задач испытуемыми с развитой способностью действовать «в уме» показал, что этапы развития не исчезают и у развитой способности; при образовании новых этапов предшествующие преобразуются, но сохраняют свои отчетливые следы – они трансформируются в *структурные уровни* организации способности. Важность анализа особенностей *внутриструктурной* организации познавательной способности обоснована Л. М. Веккером [22].

Я. А. Пономарев пишет: «При нетворческой задаче испытуемый с развитой способностью действовать “в уме” реализует уже готовые логические программы, готовые знания, при этом высший структурный уровень его способности однозначно подчиняет себе функционирование всех нижележащих, так что это функционирование оказывается незаметным. Однако при творческой задаче (той, которая не может быть решена при опоре лишь на наличные знания) картина резко меняется: провал избранной логической программы отбрасывает решающего на нижние структурные уровни организации способности, и дальнейший ход решения оказывается постепенным подъемом по этим уровням, представляющим собой преобразованные, трансформированные этапы развития. Решающий как бы карабкается по ним. Они же при успешном решении задачи выступают как функциональные *ступени* развивающих (творческих) взаимодействий» [186, с. 271–272].

Итак, обратим особое внимание на выявленный Я. А. Пономаревым *психологический механизм* решения творческих задач, являющийся своеобразным психологическим инвариантом содержания накопленного человеком *опыта*. В основе функционирования этого механизма лежат различные *структурные уровни* организации способности действовать «в уме» и готовые логические программы правильных рассуждений.

2.2.2. Когнитивные структуры и схемы

Структурные уровни организации способности действовать «в уме» и готовые логические программы рассуждений в современной психологии называются когнитивными структурами и схемами (прилагательное «когнитивный», происходящее от слова *cognitio*, т. е. знание, подчеркивает, что речь идет о психических процессах в голове человека, а не просто о стимулах и реакциях. Это структуры или схемы, «обеспечивающие хранение, упорядочение и преобразование наличной и поступающей информации и отвечающие за воспроизведение в психике познающего субъекта устойчивых закономерных аспектов его окружения» [256, с. 244]. Как уже отмечалось, когнитивные структуры, или схемы, формируются на основе изучения математических структур и схем.

В. А. Тестов прослеживает аналогию когнитивных структур (схем) с таким понятием искусственного интеллекта, как рамка. «Адекватное распознавание и описание ситуаций реальных сцен невозможно на основе одних только полученных в данный момент входных сигналов. Для каждой новой ситуации у человека, как и у ЭВМ, должна быть рамка или иерархия рамок, предвосхищающих основные моменты того, что должно появиться» [229, с. 59] Действительно, каждый учитель знает, что «подготовленный ученик в буквальном смысле видит материал иначе – более глубоко и адекватно, чем плохо подготовленный. Это происходит по причине того, что имеющиеся у подготовленных учеников обобщенные схемы “накладываются” на воспринимаемый материал, позволяют им осуществлять значительно более глубокий и широкий анализ, что и приводит к закономерно лучшему пониманию и сохранению в памяти нового материала» [229, с. 59]. Формирование хорошо организованных и упорядоченных когнитивных структур должно быть признано самой главной задачей школьного обучения [260, с. 24].

В процессе обучения когнитивные структуры и схемы претерпевают изменения. В зависимости от характера этих изменений Д. Норманом были выделены различные *формы научения* [137]:

Наращивание структур – добавление нового знания к уже существующим схемам памяти.

Создание структур – образование новых понятийных структур, новое, качественное обновление системы знаний. Существующие схемы становятся недостаточными; должны быть созданы новые. По мнению Д. Нормана, «вероятно, это самый важный способ научения» [137, с. 103].

Настройка структур – тонкое приспособление знания к задаче. Нужные схемы уже существуют, и в них заключено нужное знание. Но для данной цели они непригодны потому, что они слишком общие или плохо приспособлены для данного конкретного использования. Поэтому знание нужно «настраивать», постоянно приспосабливать к задаче. «Настройка – это, вероятно, самый медленный способ научения, но это то, что превращает простое знание предмета в совершенное владение им» [137, с. 105].

К этим формам научения следует добавить еще одну, фактически рассмотренную Л. Б. Ительсоном [77], – *перестройку* структур. Эта форма научения состоит из преобразований структур трех типов:

1) переход на новую, более высокую ступень организации, когда сформированная ранее структура становится подструктурой новой, более широкой структуры;

2) изменение принципа организации структуры, когда координация (сочетание) частей внутри структуры заменяется их субординацией (подчинением) или наоборот;

3) перецентровка структуры, т. е. выдвижение в качестве существенных тех элементов, которые были второстепенными, и наоборот.

Как и В. А. Тестов, будем различать алгебраические, порядковые и топологические когнитивные структуры, а также логические, алгоритмические, комбинаторные, образно-геометрические когнитивные схемы [229]. На основе современных представлений о когнитивных структурах и схемах математические когнитивные структуры В. А. Тестовым поделены на два основных типа (при всей условности такого разделения). К первому типу относятся алгебраические, порядковые и топологические когнитивные структуры, выступающие как прототипы, *упрощенные модели математических объектов*, прежде всего как комплексы, средства хранения математических знаний (тип структур, образованных по «горизонтальному принципу»). Ко второму относятся логические, алгоритмические, комбинаторные, образно-геометрические когнитивные схемы, выступающие в первую очередь как средства, *методы математического* познания. Этот тип структур складывается на основе связей, которые являются общими для совершенно различных объектов, поэтому они образуются по «вертикальному» принципу.

Два типа когнитивных структур, формирующихся по «горизонтальному» и «вертикальному» принципу, выделяет и М. А. Холодная [256, с. 93]. Когнитивными структурами второго типа являются «понятийные психические структуры», занимавшие центральное место в трудах Л. С. Выготского.

Фундаментальная роль алгебраических, порядковых и топологических когнитивных структур в мышлении человека обоснована в трудах Ж. Пиаже. Он фактически исследовал путь обретения человеком знаний о мире, основанный на «универсальной логической необходимости» – математике [20, с. 10]. В трудах Л. С. Выготского исследован принципиально другой путь обретения знаний *посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств* на основе когнитивных схем как средств, методов познания. Отсюда следует, что для обучения полноценному моделированию процессов и явлений необходим синтез этих двух путей обретения знания. Следовательно, синтез этих двух путей необходимо признать *стратегически* важным источником развития «моделирующего» и, следовательно, «*дискретного»* мышления.

Идеи формирования и развития когнитивных структур и схем получили воплощение в двух системах развивающего обучения Л. В. Занкова, В. В. Давыдова. «При всем различии многих методических аспектов этих систем их исходные теоретические основы не противоречат друг другу и в равной мере отвечают общим универсальным законам формирования и развития структур» [229, с. 77].

Рассмотрим возрастные особенности формирования математических когнитивных структур, открытые Ж. Пиаже [182] и играющие важную роль в *методической* подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

С рождения до 2 лет наблюдается стадия сенсорно-моторного мышления, которое характеризуется варьированием действий, направленных на объект.

С 2 до 6–7 лет происходит развитие наглядного мышления (дооперационный период). Главное на этой стадии – усвоение вербальных знаков родного языка и переход к простейшим мыслительным действиям, когда ребенок научается обозначать явления внешнего мира с помощью символов. На этой стадии отсутствует такое свойство мыслительных операций, как обратимость, т. е. понимание того, что можно произвести обратное действие. Оно является отражением свойств такой алгебраической структуры, какой является группа. В мышлении впервые появляются причинные связи в логике очевидных наглядных впечатлений.

«С 7–8 до 11–12 лет формируются конкретные операции», т. е. операции, которые ребенок может выполнять только с элементами множеств «предметов» (бусинок, кубиков и т. п.) в конкретной предметной ситуации [183, с. 179]. На этой стадии умственные действия ребенка приобретают свойство обратимости, и у него возникают внутренние когнитивные структуры, с помощью которых осуществляются операции.

С 11–12 до 14–15 лет наблюдается стадия формальных операций, выполняемых без необходимой связи с действительностью. На их основе фомируются умение проводить гипотетико-дедуктивные рассуждения, исследовательская познавательская позиция, способность проверять ход как собственной, так и чужой мысли. Происходит синтез структур, соответствующих обращению и взаимности.

Согласно Ж. Пиаже, базовое интеллектуальное развитие, в частности математическое, заканчивается к 15 годам. К этому времени все *специфические* когнитивные структуры, являющиеся отражением объективно существующих математических структур, в сознании ребенка уже сформированы.

С 16 до 25 лет, согласно экспериментальным исследованиям Б. Г. Ананьева, Е. И. Степановой [3] и И. Я. Каплуновича [79], формируется система влияний высших уровней познавательного отражения на низшие и низших на высшие, т. е. система когнитивных синтезов «сверху» и «снизу» на основе разнообразных связей и отношений между уже сформировавшимися к 16 годам специфическими когнитивными структурами и схемами.

2.2.3. О роли закона дифференциации и интеграции когнитивных структур в теоретических основах развивающего обучения

В методике построения профильных курсов обучения ДМ в школах и колледжах (техникумах) важное значение имеет соответствие исходных теоретических основ развивающего обучения общим универсальным законам формирования и развития когнитивных структур. При всем различии многих методических аспектов двух систем развивающего обучения «психолого-педагогические принципы развивающего обучения основаны на законах развития [когнитивных] структур и являются составной частью социокультурного системного подхода» [229, с. 78]. Чтобы обучение было развивающим, необходимо, чтобы оно строилось с учетом закона дифференциации структур – закона развития от общего к частному и закона интеграции структур – закона развития от простого к сложному. Таким образом, в развивающем обучении ведущую роль играет первый основной принцип интеграции образования, каким является принцип *диалектического единства интеграции и дифференциации* (см. п. 1.1).

Обе системы развивающего обучения широко внедрены как в школе, так и в вузе. Естественно, на первом этапе обучения ДМ в школе должна преобладать постепенная интеграция структур – развитие от простого к сложному. При этом необходима максимальная мотивационная вовлеченность ученика в работу с занимательным или практическим *сюжетным* текстом на основе занимательных и практических задач.

Действительно, системы развивающего обучения имеют в своей основе идеи Л. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств. Для такой реконструкции обстоятельств «жизни» и необходимы задачи с занимательным или практическим *сюжетным* текстом. При правильном подборе таких задач (в частности, на графы) можно уже с 8-го класса демонстрировать первые серьезные образцы математического моделирования.

Таким образом, системы *развивающего обучения* ДМ способствуют формированию на основе когнитивных структур дискретной компоненты математического стиля мышления учащихся и их подготовки к постепенному осознанному выбору специальности, а студентов – к выбору профиля обучения в вузе путем реконструкции обстоятельств «жизни».

В обучении ДМ на математических факультетах университетов и пединститутов должна преобладать дифференциация структур – развитие от общего к частному. На самом деле при построении профильного курса по специальности должен быть найден точный *баланс* в использовании диалектического единства дифференциации и интеграции.

Итак, в соответствии с теоретическими основами развивающего обучения построение профильного курса ДМ должно осуществляться на основе дифференциации и интеграции структур с использованием различных видов задач (в особенности с сюжетным текстом) на обучение построению полной цепочки использования компьютера.

2.2.4. Другие психологические аспекты обучения дискретной математике

Сформированность специфических когнитивных структур, складывающихся в процессе обучения математике, «не является единственным показателем интеллектуальной зрелости» взрослого человека [256, с. 46]. Поэтому следует дополнительно учесть некоторые психологические основы обучения ДМ *на социокультурном опыте,* в частности некоторые критерии развития интеллекта [256]. Эти критерии свидетельствуют о необходимости обучения ДМ с целью установления связи обучения математике со всеми сторонами культуры социума.

М. А. Холодная при описании феноменологического критерия со ссылкой на некоторых исследователей) отмечает, что «дефициты в организации базы знаний являются одним из источников умственной отсталости» [256, с. 39]. Действительно, только на основе системно-структурного подхода в обучении математике и формируются в мышлении обучаемого когнитивные специфические структуры, «отвечающие» за правильную организацию хранения и использования всей базы запоминаемых знаний. «Ибо умен не тот, кто знает, а тот, у кого сформированы механизмы приобретения, организации и применения знаний» [256, с. 41], т. е. когнитивные структуры и схемы. В связи с этим интересно отметить, что понятия «базы знаний» и «базы данных» являются одними из важнейших в СКМ. Поэтому обучение ДМ выступает необходимым условием уяснения точного смысла этих понятий, весьма важных в обучении, например, будущих специалистов-психологов.

Итак, анализ психологических аспектов обучения дискретной математике показывает, что *полноценное обучение* ДМ (и на этой основе математическому моделированию) возможно только в рамках современного *системно-структурного подхода* в преподавании математики на основе формирования и развития математических когнитивных структур и схем. К сожалению, опираясь на отдельные результаты исследований выдающегося французского психолога Ж. Пиаже, во Франции и некоторых других странах Европы педагоги ограничились попытками внедрения в школьную и вузовскую математику только алгебраических, порядковых и топологических структур и не уделили должного внимания комбинаторным, алгоритмическим, образно-геометрическим схемам, играющим особую роль в исследовательской активности, в образовании новых понятийных структур и, тем самым, в выборе траектории вариативной подготовки, во главу угла которой поставлена личность школьника и студента).

В использовании интеграционного потенциала ДМ в различных видах подготовки студентов педагогических специальностей (в том числе в разработке концепции обучения ДМ) наряду с *системно-структурным* подходом и психологическими аспектами его реализации фундаментальную роль играют дидактические принципы обучения.

2.3. Дидактические принципы обучения дискретной математике

Вопрос о принципах обучения является наиболее спорным в дидактике, что в значительной мере проистекает из различных трактовок самого термина «принцип». В отечественной дидактике наиболее разносторонне принципы обучения рассматривались в работах Ю. К. Бабанского, М. Н. Скаткина, С. И. Архангельского, в зарубежной – в работах Дж. Брунера, В. Оконя и др. В систему классических принципов, признаваемых большинством ученых и являющихся важнейшими ориентирами в образовании, включены уже обсуждавшиеся принципы интеграции, фундаментализации, культуросообразности. Но наряду с указанными принципами в теоретических основах обучения ДМ фундаментальную роль играют принципы научности, генерализации знаний, преемственности и профессионально-педагогической направленности подготовки. Рассмотрим роль и специфику реализации этих принципов, играющих фундаментальную роль в отражении подходов содержательного направления интеграции в различных видах подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

2.3.1. Принцип научности

Как следует из изложенного в п. 1.3 (см. гл. 1), базовые понятия ДМ необходимы для реализации важной методической цели обучения в школе и колледже (техникуме): подготовки «многоборца», удачно «выступающего» на всех этапах построения полной цепочки использования компьютера. Поэтому первым условием соблюдения принципа научности в интеграции обучения ДМ и другим дисциплинам различных видов подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов является формирование содержания профильного обучения ДМ на основе базовых понятий ДМ. Тем не менее, этого недостаточно для соблюдения указанного принципа. Поэтому продолжим выявление других условий соблюдения принципа научности в профильном обучении дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

1. *«...Нельзя обучить приложениям математики, не научив самой математике»* [102, с. 75]. В частности, «обучение математиче-

скому моделированию должно входить как часть в специальное образование, а не проводиться за счет общего математического образования. Изучение математики нельзя подменять обучением составлению математических моделей» [102, с. 160]. Поэтому, например, методика построения элективного курса дискретной математики в школе должна учитывать особенности курса математики, изучаемого в школе и колледже, и особенности организации учебного процесса. В свою очередь, профильный курс обучения инженеров-педагогов должен разрабатываться на базе общего курса высшей математики, предусмотренного в профиле подготовки.

2. «*Математика едина*» [102]. «…Как никогда ранее математическое знание сильно дифференцировалось. Возникла масса отдельных математических дисциплин… И все-таки следует провозгласить тезис о *единстве математики*… Можно сказать, что фундаментальная математика и прикладная математика, *переливаясь* (курсив мой. – *Е. П.*) друг в друга, снова представляют единую, но дифферецированную математику» [23, с. 92–93]. Высказанный тезис нацеливает на такое построение профильного курса обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, при котором будет обеспечено гармоничное обучение всей системе методов математического моделирования, основанных как на классической («непрерывной»), так и на дискретной математике. В результате реализации этой *цели* и будут реально созданы необходимые предпосылки для полноценного обучения моделированию, присущему данной области исследований.

3. *«Содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики»* [102, с. 110]. Образно говоря, при построении профильного курса не надо действовать по принципу «чего изволите?» (в частности, при учете мнения выпускающей кафедры, отвечающей за подготовку инженеров-педагогов).

Учет внутренней логики самой математики (наряду с системно-структурным подходом в образовании) также свидетельствует о необходимости включения в основы профильного курса дискретной математики для студентов указанных профилей обучения базовых понятий ДМ. Бесспорно, в *общенаучной* основе математики наряду с понятиями классической математики важнейшую роль играют следующие базовые понятия: бинарное и *n*-арное отношения; отношение эквивалентности и частичного порядка; логическая операция; предикат и квантор; алгебраическая операция; отображение, гомоморфизм и изоморфизм. Эти понятия обеспечивают единство и целостность обучения математике (в результате чего математика предстает «единой»). Так, например, понятия логической операции, предиката и квантора являются основой строгих, точных математических формулировок, рассуждений во всех областях математики. Понятие отображения и классификация видов отображений при обучении ДМ обеспечивают выработку общенаучной культуры использования различных отображений, в том числе и функций, как в самой математике, так и в математическом моделировании. Следовательно, по этим причинам нельзя обойтись как без перечисленных, так и других базовых понятий при отборе содержания *любого* профильного курса ДМ (если не действовать по принципу «чего изволите?»). Таким образом, важной целью изучения учебного предмета «Дискретная математика» является обеспечение *взаимосвязи фундаментальных и профессиональных начал* в подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. При этом, например, в качестве ориентира профильного обучения ДМ инженеров-педагогов целесообразно использовать следующую четырехуровневую классификацию профессиональных задач для обучения курсу математики технического вуза [193]:

1) профессионально аналогичный класс задач и формулировок;

2) учебные профессиональные задачи с элементами математического моделирования;

3) учебно-исследовательские профессиональные задачи;

4) научно-исследовательские профессиональные задачи.

При подготовке инженеров-педагогов среди задач следует предусмотреть и задачи из теории вычислительных процессов, играющие важную роль в подготовке инженеров-педагогов к обучению техников и рабочих в высокотехнологичных автоматизированных отраслях производства.

Принцип научности в значительной мере определяет систематичность, последовательность и на этой основе доступность обучения.

При обучении математике, весьма растянутом по времени, необходимо соблюдать еще несколько принципов, не входящих в список из работы [140]. В свете современного социокультурного подхода в обучении математике к «дополнительным принципам построения содержания, являющимся необходимыми условиями реализации научности, доступности, систематичности и последовательности обучения, относят генерализацию знаний или выделение стержней курса» [229, с. 94].

2.3.2. Принцип генерализации знаний

Принцип генерализации знаний не был выделен В. А. Оганесяном [140] в качестве основного, но под разными названиями используется во многих других педагогических исследованиях. Принцип генерализации знаний задает важное направление реализации принципа научности, ориентирующее на выделение научных основ, истоков курса, поскольку он «означает, что начинать построение курса надо с истоков, с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизаций в систему математических знаний» [229, с. 98]. Например, при изучении алгебраических структур в качестве таких истоков следует принять понятия кольца остатков (от деления на 4) и пятиэлементного поля, рассмотреть таблицы Кэли операций и свойства этих алгебр. Затем перейти к изучению свойств операций и вычислениям значений и тождественным преобразованиям выражений в этих алгебрах. На основе этого и будет осуществлен, уход от довлеющих рекомендаций «с установившимся инструктивным материалом [99, с. 13], в частности, «довлеющих» свойств действий и степеней, тождественных преобразований привычных алгебраических выражений.

Очевидно, в порядке логического развертывания математических структур следует учесть понятия частично упорядоченного множества и решетки, тем более что понятие решетки является одновременно ярким примером бинарного отношения и алгебры, позволяющим наглядно представить таблицы Кэли алгебраических операций (пересечения и объединения элементов).

В обучении ДМ, как и всей математике, наряду с принципом научности и дополняющим его принципом генерализации знаний фундаментальную роль играет принцип преемственности в обучении.

2.3.3. Принцип преемственности в обучении дискретной математике между школой и вузом

В дидактике преемственность обучения обычно трактуется как принцип, требующий формирования знаний, умений, навыков в определенном порядке с тем, чтобы каждый элемент учебного материала логически связывался с другими: последующее опиралось на предыдущее и готовило, в свою очередь, к усвоению нового. Проблема преемственности исследовалась многими учеными. Например, преемственности между школой и вузом посвящены работы Г. П. Мещерякова, Ю. В. Сидорова, Г. Г. Хамова, Б. П. Эрдниева и др. Решением проблем профильной и уровневой дифференциации занимались В. Г. Болтянский, В. А. Гусев, Ю. М. Колягин, И. М. Смирнова, Г. Л. Луканкин, М. В. Ткачева, Р. А. Утеева, В. В. Фирсов и др. Вопросы повторения, пропедевтики и «переучивания» рассматривали М. И. Зайкин, К. И. Нешков и др. Исследованию теоретических оснований преемственности посвящена монография Г. А. Клековкина [85], в которой имеется обзор работ, так или иначе связанных с проблемой преемственности обучения. По его мнению, осмысление новых подходов к обучению (в частности, различных концепций развивающего обучения) и назревшие проблемы практической перестройки традиционной системы образования требуют новых трактовок и самого принципа преемственности, а именно: современные представления о целостности развития человеческой личности и основных положений о соотношении обучения и развития в рамках социокультурного подхода позволяют рассматривать категорию «преемственность» в более широком, философском смысле, как объективной и необходимой связи этапов развития, когда новое, меняя старое, сохраняет в себе его определенные качественные элементы. Поэтому вначале объектами исследования категории «преемственность» становятся специфические проявления преемственности в процессах физиологического, психического, личностного и деятельностного *развития* ребенка. Не менее важно систематизировать знания о возрастных возможностях ребенка, в том числе и в обучении ДМ (см. подп. 2.2.2).

Анализ различных трактовок понятия «развитие» позволил Г. А. Клековкину сделать вывод о том, что *преемственность – закономерность развития, а принцип преемственности – педагогическое* *требование, основанное на этой закономерности* [85]. Г. А. Клековкин отмечает, что новая трактовка принципа преемственности дает возможность по-новому взглянуть на другие принципы дидактики: преемственности (в его традиционном понимании); систематичности и последовательности; доступности, учета возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся. При этом любой из названных принципов можно рассматривать как конкретный критерий принципа преемственности. Ввиду фундаментального исходного значения принципа преемственности он «обеспечивает соблюдение принципов научности, систематичности, последовательности и доступности» [229, с. 132].

Новая трактовка принципа преемственности, данная Г. А. Клековкиным, подтвердается выводом о том, что более широкое понимание преемственности обучения требует рассмотрения *динамики изменения взаимосвязей всех основных компонентов методической системы* (целей, содержания, форм, методов, средств); логической связи теоретического и практического материала; упорядоченности в изучении различных учебных предметов; оправданности межпредметных связей [196]. Таким образом, «принцип преемственности детерминирует генеральную “скелетную” линию *проектирования и реализации* процесса обучения» [85, с. 7].

Итак, для осуществления преемственности обучения ДМ стратегически важно сначала учесть *главное в проектировании и реализации* процесса обучения, а затем выявить *главное в динамике* изменения взаимосвязей всех основных компонентов методической системы обучения.

Важную роль в проектировании процесса обучения дискретной математике и, следовательно, в теоретических основах преемственности играют *возрастные особенности формирования и развития математических когнитивных структур* (структурный фактор). В п. 2.2 были выделены четыре различные формы преобразования структур: наращивание структур, создание структур, настройка и перестройка структур. «Сущность принципа преемственности состоит в том, что его реализация позволяет свести к минимуму в количественном отношении создание новых структур, что требует больших усилий как от учащихся, так и от преподавателей, и обеспечить преимущественность более легких процессов наращивания, настройки и перестройки структур» [229, с. 134].

Важную роль в преемственности в обучении ДМ играет «преемственный» выбор изучаемых базовых понятий ДМ и уровня формальности, строгости их изучения.

Проиллюстрируем этот вывод достаточно характерным примером методики изучения понятия бинарного отношения будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. Бесспорно, понятие бинарного отношения, необходимое для изучения понятия модели, должно быть в обязательном перечне *базовых* понятий дискретной математики, изучаемых студентами этих профилей подготовки. Практика показывает, что с учетом типичных исходных знаний обучаемых при изучении бинарного отношения не следует использовать строгое определение декартового произведения множеств [235]. Для преемственности изучения необходимо сначала пояснить значение приставки «би-» и привести примеры бинарных отношений из школьного курса математики (отношение порядка, параллельности, перпендикулярности, отношения «делиться нацело» на множестве целых чисел). Затем целесообразно изучить основные свойства бинарных отношений. После уже возможно рассмотреть функцию и геометрическое отображение как важный частный случай бинарного отношения и проиллюстрировать понятие бинарного отношения на примерах конечных графов. Далее – привести примеры комбинаторных задач на правило произведения (множеств). И лишь после этого дать строгое определение декартова квадрата множества и бинарного отношения на этом множестве.

Таким образом, преемственность изучения бинарного отношения осуществляется на основе межпредметных связей ДМ со школьным курсом алгебры и геометрии, реализации преемственности в выборе предварительно изучаемых понятий графа, декартова квадрата и функции за счет «погружения» обучаемых в систему привычных представлений (о прямых и числах).

2.4. Реализация принципа профессионально-педагогической направленности в обучении дискретной математике

Как подчеркивает А. Г. Мордкович, качество работы педагогических вузов определяется прежде всего тем, насколько их выпускники соответствуют идеальной модели мастера-педагога, в какой степени они владеют профессиональным мастерством. В овладении профессиональным мастерством фундаментальную роль играет принцип профессионально-педагогической направленности специальной подготовки [130].

Реализация этого принципа основана на принципах фундаментальности, бинарности, ведущей идеи и непрерывности. При этом принцип фундаментальности трактуется в этом случае как необходимость солидной и в то же время не оторванной от нужд приобретаемой профессии математической подготовки учителя математики. Принцип бинарности выражает необходимость объединения в каждом математическом курсе педвуза научной и методической линий. Принцип ведущей идеи выражает необходимость выдвижения на первый план связи конкретного математического курса педвуза с соответствующим школьным предметом. Принцип непрерывности выражает необходимость выявления и оптимального использования всех возможностей активного влияния каждого математического предмета педвуза на то, чтобы студент с первого и до последнего дня своего пребывания в стенах института непрерывно приобщался к будущей педагогической деятельности.

Гармоничное сочетание этих принципов лежит в основе достижения единства и целостности трех направлений формирования основ профессионального мастерства будущих учителей информатики, а именно психолого-педагогического, методического и специального направлений (см. [125]). Очевидно, что данное положение справедливо применительно к подготовке будущих учителей математики, а также инженеров-педагогов, в профессиональной подготовке которых фундаментальное значение имеет курс математики.

Рассмотрим важные конкретные особенности реализации всех четырех принципов профессионально-педагогической направленности в разработке концепции и создании методической системы обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей, выявляемые в рамках содержательного направления интеграции образования на основе принципов фундаментальности, научности, генерализации знаний и преемственности обучения. При этом будем исходить из того, что «предложенная система принципов полна в том смысле, что каждый компонент методической системы (кроме лидирующего, определяющего компонента – целей обучения) имеет под собой в качестве доминирующей основы один из четырех принципов: принцип бинарности является доминирующим при выборе методов обучения, принципы фундаментальности и ведущей идеи – при выборе содержания обучения, принцип непрерывности – при выборе форм и средств обучения» [130, с. 268].

2.4.1. Принцип фундаментальности

Для реализации принципа фундаментальности как необходимого условия солидной и в то же время не оторванной от нужд приобретаемой профессии математической подготовки будущего учителя в первую очередь необходима «направленность содержания образования на методологически важные долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала обучаемого (будущего педагога. – *Е. П.*), обеспечивающие качественно новый уровень его интеллектуальной и эмоционально-нравственной культуры, создающие внутреннюю потребность в саморазвитии и самообразовании на протяжении всей жизни человека, способствующие адаптации личности в быстроизменяющихся социально-экономических и технологических условиях» [231, с. 8] (что уже цитировалось в подп. 1.2.3). Поэтому, как указывает А. Г. Мордкович, принцип фундаментальности доминирует при выборе содержания обучения математике [130], в нашем случае – ДМ.

Поскольку методологически важными, долгоживущими и инвариантными элементами современной человеческой математической культуры являются идеи и методы современной дискретной математики, эти идеи и методы в соответствии с рассматриваемой трактовкой принципа фундаментальности являются неотъемлемой частью содержания *солидной и в то же время не оторванной от нужд приобретаемой профессии математической подготовки будущего педагога. Как установлено при анализе предмета и функций ДМ,* владение идеями и методами дискретной математики стало неотъемлемой частью общей культуры любого специалиста, а тем более будущего педагога, умело использующего в своей профессиональной деятельности методы современной математики и современные информационные технологии.

Как следует из изложенного в подп. 2.1.3, методологически важным, долгоживущим и инвариантным элементом математической культуры наряду с идеями и методами современной дискретной математики является язык доминирующих в ДМ алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем.

2.4.2. Принцип бинарности

В результате междисциплинарной интеграция математики, естественных, технических и гуманитарных наук возникли математические физика, химия, биология, география, экология, экономика, психология, история. Кроме того, методы математики и особенно математического моделирования стали интенсивно применяться в зоологии, ботанике, физиологии, юриспруденции, лингвистике, физической культуре и даже в искусстве. Как видно, методы математики стали играть фундаментальную роль во всех науках, названия которых отражены в перечне соответствующих учебных предметов проекта ФГОС среднего (полного) общего образования.

Таким образом, необходимо расширить предметную область применения принципа бинарности, потребовав в соответствии с общенаучным принципом научности объединения в каждом математическом курсе, изучаемом будущими учителями-предметниками (а не только будущими учителями математики), научной и методической линий.

Анализ принципа культуросообразности применительно к математическому образованию, проведенный в подп. 1.3.5, *показал, что в объединении в каждом математическом курсе научной и методической линий главным ориентиром служит современная математическая культура, наиболее яркими проявлениями которой являются* математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы. При этом наблюдающийся в последние десятилетия расцвет дискретной математики стал одной из главных причин распространения математического моделирования и вычислительных процессов в самых разных областях науки и производства.

Анализ математического аппарата исследований с использованием *СКМ и КТ* в перечисленных дисциплинах показывает, что в формировании основ этого аппарата наряду с классической («непрерывной») математикой фундаментальную роль играет дискретная математика. Метод конечных разностей решения дифференциальных уравнений в математической физике, молекулярные графы в математической химии, клеточные автоматы, отношения различной арности и элементы алгебры высказываний в биологии развития, алгебраические операции и логика предикатов в математической экономике – вот лишь неполный перечень разделов и тем современной ДМ, так или иначе сыгравших свою междисциплинарную роль в формировании основ математического аппарата перечисленных дисциплин.

Таким образом, современный педагог должен обладать не только адекватными своей предметной области познаниями в ДМ, но и уметь использовать их в процессе обучения учащихся и студентов колледжа (техникума). Поэтому в объединении научной и методической линий в каждом математическом курсе, изучаемом будущими педагогами, важное значение имеет знание современной ДМ.

Принцип бинарности в математической подготовке, доминирующий при выборе методов обучения [130], имеет особенно важное значение в математической подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, несущих наибольшую ответственность за обучение школьников и студентов технических колледжей (техникумов) корректному использованию потенциала современного компьютера и, в частности, систем компьютерной математики и компьютерных технологий в изучаемых ими профильных предметах. Как установлено в подп. 2.1.3, язык структур и схем ДМ играет фундаментальную роль в корректном использовании СКМ (более узко – программного обеспечения) и КТ в реализации этапов математического моделирования, особенно в оптимальном выборе языка и метода моделирования, разработке алгоритма, программы вычислений и в итоговом анализе всех возникающих погрешностей в реализации всех этапов моделирования в избранной профессиональной области.

Таким образом, в реализации принципа бинарности важную роль играет принцип генерализации знаний, ориентирующий на выделение общих научных основ, истоков математического и методического курсов, какими являются основные математические структуры дискретной и непрерывной математики, и организацию материала обучения «в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизаций в систему математической науки» [229, с. 96].

Напомним, что незнание языка этих структур и схем порождает самые живучие ошибки моделирования – те, что остаются незамеченными в процессе итогового анализа и тестирования результатов моделирования и доходят до этапа внедрения его результатов, – это ошибки пропущенной логики рассуждений, т. е. ошибки в использовании математического языка.

Как уже отмечалось, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии ПО. Большая часть усовершенствований средств и методов приводит к увеличению производительности и качества примерно на 5–35 %. Но многие из этих усовершенствований были заявлены как дающие преимущества на “порядок”» [35, с. 23].

2.4.3. Принцип ведущей идеи

Как уже отмечалось во введении, продолжают сохраняться проблемы, связанные с математической подготовкой будущих педагогов. В частности, по-прежнему «декларируемое родство математики и информатики в ходе освоения математической компоненты образования чаще всего не находит явного подтверждения, и студенты, изучая математические дисциплины, не склонны видеть в них часть своей профессиональной подготовки» [109, с. 2] (что высказано по поводу подготовки будущих учителей информатики, но справедливо и по отношению к подготовке будущих учителей математики и инженеров-педагогов). Для того чтобы студенты этих профилей подготовки видели в математических дисциплинах важную методическую часть своей профессиональной подготовки, необходима реализация принципа ведущей идеи, выражающего необходимость выдвижения на первый план связи конкретного математического курса педвуза с соответствующим школьным предметом. Поэтому принцип ведущей идеи, как и принцип фундаментальности, доминирует при выборе содержания обучения математике, и в нашем случае – ДМ [130]. Для реализации вышеуказанной связи необходима интеграция содержания математической и методической подготовки студентов-педагогов, имеющая важное методологическое значение в обучении студентов дисциплинам математического и естественнонаучного цикла ФГОС подготовки педагогов.

Действительно, интеграция этих видов подготовки необходима, во-первых, в обучении будущих учителей дисциплине «Естественнонаучная картина мира», поскольку в формировании необходимых представлений о ней у школьников большую роль играет современная математическая культура и соответствующие специальные методические умения. Во-вторых, она необходима в обучении дисциплине «Основы математической обработки информации», предназначенной для формирования методического умения давать школьникам необходимые сведения из математики, составляющие основу математической обработки информации в изучаемом ими предмете. В-третьих, она необходима в вариативной методической подготовке и обучении некоторым дисциплинам профессионального цикла.

Как показал проведенный в п. 2.2, 2.3 анализ предмета и функций ДМ в математическом моделировании, в совершенствовании систем компьютерной математики, в развитии компьютерных технологий, дискретная математика имеет фундаментальное значение в интеграции содержания математической и методической подготовки будущих педагогов и особенно учителей математики информатики и инженеров-педагогов.

Действительно, например, обучение дискретной математике расширяет научное мировоззрение студентов указанных специальностей посредством формирования целостных представлений о процессе математизации наук и фундаментальной роли дискретной математики в этом процессе, что, в свою очередь, способствует формированию их представлений о естественнонаучной картине мира. В формировании этих представлений фундаментальную роль играет положение о том, что обучение дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов должно осуществляться в единстве с «непрерывной» математикой, поскольку они лежат в основе математического аппарата многих естественнонаучных дисциплин.

Далее, в обучении дисциплине «Основы математической обработки информации» фундаментальную роль играет ДМ как математическая основа информатики и, в частности, математической обработки информации, что установлено в подп. 1.4.1.2.

Наконец, ДМ необходима в вариативной методической подготовке и обучении некоторым дисциплинам профессионального цикла педагогов указанных профилей подготовки, что проиллюстрируем на примере подготовки будущих педагогов профессионального обучения и особенно инженеров-педагогов.

В результате изучения дисциплины «Математика», согласно ФГОС подготовки бакалавров профессионального обучения, студент должен знать «фундаментальные разделы математики в необходимом объеме для (подготовки рабочих в различных отраслях экономики) осуществления профессионально-педагогической деятельности» [248, с. 15]. Поэтому в формировании содержания фундаментальных разделов математики из профессионального цикла подготовки определяющую роль играют *математическое моделирование, дискретная математика* и *вычислительные процессы*, лежащие в основе всех новейших технологий и потому играющих особенно важную роль в подготовке рабочих и специалистов среднего звена в наступивший век «компьютерной» автоматизации и роботизации производства. Поэтому идеи и методы этих областей математики, и в том числе ДМ, имеют важное теоретическое значение при выборе как содержания математических дисциплин, так и содержания методики профессионального обучения инженеров-педагогов.

Дискретная математика приобретает еще большее значение в подготовке магистров профессионального обучения, поскольку в общенаучном цикле структуры основных образовательных программ магистратуры указаны дисциплины «История и методология науки», «Методология научного творчества» и «Математическое моделирование». Фундаментальное значение ДМ в разработке специалистом *эффективного* алгоритма вычислительного процесса (в частности, научного эксперимента) свидетельствует о фундаментальной роли ДМ в формировании ряда общекультурных и профессиональных компетенций магистров, например способности и готовности «проводить научные эксперименты и оценивать результаты исследований (ОК-15)», способности и готовности «использовать углубленные специализированные знания, практические навыки и умения для проведения научно-отраслевых и профессионально-педагогических исследований (ПК-30)», «анализировать современные отраслевые (производственные) технологии для обеспечения опережающего характера подготовки рабочих (специалистов) (ПК-31)» [249, с. 9–13].

2.4.4. Принцип непрерывности

В соответствии с принципом непрерывности интеграционный потенциал дискретной математики должен быть направлен на то, чтобы студент с первого и до последнего дня своего пребывания в стенах института непрерывно приобщался к будущей педагогической деятельности. Поэтому принцип непрерывности является доминирующим при выборе форм и средств обучения.

В реализации принципа непрерывности фундаментальное значение приобретают различные формы и средства вариативной подготовки студентов и в том числе формирования вариативной индивидуальной образовательной траектории (ИОТ) их подготовки, исходящей от личности студента, на что ориентирует принцип антропоцентризма, являющийся одним из трех принципов интеграции образования (см. п. 1.1).

2.4.5. Концепция методической системы обучения дискретной математике

Анализ главных особенностей охарактеризованного интеграционного потенциала дискретной математики, ее предмета и функций, а также принципов обучения позволяет сформулировать концепцию методической системы обучения дискретной математике студентов указанных специальностей, суть которой отражена в следующих положениях:

- высокая значимость обучения дискретной математике определяется тем, что *владение идеями и методами дискретной математики стало неотъемлемой частью общей культуры специалиста*, умело использующего в своей профессиональной деятельности методы современной математики и современные информационные технологии;
- обучение дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов должно осуществляться *в единстве* с «непрерывной» математикой, что подразумевает формирование у них умения гармоничного сочетания в приложениях математики дискретных и непрерывных моделей и корректного использования систем компьютерной математики и компьютерных технологий;
- в основе профессионально-педагогической направленности обучения дискретной математике студентов указанных педагогических специальностей лежит интеграция их математической и методической подготовки;
- обучение дискретной математике расширяет научное мировоззрение студентов указанных специальностей посредством формиро-

вания целостных представлений о процессе математизации наук и фундаментальной роли дискретной математики в этом процессе;

- обучение дискретной математике расширяет возможности метапредметного характера математической подготовки будущих педагогов указанных специальностей и тем самым усиливает возможности метапроектного обучения математическим дисциплинам, ограничивающего традиционный предметоцентризм.

Положение о единстве обучения дискретной и непрерывной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов является актуальным и для студентов многих других специальностей. К сожалению, в обучении ДМ, как правило, обращают внимание лишь на то, что должна быть какая-то связь между непрерывной и дискретной математикой, что значительно урезает возможности реализации широко известного тезиса о единстве в обучении математике.

Предлагаемые положения концепции регулируют процесс и формируют цели и содержание многоуровневого обучения дискретной математике на всех этапах его пропедевтики (довузовская и вузовская на младших курсах бакалавриата), фундаментальной базовой подготовки при изучении курса «Дискретная математика» (на старших курсах бакалавриата или в магистратуре) и при послевузовском обучении в аспирантуре, на курсах повышения квалификации и др.

2.5. Системный анализ категории методической системы обучения математике, ее основных компонентов и состояний

2.5.1. Системный подход и его роль в анализе категории методической системы обучения будущих педагогов

Новая волна популярности системного подхода (угасшая в первой половине 90-х гг. XX в.) связана с переосмыслением программы системного исследования и его методики с точки зрения интеграции естественнонаучного и гуманитарного дискурсов в системно-педагогическом исследовании в эпоху математизации наук.

Как известно, системный подход представляет общенаучную методологию педагогики, отражающую всеобщую связь и взаимообусловленность явлений и процессов, происходящих в образовании и порожденных интеграцией естественных и гуманитарных наук. Он ориентирует исследователя на рассмотрение процесса подготовки студентов как системы, имеющей определенное строение и свои законы функционирования. Ярким отражением системного подхода в обучении предмету стали категория методической системы обучения предмету [209] и категория методического мышления, подвергнутая психолого-педагогическому анализу в работе [207] и других работах.

Важные особенности влияния процесса математизации наук на исследование категории методической системы обучения предмету (дисциплине) отчетливо выявляются при анализе категориального аппарата математики и особенно языка математических структур и схем.

Действительно, описание того, что такое математическая структура, относится к основаниям математики, а предметом самой математики являются конкретные математические структуры и отношения между ними (во всем их разнообразии). Аналогично, общее описание методической системы, ее компонентов и взаимосвязей относится к методологии методики обучения, а предметом методики являются конкретные модели, концептуально отражающие различные аспекты и составляющие процесса обучения математике. Эта особенность является важным аспектом реализации системного подхода в анализе категории методической системы обучения математике.

Во-первых, для изучения методических систем, их компонентов и взаимосвязей студент должен овладеть необходимым категориальным аппаратом системного исследования, в котором фундаментальную роль играют понятия языка математических структур и схем (в общенаучной терминологии средств, методов познания). Среди них – понятия структуры (системы) и ее модели (интерпретации), изоморфизма («равенства» моделей), отношения порядка, эквивалентности, ряд понятий математической логики, теории графов и многие другие понятия математики, необходимые для системного анализа проблемы исследования.

Во-вторых, обогащенный математическими понятиями категориальный аппарат системного методического исследования необходим для выработки у будущих учителей умения адекватно ориентироваться в существующей иерархии (структуре) тенденций, подходов методической науки и умения правильно выбирать и использовать существующие методические системы обучения и их модели. Благодаря этим умениям будущими учителями будут глубже поняты взаимосвязи между различными научными областями, у них появится умение осуществлять перенос положений из одной научной области в другую, конструировать аналоги объектов и их свойств, умения, являющиеся признаками методического мышления [207, с. 5].

Анализ самой структуры интеллектуальных операций в мышлении человека [261] показывает, что в ее формировании фундаментальную роль играют структуры математики. Действительно, не случайно даже в названиях известных интеллектуальных операций – «анализ, синтез, структурирование, раскрытие отношений» и др. [261, с. 221] – отразились, например, названия таких областей и разделов современной дискретной математики и ее приложений, как дискретные структуры (модели), дискретный анализ, анализ и синтез (микросхем, узлов ЭВМ), отношения и соответствия и др.

Еще более отчетливо влияние процесса математизации наук на формирование представлений о категории методической системы обучения и вообще о категориальном аппарате методики обучения предмету (дисциплине) студентов *выявляется при анализе уникальных возможностей, которые предоставляет исследователям современный компьютер.* По мнению основоположника информатики В. М. Глушкова, благодаря универсальности компьютера любую информацию и поэтому любую идеальную модель, создаваемую воображением и замещающую объект исследования, можно перекодировать на язык компьютера и ввести в его память. Чтобы идеальная модель была действующей, необходимо заложить в память компьютера правила преобразования информации. Однако любые правила можно разложить на простейшие («атомы») и создать, таким образом, универсальный логико-алгебраический язык компьютеров, реализуемый при помощи выполняемых компьютером операций. Исходя из этого, В. М. Глушков делает вывод о том, что «факт принципиальной возможности программирования на современных электронных цифровых машинах любых информационных моделей установлен не менее твердо, чем факт возможности разложения любого материального объекта на элементарные частицы. Важно еще раз подчеркнуть, что здесь идет речь именно о моделях любой (а не только математической) природы» [38, с. 15]. По этой причине методы моделирования, в том числе и математического, начинают получать не меньшее распространение в педагогической и особенно в методической подготовке, нежели в психологической, в которой уже предусмотрено изучение дисциплины «Математическое моделирование» [158]. В подтверждение этому отметим, что в подготовке педагогов профессионального обучения на уровне магистратуры также предусмотрена дисциплина «Математическое моделирование в профессиональном образовании» [157].

Влияние процесса математизации наук на категориальный аппарат методики обучения предмету (дисциплине) не столько непосредственно, сколько опосредованно происходит также через науки, с которыми связана методика. А именно: во-первых, этот процесс воздействует на развитие математического аппарата предметной области, изучаемой студентами, что, в свою очередь, потребует впоследствии от учителя умело использовать этот аппарат *в обучении предмету.* Во-вторых, влияние этого процесса происходит через науки, с которыми связана методика (психологию, социологию, физиологию и др.), в которых стали активно использоваться методы математики. Все это является еще одной причиной того, что в различных «предметных» методиках сначала стали использоваться методы математической статистики, затем – более разнообразные методы математики и, наконец, в настоящее время начинается выход на еще более высокий качественный уровень использования математики – моделирование в частных методиках на основе понятий и фактов математики [158, 249, 259]. Эти понятия и факты в силу их фундаментальной роли в анализе, синтезе, обобщении и других мыслительных операциях имеют методологическое значение при формировании языкового пространства в методике обучения данному предмету. Они необходимы для формирования навыков системного исследования, в том числе умения интерпретировать информацию – придавать ей смысл, переводить с одного языка исследования на другой, осуществлять перенос положений из одной научной области в другую, конструировать аналоги объектов и их свойств, что является признаками методического мышления.

2.5.2. Понятие методической системы обучения математике, ее основные компоненты и состояния

Рассматривая обучение дискретной математике как методическую проблему, необходимо определить ее роль и место в методической системе обучения математике. Традиционно в состав этой системы включают цели обучения математике, содержание математического образования, а также методическое обеспечение учебного процесса, компонентами которого являются методы, формы и средства обучения [188]. Эти компоненты тесно взаимосвязаны друг с другом, что обеспечивает целостность всей системы, выражаемой в единстве реализуемых ей функций. При этом основными функциями методической системы традиционно являются образовательная, воспитывающая и развивающая, эвристическая, прогностическая, эстетическая, практическая, контрольно-оценочная, информационная, корректирующая, интегрирующая функции [209, с. 28].

Лидирующим компонентом методической системы являются, как известно, цели обучения математике, определяющие общие закономерности ее функционирования на различных уровнях рассмотрения математического образования: теоретического представления, учебного предмета, учебных материалов и реального учебного процесса [209, с. 82].

Цели и задачи обучения математике определяют отражающее их содержание обучения, основными элементами которого являются математические понятия, аксиомы, теоремы, правила, методы, алгоритмы, основания математики (формалистские, интуиционистские, конструктивистские и т. д.). В свою очередь, особенности предметного содержания, подлежащего изучению, во многом предопределяют характер используемых методов, форм организации учебной деятельности и набор необходимых средств обучения. При этом на практике характер соподчинения целей, содержания и методов обучения не всегда является однозначным. На различных этапах и уровнях анализа методической системы обучения математике роль *лидирующего* компонента системы могут принимать не только цели обучения, но и *содержание, методы* и *средства обучения*.

Становление абстрактной алгебры и математической логики кардинальным образом изменило в прошлом веке содержание обучения математике (особенно в высшем профессиональном образовании). Лидирующая роль нового *содержания* обучения проявилась в обновлении целей методической системы обучения математике, в том числе и целей интеграционного характера. В результате одной из главных целей обучения стала интеграция обучения как классической («непрерывной»), так и дискретной математике.

Как уже установлено, во второй половине прошлого века важное влияние на методическую систему обучения математике в вузе (и особенно на содержание обучения) постепенно стали оказывать *методы* математического моделирования и теории вычислительных процессов.

Как уже отмечалось, в последнее десятилетие в методической системе обучения математике особенно важную роль стали играть *средства обучения*. Бесспорно, компьютер стал мощным техническим средством повышения эффективности учебно-педагогической деятельности. Например, в методической системе обучения математике появилась новая типология учебно-математических средств, основанная на дидактических возможностях компьютера и мультимедийных технологий как средств обучения.

Компьютер стал освобождать учащегося не только от рутинных численных и символьных вычислений, но и также от решения многих шаблонных задач, алгоритм решения которых реализован в компьютерных программах. Не использовать эти потрясающие технические, информационно-коммуникативные возможности компьютера в образовательных целях уже становится невозможно. В то же время сугубо вспомогательные функции компьютера не должны подавлять собой функции основные и тем более не должны подменять учителя в его формировании личности учащегося.

В результате появления новых «компьютерных» средств обучения (информационных, телекоммуникационных, мультимедийных и т. д.) появилась соответствующая им дистанционная форма обучения, на некоторых специальностях высшего профессионального образования видоизменились и другие компоненты методической системы обучения математике будущих педагогов. Появился новый подход в методической системе обучения математике, основанный на идее создания учебно-методического комплекта по данному предмету. Применительно к обучению в школе такой комплект, как правило, включает учебник, задачник, методическое пособие для учителя, хрестоматию, книгу для внеклассного чтения, рабочие тетради, дидактические материалы, компьютерную поддержку и др.

При рассмотрении методической системы обучения математике с «дискретной» точки зрения следует исходить из того, что «если объект конкретного методического исследования выделяет какой-либо аспект или свойство объекта методики обучения, то и предмет этого исследования будет соотноситься с предметом методики и охватывать либо подмножество основной методической системы, либо некоторые аспекты ее компонентов в их взаимосвязях, либо отдельные свойства и т. д. Методическая система, адекватная исследуемому феномену (дискретной математики. – *Е. П.*), содержит структуру, содержание этого феномена, цели, средства, методы и формы его функционирования» [209, с. 29].

Структура и содержание феномена «Дискретная математика» и его функционирование уже описаны выше. Но какое подмножество основной методической системы и какие аспекты ее компонентов в их взамосвязях проявляются в методической системе обучения дискретной математике, являющейся подсистемой основной методической системы?

В методической системе обучения ДМ, разумеется, существуют «традиционные» компоненты любой методической системы обучения: цели, содержание, методы, средства и формы обучения. Но, как следует из анализа методологии обучения дискретной математике, в методической системе обучения дискретной математике выявляются *новые*, «нетрадиционные» *факторы методической системы обучения ДМ,* каковыми стали в последние десятилетия математическое моделирование, вычислительные процессы и информатизация исследований. Они имеют фундаментальное значение в выявлении лидирующего компонента, каким являются цели обучения ДМ. Это неудивительно потому, что, во-первых, существует труднообозримое многообразие различных видов моделирования с использованием компьютера и, как следствие этого, наличие на различных специальностях большого числа разнообразных подходов и особенностей обучения ДМ (наряду с непрерывной математикой, являющейся математической основой моделирования с использованием компьютера). Во-вторых, существование таких факторов вызвано самыми разнообразными условиями учебной среды. Например, в соответствии с принципом антропоцентризма интеграции образования в исследовании компонентов методической системы обучения ДМ необходимо учесть такой фактор как *структура личности учащегося.* Особенно важно учитывать этот фактор в вариативном обучении ДМ.

Как известно, необходимо различать формальную математическую модель (алгебраическую систему [118], формальную систему [219]) и ее содержательную интерпретацию. В результате выбора лидирующего компонента – целей обучения – возникает **модель** методической системы**,** т. е. содержательная интерпретация «формальной» общей методической системы обучения математике, «формализованно» описанной в терминах методологии и методики обучения математике. В той или иной модели методической системы обучения ДМ (ее составе и структуре) проявляются следующие характерные *состояния* любой сложной системы (природной, социальной, экономической, педагогической и т. д.), которые необходимо учитывать при ее исследовании:

1. *Динамичность*. Она означает, что состояние системы обусловлено меняющимися особенностями требований социума, производства и науки в целом. Модель методической системы обучения дискретной математике для инженерно-педагогических специальностей является динамической, поскольку в последние два десятилетия существенно видоизменился перечень инженерных специальностей в машиностроении, металлургии и энергетике, возникли новые направления инженерной подготовки в авиационной, ракетно-космической индустрии и других областях.

2. *Статичность*. Система может быть ограничена определенными временны́ми рамками, и поэтому компоненты и взаимосвязи между ними можно считать неизменными, статичными. Статичность этой системы объясняется остающимися неизменными гносеологическими, математическими и кибернетическими основаниями методологии обучения математике и минимальным влиянием на нее в ближайшие годы социокультурных оснований. Потому остается неизменным лидирующий компонент этой модели, которым являются цели обучения дискретной математике. Например, в течение последнего десятилетия для инженерной специальности 654700 Информационные системы остается неизменной основная цель обучения дискретной математике – овладение математическими основами разработки и совершенствования информационных систем.

Вследствие указанного остается неизменным и содержание обучения дискретной математике: логические исчисления, графы, теория алгоритмов, языки и грамматики, автоматы, комбинаторика; логика высказываний; логическое следование, принцип дедукции; логика предикатов; синтаксис и семантика языка логики предикатов; принцип логического программирования; аксиоматические системы, формальный вывод; метатеория формальных систем; понятие алгоритмической системы; рекурсивные функции; машины Тьюринга; алгоритмически неразрешимые проблемы; меры сложности алгоритмов; легко- и трудноразрешимые задачи; основы нечеткой логики; элементы алгоритмической логики.

3. *Стохастичность*. Система может иметь, например, социальный характер, и поэтому результат ее действия может быть только вероятностным. Поэтому взаимосвязь между некоторыми элементами системы может быть нечетко выраженной. В соответствии с обозначениями, принятыми в теории нечетких множеств и нечеткой логике [98], на схемах, изображающих кружком или прямоугольником существование (наличие) того или иного компонента системы, целесообразно указывать вероятность его существования. Кроме того, на стрелках, изображающих взаимосвязь между компонентами системы, также целесообразно указывать вероятность наличия этой связи.

Модель методической системы обучения ДМ для направления подготовки гуманитариев (психологов, филологов, философов и др.) является *стохастической*, поскольку взаимосвязь между некоторыми элементами системы нечетко выражена (неопределенна), так как в настоящее время не существует разработанной концепции обучения ДМ на специальностях этого направления и, следовательно, очень разнообразны цели и содержание обучения ДМ в зависимости от специальности.

Элементы дискретной математики для студентов этих направлений подготовки, как правило, изучаются раздельно в разделах дисциплин ЕН и ОПД (общие математические и естественнонаучные дисциплины и общепрофессиональные дисциплины). Например, в госстандарте специальности 020100 Философия элементы дискретной математики содержатся как в разделе ЕН (элементы, множества, отношения, отображения; числа; комбинаторика; конечные и бесконечные множества; основные структуры на множестве) и разделе ОПД (предмет и значение логики; мышление и язык; логический анализ естественного языка; классическая логика высказываний и предикатов). Цель изучения некоторых элементов ДМ – овладение фундаментальными понятиями, с помощью которых строятся и описываются картины мира; категориальным аппаратом мышления; сущностью научного познания, роли и значения логического мышления в нем. В результате у обучаемого формируются основные формы фиксации и преобразования знания на уровне абстрактного мышления, связь мышления с языком и роли последнего в мыслительных процессах и т. д., навыки и умения в области классической дедуктивной логики, познавательные приемы правдоподобных рассуждений, практического анализа логики различного рода рассуждений и т. д.

4. *Управляемость*. Система может управляться изменением какого-либо ее параметра. Как будет обосновано, таким параметром является, например, лидирующий компонент «структура личности» [192]. В соответствии с лидирующим компонентом формируются конкретизированные цели и программа обучения, которые должны, во-первых, вызывать у школьника интерес и поэтому иметь для него личностный смысл. Во-вторых, они должны соответствовать имеющимся у него жизненным представлениям. В-третьих, они должны предлагаться в форме, соответствующей особенностям его когнитивной структуры.

Итак, на различных этапах и уровнях анализа методической системы обучения дискретной математике наряду с лидирующим компонентом – целями обучения, определяющими состав и взаимосвязи компонентов методической системы (в зависимости от профиля подготовки будущих педагогов) могут играть важную роль некоторые другие факторы, выявляемые в процессе анализа дидактических принципов, целей и содержания обучения. В результате такого анализа возникает модель методической системы, в которой проявляются характерные *состояния* любой сложной системы: динамичность, статичность, стохастичность и управляемость.

2.6. Анализ подходов в обучении дискретной математике в системе высшего профессионального образования

В исследовании компонентов методической системы обучения ДМ и на этой основе – различных *моделей методической системы обучения ДМ* для того или иного профиля обучения студентов необходим предварительный системный анализ учебной и методической литературы и содержащихся в ней описаний различных направлений обучения ДМ, существующих в высшем профессиональном образовании.

2.6.1. Анализ учебной и методической литературы

Отличительной особенностью первых учебных пособий по ДМ для *специальностей, связанных с приложениями математики, инженерно-технических* и некоторых других специальностей [45, 104, 264], является обширность их содержания и нацеленность на подготовку математиков и инженеров в области прикладной математики.

Основой содержания этих пособий стали элементы теории математических моделей (в терминологии А. И. Мальцева – алгебраических систем [118]) и элементы теории алгоритмов. И это не случайно, поскольку постепенная замена натурного эксперимента на математический стимулировала развитие теорий математических моделей и алгоритмов и использование в этих целях языка не только классической, но и современной математики (т. е. языка алгебраических, порядковых, топологических структур и логических, алгоритмических и комбинаторных схем). В этих пособиях определяется, например, понятие группы, полугруппы, излагаются алгебра высказываний, булевы функции, машины Тьюринга, рекурсивные функции и т. д. Наряду с элементами языка современной математики представлены элементы теории графов и формальных грамматик, необходимые для анализа и синтеза различных сетей (электрических, транспортных и т. п.), изучения теории автоматов и разработки программного обеспечения. Например, излагается все связанное с понятиями связных и взвешенных графов и их основных свойств.

Дальнейшее возрастание роли дискретной математики в совершенствовании систем компьютерной математики и компьютерных технологий повлекло за собой появление *специализированных* учебников по дискретной математике [5, 136]. С этой точки зрения изданные в последние десятилетия пособия и учебники [5, 10, 70, 134, 136, 195, 265 и др.] можно в определенной мере условно разделить на два типа: 1) пособия и учебники для обучения СКМ; 2) пособия и учебники для обучения КТ.

Учебники и пособия 1-го типа предназначены для изучения таких важнейших на современном этапе узкоспециализированных дисциплин, как «Теоретическая информатика», «Методы и алгоритмы принятия решений», «Функциональное и логическое программирование», «Структуры и организация данных для компьютеров», «Системный анализ и моделирование», «Теория искусственного интеллекта» и т. п. В отличие от *первых* учебных пособий, наряду с элементами теории моделей и графов в концептуальную основу учебников и пособий для обучения СКМ положены булевы функции, исчисления высказываний и предикатов, комбинаторика и теория формальных языков.

Учебники и пособия 2-го типа предназначены для изучения дисциплин «Электронные вычислительные машины», «Автоматизированные системы управления», «Конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры», «Системы автоматизированного проектирования», «Робототехнические системы» и т. п. Они содержат, наряду с элементами теорий моделей, алгоритмов и графов, теорию автоматов. Отметим также, что в некоторых пособиях в концептуальную основу включены прикладная теория алгоритмов и характеризационный анализ.

Дальнейшее развитие математического моделирования и на этой основе ДМ стало причиной того, что методы дискретной математики вместе с методами классической («непрерывной») математики распространились в естественные, экономические и некоторые другие науки (не связанные с приложениями математики). В настоящее время в преподавании ДМ на специальностях, очерченных рамками этих наук, «царит разнобой и разноголосица». Как следствие этого, в разных вузах выпускаются методические указания и разработки, нередко весьма неудачные.

Справедливости ради следует отметить, что для студентов некоторых социально-экономических и гуманитарных специальностей можно указать пока редкие учебные пособия по дискретной математике (например, [94, 132]), в которых достаточно удачно и адаптированно излагаются те или иные элементы ДМ, изучаемые на этих специальностях. Характерно, что общей частью концептуальных основ таких пособий становятся элементы языка математических структур и схем, доминирующих в дискретной математике (множества и операции над ними; бинарные отношения, их основные виды свойства; алгебра высказываний и логика предикатов, основные понятия теории графов и т. д.). В частности, в учебном пособии Г. И. Москиновой «Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях» для студентов, обучающихся по экономическим и управленческим специальностям и направлениям, содержатся основные понятия теории множеств, логики, теории графов в иллюстрациях и поясняющих примерах, адаптированных к потребностям менеджмента и управления [132].

К сожалению, эти пока редкие пособия не могут изменить существенно состояние преподавания ДМ в вузах хотя бы по той простой причине, что перечень охваченных этими пособиями специальностей весьма невелик. Ситуация усугубляется тем, что в профильном обучении математике в школе пока не нашли должного отражения элементы ДМ. Как уже отмечалось во введении, важную роль в реализации дискретной линии в математической подготовке студентов и школьников сыграло включение в 2000 г. этого предмета в государственные стандарты подготовки учителей математики и информатики, инициированное учебным пособием В. Л. Матросова, В. А. Стеценко [124].

2.6.2. Направления обучения дискретной математике в высшем профессиональном образовании

Охарактеризуем содержание обучения ДМ и концептуальные особенности для каждого из ранее указанных направлений (см. подп. 1.3.5).

Для выявления характерных особенностей содержания обучения ДМ на специальностях этих направлений были проанализированы ранее существовавшие государственные стандарты подготовки специалистов, накопленный опыт работы по которым имеет важное значение в начавшемся в последние годы переходе от специалитета к бакалавриату и магистратуре.

2.6.2.1. Содержание обучения математиков и специалистов в области прикладной математики и информатики

В обучении студентов – будущих специалистов этих направлений подготовки фундаментальную роль играет профильное обучение математическому моделированию с использованием компьютера, в основе которого – методы классической и дискретной математики, а также обучение умению реализовывать в своей профессиональной области все этапы построения полной цепочки использования компьютера (реальная задача, перевод задачи на адекватный математический язык, разработка математической модели решения задачи, разработка алгоритма решения и соответствующей ему программы, симуляция решения, анализ результатов).

В подготовке математиков и математиков-прикладников было предусмотрено профильное обучение языку *доминирующих* в ДМ алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем. Это необходимо для получения фундаментального математического образования, обеспечивающего действенность математических знаний.

При подготовке математиков и математиков-прикладников алгебраические, порядковые структуры и логические схемы выделялись как правило в отдельные фундаментальные курсы современной алгебры и математической логики. При этом обучение ДМ неразрывно связано с этими курсами и содержит, наряду с другим материалом, фундаментальное изложение алгоритмических и комбинаторных схем. В связи с этим отметим, что «комбинаторика как традиционный раздел дискретной математики для математиков-программистов должен быть обновлен и дополнен комбинаторными алгоритмами, чтобы способствовать формированию культуры разработки анализа и программной реализации алгоритмов» [236, с. 73]. Кроме того, «ведущей идеей при обучении дискретному анализу будущих математиков-программистов должна являться взаимосвязь дискретной математики и теории алгоритмов, другими словами, изучение алгоритмов над объектами дискретной математики» [236, с. 75].

Было предусмотрено, что конкретное содержание *базовой* темы «Структуры и схемы ДМ» и выбор другого содержания дискретной математики определяются в соответствии со спецификой направления прикладной математики, СКМ или КТ, в рамках которого происходит обучение. В процессе изучения систем компьютерной математики при прохождении базовой темы необходимо обеспечить все необходимое для успешного изучения теории формальных языков, на основе которой происходит совершенствование СКМ. При обучении компьютерным технологиям изучение базовой темы должно обеспечить успешное изучение вычислительных алгоритмов, нечисленного программирования, комбинаторных алгоритмов, алгоритмизации процессов, обязательных для изучения в рамках КТ.

Изложение содержания дискретной математики должно быть весьма формализованным, предусматривающим строгое теоретическое обоснование всего изучаемого с небольшим числом примеров и иллюстраций.

В результате обучения дискретной математике должны быть обеспечены целостность обучения математике, овладение математическими идеями, содержанием и методами прикладной математики.

2.6.2.2. Содержание обучения на инженерно-технических специальностях

В программу по дисциплине «Основы ДМ» для каждой специальности, как правило, включались:

1) операции над множествами и их свойства (в том числе и прямое произведение множеств);

2) бинарное отношение и его основные свойства;

3) отображение, обратное отображение и композиция отображений;

4) алгебраическая операция, алгебра и их примеры;

5) алгебра высказываний;

6) аналитическое представление булевых функций (совершенные нормальные формы);

7) некоторые основные понятия логики предикатов и их свойства;

8) основные понятия и теоремы теории графов;

9) числовые характеристики графов;

10) некоторые прикладные задачи на графах (анализ связности, эйлеровости, гамильтоновости, планарности графов, раскраска графов и т. п.);

11) некоторые понятия комбинаторики и их свойства.

При обучении по некоторым специальностям, связанным с разработкой и эксплуатацией различных управляющих автоматов и автоматизированных систем, предусматривалось изучение теории автоматов.

Все основные понятия и факты должны быть доказаны и сопровождены достаточным числом примеров и иллюстраций. Обучение ДМ на специальностях, очерченных рамками второго направления, в соответствии со сложившейся практикой завершает обучение математике. В результате обучения дискретной математике должно быть обеспечено овладение теми видами математического моделирования, которые присущи данной специальности.

Отметим, что «при формировании курса дискретной математики при подготовке инженера, математика-программиста и учителя информатики следует соблюдать оптимальную пропорцию между фундаментальностью и практичностью с включением как вероятностных, так и невероятностных разделов, алгоритмов над объектами дискретной математики» [237, с. 105].

2.6.2.3. Содержание обучения на экономических и управленческих специальностях

В рамках данного направления изучались следующие понятия и факты:

- операции над множествами;
- бинарное отношение и его основные свойства, операции с бинарными отношениями (для изучения баз данных);
- отображения и их основные виды;
- алгебра высказываний;
- предикаты и кванторы (для анализа формулировок определений, теорем и изучения баз данных);
- основные виды и свойства графов и операции над графами, матрицы смежности и инциденций графа;
- некоторые экстремальные задачи теории графов (нахождение минимального остового дерева, кратчайшего маршрута, задача коммивояжера и др.).

Перечисленные понятия и факты играют ключевую роль в обучении студентов методам формализованного описания или представления процессов или систем (экономических, социологических и т. д.); качественному анализу сложных проблем (например, управленческих, социологических и т. д.), систематизации того, что известно по интересующей проблеме.

Изложение должно содержать минимум доказательств и максимум примеров и иллюстраций, обеспечивающих понимание изучаемого.

Изучение элементов ДМ на экономических и управленческих специальностях выводит использование математики за рамки рутинной статистики. В последние годы в концепции обучения ДМ в рамках данного направления предусматривается изучение нечетких графов, отношений и логических схем [98], необходимых для вероятностно-статистического моделирования.

2.6.2.4. Содержание обучения на гуманитарных (психология, филология и др.) специальностях

В интеграции обучения на основе его фундаментализации актуальна проблема развития адекватного гуманитарной профессии математического стиля мышления, формируемого на основе единства в обучении дискретной и «непрерывной» математике.

В формировании элементов математического мышления гуманитариев решающую роль играли доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические и комбинаторные схемы. Наиболее полно типы этих структур и схем, которые следует изучать на специальностях данного направления, представлены в учебниках и учебных пособиях [68, 235]. *Особенно актуально*, что на основе изучения перечисленных структур и схем в мышлении обучаемых формируются *когнитивные* (познавательные) структуры и схемы, являющиеся их отражением. Поэтому изучение данных структур и схем способствует выработке умения *структурировать* и тем самым систематизировать информацию, что необходимо для качественного анализа сложных проблем гуманитарных наук.

Изучение доминирующих в ДМ структур и схем в рамках этого направления необходимо для преодоления информационного примитивизма в обучении математике и информатике, характеризуемого усвоением в основном информационной компоненты знаний, в том числе увлечением готовыми программными «рецептами». Как справедливо отмечается в одной из статей, «и сегодня вполне достаточно людей на самых различных уровнях образовательной иерархии, которые искренне считают, что изучение офисных пакетов и есть суть информатики» [103, с. 4].

Кроме доминирующих в дискретной математике структур и схем, в содержании обучения должно быть *предусмотрено* адекватное *изучение языка теории графов*, играющего значимую роль в систематизации больших массивов информации. Например, при изучении лингвистики некоторые понятия теории графов и соответствующие расчеты на компьютере позволяют систематизировать основную информацию о языке художественных произведений, принадлежащих тому или иному автору. Благодаря этому возможно выявление особенностей авторского стиля художественных произведений.

Обучение ДМ должно быть нацелено на создание у обучаемых цельной картины современной математики и ее приложений как важной составляющей профессиональной культуры. На этом пути важно умело использовать принцип культуросообразности, а также принципы научности и генерализации знаний. В частности, в обучении необходимо исходить из внутренней логики самой математики, и поэтому при формировании содержания профильного курса ДМ не надо действовать по принципу «чего изволите» (при учете мнения выпускающей кафедры). Изучение дискретной математики необходимо для превращения математики в *оружие* для размышления.

Для специальностей других направлений подготовки государственных стандартов высшего профессионального образования (таких, например, как сфера обслуживания, транспортные средства и т. д.) предусматривалось изучение лишь некоторых отдельных понятий и фактов ДМ или вообще не предусмотрено обучение дискретной математике, поэтому не существует и соответствующих концепций обучения ДМ.

В условиях реформирования образования актуальной для всех направлений является необходимость использования «жесткой» и «мягкой» моделей обучения [227]. «Жесткая» модель обучения основана на технологическом (символизируемом классно-урочной системой), а «мягкая» – на синергетическом подходе в образовании. «Мягкая» модель обучения – это мудрость мягкого управления учебным процессом через советы и рекомендации, учитывающие незапланированные малые изменения, флуктуации различных педагогических систем. «Поэтому в основе современных моделей обучения должен лежать принцип неопределенности ряда учебных параметров, зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов» [227, с. 77].

2.6.3. Основные методические аспекты обучения дискретной математике

В исследовании уровней представления содержания профильного обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инжнеров-педагогов и основанной на нем постановке профильного курса дискретной математики необходимо рассмотреть основные методические аспекты (принципы, цели, методические схемы изложения) обучения дискретной математике, характерные для рассмотренных направлений обучения в системе высшего профессионального образования.

2.6.3.1. Методические аспекты обучения дискретной математике математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики

В соответствии с направлением обучения главной методологической целью обучения является овладение стилем мышления, которому присущи глубокое знание системы методов математического моделирования; умение выбрать из этой системы и применить все необходимое для решения конкретной прикладной задачи (или доказать, что задача неразрешима на данном языке); умение строить полную цепочку использования компьютера для решения этой задачи. Как уже отмечалось, студент должен научиться быть одновременно постановщиком задачи; разработчиком математического обеспечения ее решения, алгоритма решения, программы вычислений на компьютере; наконец, отладчиком этой программы (т. е. он должен научиться владеть всем «производственным» циклом моделирования). Только в этом случае студент сможет стать полноценным консультантом в области математики для специалистов других профессий, что, в принципе, является одной из главных задач всего обучения прикладной математике.

Ведущую роль в обучении играют принципы научности, генерализации знаний (выделения главного), систематичности, обучения от общего к частному, единения непрерывного и дискретного.

Ввиду обширности содержания обучения ДМ ограничимся изложением общепринятой методической схемы обучения основным теоретико-модельным понятиям дискретной математики, каковыми являются понятия отношения, алгебраической операции, предиката, модели, ключевые в математическом моделировании.

Сначала на основе вводных понятий алгебры множеств сразу дается определение декартова произведения множеств и лишь потом изучаются основные свойства бинарных отношений и приводятся примеры «классических» бинарных отношений. Далее дается определение n-арного отношения на множестве как подмножества соответствующей декартовой степени множества. На основе n-арного отношения определяется понятие n-арной алгебраической операции как соответствия, при котором каждому кортежу из n элементов множества ставится в соответствие по определенному правилу некоторый элемент этого же множества. На основе определения декартовой степени множества определяется предикат как некоторая специальная функция и изучаются некоторые свойства предикатов и их кванторных приставок. Понятия алгебраической операции и n-арного отношения позволяют определить понятие математической модели.

Описанная методическая схема обучения перечисленным основным понятиям ДМ фактически содержится в учебных пособиях [45, 104, 136, 264], предназначенных в основном студентам с высоким уровнем исходной математической подготовки. В пособиях по дискретной математике [5, 70] подразумевается, что студенты ранее уже изучили эти понятия.

На базе теоретико-модельных понятий и в зависимости от специфики математического моделирования (в рамках обучения по специальности) определяются последовательность изучения других тем ДМ, конкретные методические приемы и способы их изложения.

Итак, можно констатировать, что существует в достаточной степени разработанная методика обучения дискретной математике математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики.

2.6.3.2. Методические аспекты обучения дискретной математике на инженерно-технических специальностях (электротехнических, машиностроительных и т. д.)

Известные и доступные студентам учебники и учебные пособия предназначены, как правило, для подготовки математиков, специалистов в области СКМ и КТ и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. Выпускаемые рядом вузов пособия, методические указания и разработки пока не могут изменить кардинально ситуацию с нарушением преемственности в преподавании математики между школой и вузом. К тому же довольно распространенным недостатком этих изданий является лежащая в их основе только прагматическая точка зрения подготовки с учетом специфики будущей специальности обучающегося.

Действительно, как уже отмечалось в п. 2.3, содержание общего курса математики не может быть определено прагматически лишь с учетом специфики будущей специальности обучающегося, без учета внутренней логики самой математики. Тем не менее, часто вместо должного обучения математике и, в частности, дискретной математике, студентов обучают владению готовыми программными «рецептами» СКМ. В результате обучение в большинстве случаев не выходит за рамки рутинной статистики. Математический аппарат лишь «привносится» в специальные науки, а не проникает в них.

В настоящее время применяется следующий методический подход в изложении основных теоретико-модельных понятий ДМ [68, 148, 265].

Изучение бинарных отношений начинается с конкретных примеров декартовых произведений и бинарных отношений (в частности, из школьной программы [148]). Далее изучаются основные свойства бинарных отношений, и лишь затем дается общее определение бинарного отношения. Изучаются понятия отображения, функции и графа как важных частных видов бинарных отношений и затем их основные виды и свойства. Все это иллюстрируется большим числом примеров из школьной программы и подкрепляется решением ряда практических задач.

Затем приводятся конкретные примеры тернарных отношений из школьной и вузовской программы и тем самым вырабатывается общее представление о тернарных отношениях. Показывается, что алгебраические операции, изученные в школе, являются частными случаями тернарных отношений. Даются примеры алгебраических операций из курса высшей математики и затем общее представление об отличительных признаках алгебраической операции (замкнутость на множестве, существование единственного результата выполнения операции).

Изучение понятия предиката начинается с основных понятий алгебры логики. При логическом анализе текстов происходит выявление логической роли союзов «или», «и», «если…, то…», частицы «не», наречия «равносильно». На этой основе естественным образом возникают понятия логических операций и приводятся таблицы истинности. Затем в соответствии с изученным в школьном курсе математики приводятся примеры высказывательных функций или предикатов одной и двух переменных и замкнутых формул логики предикатов с кванторами. Решаются задачи на запись в виде формул логики предикатов ряда формулировок определений и теорем из школьной и вузовской программы.

Как видно из особенностей методики изложения, некоторая преемственность обучения достигается за счет объяснения содержательного смысла изучаемых понятий на основе примеров из школьной программы, решения ряда практических задач. Отсюда следует, что необходима предварительная пропедевтика изучения некоторых основных теоретико-модельных понятий в профильном обучении математике в школе (в том числе пропедевтика понятий графа, бинарного отношения, отображения, основные понятия алгебры высказываний и т. д.).

2.6.3.3. Методические аспекты обучения дискретной математике на экономических и управленческих специальностях

Разработка методики обучения ДМ для специальностей этого направления пока находится в начальной стадии. Подтверждением этому является хотя бы тот факт, что пока, по-видимому, имеется только одно известное пособие [132] для студентов экономических и управленческих специальностей. Отметим, что некоторые элементы этой методики можно встретить и в других работах [4, 68, 148, 235, 254].

Наряду с нарушением преемственности обучения ДМ между школой и вузом серьезным препятствием в разработке методики является превалирование принципа гуманитарной направленности обучения в ущерб другим принципам и особенно принципам фундаментальности и научности. «Некоторые ученые-педагоги под гуманитаризацией понимают только усиление роли общественных наук в ущерб естественным и математическим наукам и призывают к пересмотру учебных планов, к нарушению равновесия между этими двумя блоками дисциплин» [229, с. 221]. Именно по этой причине обучение ДМ на большинстве этих специальностей носит фрагментарный, прагматичный характер, поскольку при его осуществлении, как правило, не учитывается внутренняя логика самой математики.

Еще одним серьезным препятствием в разработке методики является несовершенство или несогласованность учебных программ и планов. Так, в удачном в целом учебном пособии Г. И. Москиновой «Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях» [132] «закованность» в рамках учебных программ и планов вызвала некоторую фрагментарность и прагматизм содержания. В нем нет даже упоминания о полной цепочке использования компьютера и понятия алгоритма (не говоря уже о ее важнейших свойствах и изучении понятия алгоритмически разрешимой задачи), что не обеспечивает усвоение внутренней логики математического моделирования. Другой значительный недостаток пособия связан с тем, что в методических приемах и методах изложения содержания не учтен опыт изложения содержания в популярной литературе для школьников [7, 11, 30, 33, 50, 57, 72, 101, 187, 211, 223, 241, 242, 253, 262]. Например, важнейшее понятие изоморфизма моделей не подкреплено наглядными примерами изоморфных (равных) графов.

2.6.3.4. Методические аспекты обучения дискретной математике на гуманитарных специальностях

Как было выявлено, в обучении гуманитариев актуальна проблема развития математического *мышления*, формируемого на основе обучения дискретной и непрерывной математике. Поскольку в формировании математического мышления решающую роль играют доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические и комбинаторные схемы, содержание и методика изучения этих структур и схем определяют основные особенности методики обучения ДМ на гуманитарных специальностях.

Анализ ряда учебников для гуманитариев [68, 122, 235 и др.] показывает, что в содержание обучения математике и информатике входят следующие понятия языка доминирующих в дискретной математике структур и схем:

1) бинарное и n-арное отношения;

2) отношения эквивалентности и частичного порядка;

3) группа и кольцо;

4) логическая операция;

5) предикат и квантор (для анализа текстов и знакомства с базами данных);

6) перестановки, размещения, сочетания, правило суммы и произведения;

7) алгоритм;

8) (конечный) автомат;

9) формализованный язык.

Данные понятия или подобные им определяют особенности целей обучения ДМ гуманитариев, отбора содержания форм, методики и средств обучения. Главенствующими принципами методики обучения гуманитариев являются принципы преемственности и развивающего обучения. Основой для реализации этих принципов служит максимальная мотивационная вовлеченность обучающегося в работу с занимательным или практическим *сюжетным* текстом на основе занимательных и практических задач [150].

2.6.4. О роли принципа профессионально-педагогической направленности в решении проблемы преемственности обучения дискретной математике между школой и вузом

Обсуждая методические аспекты обучения ДМ в системе высшего профессионального образования, нельзя обойти вниманием основную проблему этой методики обучения ДМ в вузе. Она заключена в том, что в «функционально ориентированном» профильном обучении математике в школе не предусмотрено адекватное отражение элементов дискретной математики. Это влечет за собой *нарушение преемственности* в обучении дискретной математике между школой, колледжем (техникумом) и вузом.

Проблему преемственности усугубляет превалирование принципа *гуманитарной* направленности обучения над другими принципами обучения (в том числе и в программах обучения).

Кроме того, в обучении ДМ, особенно на гуманитарных специальностях, не учитываются интеграционный потенциал современной дискретной математики и роль в его использовании математических структур и схем, обеспечивающих интеграцию содержания обучения прикладным методам математики на основе фундаментализации обучения (см. подп. 1.4.1). Необходимо учесть также психологические аспекты обучения ДМ, например, уже обсуждавшийся в подп. 2.2.1 генезис механизмов моделирования и становления и развития на его основе символической функции в мышлении, современные представления о системах хранения знаний в памяти человека и средствах познания [256], возрастные возможности школьников и студентов в изучении ДМ [183] и, в силу этого, особенности реализации принципа преемственности в обучении дискретной математике.

Анализ состояния обучения дискретной математике в вузах позволяет сделать вывод о том, что в решении проблемы преемственности обучения ДМ между школой и вузом при существующих в обучении диспропорциях фундаментальное значение приобретают профильное обучение дискретной математике будущих учителей математики, информатики и педагогов профессионального обучения и особенно реализация профессионально-педагогической направленности подготовки. В частности, в решении проблемы преемственности важную роль играет принцип бинарности, т. е. *объединение* научной и методической линий в обучении студентов курсу ДМ. Такое объединение необходимо для подготовки студентов к обучению учащихся математическому моделированию на основе дискретных и непрерывных моделей и корректному использованию потенциала современного компьютера, в частности, систем компьютерной математики и компьютерных технологий в изучаемых ими профильных предметах. В свою очередь, принцип ведущей идеи, выражающий необходимость выдвижения на первый план связи конкретного математического курса педагогического вуза с соответствующим школьным предметом, позволит увидеть студентам в математических дисциплинах важную методическую часть своей профессиональной подготовки в области обучения ДМ. В результате будут заложены предпосылки для реализации будущими учителями информатики, математики и инженерами-педагогами вариативного обучения ДМ в школах и колледжах (техникумах), что важно при решении проблемы преемственности в обучении дискретной математике между школой, колледжем (техникумом) и вузом.

2.7. Направления развития и постановки курса дискретной математики студентов педагогических специальностей

Анализ основных особенностей направления обучения дискретной математике в учреждениях высшего профессионального образования показывает, что сложившаяся система обучения ДМ будущих учителей не вписывается в рамки ни одного из указанных направлений в силу особой специфики педагогической специальности. Поскольку пока нет длительного массового опыта обучения ДМ студентов педвузов на уровне бакалавриата и магистратуры, важную роль в исследовании конкретных особенностей компонентов методической системы обучения ДМ и на этой основе – различных *моделей методической системы обучения ДМ* будущих учителей информатики, математики и инженеров-педагогов играет существующий опыт и проблемы их обучения ДМ в рамках специалитета и, в частности, существовавшие до сих пор направления развития и постановки курса дискретной математики студентов перечисленных профилей подготовки. Это особенно важно при обучении ДМ в условиях постепенного перехода к бакалавриату и магистратуре.

2.7.1. Анализ развития и постановки курса дискретной математики в педвузе для будущих учителей математики и информатики

В нормативной основе постановки курса ДМ на уровне специалитета в педвузе лежали государственные стандарты и содержавшиеся в них учебные планы подготовки. Анализ специфики педвузовских учебных планов по специальностям «Математика» и «Информатика», по которым заканчивается подготовка студентов, показывает, что сложившаяся система их обучения ДМ не вписывается в рамки ни одного из охарактеризованных ранее направлений обучения дискретной математике в системе высшего профессионального образования.

Содержание обучения ДМ для учителей математики и информатики из стандартов подготовки специалистов практически не отличалось друг от друга. Непринципиальным отличием являлось то, что в стандарте подготовки учителей математики предусмотрено изучение некоторых методов суммирования, но не предусмотрено, как у будущих учителей информатики, изучение бинома Ньютона, полиномиальной формулы, основных комбинаторных конфигураций и метода включения-исключения. Эти темы играют важную роль в теоретических основах программирования, значимых как для будущих учителей информатики, так и для учителей математики.

Специфика учебного плана по специальности «Информатика» в педагогическом вузе состоит в том, что разделы ДМ, обычно изучаемые в рамках единого курса, в нем выделены в отдельные дисциплины («Математическая логика», «Дискретная математика», «Теория алгоритмов») либо входят в качестве разделов в дисциплины «Элементы абстрактной и компьютерной алгебры», «Исследование операций».

На основе анализа учебной литературы, соответствовавшей нормативной основе государственных стандартов подготовки учителей математики и информатики на уровне специалитета, С. Ю. Ивановым и С. М. Окуловым было выделено два направления развития и постановки курса дискретной математики в педвузе, существовавшие в рамках специалитета [84]. Сторонники первого направления видели в курсе дискретной математики типичный математический курс. Такая концептуальная линия курса лежит, например, в основе широко известных первых пособий по ДМ [105, 264] и учебной литературе нового поколения [4, 10, 49]. Второе направление, развиваемое в книгах [5, 70 и др.], характеризуется тем, что в курсе рассматриваются как абстрактные объекты, так и различные алгоритмы, и при этом подразумевается, что часть практических занятий должна проходить с использованием компьютера.

В то же время сами авторы анализа, исходя из практики, а именно, повсеместного распространения идей и методов программирования, являются сторонниками более тесной интеграции «на стыке» информатики и математики. По их мнению, «*курс (учебник) обязан быть компьютерно-ориентированным*, то есть практически любой теоретический факт должен быть исследован, проверен с помощью его программной реализации. В таком случае инструментом педагога становится огромный методический пласт наработок, усиливающий глубину изучения материала у обучаемого. Это требование накладывает ограничения на структуру теоретического материала» [142, с. 26].

В качестве характерного ориентира С. Ю. Иванов и С. М. Окулов видят книгу В. Липского [111], специально не относя ее ни к одному из двух существующих направлений постановки курса дискретной математики в педвузе.

Следует отметить также существование менее известного направления [19, 200], в котором ДМ стала частью курса компьютерной математики. При этом компьютерная математика трактуется как система, в которой в качестве элементов выступают следующие дисциплины: основания конструктивной математики, элементы семиотики, математическая логика и теория алгоритмов, конструктивная дискретная математика, численные методы (включая компьютерную алгебру), компьютерная геометрия (конструктивные математические основы компьютерной графики и вычислительной геометрии) [19]. В содержание конструктивной дискретной математики в работе [19] также включены булевы функции, теория графов, теория кодирования, комбинаторный анализ, машинная арифметика. К сожалению, следует констатировать, что вся существующая учебная литература, посвященная использованию различных систем компьютерной математики при решении задач, ориентирована, как правило, только на классическую непрерывную математику.

По-видимому, большинство исследователей пока не готово говорить о том, какому из этих трех направлений следует отдать предпочтение. Действительно, являются очень разноплановыми и отражают разное видение предмета ДМ авторов многочисленные учебники, задачники и учебные пособия по ДМ, уже цитировавшиеся в процессе характеристики основных направлений обучения дискретной математике в учреждении высшего профессионального образования. Поэтому ни одно из них не может быть предложено в качестве учебного пособия и тем более учебника по ДМ для будущих учителей математики, информатики в силу обширности предмета и функций современной ДМ и существующих профилей подготовки педагогов в школе в условиях усиливающейся вариативности подготовки учащихся школ и студентов колледжей (техникумов) и вузов.

Характерной важной особенностью постановки курса ДМ в рамках этих трех направлений является использование различных видов межпредметных связей дискретной математики. В работе [67] выделены интродисциплинарные связи как всевозможные отношения взаимной зависимости, обусловленности, общности между основными объектами учебного курса, интердисциплинарные связи как связи дисциплин, входящих в один модуль, интерцикловые связи взаимного использования понятий наук, интерблоковые связи между дисциплинами, входящими в один блок. Эти связи часто визуализируются с помощью так называемых информационных графов, которым следует неявно каждый лектор при изложении своего курса. Эти графы в работе [71] описываются следующим образом. Теоретический курс сначала разбивается на темы или разделы (вершины графа), которые надо освоить в процессе обучения. Каждый новый раздел в этом перечне является следствием нескольких ранее изученных разделов (тем), так как связывает или использует несколько введенных ранее понятий (утверждений) из этих разделов. Это использование отмечают дугами графа. Аналогичным образом в каждой теме выбирается совокупность базовых понятий и фактов (вершины орграфа), выстраивается их логически связанная последовательность (дуги орграфа).

Информационные графы позволяют решать большое число самых разнообразных методических задач, полезных как для преподавателей учебных дисциплин, так и для студентов, изучающих эти дисциплины. Однако наблюдаемое в постановке курса ДМ в педвузе чрезмерное увлечение реализацией межпредметных связей сильно усложняет решение методических задач. Например, ограничившись одиннадцатью математическими дисциплинами федерального компонента подготовки учителей информатики на уровне специалитета, несложно подсчитать, что каждый преподаватель должен будет провести согласование межпредметных связей с десятью преподавателями, а общее число парных согласований равно $C_{12}^{2} = 110$. При этом не учитываются взаимосвязи математических дисциплин федерального компонента с факультативными дисциплинами, взаимосвязи математических и специальных дисциплин и, наконец, то, что некоторые понятия одновременно изучаются более чем в двух дисциплинах.

2.7.2. Отражение дискретной математики в новых стандартах подготовки специалистов в области математики и информатики

В исследовании компонентов методической системы обучения дискретной математике наряду со сложившимися в прошлом веке направлениями постановки курса дискретной математики в педвузе для специалистов в области математики и информатики важное значение имеет анализ особенностей компетентностного подхода в новых ФГОС высшего профессионального образования (ВПО) подготовки бакалавров и магистров в области математики и информатики.

Анализ содержания ФГОС ВПО по направлению подготовки 010100 Математика (квалификация «бакалавр») позволяет выявить, что в характеристику профессиональной деятельности выпускников включено решение различных задач с использованием методов математического моделирования процессов и объектов и программного обеспечения. При этом бакалавр готовится, например, к такому виду профессиональной деятельности, как преподавание физико-математических дисциплин и информатики в общеобразовательных и средних специальных образовательных учебных учреждениях при специализированной переподготовке. Бакалавр математики должен обладать следующими компетенциями:

- владением методами математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач (ПК-19);
- владением методами математического и алгоритмического моделирования при анализе теоретических проблем и задач (ПК-21);
- владением методами математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере (ПК-24).

Для подготовки к указанным видам деятельности и формирования перечисленных компетенций в дисциплины профессионального цикла включены математический анализ, дискретная математика и математическая логика.

Анализ содержания ФГОС ВПО по направлению подготовки 231300 Прикладная математика (квалификация «бакалавр») позволяет выявить, что объектами профессиональной деятельности выпускников являются математические модели, методы и наукоемкое программное обеспечение, предназначенное для проведения анализа и выработки решений в конкретных предметных областях. При этом бакалавр должен уметь решать профессиональные задачи в соответствии с такими видами профессиональной деятельности, как математическое моделирование процессов и объектов на базе стандартных пакетов автоматизированного проектирования и исследований, отладка наукоемкого программного обеспечения, что отражено соответствующим образом в формулировках компетенций.

Анализ содержания ФГОС ВПО по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика (квалификация «бакалавр») позволяет установить, что в число объектов профессиональной деятельности выпускников включены математическое моделирование; обратные и некорректно поставленные задачи; математическая кибернетика; математическая логика; дискретная математика; теория алгоритмов; математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения; математическое и информационное обеспечение экономической деятельности; математические методы и программное обеспечение защиты информации; высокопроизводительные вычисления и технологии параллельного программирования; системное программирование; языки программирования, алгоритмы и пакеты программ, продукты системного и прикладного программирования. Все перечисленное отражено соответствующим образом в формулировках компетенций.

Анализ содержания ФГОС по направлению подготовки 010300 Фундаментальная информатика и информационные технологии (квалификация «бакалавр») позволяет выявить, что в число объектов профессиональной деятельности выпускников включены математические, информационные, имитационные модели систем и процессов, программное обеспечение компьютерных средств, языки программирования, системы цифровой обработки изображений, что также отражено соответствующим образом в формулировках компетенций.

Проведенный анализ ФГОС ВПО по рассмотренным выше и некоторым другим направлениям подготовки [243–245] подтверждает, что, несмотря на обилие исследований и публикаций по дискретной математике, в настоящее время не существует общепринятой системы представлений о ДМ как о разделе математики. Например, во ФГОС ВПО по направлению подготовки 231300 Прикладная математика из современной ДМ отражен только такой ее традиционный раздел, как «Теория графов», который объединен с «Математической логикой». В отличие от этого, во ФГОС ВПО по направлению подготовки 230700 Прикладная информатика имеется отдельная дисциплина «Дискретная математика», содержание которой включает разделы «Методы теории множеств», «Математическая логика», «Алгебра», «Теория графов», «Теория автоматов», «Теория алгоритмов» и «Элементы теории формальных языков».

Выработка системы представлений о ДМ облегчается тем, что, как следует из анализа предмета и функций ДМ, определенный круг «дискретных» представлений уже исторически и естественным образом сложился на практике. Подтверждением этому является то, что любой достойно для своей профессии знающий современную математику специалист наряду с понятиями «предел», «производная», «интеграл», «дифференциальное уравнение», «функциональный ряд», «вероятность случайного события», «закон распределения» и другими знает ключевые понятия ДМ «комбинаторная конфигурация», «бинарное отношение», «алгебраическая операция», «высказывание», «предикат», «квантор», «формализованный язык», «граф», «алгоритм», «исполнитель алгоритма». Эти и ряд других важных понятий ДМ играют важную роль в реализации тех или иных ранее охарактеризованных функций ДМ в математическом моделировании с использованием компьютера, разработке и совершенствовании современных СКМ и КТ и (что особенно важно) в формировании умений гармоничного сочетания языка математики, языка науки в соответствующей профессиональной области и уникальных возможностей современного компьютера.

Анализ ФГОС подготовки магистров по перечисленным направлениям подготовки также показывает, что, в отличие от стандартов подготовки бакалавров, во всех рассмотренных ФГОС в формулировках компетенций и названиях дисциплин отражены философские и исторические аспекты методологии математики и информатики, методологии научного познания и, как следствие, – методологии математического моделирования на основе дискретных и непрерывных моделей, разработки и совершенствования СКМ и КТ и их применения в математическом моделировании.

2.7.3. Анализ развития и постановки курса дискретной математики в подготовке педагогов профессионального обучения

Для обучения инженеров-педагогов автором еще в 1993 г. было издано небольшое учебное пособие «Введение в дискретную математику» [148], предназначенное для будущих инженеров-педагогов, обучавшихся на электроэнергетическом факультете Свердловского инженерно-педагогического института (ныне – Российский государственный профессионально-педагогический университет (РГППУ)).

Данное пособие было разработано в связи с полным отсутствием учебной литературы для студентов педагогических специальностей и весьма формализованным изложением элементов ДМ в первых учебных пособиях по ДМ для студентов математических и инженерных специальностей [45, 104, 264]. В содержание пособия были включены бинарные отношения, алгебра высказываний, булевы функции, некоторые элементы теории графов. В методике изложения содержания ведущую роль играли принцип научности и принцип преемственности обучения между школой и вузом. Основная часть содержания пособия «Введение в дискретную математику» была доступна восприятию школьников, и оно долгое время использовалось при обучении студентов. В 2004 г. на основе этого пособия и длительного опыта работы автора в школе было написано учебное пособие по дискретной математике [150] для учащихся 8–9-х классов с содержавшейся в нем программой для 10–11-х классов с углубленной подготовкой по математике. Это учебное пособие также использовалось в практике обучения ДМ студентов электроэнергетического факультета РГППУ, а также студентов, обучающихся в Самарском филиале Московского городского педагогического университета, в Уральском педагогическом университете, Кировском педагогическом университете и некоторых других вузах России. В содержании этого пособия отражена и систематизирована большая (31 источник) учебная и популярная литература, в которой излагались те или иные элементы ДМ и которая и сейчас играет важную роль в преемственности обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей и инженеров-педагогов.

Усиление роли ДМ в математическом образовании и в том числе в подготовке студентов специальности «Профессиональное обучение» повлекло за собой включение этого предмета в учебные планы по многим профилям подготовки. Поэтому было издано учебное пособие Л. К. Конышевой и В. В. Мешкова [94], являющихся последователями автора в реализации методологии обучения ДМ, для обучения ДМ педагогов профессионального обучения по всем отраслям. Значительно позднее вышло учебное пособие Л. К. Конышевой [93], расширившее тематику работы [94] и предназначенное уже для обучения студентов по 12 отраслям (от вычислительной техники до эксплуатации и ремонта автомобильного транспорта) и специальности 351400 Прикладная информатика.

Учебные пособия [93, 94] являются весьма удачными с точки зрения преемственности обучения между школой и вузом. Но поскольку авторы были обязаны написать учебные пособия для многих профилей подготовки педагогов профессионального обучения, естественно, они были вынуждены нарушить принципы фундаментальности и научности обучения, что можно проследить при анализе содержания этих пособий. Так, например, при обучении ДМ студентов факультета информатики и машиностроительного факультета было определено одно и то же содержание обучения, что, как показывает проведенный анализ предмета, функций и существующих направлений обучения ДМ является нарушением указанных принципов, играющих фундаментальную роль в математической подготовке студентов. В то же время, например, в содержании обучения ДМ студентов факультета информатики не были предусмотрено изучение комбинаторики. Кроме того, в содержание обучения ДМ студентов машиностроительного факультета не были, например, включены разделы «Дискретные структуры и схемы», «Алгоритмы. Автоматы», «Формальные языки и системы компьютерной математики», играющие особенно важную роль в автоматизации машиностроительного производства.

В 2011 г. в связи с внедрением компетентностного подхода в образовании и последующим переходом на новые ФГОС подготовки педагогов профессионального обучения на уровне бакалавриата и магистратуры указанные пособия по вышеперечисленным причинам уже значительно устарели. Несмотря на это, они могут быть по-прежнему полезны в обучении ДМ.

Государственный стандарт подготовки педагогов профессионального обучения (по отраслям) действует при подготовке студентов третьего и более старших курсов и во время выхода этого издания. Но в связи с началом в 2011 г. работы по новым ФГОС подготовки педагогов профессионального обучения и последовавшим за этим внедрением компетентностного подхода в обучении ДМ разработана рабочая программа [149] и методические указания [156], предназначенные для подготовки будущих инженеров-педагогов и отражающие особенности модели методической системы их обучения ДМ. Они будут охарактеризованы далее, в п. 3.2.

2.8. Главные стратегические цели обучения дискретной математике как лидирующий компонент методической системы обучения дискретной математике

Проведенный анализ весьма различающихся концептуальных особенностей существующих направлений обучения дискретной математике играет важную роль в поиске конкретных особенностей реализации положений концепции методической системы обучения ДМ, в том числе в постановке курса обучения дискретной математике в зависимости от профиля подготовки будущих педагогов.

Использование интеграционного общекультурного потенциала современной дискретной математики, отраженного в положениях концепции, приобретает особенно важное значение в условиях большой свободы выбора целей, содержания, методов, форм и средств обучения дискретной математике в условиях перехода к бакалавриату и магистратуре, предоставляемых ФГОС.

Как следует из концепции обучения и анализа концептуальных особенностей существующих направлений обучения дискретной математике в ГОС и ФГОС, лидирующим компонентом методической системы обучения ДМ являются следующие *главные* (стратегические, долгосрочные) *цели* высшего уровня обучения:

- обеспечение формирования умений гармонично сочетать в обучении язык математики и язык науки в соответствующей профилю подготовки профессиональной области, а также уникальные возможности современного компьютера;
- достижение единства в обучении непрерывной и дискретной математике, являющемся основой интеграции содержания обучения математическому моделированию и теории вычислительных процессов будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов;
- обучение студентов вышеуказанных специальностей корректному использованию систем компьютерной математики и компьютерных технологий, что необходимо для выработки у них умения адаптироваться к постоянно происходящим изменениям в области информатики.

Конкретные дидактические и методические особенности реализации этих целей обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов позволяют выявить иерархию целей на различных уровнях представления содержания их профильного обучения дискретной математике. В выборе этих целей и соответствующего им содержания обучения важную роль играет обоснованное ранее положение о том, что доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического познания) лежат в основе отбора содержания обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

2.9. Уровни представления содержания профильного обучения дискретной математике

Исходя из главных методологических целей обучения ДМ, рассмотрим следующий по важности компонент методической системы обучения ДМ – содержание обучения.

При отборе «уровневых» целей и содержания обучения ДМ мы исходим из следующих определенных В. В. Краевским и А. В. Хуторским уровней представления содержания образования:

1. Уровень общего теоретического представления. Реализацию главных стратегических целей обучения ДМ начинать необходимо с формирования у бакалавров представлений о предмете и функциях современной ДМ и о ее роли в современной математической культуре, особенно в математическом моделировании и теории вычислительных процессов. При этом теоретическую основу отбора содержания профильного обучения ДМ в зависимости от специальности наряду с целью обучения составляют концепция обучения ДМ, концептуальные особенности направлений обучения ДМ в системе высшего профессионального образования и дидактические принципы обучения дискретной математике, охарактеризованные в п. 2.3.

На уровне общего теоретического представления, исходя из принципа диалектического единства интеграции и дифференциации, необходимо обеспечить структурное *единство инвариантной и вариативной* составляющих содержания обучения предмету ДМ. В реализации этого положения методологическим ориентиром являются положения концепции, а дидактическим ориентиром – принципы научности, генерализации знаний, преемственности обучения между школой, колледжем (техникумом) и вузом. Для этого необходимо создать *уровневую модель инвариантного и вариативного содержания* непрерывного обучения предмету ДМ и реализации его межпредметных связей на разных уровнях: базового школьного обучения, специализированной подготовки школьников, среднего профессионального образования, подготовки бакалавров (специалистов – учителей математики и информатики), магистров, профессионального послевузовского образования (аспирантуры, докторантуры, переподготовки и т. п.). Данная уровневая модель служит основой отбора содержания на уровне учебного предмета.

На уровне магистратуры при отборе вариативного содержания обучения ДМ также следует исходить из философского анализа современной модельной методологии и роли ДМ в имеющихся межпредметных связях математики, информатики и других дисциплин с целью профильного обучения языку математического моделирования, являющегося основным в формировании умения гармоничного сочетания языка математики, языка науки в соответствующей профессиональной области и уникальных возможностей современного компьютера.

2. Уровень учебного предмета. На данном уровне главной целью реализации обучения ДМ и его межпредметных связей является формирование у студентов представлений о том, чего нужно достичь в процессе изучения дискретной математики при обучении на данной специальности и что является главным в содержании обучения. На этом уровне должна быть разработана уровневая модель предметно-профессиональных компетенций учителя математики, информатики и инженера-педагога, формируемая на основе анализа компетенций ФГОС подготовки бакалавров (специалистов – учителей математики, информатики) и ФГОС подготовки магистров.

В последующем отборе содержания на основе разработки уровневой модели предметно-профессиональных компетенций необходимо исходить из того, что должно быть достигнуто единство в обучении «непрерывной» и дискретной математике, являющееся основой интеграции содержания обучения математическому моделированию и теории вычислительных процессов будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. В отборе содержания обучения ДМ также необходимо отразить идеи и методы СКМ и КТ, что необходимо для выработки у студентов умения адаптироваться к постоянно происходящим изменениям в области информатики.

В детализации содержания обучения важное значение имеет анализ роли ДМ в изучаемой студентами предметной области подготовки по специальности. Поэтому при непосредственном отборе содержания обучения ДМ будущих учителей математики и информатики с целью их подготовки к работе в профильных классах важным ориентиром служат понятия и методы ДМ, играющие фундаментальную роль в формировании основ математического аппарата профильного предмета, изучаемого школьниками. Например, такими понятиями и методами являются метод конечных разностей решения дифференциальных уравнений в математической физике; молекулярные графы в математической химии; клеточные автоматы, отношения различной арности и элементы алгебры высказываний в биологии развития; алгебраические операции и логика предикатов в математической экономике и т. д.

Как следует из анализа роли дискретной математики в современной математической культуре, обучение дискретной математике будущих учителей математики и информатики в магистратуре должно быть направлено на формирование у них умения реализовывать обучение учащихся начальным элементам математического моделирования и разработки алгоритмов вычислений с учетом профиля обучения. Практическая реализация этого обучения основана на деятельностном подходе в работе с *определениями* фундаментальных понятий и принципиальными *теоремами* курса дискретной математики, также необходимо учитывать сложившуюся систему организации научно-исследовательской работы студентов.

Отметим также, что, по мнению О. И. Мельникова, «на педагогических факультетах нужно… изучать те дискретные модели, которые попали в различные программы для средних школ, учитывая при этом, что учеников часто придется знакомить не с классическими вариантами моделей, а с их упрощенными аналогами» [127, с. 150].

При анализе проблем обучения ДМ инженеров-педагогов следует исходить из того, что уровень теоретического обобщения и степень абстракции математического материала в учебниках по техническим дисциплинам для студентов колледжей (техникумов) не соответствует уровню их обученности, психологическим и возрастным закономерностям усвоения учебной информации. Ситуацию усугубляют недостаточная полнота учебной информации, особенно математической, по отдельным темам в рекомендуемых учебниках и отсутствие единого учебника для учебных заведений профессионального образования по целому ряду специальных дисциплин. Поэтому, исходя из принципа ведущей идеи, преподаватель должен переработать, трансформировать содержание материала учебника и адаптировать его к познавательным возможностям обучающихся. Поскольку «математическая модель технического объекта рассматривается, в свою очередь, как абстрактная математическая структура, в которой реальные и конкретные связи заменены абстрактными математическими отношениями» [263, с. 80], в переработке и трансформировании этого содержания фундаментальную роль играют дискретные структуры (модели) и схемы, особенно доминирующие в ДМ. Язык этих структур и схем играет фундаментальную роль в корректном использовании СКМ и КТ в реализации этапов математического (информационного) моделирования работы технических устройств и управления ими на основе вычислительного процесса, реализуемого компьютером (или сетью компьютеров). Это имеет особенно важное значение в подготовке рабочих к работе со сложным автоматизированным оборудованием и робототехникой.

Как следует из вышеизложенного, в основе обучения ДМ будущих инженеров-педагогов лежит положение о том, что дискретная математика, наряду с непрерывной математикой, играет фундаментальную роль в научной, дидактической и методической переработке содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки.

Переработка содержания учебного материала означает проведение структурно-логического анализа содержания дисциплины, в процессе которого выделяются опорные математические понятия и методы, составляющие математический аппарат изучаемой технической дисциплины, необходимый для обучения учащихся математическому моделированию технических объектов и алгоритмов вычислительных процессов, реализующих технологию их функционирования в отрасли производства.

При переработке содержания осуществляется методическая редукция этих понятий, т. е. трансформация математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания обучающихся.

3. Уровень учебного материала. На этом уровне элементы содержания, обозначенные на первом уровне и представленные в форме, специфической для ДМ, на втором уровне, получают конкретное наполнение. Речь идет о конкретных знаниях, умениях, навыках, а также задачах, упражнениях, которые составляют содержание профильной реализации обучения дискретной математике и межпредметных связей ДМ в учебниках, сборниках задач, учебных пособиях и др. В отборе содержания на уровне учебного материала важную роль играет *системно-структурный подход* в преподавании математики на основе формирования и развития математических когнитивных структур и схем, охарактеризованный в п. 2.2.

4. Уровень процесса обучения. Это уровень педагогической действительности, т. е. уровень, на котором во взаимодействии преподавателя и обучающегося распредмечивается проектируемое содержание обучения дискретной математике.

Теоретическое осмысление этого уровня значительно осложняется тем, что категории «обучение», «процесс обучения» трактуются неоднозначно. Оставляя в стороне анализ определений этих категорий, будем придерживаться наиболее часто встречающегося в методике обучения математике понимания обучения как двустороннего процесса преподавания и учения.

5. Уровень структуры личности студента. Здесь достигаются конкретные результаты обучения дискретной математике, которые становятся достоянием его личности. Это итог всей работы по обучению ДМ. Важную роль в обучении на этом уровне, и в том числе в выстраивании индивидуальной образовательной траектории, играют принципы антропоцентризма и профессионально-педагогической направленности подготовки.

На четвертом и пятом уровнях определяющую роль играет стратегия обучения на социокультурном опыте (связи обучения со всеми сторонами культуры социума) (см. [229]), из которой необходимо исходить при устранении возможных перегрузок обучения.

Известно, что основной причиной перегрузок как школьников, так и студентов является нарушение принципа единства содержательной и процессуальной сторон обучения. Оно может происходить в тех случаях, когда содержание обучения формируется бессистемно, складываясь из простой суммы учебных предметов, без учета условий и факторов, действующих в процессе обучения. Например, перегрузка учебным материалом возникает тогда, когда реализация обучения ДМ начинается с третьего уровня. Последующее сокращение объема содержания и установление межпредметных связей не дают, как правило, кардинальных результатов. Предлагаемый многоуровневый процесс проектирования представленного содержания обучения ДМ позволит устранить «в зародыше» разрыв между проектируемым содержанием и его реализацией.

2.10. Дидактические особенности выбора форм и средств обучения дискретной математике

В реализации форм вариативной подготовки важную роль играет *принцип преемственности*, в соответствии с которым необходим учет возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся (см. подп. 2.3.3).

Появившиеся в последние годы термины «индивидуальная образовательная траектория», «индивидуальные образовательные маршруты» и т. д. отражают различные позиции исследователей в реализации вариативной подготовки студентов. В аспекте принципа антропоцентризма будем придерживаться позиции А. В. Хуторского, трактующего ИОТ как персональный путь реализации личностного потенциала ученика в образовании [257]. Поэтому при построении ИОТ нельзя ограничиваться только рамками вуза, а необходимо принимать во внимание как возможности школьной подготовки, так и этап послевузовского образования. Поэтому принцип преемственности в создании методической системы обучения ДМ диктует необходимость рассмотрения как предвузовских вариативных форм обучения будущего педагога, так и послевузовских форм обучения. Поэтому важное значение в отражении интеграционного потенциала дискретной математики в формах обучения как компонентах методической системы обучения ДМ приобретают постепенно начинающиеся внедряться в российское образование современные комплексные и индивидуализированные формы (системы) обучения, способствующие индивидуализации подготовки.

Так, например, в работе Е. И. Деза [55] для формирования одной из возможных ИОТ фундаментальной подготовки учителя математики в рамках интеграции числовой и дискретной линии дидактически обоснованно предлагается курс «Основы дискретной математики», как нам представляется, имеющий важное значение в подготовке учителя прежде всего к работе в математических классах. В содержании курса отражены основные понятия теории графов, основные комбинаторные конфигурации, суммы и рекуррентности, преобразования сумм, элементы теории кодирования.

В подтверждение важности комплексных и индивидуализированных форм обучения рассмотрим одну из разновидностей этих комплексных форм, а именно модульное обучение, в соответствии с которым учебные материалы составляются из отдельных законченных учебных модулей, имеющих практическую, в том числе профессиональную, направленность на освоение определенных практических действий. Поэтому в обучении ДМ, имеющем фундаментальное значение в реализации *принципа непрерывности* (непрерывном приобщении студентов к будущей педагогической деятельности), необходима реализация модульной формы обучения, когда содержание дискретной математики разбивается на отдельные единицы – модули, дополняющие или углубляющие основной курс ДМ и реализующие межпредметные связи ДМ либо обеспечивающие фундаментализацию обучения ДМ или формирование тех или иных компетенций, необходимых в будущей педагогической деятельности. Самые разные сведения из ДМ, являющиеся важными в профильной вариативной подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, распределяются, как бы растаскиваются по различным модулям в виде «вкраплений». В содержании каждого модуля должны быть подробно расписаны цели его изучения, формируемые при этом знания и умения, методы обучения, подходы к оценке результатов изучения модуля.

Конечно, при модульной форме обучения вряд ли возможно подготовить профессионального математика, специалиста в области информатики, инженера и т. д., поскольку эта форма обучения вряд ли может обеспечить систематическое фундаментальное образование. Но эта форма обучения играет важную роль при интеграции различных видов подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов *на основе системного использования интеграционного потенциала ДМ.* В частности, эта форма обучения имеет важное значение в реализации принципа фундаментальности в профильном изучении будущими учителями математики и информатики математического моделирования и корректного использования СКМ и КТ в реализации этапов математического моделирования, а также методик обучения учащихся школ, студентов колледжей (техникумов) этим областям математики и информатики. В свою очередь, в подготовке будущих магистров профессионального обучения для той или иной отрасли инженерного производства на этапах обучения в колледже (техникуме) и бакалавриата необходимо «вкрапление» в те или иные модули различных сведений из ДМ, важных в изучении в общенаучном цикле программы магистратуры дисциплин «История и методология науки», «Методология научного творчества» и «Математическое моделирование».

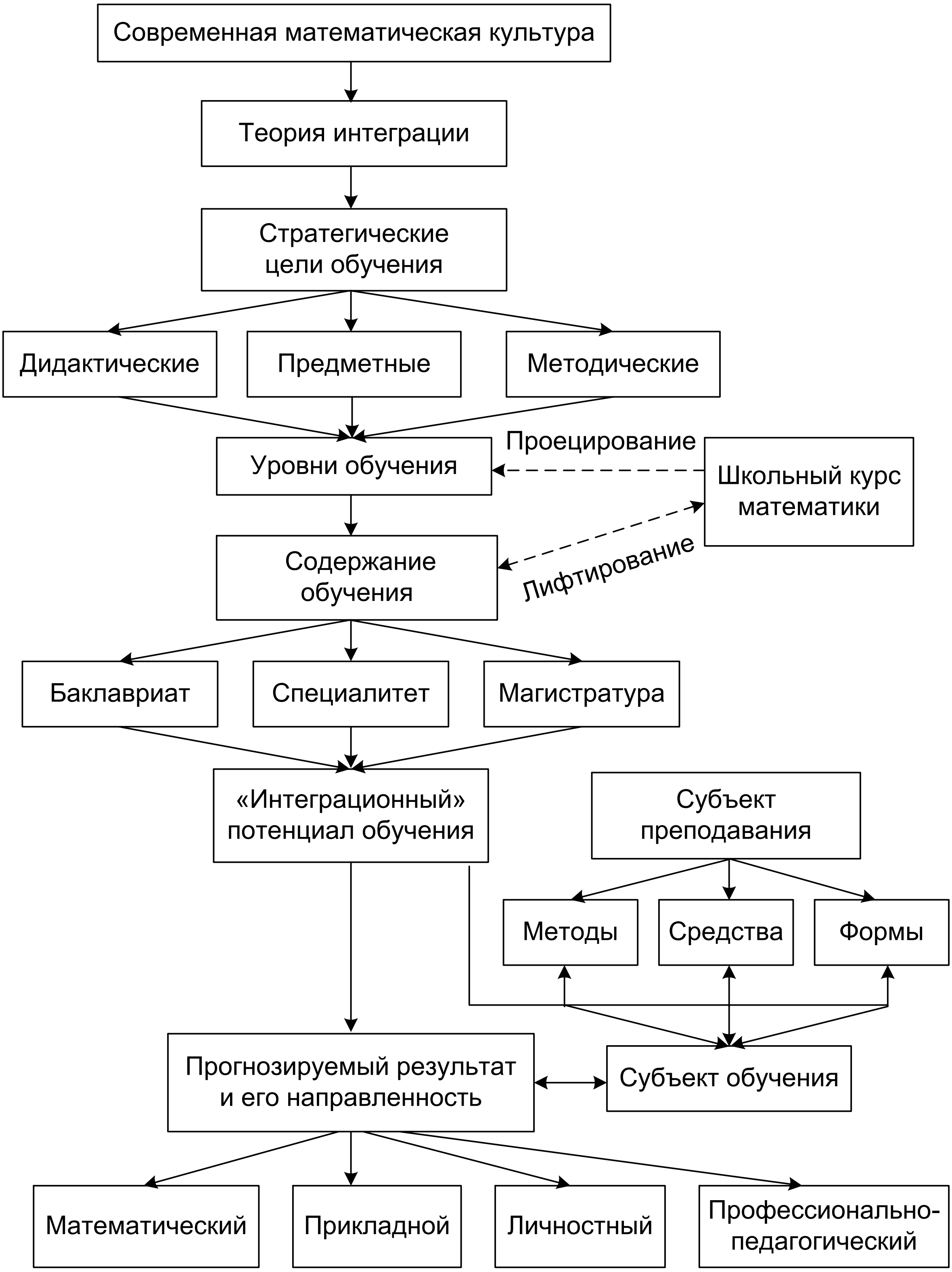
Отметим, что важную роль среди комплексных систем обучения в истории играет так называемый метод проектов, или форма (система) обучения, при которой обучающиеся приобретают новый опыт в процессе планирования и выполнения постепенно усложняющихся заданий практически-жизненной направленности – проектов. Этот метод играет особенно важную роль в обучении этапам математического моделирования в решении задач на основе гармоничного сочетания в приложениях математики дискретных и непрерывных моделей и корректного использования систем компьютерной математики и компьютерных технологий.

В формировании вариативной индивидуальной образовательной траектории подготовки, исходящей из личности студента, наиболее важную роль стали играть современные средства информатизации. Среди этих средств в использовании интеграционного потенциала ДМ как математической основы информатизации особое значение приобретают современные системы компьютерной математики. Инструментальная среда СКМ позволяет интенсифицировать процесс обучения и учебно-математическую деятельность студентов за счет ее автоматизации, избавляющей студентов от рутинной умственной работы. При этом именно в подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, в которой предусмотрено регулярное проведение лабораторных работ по специальным математическим дисциплинам и дисциплинам информационного профиля, СКМ (более узко – программное обеспечение) предоставляют им новые возможности математической деятельности и обусловливают у них дополнительную мотивацию к ее освоению и использованию.

Напомним, что «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии ПО» [35, с. 23]. Поэтому в содержании обучения математическому моделированию и теории вычислительных процессов студентов указанных специальностей очень важно реализовать одну из *главных* стратегических долгосрочных *целей* обучения ДМ, направленную на обучение корректному применению СКМ в этих областях науки и производства и тем самым обеспечивающую «ознакомление педагогов с положительными и отрицательными аспектами использования информационных и телекоммуникационных технологий в образовании» [47, с. 17].

2.11. Модели методической системы обучения дискретной математике

В соответствии с предложенной концепцией главными целями и уровнями представления содержания обучения ДМ построены модели подготовки по ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. На рис. 2.1 представлена модель подготовки будущих учителей математики. Проецирование и лифтирование уровневых целей и содержания обучения условно отражают описанные особенности реализации принципа профессионально-педагогической направленности подготовки. При этом в модели подготовки студентов по сокращенной форме предусмотрено проецирование уровней обучения ДМ на курс математики колледжей (техникумов).



Современная математическая культура
Теория интеграции
Стратегические цели обучения
Дидактические
Предметные
Методические
Уровни обучения
Проецирование
Школьный курс математики
Содержание обучения
Лифтирование
Баклавриат
Специалитет
Магистратура
«Интеграционный» потенциал обучения
Субъект преподавания
Методы
Средства
Формы
Прогнозируемый результат и его направленность
Субъект обучения
Математический
Прикладной
Личностный
Профессионально-педагогический

Рис. 2.1

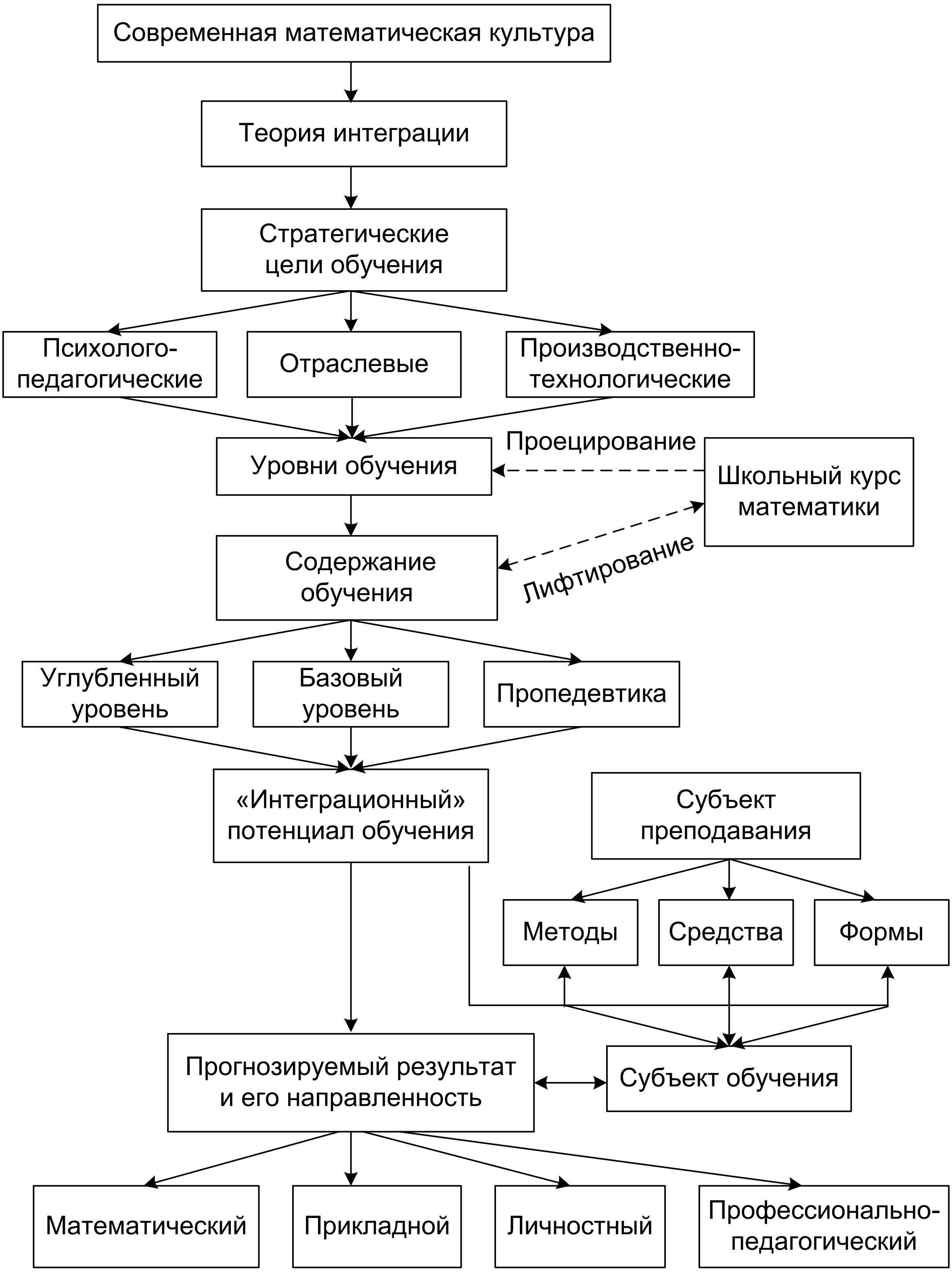

Современная математическая культура
Теория интеграции
Стратегические цели обучения
Психолого-педагогические
Отраслевые
Производственно-технологические
Уровни обучения
Проецирование
Школьный курс математики
Содержание обучения
Лифтирование
Углубленный уровень
Базовый уровень
Пропедевтика
«Интеграционный» потенциал обучения
Субъект преподавания
Методы
Средства
Формы
Прогнозируемый результат и его направленность
Субъект обучения
Математический
Прикладной
Личностный
Профессионально-педагогический

Рис. 2.2

Отличие модели подготовки будущих учителей информатики от модели подготовки будущих учителей математики заключено, во-первых, в том, что на месте школьного курса математики в качестве элемента выступает школьный курс информатики. Во-вторых, имеются ранее охарактеризованные отличия в уровневых целях и содержании обучения, а также в методах, средствах и формах обучения.

Отличие модели подготовки будущих инженеров-педагогов (рис. 2.2) от предыдущих моделей заключается в том, что, во-первых, на месте школьных курсов в качестве ее элемента выступают курсы обучения профильным техническим дисциплинам и методики производственного обучения. Во-вторых, в методах, средствах и формах обучения главным ориентиром является научная, дидактическая и методическая переработка содержания учебного материала технических дисциплин.

Глава 3

ОСНОВНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

В главе исходя из концепции и лидирующего компонента методической системы обучения ДМ (главных целей обучения) излагаются различные *методические схемы* интеграционного характера в реализации модели методической системы обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, особенности выбора уровневых целей и содержания, методов, средств и форм обучения в бакалавриате и магистратуре.

3.1. Основные методические аспекты обучения дискретной математике будущих учителей математики и информатики

Исходя из концепции и лидирующего компонента методической системы обучения ДМ (главных целей обучения), охарактеризуем различные *методические схемы* реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей математики и информатики и особенности выбора уровневых целей и содержания, методов, средств и форм обучения.

3.1.1. Методическая схема реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей математики в рамках интеграции на основе фундаментализации подготовки

Согласно принципу профессионально-педагогической направленности подготовки фундаментализация подготовки должна являться не целью, а средством профессиональной подготовки, а потому должна быть согласована с нуждами приобретаемой профессии (принцип фундаментальности А. Г. Мордковича [130]). Отсюда следует, что подготовка учителя математики должна коренным образом отличаться от подготовки математиков. При этом особая роль должна отводиться изучению математических структур и схем.

Действительно, как было установлено в п. 2.1, интеграция на базе фундаментализации образования предполагает универсализацию знаний, умений, навыков, которая обусловливает выделение *структурных единиц* научного знания, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений. Такими структурными единицами в дискретной математике являются доминирующие в ней алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического познания). Эти структуры и схемы лежат в основе отбора содержания обучения дискретной математике не только будущих учителей математики, но и учителей информатики и инженеров-педагогов.

В методической схеме формирования ИОТ подготовки учителя математики на основе ее фундаментализации, предложенной Е. И. Деза [55], важную роль играют числовая и дискретная линии в содержании обучения математике. Обсуждаемый подход в интеграции на базе фундаментализации отражен в числовой линии при помощи констатации «необходимости проведения в рамках изучения курса числовых систем серьезной работы по систематизации и обобщению ряда важнейших математических понятий (алгебраические структуры, отношения и опрации, метрики, сходимость и др.), что лишний раз свидетельствует о межпредметной направленности дисциплины» [55, с. 187]. При этом среди обязательных результатов изучения курса «Числовые системы» предусматривается знание классических числовых систем (полукольца натуральных чисел, кольца целых чисел, поля рациональных, действительных и комплексных чисел, алгебры кватеринонов). Другой курс, «Математические модели, методы и теории», в методической схеме Е. И. Деза «предназначен для более полного и всестороннего знакомства старшекурсников с теорией конечных полей и ее приложениями» [55, с. 188], что существенно сужает формирование представлений студентов об изучаемой в курсе тематике. В рамках реализации дискретной линии разработана программа курса «Основы дискретной математики», в которой предусматривается изучение элементов теории графов и комбинаторики. При этом подчеркивается, что «для будущих учителей математики на первый план выходят вопросы, связанные со школой, а, следовательно, история соответствующей теории, темы, связанные с рекуррентными соотношениями комбинаторикой, конечными суммами» [55, с. 212].

Таким образом, в реализации числовой и дискретной линии в рамках методической схемы Е. И. Деза фундаментальную роль играют алгебраические структуры и комбинаторные схемы (как средства, методы математического познания), базой для изучения которых являются основные комбинаторные конфигурации и методы.

Однако в интеграции на базе фундаментализации образования важную роль играют не только алгебраические структуры и комбинаторные схемы, но и порядковые структуры, и логические, алгоритмические схемы. Все эти доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического познания) легли в основу отбора содержания обучения дискретной математике будущих учителей математики и информатики в концепции и методической схеме изложения в учебных пособиях по дискретной математике и абстрактной алгебре [151–154, 179, 180] и сборника задач [175], написанных автором совместно с Г. А. Клековкиным в рамках существовавших ранее стандартов подготовки будущих учителей математики и информатики на уровне специалитета.

В разработке концепции и методической схемы изложения содержания учебного пособия [151–154] мы исходили из того, что содержание обучения ДМ для учителей математики и информатики в стандартах подготовки специалистов на уровне специалитета практически не различалось. Непринципиальным отличием является то, что в стандарте для учителей математики было предусмотрено изучение некоторых методов суммирования, но не предусмотрено, как у будущих учителей информатики, изучение бинома Ньютона, полиномиальной формулы, основных комбинаторных конфигураций и метода включения-исключения. Эти темы играют большую роль в теоретических основах программирования, важных для будущих учителей как информатики, так и математики. Поэтому, с точки зрения интеграции обучения математике и информатике, представляется целесообразным обучение ДМ учителей математики и информатики на уровне бакалавриата и специалитета по обсуждаемой методической схеме, характеризуемой далее.

В разработке методической схемы изложения содержания пособия учитывалось то, что в настоящее время приступающие к его изучению студенты могут иметь различный уровень математической подготовки. Одни из них, обучавшиеся в школе по программам углубленного изучения математики, могли еще в этот период ознакомиться с комбинаторикой и графами, другие сталкиваются с ними впервые. Поэтому изложение зачастую ведется, может быть, излишне подробно; для чтения значительной части содержания пособия достаточно знаний в объеме программы средней школы. Теоретический материал постоянно сопровождается многочисленными примерами и задачами. Отмеченная особенность, вместе с тем, является определенным достоинством: выбранный способ подачи материала делает книгу доступной для студентов-заочников, которым приходится знакомиться с частью учебного материала самостоятельно, а также для студентов других специальностей, изучающих комбинаторику, и учащихся 10–11-х классов, увлекающихся математикой.

Пособие состоит из четырех глав. В первой главе «Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа» излагаются правила суммы и произведения; основные комбинаторные конфигурации, их свойства и формулы для их подсчета; бином Ньютона и полиномиальная формула; формула включений и исключений; теорема обращения; целочисленные функции. Все это дает возможность уже в процессе изложения решать классические задачи на выбор и расположение элементов конечного множества в соответствии с заданными правилами. В частности, это традиционные «школьные» задачи на изучение свойств основных комбинаторных конфигураций, на разбиение множеств (мультимножеств), на разложение предметов по ящикам (что то же самое – на разложение чисел на слагаемые). Широко представлены примеры, демонстрирующие связи комбинаторных чисел с рекуррентными последовательностями (в частности, чисел Стирлинга и Белла). Таким образом, в содержании главы предусмотрено все необходимое для изучения основных методов современной комбинаторики.

Вторая глава «Рекуррентные последовательности и производящие функции» посвящена линейным рекуррентным соотношениям и производящим функциям как универсальному средству решения комбинаторных задач. Здесь изучаются операции с производящими функциями. На основе этих операций излагается общий метод решения различных рекуррентных соотношений, унифицируются многие ранее полученные результаты, что дает возможность резко расширить круг обсуждаемых комбинаторных задач. В частности, рассматриваются единообразно решаемые задачи на вычисления комбинаторных чисел, связанных с различными выборками из элементов конечных множеств и мультимножеств; задачи на различные виды раскладок неразличимых (различимых) предметов в неразличимые (различимые) ящики, в ряде случаев приводятся конкретные формулы для подсчета числа разложений. При этом демонстрируются способы извлечения информации из сложных производящих функций (полученных операциями из простых) о «считающих» функциях $f(n)$. Выявляется связь между стандартными способами построения одних конфигураций с помощью других и соответствующими им действиями с производящими функциями – связь, на которой основано «искусство» описания конфигураций с помощью производящих функций.

В третьей главе «Графы» изложены основные понятия и классические задачи теории графов, рассмотрены асимптотические оценки различных классов графов. Изложение, как и в предшествующих главах, сопровождается большим числом примеров и учебных задач, имеющих прямой выход в школьную практику.

В четвертой главе «Асимптотические оценки и приближения» освещены асимптотические методы решения комбинаторных задач, демонстрирующие объединенную «мощь» методов математического анализа и комбинаторики. В частности, рассматривается формула Эйлера (суммирование значений произвольной дифференцируемой функции), лежащая в основе общего эффективного метода нахождения весьма точных асимптотических оценок самых различных комбинаторных величин. На основе доказываемой далее теоремы излагается более простой, по сравнению с формулой Эйлера, метод нахождения асимптотических оценок суммы значений непрерывной монотонной положительной функции, что позволяет уточнить некоторые ранее полученные оценки.

Отметим, что в силу важности комбинаторных схем ДМ в [155] было обновлено содержание темы «Комбинаторные конфигурации и числа» посредством включения в него методов вычисления конечных сумм и свойств кольца формальных степенных рядов, играющих важную роль в изложении раздела о производящих функциях.

В результате разработки предложенной методической схемы установлено, что профессионально-педагогическая направленность курса теории и методики обучения математике для будущих учителей математики обеспечивается адекватным отражением в этом курсе основных понятий языка доминирующих структур и схем современной дискретной математики, изучаемых на математических специальностях и специальностях, связанных с приложениями математики, поскольку эти понятия (граф, булева функция, комбинаторная конфигурация, асимптотическая оценка и др.) являются общеобразовательными понятиями, играющими фундаментальную роль в профильном обучении учащихся классов физико-математического профиля.

3.1.2. Методика реализации алгебраической линии в содержании подготовки будущих учителей математики и информатики

В последние десятилетия в содержании подготовки студентов многих специальностей все большее отражение находят идеи и методы современной алгебры, известной также под названием общей или абстрактной алгебры. Это вызвано тем, что современная алгебра стала одной из наиболее важных и бурно развивающихся областей математики. Как отмечается в «Математической энциклопедии», роль абстрактной алгебры «в современной математике исключительно велика, и существует объективная тенденция к дальнейшей "алгебраизации" математики» [123, т. 1, стб. 117]. В последние десятилетия «сфера ее применения расширяется столь стремительно, что иногда поговаривают об "алгебраической чуме", охватившей не только математику, но и другие науки» [253, с. 7]. Сейчас уже трудно перечислить все науки (естественные, технические, экономические и некоторые другие), в которых используются те или иные результаты исследований современной алгебры. Ее методы и разрабатываемые на их основе средства используются всюду, где возникает потребность в организации больших объемов данных и реализации вычислительных процессов в самых различных областях науки и производства.

Идеи и методы современной алгебры оказались эффективными в исследованиях даже в плохо формализованных, но очень важных прикладных областях, где обнаруживается отсутствие для исследуемых реальных ситуаций или объектов сколько-нибудь адекватных математических моделей, на базе которых можно было бы вести расчеты и получать количественные или качественные выводы. Например, в области обработки и распознавания информации (в том числе видеоинформации) получил широкое признание алгебраический подход, разработанный в трудах академиков Ю. И. Журавлева, В. Л. Матросова, а также их учеников и последователей.

В связи с расширяющейся «культурной экспансией» современной алгебры все более возрастает ее значение в обучении ДМ будущих учителей математики и информатики на основе использования ее межпредметных связей. Межпредметные связи абстрактной алгебры и ДМ явились концептуальной основой разработки уже упоминавшихся учебных пособий автора [151–155, 179, 180], в содержании которых они и отражены. Данные связи играют важную роль в разработке методической схемы реализации модели обучения дискретной математике на основе межпредметных связей абстрактной алгебры. На основе принципа профессионально-педагогической направленности подготовки главные особенности этих межпредметных связей отражены в методической схеме элективного обучения ДМ учащихся классов физико-математического профиля, изложенной в работе [150].

Краткая концептуальная характеристика методической схемы. Физико-математический профиль необходим для подготовки математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. В рамках этого профиля основной целью методической схемы и разработанной в соответствии с ней программой обучения является ранняя пропедевтика обучения построению полной цепочки использования компьютера [99]: реальная ситуация, математическая модель, алгоритм, программа, симуляция решения, анализ результатов. Иными словами, основная цель – положить начало подготовке будущего «многоборца»: постановщика задачи (переводящего ее формулировку на точный математический язык), математика (обеспечивающего разработку модели и алгоритма ее решения), программиста (пишущего, отлаживающего программу и симулирующего результаты ее работы) и в определенной мере заказчика (анализирующего результаты решения задачи). Все это способствует интеграции обучения математике и информатике.

В соответствии с целью обучения по данному профилю в программе предусмотрено изучение элементов ДМ, являющихся фундаментальной основой обучения построению полной цепочки использования компьютеров. Ориентиром при составлении программы послужил перечень доминирующих в ДМ понятий и фактов, играющих важную роль в концепции обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. При этом особое внимание уделено ранней пропедевтике понятий графа, (бинарного) отношения, алгебры, модели, алгоритма, исполнителя, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий.

Программа является необходимым дополнением к функционально-ориентированной программе обучения математике в 8–11-х классах и направлена на формирование первоначальных представлений о методах как «непрерывной» математики, так и ДМ.

Особенности методической схемы обучения по программе. Методика обучения основана на концепции развивающего обучения. Как известно, системы развивающего обучения Л. В. Занкова и Д. Б. Эльконина, В. В. Давыдова имеют в своей основе идеи Л. С. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств жизни. Для такой реконструкции обстоятельств жизни необходимы задачи с занимательным или практическим сюжетным текстом. При правильном подборе таких задач (в частности, на графы) уже с 8-го класса можно демонстрировать первые образцы математического моделирования. Образно говоря, необходимы «такие методы обучения, когда дорога к серьезным проблемам мостится из упрощенных, пусть даже сказочных и шуточных задач» [99, с. 22]. Только на этом пути можно достичь детской, игровой манеры изложения, доступной восприятию школьников. Перечислим возможные виды задач (имеющиеся в пособии [150]):

1) нестандартные задачи по программе (на применение в необычных ситуациях понятий и фактов из обычной программы);

2) занимательные и практические задачи (на обучение переводу задачи на математический язык);

3) задачи, на основе которых уже в 8-м классе начинается пропедевтика понятия модели на основе первого знакомства с пятиэлементным полем («новой арифметикой»), кольцом остатков, алгеброй высказываний;

4) задачи по ДМ, объединяющие весь изученный материал по темам «Графы», «Пятиэлементное поле», «Кольцо остатков», «Алгебра высказываний»; «Группы» и т. д. В процессе решения таких задач углубляются первые представления о понятиях и фактах языка ДМ;

5) задачи на решение аналогов школьных уравнений в кольце целых чисел, поле рациональных чисел, пятиэлементном поле, кольце остатков от деления на 4 и алгебре высказываний. Решение этих задач завершает пропедевтику понятия модели.

Отметим, что среди задач вида 4 имеются задачи на вычисление значений, тождественные преобразования выражений и решение уравнений в пятиэлементном поле (в «новой» арифметике, в которой нет дробей и отрицательных чисел). Благодаря этому осуществляется уход от довлеющих рекомендаций «с установившимся инструктивным материалом» [99, с. 13] из арифметики и элементарной алгебры. Очевидно, довлеют свойства действий с дробями, свойства степеней, тождественные преобразования привычных алгебраических выражений. Важно показать, что «мир может быть устроен по-другому» и что, например, в «новой» арифметике $3 + 4 = 2$ или $2 \cdot 3 = 1$.

Естественно, хорошее знание того или иного математического языка подразумевает, в частности, знание и проблемы поиска решения в этом языке. Необходимо научить учащихся выяснять, существует ли ответ на вопрос задачи на данном языке. Предлагаются следующие виды задач: 1) задачи с неверно составленным условием; 2) задачи с ненайденным решением; 3) задачи, которые не имеют решения (на данном языке); 4) задачи с бесконечным числом действий (исполнителя, в качестве которого используются различные виды условных микрокалькуляторов); 5) задачи с конечным числом действий; 6) задачи на составление эффективного алгоритма.

Возврат к изучаемым понятиям ДМ происходит в каждом следующем классе. Спиралевидное построение содержания, при котором изучение темы не исчерпывается во всех деталях сразу же в течении одного учебного года, позволяет осуществить медленное, тонкое приспособление знания к задаче, облегчаемое и за счет использования внутриматематических и межпредметных связей.

Программа обучения. С учетом целей обучения и объема содержания на обучение по программе в 8–9-х классах предусматривается 1 час в неделю, в 10–11-х классах – 2 часа в неделю. Отметим, что в соответствии с разделом программы для 8–9-х классов написано учебное пособие [150].

8-й класс

Понятие графа. Маршруты цепи и циклы. Применение графов в решении занимательных и практических задач.

Шифры и остатки. Действия с остатками. Законы действий с остатками. Вращения фигур. Необычные таблицы сложения и умножения. Законы действий алгебры пятиугольника («новой» арифметики).

Логические умножение, сложение и отрицание. Вычисление значений и тождественные преобразования логических выражений. Физический смысл логических действий.

Уравнения с параметрами. Задачи на свойства натуральных чисел. Нестандартные задачи. Решения Смекалкина, Ленивкина и Кнопкина.

9-й класс

Графы и группы. Связные графы. Деревья. Равные (изоморфные) графы. Понятие группы. Примеры групп. Группа симметрий (автоморфизмов) графа.

Логические умозаключения. Анализ текстов и логические выражения. Вычисление значений логических выражений. Законы алгебры высказываний. Доказательство логических тождеств. Логические тождества и электрические схемы.

Решение уравнений в различных числовых множествах. Свойства операций алгебры пятиугольника. Решение уравнений в алгебре пятиугольника (в том числе и с параметрами). Свойства операций алгебры (кольца) остатков. Решение уравнений в алгебре остатков. Решение уравнений в алгебре высказываний.

Метод перебора в нахождении целых корней уравнений и других задачах. Метод перебора в занимательных задачах. Комбинаторные задачи. Произведение множеств. Различные нестандартные задачи.

К сожалению, рамки изложения не позволяют привести все ссылки на многочисленную литературу из 31 источника, указанную в [150] в соответствующих местах программы для 10–11-х классов.

10-й класс

Правила суммы и произведения. Размещения и перестановки (с повторениями). Сочетания (с повторениями). Бином Ньютона. Разложение предметов по ящикам (чисел на слагаемые). Примеры рекуррентных соотношений и производящих функций и их применение в решении комбинаторных задач. Практические задачи на целочисленное решение уравнений.

Виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и с конечным числом действий (исполнителя). Вычисления на различных микрокалькуляторах. Возможность вычислить точный ответ задачи. Число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина [150]. Алгоритмы решений квадратных уравнений в различных алгебрах.

Устройство и работа машины Поста. Примеры программ. Об арифметических действиях с натуральными числами. Эффективные алгоритмы работы машины Поста.

Примеры бинарных отношений (равенства, сравнения, делимости нацело на множестве целых чисел, параллельности и перпендикулярности на множестве прямых и др.). Свойства бинарных отношений. Декартов квадрат множества и его графическое изображение (на примере трех-четырехэлементного множества). Определение бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества. Примеры бинарных отношений на конечном (3-, 4-, 5-элементном) множестве. Связь между бинарными отношения и графами. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфные (равные) графы и бинарные отношения. Машинное представление графов. Сеть. Граф сети.

Отображения и функции. Способы задания отображений.

Примеры частично упорядоченных множеств (ч. у. множеств): множество целых чисел с обычным отношением порядка или с отношением «делиться нацело», множество всех подмножеств данного множества с отношением включения и др. Сравнимые и несравнимые элементы ч. у. множества. Определение ч. у.множества как множества с рефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением. Диаграмма ч. у. множества. Изоморфные (равные) ч. у. множества. Описание «малых» ч. у. множеств.

Пересечение двух сравнимых элементов ч. у. множества. Пересечение $a \wedge b$ двух несравнимых элементов a, b ч. у. множества как элемент, наибольший среди всех элементов ч. у. множества, меньших a, b одновременно.

Полурешетка. Полурешетка как алгебра с одной операцией. Таблицы Кэли полурешеток. Полугруппа. Примеры полугрупп.

11-й класс

Понятие высказывательной формы или предиката от одной переменной. Примеры предикатов. Область определения и множество истинности предиката. Логические операции над предикатами. Связь операций над предикатами с их множествами истинности. Кванторы. Двухместные предикаты. Определения уравнения, тождества, неравенства, функции и периодической функции. Отрицание высказываний, содержащих кванторы. Понятие о логике предикатов.

Строение математической теоремы. Виды теорем.

Понятие унарной, бинарной и n-арной алгебраической операции и алгебры. Примеры алгебр. Понятие кольца. Примеры колец. Кольцо вычетов и криптография. Примеры бинарных и тернарных отношений. Понятие n-арного отношения. Понятие математической модели, языка и подъязыка. О языках «непрерывной» математики и ДМ.

О математической лингвистике: основные понятия, типы синтаксических языков, принципы синтаксической простоты. Анализ текстов художественных произведений.

Алгоритмы: построений циркулем и линейкой, нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, поиска эйлеровой цепи в графе.

Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$; $xy + x + y + 1$ и др.

Устройство и команды машины Тьюринга. Примеры программ машины Тьюринга. Программа сложения натуральных чисел. Понятие автомата. Примеры автоматов. Понятие исполнителя. Уточнение понятие алгоритма. Эквивалентные и эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и машины Тьюринга к ЭВМ.

Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. О разрешимости уравнений в радикалах. О разрешимости уравнений в алгебре пятиугольника и кольце вычетов. О распознавании конечных изоморфных (равных) графов и ч. у. множеств.

О проблеме разрешимости. Разрешающие алгоритмы. Полиномиальное и экспоненциальное время работы алгоритма. Примеры алгоритмически разрешимых задач.

О процессе математизации наук. О классификации видов математического моделирования. Машинный эксперимент и его отличие от «натурного». ДМ как фундаментальная основа математического моделирования. Понятие полной цепочки использования компьютеров. Этапы решения задачи с использованием компьютера: постановка задачи; выбор математического языка; разработка модели; разработка алгоритма, написание и отладка программы; симуляция и анализ результатов. Примеры.

Отметим, что в пособии [150] приведены учебно-тематический план работы по программе и программа-минимум, отражающая уровень обязательных требований к результатам обучения.

3.1.3. Особенности реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей информатики на основе интеграции в рамках компетентностного подхода

Как подчеркивается в учебном пособии С. Г. Григорьева и В. В. Гриншкуна, переход современного общества к информационной эпохе своего развития выдвигает перед системой образования в качестве одной из основных задачу формирования основ *информационной культуры* будущего специалиста [47, с. 21]. Потребность общества в квалифицированных специалистах, владеющих арсеналом технологий и средств информатизации, превращается в ведущий фактор образовательной политики. Особенно важную роль формирование информационной культуры приобретает в подготовке будущего учителя информатики, несущего, в свою очередь, наибольшую ответственность за формирование этой культуры у школьников и студентов колледжей (техникумов). Поэтому необходимо формировать информационную культуру будущего учителя информатики в ходе реализации всех видов его деятельности в учебном процессе.

Важным элементом информационной культуры будущего учителя информатики является использование языка ДМ при достоверном, исчерпывающем и своевременном применении методов и средств сбора, хранения, обработки и распространения информации для систематизации имеющихся и формирования новых знаний. Как считал А. П. Ершов, «курс математических основ программирования… должен базироваться на дискретном анализе (в современной терминологии – дискретной математике. – *Е. П.*) и основаниях математики» [66, с. 294]. Только на основе этого станет возможным «довести систему законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [66, с. 294]. Для нас важно и то, что изучение *доминирующих* в ДМ структур и схем должно быть обязательным в подготовке системных программистов [66, с. 283]. Таким образом, ДМ играет фундаментальную роль в разработке информационных (более узко – компьютерных) технологий обработки информации.

Анализ содержания ФГОС по направлению подготовки 010300 Фундаментальная информатика и информационные технологии (квалификация «бакалавр») позволяет выявить, что в объекты профессиональной деятельности бакалавров (специализирующихся в области информационных технологий обработки информации) включены математические, информационные, имитационные модели систем и процессов, программное обеспечение компьютерных средств, языки программирования, системы цифровой обработки изображений, что отражено соответствующим образом в формулировках компетенций. Поэтому бакалавр такого направления подготовки должен обладать способностью «применять методы математического анализа и моделирования теоретического и экспериментального исследования» (ОК-10), способностью «применять в профессиональной деятельности современные языки программирования и языки баз данных… пакеты программ» (ПК-1) [246, с. 5].

К сожалению, как уже неоднократно отмечалось ранее, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии ПО» [35]. Поэтому будущий учитель информатики должен владеть культурой программного обеспечения в обучении своему предмету и в том числе обучении учащихся построению полной цепочки использования компьютера.

Как известно, программное обеспечение персональных компьютеров составляет совокупность системных и прикладных программ, обеспечивающих «выполнение операций по обработке информации под управлением специально разрабатываемых компьютерных программ, нацеленных как на поддержание работы различных системных функций компьютера, так и на решение прикладных задач, значимых для информатизации деятельности человека» [47, с. 29]. Поэтому в реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей информатики на основе интеграции в рамках компетентностного подхода фундаментальную роль играет положение о том, что «практически любой теоретический факт должен быть исследован, проверен с помощью его программной реализации. В таком случае инструментом педагога становится огромный методический пласт наработок, усиливающий глубину изучения материала у обучаемого. Это требование накладывает ограничения на структуру (содержание. – *Е. П.*) теоретического материала» [142, с. 25], а также на методы, средства и формы обучения. Это положение важно при отборе содержания физико-математического профиля обучения информатике в старших классах школы.

Наиболее подходящим учебным пособием в выборе конкретных уровневых целей и содержания обучения, а также методов средств и форм обучения нам представляется учебное пособие по дискретной математике С. М. Окулова [141], написанного на основе лекционного курса и практических занятий для студентов факультета информатики.

Как пишет автор в предисловии, первой вводной темой в пособии являются проблемы счета и перебора (или выбора) К этим двум проблемам сводится большинство задач, решаемых при помощи компьютера. Раскрывается суть «комбинаторного взрыва» – показывается ограниченность возможностей компьютера. И весь дальнейший курс, как пишет далее автор, строится под лозунгом преодоления этой ограниченности Тема комбинаторного взрыва прослеживается в компьютерном варианте практики и служит пропедевтикой всех тем, изучаемых в дальнейшем. При этом в книге особое внимание уделено не столько широте охвата содержания ДМ, сколько обучению корректной реализации всех этапов решения задач с использованием компьютера на примере задач комбинаторики и теории графов.

3.1.4. Направления методической специализации учителей математики и информатики на уровне магистратуры

Как уже ранее было обосновано, главную роль в исследовании направлений методической специализации будущих учителей математики и информатики в магистратуре играет формирование у них методических умений реализовывать обучение учащихся начальным элементам математического моделирования и разработки алгоритмов вычислений с учетом профиля обучения.

3.1.4.1. Направления методической специализации учителей математики

В методической специализации будущего учителя математики для работы в классах того или иного профиля прежде всего необходимо учесть направления обучения дискретной математике, существующие в системе высшего профессионального образования.

Наиболее важно подготовить будущего учителя математики к работе в классах физико-математического профиля. Для этого необходимо учесть особенности подготовки математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. С учетом специфики этого профиля основной целью методической специализации будущего учителя является умение реализовывать пропедевтику обучения построению полной цепочки использования компьютера (см. подп. 3.1.2). Иными словами, основная цель – обучить учителя методике подготовки будущего «многоборца»: постановщика задачи (переводящего ее формулировку на точный математический язык), математика (обеспечивающего разработку модели и алгоритма ее решения), программиста (пишущего, отлаживающего программу и симулирующего результаты ее работы) и в определенной мере заказчика (анализирующего результаты решения задачи).

В соответствии с этой методической целью при обучении работе в классах физико-математического профиля необходимо предусмотреть методику изучения элементов ДМ, являющихся фундаментальной основой обучения построению полной цепочки использования компьютеров. Ориентиром в такой методической специализации должен послужить перечень доминирующих в ДМ понятий и фактов, играющих важную роль в концепции обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. При этом особое внимание должно быть уделено ранней пропедевтике понятий графа, отношения (бинарного), алгебры, модели, алгоритма, исполнителя, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий.

Для работы будущего учителя математики в классах другого профиля в выборе направления методической специализации необходимо учесть, что, как ранее уже было установлено, анализ математического аппарата исследований с использованием СКМ и КТ в различных научных областях, соответствующих названиям школьных предметов, показывает, что в формировании основ этого аппарата наряду с классической («непрерывной») математикой фундаментальную роль играет дискретная математика. Напомним, метод конечных разностей решения дифференциальных уравнений в математической физике; молекулярные графы в математической химии; клеточные автоматы, отношения различной арности и элементы алгебры высказываний в биологии развития; алгебраические операции и логика предикатов в математической экономике и т. д. – вот лишь неполный перечень разделов и тем современной ДМ, так или иначе сыгравших свою междисциплинарную роль в формировании основ математического аппарата перечисленных дисциплин.

Таким образом, в методической подготовке будущего учителя к работе в классах того или иного профиля должно быть предусмотрено формирование умений использовать адекватные «школьному» предмету познания в области ДМ в процессе обучения учащихся и студентов колледжа (техникума). Для этого необходимо объединение научной и методической линий в обучении ДМ.

3.1.4.2. Направления методической специализации учителей информатики

В методической специализации будущего учителя информатики для работы в классах того или иного профиля снова необходимо учесть направления обучения дискретной математике, существующие в системе высшего профессионального образования, а для работы в классах физико-математического профиля – особенности обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики.

Как уже отмечалось в подп. 3.1.5, фундаментально значение современной прикладной ДМ в разработке и совершенствовании современных систем компьютерной математики и компьютерных технологий. Поэтому несмотря на различия в обучении дискретной математике, существующие в системе высшего профессионального образования, в методической специализации учителей информатики по любому профилю необходимо отразить методику изучения с учащимися базовых понятий и методов ДМ, играющих фундаментальную роль в изучаемых студентами областях математики и информатики и необходимых для обучения учащихся математическому моделированию и теории вычислительных процессов на основе корректного использования СКМ и КТ.

Как известно, потенциальные возможности инструментальной среды СКМ и КТ позволяют интенсифицировать процесс обучения и учебно-математическую деятельность студентов за счет ее автоматизации, в том числе в процессе выполнения ими лабораторных работ по специальным дисциплинам информационного профиля. Поэтому СКМ обусловливают у студентов дополнительную мотивацию к их освоению и использованию и, следовательно, имеют фундаментальное значение в методической специализации за счет предоставления новых возможностей, имеющихся в информационной среде. В результате у студентов возникает мотивация к изучению курса «Методика обучения учащихся корректному использованию СКМ и КТ».

В рамках такого курса целесообразно предусмотреть методику изучения с учащимися важной темы «Основные понятия комбинаторики и комбинаторные числа» с помощью команд встроенных пакетов combinat и combstruct системы Maple. Эти пакеты позволяют демонстрировать учащимся доведение решений комбинаторных перечислительных задач с громоздким счетом до численного результата. При этом при решении комбинаторных задач с учащимися следует постоянно обращать их внимание на то, что недостаточно знать возможности той или иной системы применительно к решению данного класса задач. Для того, чтобы предварительно построить математическую модель задачи, им необходимы знания правил построения основных комбинаторных конфигураций и умение их применить.

Можно интенсивно использовать в обучении учащихся электронные демонстрации при изучении темы «Элементы теории графов». Для изучения темы в СКМ Maple имеется прекрасный пакет networks, который содержит команды для создания различных типов графов и работы с ними. Данный пакет можно использовать для визуализации различных видов графов, для их представления учащимся физико-математических классов с помощью матриц смежности и инцидентности, для перечисления тех или иных видов графов, вызывающих большой интерес у учащихся благодаря многочисленным возможностям их практического применения.

В методической специализации студентов важную роль играют лабораторные работы по ДМ как форма организации учебного процесса в школе или колледже (техникуме), позволяющая оптимально формировать навыки применения СКМ в процессе решения конкретных математических задач на основе методов дискретной математики (в частности, задач по дискретизации непрерывной модели). В ходе лабораторных работ не только приобретаются определенные навыки, но и закрепляются, углубляются полученные знания. При этом лабораторные работы служат важным критерием успешности освоения изучаемого содержания ДМ.

В процессе выполнения лабораторных работ у учащихся углубятся представления об основах математической обработки информации, имеющие важное общеобразовательное значение.

Для успешного осуществления методической специализации студентов в области корректного использования СКМ и КТ необходимо предусмотреть их использование при выполнении студентами курсовых работ и дипломном проектировании. При этом важно сформировать у студентов представление о роли ДМ в обеспечении достоверного, исчерпывающего и своевременного применения СКМ и КТ при сборе, хранении, обработке информации для получения новых знаний.

3.1.5. Специализированные курсы для магистров

Важную роль в вариативном обучении ДМ магистров играют специализированные курсы, выполняющие интегративную роль. Прежде всего, они обеспечивают систематизацию полученных ранее знаний, благодаря которой отдельные знания, полученные ранее в других дисциплинах и представляющие частные случаи в решении какой-то общепрофессиональной проблемы, сливаются в одно целое и создают основу для ее решения.

Ориентиром в формировании структуры этих специализированных курсов является принцип профессионально-педагогической направленности подготовки, в соответствии с которым можно предложить такие направления методической специализации учителей математики и информатики на уровне магистратуры, как направления подготовки математиков, программистов, бакалавров и магистров прикладной математики; инженеров для высокотехнологичных автоматизированных отраслей производства.

Инструментарием для формирования содержания и составления программ курса (специализированных курсов) по дискретной математике для магистров педагогических специальностей являются следующие целевые модули: методологический (научно-исследовательский), теоретический (базовый профессионально-педагогический), методический (предусматривающий изучение элементов методики обучения ДМ в школе).

В качестве примера специализированного курса в вариативной подготовке будущих учителей математики предлагаем курс «Элементы теории решеток», благодаря которому на основе наглядного понятия решетки возникает возможность наглядного изучения со школьниками основных понятий современной абстрактной алгебры. Основой для обучения курсу «Элементы теории решеток» являются книги [11, 97, 253]. Тем не менее, изложим наш подход к определению главного в спецкурсе понятия решетки и ее эндоморфизма, облегчающий изучение указанных книг и посильный для школьников.

Понятие решетки

Пусть A – некоторое множество. Декартовым квадратом A^2 множества A называется множество всевозможных пар, составленных из элементов этого множества. Пусть, например, дано множество чисел $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда множество всевозможных пар, составленных из элементов M, изображено точками на рис. 3.1. А именно, множество M^2 состоит из пар чисел, являющихся координатами изображенных на рисунке точек.

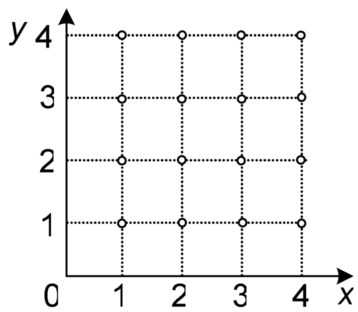


Рис. 3.1

Определение 1. Бинарным отношением на множестве A называют некоторое подмножество декартова квадрата A^2 множества A. Например, отношение порядка на множестве чисел M есть множество пар

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

Если вместо, например, (1, 2) и (1, 3) писать $1 \leqslant 2$ и $1 \leqslant 3$, то мы увидим за обозначением пары (a, b) привычную запись $a \leqslant b$.

Заметим, что отношение равенства на множестве M состоит из пар $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

Бинарное отношение на множестве принято также обозначать греческими буквами α, β, γ, ρ и т. д. Например, пусть запись $a\rho b$ означает, что «a делится нацело на b», где $\{2, 3, 6\}$. Ясно, что бинарное отношение ρ состоит из пар (6, 6), (6, 2), (6,3), (3, 3), (2,2). Пусть, например, запись $a\rho b$ означает, что «прямая a перпендикулярна прямой

b» на множестве всех прямых на плоскости. Тогда ясно, что бинарному отношению ρ на множестве этих прямых принадлежат все пары перпендикулярных друг другу прямых.

Определение 2. Бинарные отношения на множестве называются равными, если они образованы одним и тем же множеством пар.

Бинарное отношение ρ на некотором множестве A может обладать следующими свойствами:

1^0. Рефлексивность. Бинарное отношение ρ на A называется рефлексивным, если $a\rho a$ истинно для любого элемента a, $a \in A$.

2^0. Бинарное отношение ρ на A называется антисимметричным, если для любых $a, b \in A$ из истинности $a\rho b$ и $b\rho a$ следует, что $a = b$.

3^0. Бинарное отношение ρ на A называется транзитивным, если для любых $a, b, c \in A$ из истинности $a\rho b$ и $b\rho c$ следует истинность $a\rho c$.

Например, отношение «быть параллельными» на множестве прямых в пространстве ($a\rho b$ означает $a||b$), очевидно, обладает свойствами 1^0, 3^0.

Определение 3. Бинарное отношение ρ на множестве A, обладающее свойствами 1^0, 2^0 и 3^0, называется отношением частичного порядка на этом множестве

Определение 4. Множество с определенным на нем отношением частичного порядка называется частично упорядоченным множеством или, кратко, ч. у. множеством.

Примеры ч. у. множеств:

1) множество натуральных чисел Nс отношением «делиться нацело»: $a\rho b$ означает, что «число a делится нацело на число b»;

2) множество P (M) всех подмножеств данного множества Mс отношением ρ, где $A\rho B$ для A, $B \in P$ (M) означает, что A – подмножество B.

Бинарное отношение частичного порядка ρ на множестве A будем обозначать символом $\leqslant$. Иными словами, вместо $a\rho b$ будем писать $a \leqslant b$ в случае, когда пара (a, b) принадлежит бинарному отношению ρ на множестве A. Само ч. у. множество будем кратко обозначать так: (A, $\leqslant$).

Определение 5. Элементы a, b ч. у. множества (M, $\leqslant$) называются сравнимыми, если истинно либо $a \leqslant b$, либо $a \geqslant b$. В противном случае элементы a, b называются несравнимыми. Если $a \geqslant b$, то говорят, что элемент a больше элемента b.

Определение 6. Элемент a называется элементом, строго большим элемента b в ч. у. множестве, если $a \geqslant b$ и $a \neq b$. В этом случае пишут: $a > b$.

Определение 7. Говорят, что элемент a покрывает элемент b в ч. у. множестве M, если $a > b$ и не существует такого элемента $x \in M$, такого, что $a > x > b$. В этом случае пишут: $a > b$.

В ряде случаев ч. у. множество может быть наглядно изображено в виде диаграммы на плоскости. Для того, чтобы изобразить ч. у. множество $(M, \leqslant)$ в виде диаграммы, примем следуюшие соглашения:

• различные элементы $(M, \leqslant)$ изображаются различными точками плоскости;

• если a, $b \in M$ и элемент a покрывает элемент b, то точка, изображающая a, располагается выше точки, изображающей элемент b и эти точки соединяются отрезком (рис. 3.2).

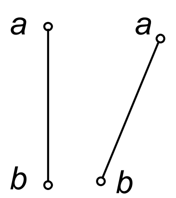


Рис. 3.2

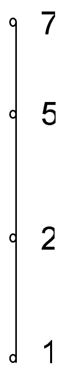


Рис. 3.3

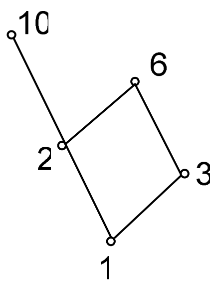


Рис. 3.4

Понятно, что диаграмма ч. у. множества может быть построена полностью, когда ч. у. множество конечно. Очевидно также, что при построении диаграммы ее отрезки могут пересекаться в точках, не изображающих элементы.

Рассмотрим примеры ч. у. множеств и их диаграмм.

Пример 1. $(M, \leqslant)$, где $M = \{1, 2, 5, 7\}$ и $a \leqslant b$ для a, $b \in M$ означает, что «число a меньше числа b» (диаграмму см. на рис. 3.3).

Пример 2. $(P, \leqslant)$, где $P = \{1, 2, 3, 6, 10\}$ и $a \leqslant b$ для a, $b \in P$ означает, что «число b делится нацело на число a» (диаграмму см. на рис. 3.4).

Определение 8. Элемент a ч. у. множества $(M, \leqslant)$ называется его наибольшим наименьшим) элементом, если для любого $x \in M$ справедливо соотношение $a \geqslant x$ $(a \leqslant x)$.

Из определения очевидно следует, что в ч. у. множестве может существовать только единственный наибольший или наименьший элемент.

Заметим, что в ч. у. множестве на рис. 3.4 существует наименьший элемент 1, наибольший – не существует. В ч. у. множестве на рис. 3.5, наоборот, существует наибольший элемент a, а наименьший не существует.

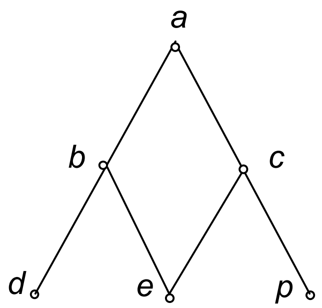


Рис. 3.5

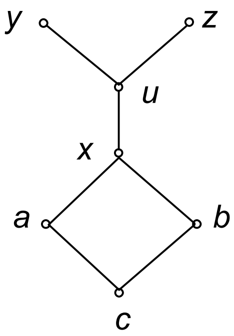


Рис. 3.6

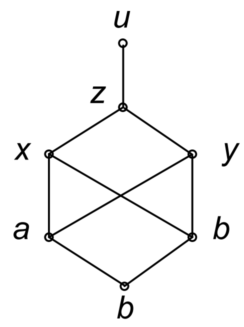


Рис. 3.7

Пусть дано некоторое ч. у. множество $(P, \leqslant)$ и $a, b \in P$. Рассмотрим множество всех элементов ч. у. множества $(P, \leqslant)$ таких, которые больше как элемента a, так и элемента b одновременно.

Определение 9. Пусть на множестве элементов из ч. у. множества $(P, \leqslant)$, которые больше элементов a и b одновременно, существует наименьший элемент. Тогда этот элемент называется объединением элементов a и b и обозначается $a \vee b$.

Например, в ч. у. множестве $(A, \leqslant)$ на рис. 3.6 объединением элементов a и b является элемент $a \vee b = x$, а в ч. у. множестве $(B, \leqslant)$ на рис. 3.7 элемент $a \vee b$ не существует. Действительно, в ч. у. множестве $(A, \leqslant)$ на его подмножестве $\{x, y, z, u\}$ элементов, больших a и b одновременно, существует наименьший элемент x. В свою очередь, на ч. у. множестве $(B, \leqslant)$ на его подмножестве $\{x, y, z, u\}$ такого наименьшего элемента нет.

Определение 10. Пусть на множестве элементов ч. у. множества $(P, \leqslant)$, которые меньше выбранных заранее элементов a и b из $(P, \leqslant)$, существует наибольший элемент. Тогда этот элемент называется пересечением элементов a и b и обозначается $a \wedge b$.

Например, в ч. у. множестве $(A, \leqslant)$ на рис. 3.6 $z \wedge y$, а в ч. у. множестве $(B, \leqslant)$ на рис. 3.7 $x \wedge y$ не существует.

Определение 11. Ч. у. множество называется решеткой, если для любых двух его элементов существует элемент, являющийся их объединением, и элемент, являющийся их пересечением.

Примеры решеток даны на рис. 3.8–3.10.

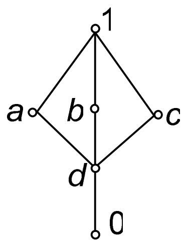


Рис. 3.8

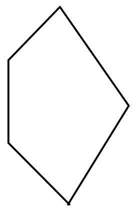


Рис. 3.9

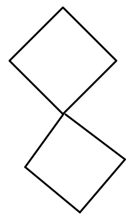


Рис. 3.10

Заметим, что наименьший элемент решетки обозначается 0, а наибольший – 1.

Определение 12. Элемент решетки, покрывающий 0, называется ее атомом. Если единица решетки 1 покрывает какие-то элементы, то они называются коатомами решетки.

В решетке на рис. 3.8 элемент d – атом, а элементы a, b, c – коатомы.

Определение 13. Цепью называется решетка, любые два элемента которой являются сравнимыми.

Решетка на рис. 3.3 является цепью.

Множество элементов решетки, которое относительно определенного на ней частичного порядка само является решеткой, называется подрешеткой этой решетки.

На рис. 3.8 множество $\{1, a, b, c, d\}$ – подрешетка решетки, изображенной на этом рисунке.

Из определения решетки очевидно следует, что справедливы следующие свойства:

Свойство 1. Объединение сравнимых элементов ($a \leqslant b$) решетки равно большему элементу b, пересечение этих элементов равно меньшему элементу a.

Свойство 2. Объединение и пересечение несравнимых элементов a, b решетки есть элементы, не равные a и b и не равные друг другу.

Определение 14. Эндоморфизмом φ конечной решетки L называется такое отображение φ элементов множества L в себя, при котором для операций $\wedge$ и $\vee$ справедливы равенства:

$\varphi(a \wedge b) = \varphi a \wedge \varphi b$, $\varphi(a \vee b) = \varphi a \vee \varphi b$.

Определение 15. Автоморфизмом φ конечной решетки L называется такое отображение φ элементов множества L в себя, при котором различные элементы отображаются в различные и для операций $\wedge$ и $\vee$ справедливы равенства:

$\varphi(a \wedge b) = \varphi a \wedge \varphi b$, $\varphi(a \vee b) = \varphi a \vee \varphi b$.

Например, автоморфизмом φ решетки на рис. 3.8 является следующее отображение: $\varphi 0 = 0$, $\varphi d = d$, $\varphi a = b$, $\varphi b = c$, $\varphi c = a$, $\varphi 1 = 1$.

Из определения автоморфизма решетки очевидно вытекают следующие свойства ее автоморфизмов:

Свойство 3. Сравнимые элементы решетки отображаются в сравнимые элементы.

Действительно, по определению операций $\wedge$ и $\vee$ для элементов a, b, очевидно, $a \leqslant b$ равносильно $a \vee b = b$ и $a \wedge b = a$. Отсюда, по определению автоморфизма φ, имеем $\varphi a \vee \varphi b = \varphi b$ и $\varphi a \wedge \varphi b = \varphi a$. Последние два равенства, в свою очередь, означают, что $\varphi a \leqslant \varphi b$.

Из свойства 3 непосредственно следуют свойства 4 и 5:

Свойство 4. Цепь при автоморфизме решетки отображается в цепь.

Свойство 5. Элемент, покрывающий n элементов, отображается в элемент с таким же свойством: $i \in N$.

Доказательство. Пусть элемент a решетки покрывает n элементов a_i, $i \in N$, и $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $a_i \vee a_j = a$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Значит, $\varphi a_i \vee \varphi a_j = \varphi a$. Поскольку все φa_i для $1 \leqslant i \leqslant n$ различны, то последнее равенство означает, что элемент φa покрывает n элементов φa_i.

Аналогично доказывается следующее свойство.

Свойство 6. Элемент, который имеет n покрывающих его элементов, отображается в элемент с таким же свойством.

На основе предложенной методики изучения в школе понятия решетки, ее эндоморофизма и их перечисленных свойств магистр может предложить различные темы для самостоятельной работы школьников над рефератами, например:

1. Описать все n-элементные решетки для $n \leqslant 7$ (при $n = 7$ имеется 53 решетки, что уже ранее доказано в одной научной статье с помощью алгоритма перечисления решеток).

2. Найти все n-элементные решетки для $n \leqslant 7$, обладающие только тождественным или постоянным эндоморфизмом (в научной литературе такие решетки называются жесткими). При этом постоянным называется эндоморфизм, отображающий все элементы решетки в один элемент. Тождественным называется автоморфизм φ, при котором для любого элемента решетки x $\varphi x = x$. (Имеется только одна жесткая неодноэлементная решетка при $n = 7$.)

Как следует из изложенного, в отборе содержания курсовых и дипломных работ по ДМ будущих учителей математики и информатики главным ориентиром являются математическое моделирование и теория вычислительных процессов, а также системы компьютерной математики. При этом учебно-исследовательская работа студентов при выполнении этих работ может плавно переходить в научно-исследовательскую работу.

3.2. Основные методические аспекты обучения дискретной математике будущих инженеров-педагогов

3.2.1. Методическая схема реализации модели обучения дискретной математике в рамках интеграции на основе компетентностного подхода

В результате изучения дисциплины «Математика», включенной в ФГОС подготовки бакалавров, студент должен знать «фундаментальные разделы математики в необходимом объеме для осуществления профессионально-педагогической деятельности» по подготовке рабочих [248, с. 15].

Как следует из анализа предмета и функций ДМ, направления обучения ДМ на инженерно-технических специальностях и принципа профессионально-педагогической направленности, в изучении *фундаментальных разделов математики* определяющую роль играют математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы, лежащие в основе всех новейших технологий и потому играющие особенно важную роль в подготовке рабочих и специалистов среднего звена в наступивший век «компьютерной» автоматизации и роботизации производства. Идеи и методы этих областей математики имеют важное теоретическое значение в исследовании компонентов рассматриваемой модели обучения ДМ.

Таким образом, в выборе уровневых целей и содержания обучения математике особенно важно учесть, что современное математическое моделирование с применением компьютера основано на использовании (часто совместном) дискретных и непрерывных моделей математики с использованием СКМ и КТ. Поэтому в выявлении конкретных особенностей компонентов обсуждаемой модели обучения ДМ бакалавров профессионального обучения важную роль играют главные цели обучения дискретной математике. А именно, необходимо достижение *единства* в обучении дискретной и непрерывной математике, что подразумевает формирование у обучающихся умения гармоничного сочетания дискретных и непрерывных моделей, необходимого им для овладения профессиональной культурой профильного обучения учащихся решению технологических задач (отрасли производства), в том числе и в обучении реализации вычислительных процессов в рамках той или иной производственной технологии.

Как следует из изложенного в подп. 1.3.4, современная дискретная математика имеет фундаментальное значение в математическом моделировании, в разработке и совершенствовании СКМ и КТ, являющихся математической основой вычислительных процессов при реализации современных отраслевых (производственных) технологий и многих других областях деятельности. Следовательно, ДМ играет важную роль в реализации принципа интеграции психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогической направленности подготовки) [250, с. 130]. Поэтому в выборе целей и уровневого содержания, методов и средств рассматриваемой модели обучения ДМ должно быть предусмотрено адекватное специальности обучение этапам решения производственных задач с использованием компьютера на основе систем компьютерной математики и компьютерным технологиям. Это необходимо для выработки у бакалавров умения адаптироваться к постоянно происходящим в области компьютерной автоматизации и роботизации производства изменениям, играющего важную роль в профильном обучении математике.

В данной модели обучения ДМ необходимо учесть, что при обеспечении надежности функционирования сложных систем управления технологическими процессами, энергетическими и другими важными производственными отраслевыми системами важны такие показатели эффективности функционирования, как точность выполняемых при этом вычислений, эффективность разрабатываемых алгоритмов вычислений, помехозащищенность и т. д. А это, в свою очередь, требует отражения в уровневом содержании обучения теорий алгоритмов, автоматов, асимптотических оценок и приближений и др., являющихся областями современной дискретной математики. Поэтому эти разделы ДМ являются математической основой формирования таких компетенций, как, например, готовность «к участию в исследованиях проблем, возникающих в процессе подготовки рабочих (специалистов) (ПК-12)», способность «проектировать и оснащать образовательно-пространственную среду для теоретического и практического обучения рабочих (специалистов) (ПК-16)», способность «использовать передовые отраслевые технологии в процессе обучения рабочей профессии (специальности) (ПК-31)» [248, с. 7–12].

Таким образом, справедливо положение о том, что дискретная математика играет фундаментальную роль в формировании у будущих инженеров-педагогов умений научной, дидактической и методической *переработки* содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки.

Переработка содержания учебного материала означает проведение структурно-логического анализа содержания дисциплины, в процессе которого выделяются опорные математические понятия и методы, составляющие математический аппарат изучаемой технической дисциплины, необходимый для обучения учащихся математическому моделированию технических объектов и алгоритмов вычислительных процессов, реализующих технологию их функционирования во многих отраслях производства.

При переработке содержания осуществляется методическая редукция этих понятий, т. е. трансформация математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания учащихся.

Это положение наряду с главными целями обучения дискретной математике является одним из основных ориентиров в разработке модели методической системы обучения ДМ. Эти ориентиры послужили основой выбора уровневых целей и содержания рабочей программы [149] и методических указаний к ней [156]. В них отражены требования компетентностного подхода, содержащиеся в ФГОС подготовки бакалавров профессионального обучения, предназначенных для подготовки будущих инженеров-педагогов.

3.2.2. Содержание обучения в методической схеме модели обучения дискретной математике

Для выработки умений структурно-логического анализа содержания технических дисциплин в программе [149] предусмотрено изучение разделов «Дискретные структуры и схемы», «Алгоритмы. Формальные языки и системы компьютерной математики», «Элементы теории графов» со следующим содержанием:

Раздел 1. Дискретные структуры и схемы

Понятие комбинаторной конфигурации. Перестановки, сочетания, размещения и формулы для их подсчета. Правило суммы и произведения.

Основные комбинаторные схемы: списки элементов, урновая схема, схема раскладки предметов по различным ящикам.

Отображения и их основные виды. Функция как частный случай отображения.

Операции над множествами и их свойства.

Понятие алгебраической операции и алгебры. Примеры. Определение полугруппы, группы, кольца и полукольца и их примеры. Понятие алгебры.

О роли алгебр в разработке систем компьютерной математики.

Декартово произведение множеств. Бинарное соответствие между множествами. Примеры.

Декартов квадрат множества. Бинарные отношения на множестве и их основные свойства. Граф бинарного отношения. Отношения эквивалентности и частичного порядка. Примеры.

Примеры использования отношения эквивалентности в классификации видов технического оборудования. Примеры расчета вариантов сборки изделий на основе упорядоченных множеств.

Понятие математической структуры и ее модели (интерпретации). Примеры. Дискретная и непрерывная величина. Дискретные структуры и способы их задания. Дискретизация непрерывной модели.

Высказывания. Операции с высказываниями и таблицы истинности. Простые и сложные высказывания. Алгебра логики. Логические тождества. Вычисление значений формул алгебры логики. Тождественные преобразования формул алгебры логики.

Определение булевых функций одной и двух переменных. Описание булевых функций двух переменных. Булева алгебра.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) булевой функции. Упрощение СДНФ на основе логических тождеств. Реализация булевой функции на логических элементах «конъюнктор», «дизъюнктор», «инвертор» и «двоичный сумматор». Анализ и синтез логических устройств. Формы представления чисел в цифровых устройствах. Роль цифровых устройств в структуре ЭВМ.

Раздел 2. Алгоритмы. Формальные языки и системы компьютерной математики

Понятие алгоритма и его основные свойства. О проблеме алгоритмической разрешимости задачи. Экспоненциальные и полиномиальные алгоритмы. Примеры.

Определение асимптотической оценки $\sim$, O и o. Применение асимптотических оценок в анализе сложности алгоритмов.

Понятие формального языка. Алфавит и слово языка. Правила образования слов. Примеры. Исчисление высказываний как формальный язык. О роли формальных языков в теоретической информатике.

О понятии конечного автомата. Автоматы-распознаватели. Роль формальных языков и конечных автоматов в автоматизации технологических процессов в машиностроении.

Понятие компьютерной алгебры. Понятие системы компьютерной математики. Роль СКМ в реализации этапов математического моделирования и вычислительных процессов в машиностроительном производстве. Основные преимущества и недостатки СКМ.

Раздел 3. Элементы теории графов

Задачи, приводящие к понятию графа. Определение графа и его элементов. Маршрут, цепь, цикл.

Виды графов: неориентированные, ориентированные, простые, эйлеровы, гамильтоновы, двудольные деревья, бинарные деревья, леса.

Изоморфизм графов. Описание n-элементных графов для малых n.

Машинное представление графа. Матрица смежности и инцидентности. Переход от матричного представления к машинному и обратный переход.

Применение графов в анализе систем энергоснабжения.

Разрезы графа. Связные графы. Компоненты графа. Разрезающее множество и разрез графа.

Дерево графа. Остов и коостов графа. Граф электросхемы. Об анализе электросхемы с помощью ее графа.

Сеть. Граф сети. Примеры использования сетей в машиностроении.

Мультиграфы и их применение в технологии сборки электроприборов и электрооборудования и других технических устройств.

3.2.3. Типичные примеры методической редукции математических понятий

В основе методической редукции понятий лежат охарактеризованные ранее особенности реализации принципов преемственности и профессионально-педагогической направленности обучения. Отметим, что методическая редукция понятий имеет особенно важное значение в индивидуализации работы со слабыми студентами и студентами заочного отделения.

Необходимость методической редукции многих важных понятий дискретной математики можно обнаружить в обучении студентов почти каждой технической дисциплине. Например, необходимость редукции понятия конечной суммы и свойств преобразований конечных сумм для их приближенной оценки постоянно возникает при изучении «нормативной», а потому очень важной в машиностроении дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация».

3.2.3.1. Редукция понятия равносильных формул алгебры высказываний

Необходимость редукции понятия равносильных формул постоянно возникает при обучении электротехнике (анализу и синтезу электрических цепей), радиотехнике и другим техническим дисциплинам, например, дисциплинам, так или иначе связанным с автоматизацией технологических процессов и производств в высокотехнологичных отраслях производства.

Приведем типичный пример изложения в учебной литературе этого понятия, играющего важную роль в конструировании разного рода логических устройств схемотехники, которая, в свою очередь, лежит в основе конструирования автоматически работающих технических устройств.

В основе изложения лежит строгое определение понятия равносильных формул, например, такое: две логические формулы $A = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют равносильными формулами, если их единичные и нулевые наборы совпадают [93, с. 136].

При этом строки, на которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, названы в учебном пособии [93] единичными наборами, остальные строки – нулевыми наборами.

Не умаляя методических достоинств этого и другого аналогичного определения равносильных формул из пособия [93] (все же гораздо менее формального, чем в этой и других книгах), предложим следующую методическую редукцию этого понятия.

В начале при необходимости можно использовать методику изложения понятия высказывания, логического умножения, сложения и отрицания, вычислений значений логических выражений, законов алгебры высказываний, доказательства логических тождеств и тождественных преобразований логических выражений из учебного пособия для 8–9-х классов [150].

В этом случае следует продолжить обозначать операции конъюнкции $\wedge$ и дизъюнкции $\vee$ символами «·» и «+» соответственно и называть логическим умножением и сложением. Кроме этого, для облегчения восприятия удобно обозначать символы 0, 1 соответственно *и*, *л* и говорить «истина» и «ложь».

Независимо от пособия [150] далее можно предложить следующий вариант изложения.

В алгебре принято равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, называть *тождествами*. Например, тождествами являются формулы сокращенного умножения. Равенство $(a + b)^2 = a + b$ тождеством не является, поскольку оно неверно, например, при $a = b = 3$.

Рассмотрим логические равенства $A + B \equiv B + A$, $(A + B) \cdot C \equiv$ $\equiv A \cdot C + B \cdot C$, $\overline{A} + B \equiv A \cdot B$. Три черты в знаке логического равенства $\equiv$ позволяют отличить его от знака алгебраического равенства =. Логическое равенство также отличает от алгебраического запись с использованием заглавных букв. Поэтому, например, легко отличить алгебраическое равенство $a + b = b + a$ от логического равенства $A + B = B + A$. Выражения $A \equiv л$, $B \equiv и$ также являются простейшими логическими равенствами, в которых на месте знака $\equiv$ ранее записывался обычный знак равенства =.

Подставим в логическое равенство $\overline{A} + B \equiv A \cdot B$ значения $A \equiv л$, $B \equiv и$. Тогда получим, что истина $и$ равна лжи $л$ ($и \equiv л$), что неверно.

Определение. Логическое равенство, справедливое при любых значениях входящих в него букв, называется логическим тождеством.

Левая и правая часть логического равенства $A \equiv B$ образована формулами $A = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемыми равносильными.

Очевидно, $A + B \equiv B + A$, т. е.

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

есть логическое тождество. Например, такое тождество имеем при

$A = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2$ и $B = f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1$.

Справедливы алгебраические тождества $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$, в записи которых имеются числа 0, 1. В свою очередь, справедливы логические тождества $A + и \equiv и$, $A + л \equiv A$, $A \cdot и \equiv A$, $A \cdot л \equiv л$, в записи которых есть символы $и$, $л$. Эти символы являются значениями логических выражений. Приведем список логических тождеств, важных для упрощения логических выражений и доказательства логических тождеств.

Основные тождества:

$A \cdot \overline{A} \equiv л$, $A + \overline{A} \equiv и$, $\overline{\overline{A}} \equiv \overline{A}$ (где $\overline{\overline{A}}$ – отрицание $\overline{A}$).

Свойства символов $и$, $л$:

$и \equiv л$, $л \equiv и$, $A + и \equiv и$,

$A + л \equiv A$, $A \cdot и \equiv A$, $A \cdot л \equiv л$.

Законы идемпотентности:

$A \cdot A \equiv A$; $A + A \equiv A$.

Переместительные законы:

$A + B \equiv B + A$, $A \cdot B \equiv B \cdot A$.

Сочетательные законы:

$(A + B) + C \equiv A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C)$.

Распределительный закон: $(A + B) \cdot C \equiv A \cdot C + B \cdot C$,

Законы поглощения:

$A + A \cdot B \equiv A$, $A + (A \cdot B) \equiv A$.

Закон замены логического следования:

$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \equiv \overline{A} + B$.

Для доказательства логического тождества достаточно подставить в него все возможные наборы значений входящих в него букв и воспользоваться таблицами истинности. Но для доказательства следует прежде всего применить перечисленные выше логические тождества.

Пример. Доказать тождество $(A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv A + B$.

Доказательство. Обозначим левую часть тождества через Т: $\mathrm{T} \equiv (A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B)$. Согласно переместительному закону, $\mathrm{T} \equiv \overline{A} \times$ $\times (A \cdot B) + (A + B)$. На основании сочетательного закона $\mathrm{T} \equiv (\overline{A} \cdot A) \cdot B +$ $+ (A + B)$. По переместительному закону $\overline{A} \cdot A \equiv A \cdot \overline{A}$, поэтому $\mathrm{T} \equiv (A \cdot \overline{A}) \cdot B + (A + B)$. Из основного тождества $A \cdot \overline{A} \equiv л$ следует, что $\mathrm{T} \equiv л \cdot B + (A + B)$. Из свойства символов $A \cdot л \equiv л$ вытекает, что $\mathrm{T} \equiv л + (\mathrm{A} + \mathrm{B})$. Согласно переместительному закону, $\mathrm{T} \equiv (A + B) + л$. Тогда из свойства символов $A + л \equiv \mathrm{A}$ получаем, что $\mathrm{T} \equiv A + B$.

Обычно такие преобразования записывают в сокращенном виде без ссылок на используемые законы:

$(A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv \overline{A} \cdot (A \cdot B) + (A + B) \equiv (\overline{A} \cdot A) \cdot B + (A + B)$;

$л \cdot B + (A + B) \equiv л + (A + B) \equiv (A + B) + л \equiv A + B$.

Далее при необходимости можно продолжить изучение понятия равносильных формул на основе учебного пособия [93].

В связи с использованием этого понятия можно предложить следующий прием, упрощающий вычисление значений логических выражений. Для этого заменяем символы *и*, Л снова на символы 0,1 и сообщаем, что для них справедливы все правила умножения чисел из курса математики начальной школы. Например, $0 \cdot 1 = 0$, $0 + 1 = 1$ и т. д. Но есть только одно изменение, а именно, вместо $1 + 1 = 2$ сейчас договоримся, что $1 + 1 = 1$. Кроме того, имеется операция отрицания, не изучаемая в начальной школе и выполняемая так: $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$. Тогда, например, Т $\equiv (A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B)$ при А = 0, $B = 1$ легко вычисляется так:

$$\text{Т} \equiv (A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv (0 \cdot 1) \cdot \overline{0} + (0 + 1) = (0 \cdot 1) \cdot 1 + (0 + 1) = 0 \cdot 1 + 1 = 1.$$

Здесь знак логического умножения заменен на знак умножения, используемый в школе, что является корректным и облегчает восприятие. После этого надо сообщить, что благодаря тождеству $A + 1 = 1$ легко было сосчитать ответ, даже не воспользовавшись ранее доказанным тождеством $(A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv A + B$.

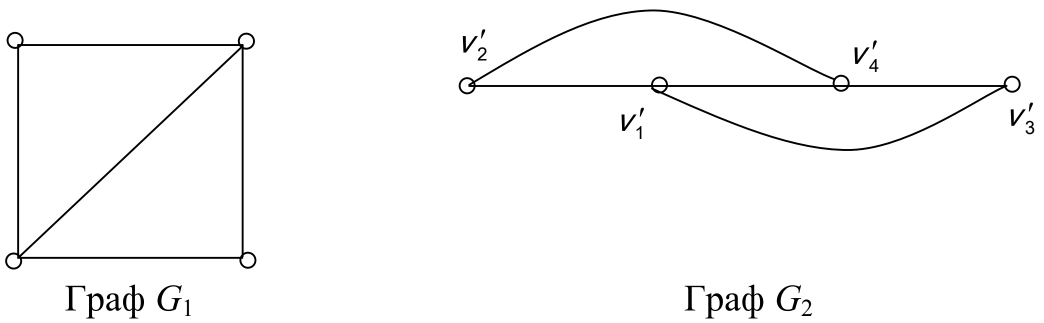
3.2.3.2. Редукция понятия изоморфных графов

Необходимость редукции понятия изоморфных графов возникает при обучении многим техническим наукам, где так или иначе используются основные виды графов, например при трассировке печатных плат в радиотехнике, при проектировании различных управляющих автоматов в электротехнике, систем энергоснабжения в электроэнергетике и т. д.

Приведем типичный пример изложения этого важного понятия в учебной литературе.

Пусть имеются графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_1' = \left(V_1', E_1'\right)$, для которых $\left|V_1\right| = \left|V_1'\right|$. Графы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует биекция φ (взаимно однозначное отображение φ) множества вершин V_1 на множество вершин V_1' такая, что для любого ребра $(v_1, v_2) \in E_1$ справедливо $(\varphi v_1, \varphi v_2) \in E_1'$.

Пример. Даны графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_1' = \left(V_1', E_1'\right)$, изображенные на рис. 3.11. Графы G_1 и G_2 изоморфны, поскольку для любого ребра $(v_1, v_2) \in E_1$ справедливо $(\varphi v_i, \varphi v_j) \in E_1'$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 4)$ при биекции $\varphi v_1 = v_1'$, $\varphi v_2 = v_2'$, $\varphi v_3 = v_3'$, $\varphi v_4 = v_4'$.



Граф G_1 Граф G_2

Рис. 3.11

Такой достаточно формальный подход в изложении этого понятия, как правило, вызывает трудности в его восприятии студентами. Поэтому предложим следующую методическую редукцию этого понятия.

Населенные пункты a, b, c, d (рис. 3.12) необходимо соединить дорогами так, чтобы существовал единственный маршрут, связывающий любые два пункта. Для этого рассмотрим графы, вершины которых обозначают населенные пункты, ребра – дороги, их соединяющие. С помощью этих графов на рис. 3.13–3.24 изображены все возможные варианты прокладки дорог.

Выбор того или иного варианта зависит от разных обстоятельств, например, от стоимости каждой дороги, соединяющей пункты.

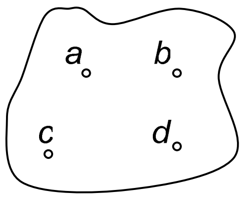


Рис. 3.12

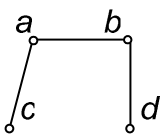


Рис. 3.13

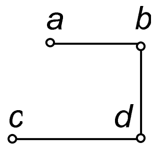


Рис. 3.14

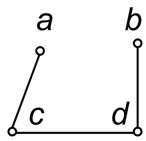


Рис. 3.15

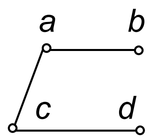


Рис. 3.16

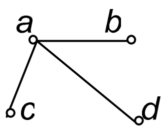


Рис. 3.17

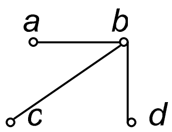


Рис. 3.18

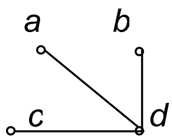


Рис. 3.19

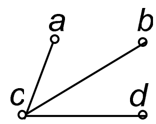


Рис. 3.20

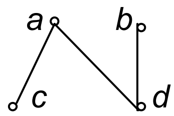


Рис. 3.21

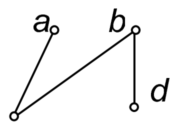


Рис. 3.22

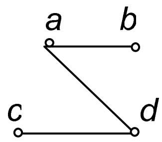


Рис. 3.23

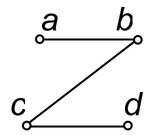
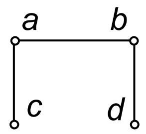


Рис. 3.24

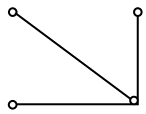
Представим сейчас, что буквы a, b, c, d обозначают сигнальные устройства системы электроснабжения. Требуется указать схему, в которой радиосигнал, поступивший на одно из устройств, мог бы передаться единственным способом на все другие устройства.

Очевидно, при передаче радиосигнала расположение устройств и расстояние между устройствами безразлично. Поэтому можно не учитывать обозначение устройств на схеме. Тогда можно указать только две схемы, принципиально отличающиеся друг от друга: схема последовательной передачи сигнала (рис. 3.25) и схема передачи сигнала через одно и то же устройство, обозначенное x (рис. 3.26).



Граф A

Рис. 3.25



Граф B

Рис. 3.26

Ясно, что графы отличаются друг от друга как числом вершин, так и числом ребер. Но кроме того, они могут отличаться расположением ребер, как, например, графы на рис. 3.13–3.14. Однако среди всех этих графов имеются одинаковые, или равные, графы, так же как и имеются, например, одинаковые, или равные, треугольники. Какие же графы считаются равными?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим произвольный неориентированный граф с n вершинами. Занумеруем его вершины числами от 1 до n (см., например, граф A на рис. 3.25, для которого $n = 4$). Ребро графа, соединяющее вершины i, j, обозначим (i, j) в случае $i < j$. Если же $i > j$, то обозначим ребро (j, i). Например, у графа A ребро, соединяющее вершины 2 и 3, обозначим (2, 3), а не (3, 2), поскольку $2 < 3$. Тогда каждому ребру (i, j) графа соответствует точка (i, j) на координатной плоскости Oxy. Так, трем ребрам (1, 2), (2, 3), (3, 4) графа A соответствуют три точки (1, 2), (2, 3), (3, 4) (рис. 3.27). Таким образом, с помощью этих точек можно записать всю информацию о ребрах: число ребер и то, какие вершины соединяет каждое ребро.

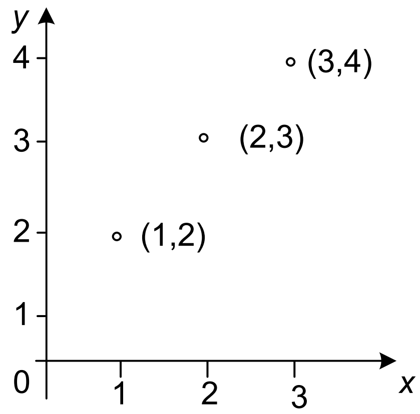


Рис. 3.27

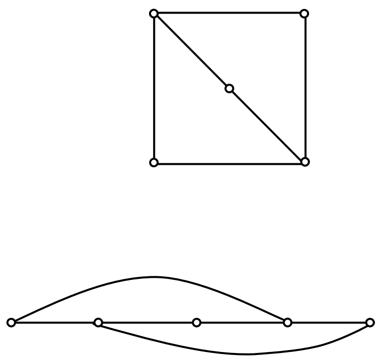


Рис. 3.28

Рассмотрим графы Γ_1 и Γ_2 с одинаковым числом вершин и ребер, изображенные на рис. 3.28. Можно ли занумеровать вершины каждого графа так, чтобы ребрам графа Γ_1 и графа Γ_2 соответствовало одно множество точек на координатной плоскости Oxy?

Ответ на этот вопрос утвердительный. На рис. 3.30 показано, как занумеровать вершины каждого графа, а на рис. 3.29 изображены точки, соответствующие ребрам каждого из графов.

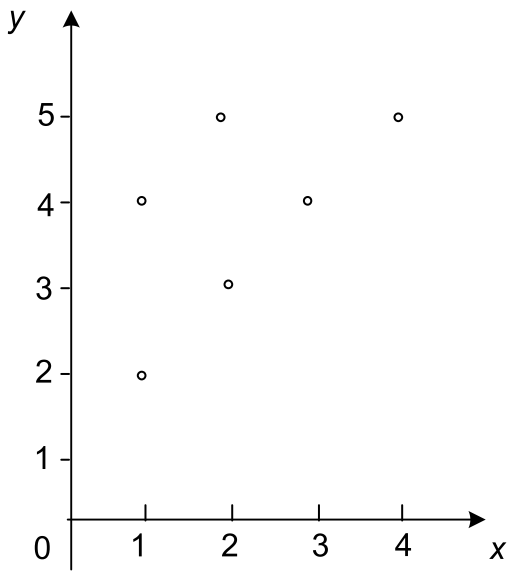


Рис. 3.29

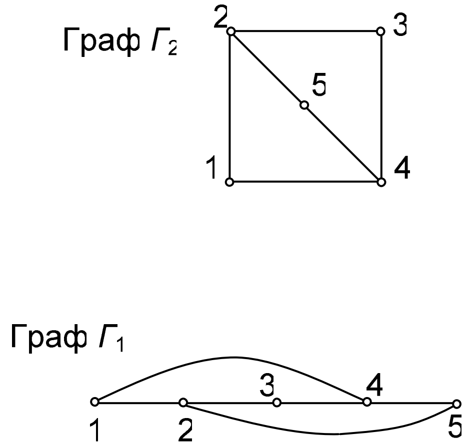


Рис. 3.30

Определение. Графы Γ и G с одинаковым числом элементов называются равными, если вершины каждого графа можно занумеровать так, чтобы ребрам Γ и ребрам G соответствовало одно и то же множество точек на координатной плоскости.

Неравные графы еще называются различными графами.

Согласно определению, изображенные на рис. 3.30 графы Γ_1 и Γ_2 являются равными. Легко проверить, что графы A, B на рис. 3.25 и 3.26 не являются равными. Все графы, изображенные на рис. 3.13–3.24, делятся на графы, равные графу A, и графы, равные графу B.

3.2.4. Методические особенности обучения дискретной математике в магистратуре

В общенаучном цикле ФГОС магистратуры [249] указаны дисциплины «История и методология науки», «Методология научного творчества» и «Математическое моделирование в профессиональном образовании».

В изучении этих дисциплин необходимо отразить процесс математизации наук, т. е. процесс проникновения идей и методов математики практически во все области научного знания. Процесс математизации наук наиболее ярко воплотился в современной модельной методологии, сутью которой является постановка возникающих задач, их перевод на адекватный научный язык, рациональная разработка моделей исследуемых объектов или явлений (в частности, корректная формализация описания их свойств и характеристик) и, наконец, разработка эффективных алгоритмов и компьютерных программ для решения задач на основе найденных моделей. В свою очередь, математическое моделирование на основе дискретных и непрерывных моделей, а также использование в нем СКМ и КТ имеют фундаментальное значение в современной модельной методологии, а, стало быть, в изучении указанных дисциплин и тем более в изучении дисциплины «Математическое моделирование в профессиональном образовании» из общенаучного цикла дисциплин (важной во заимосвязи общенаучной и профессиональной подготовки магистров).

Наличие указанных дисциплин в Федеральном государственном стандарте подготовки магистров свидетельствует о важности сформулированных главных целей обучения ДМ и о фундаментальной роли ДМ в формировании ряда общекультурных и профессиональных компетенций магистров. Серди них, например, способность и готовность «проводить научные эксперименты и оценивать результаты исследований (ОК-15)», способность и готовность «использовать углубленные специализированные знания, практические навыки и умения для проведения научно-отраслевых и профессионально-педагогических исследований (ПК-30)», умение «анализировать современные отраслевые (производственные) технологии для обеспечения опережающего характера подготовки рабочих (специалистов) (ПК-31)» [249, с. 9–13].

В вариативной подготовке магистра определяющую роль играет фундаментализация обучения, в том числе и математике. Напомним, что фундаментализация образования – это направленность образования на создание цельного, обобщающего знания, которое являлось бы ядром (основой) всех полученных студентом знаний, объединяющим эти знания в единую мировоззренческую систему.

Анализ предмета и функций дискретной математики показывает, что создание цельного, обобщающего знания у магистров предполагает изучение языка доминирующих в ДМ алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем (как средств, методов математического познания). Напомним, что язык этих структур и схем играет фундаментальную роль в качественном анализе сложных проблем математического моделирования, в систематизации того, что известно по интересующей проблеме, в ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа как «вручную», так и с использованием современных средств компьютерной техники. Изучение языка доминирующих в ДМ структур и схем должно быть нацелено на реализацию тезиса о единстве в обучении математике и раскрытии внутренней логики математики, что, в свою очередь, будет способствовать внутриматематической интеграции обучения магистров.

Как обосновано в работе [159], необходимо вводить непрерывное обучение дискретной математике в системе «школа – колледж – вуз». Естественно, главную роль в организации такого обучения сыграют будущие педагоги профессионального обучения, особенно магистры. Поэтому для обеспечения преемственности вариативного обучения ДМ важно отразить специфику содержания обучения ДМ в той области (отрасли) высшего профессионального образования, которую выберут будущие выпускники колледжа (техникума). При этом прежде всего следует ориентироваться на то, что в последние два десятилетия сформировались направления обучения ДМ, охарактеризованные ранее в подп. 2.6.2.

Для отбора содержания вариативного обучения ДМ магистров необходим анализ содержания обучения дискретной математике на специальностях соответствующего направления подготовки. Кроме того, важным ориентиром является то, что изучение основных понятий и методов ДМ предусмотрено в целом ряде стандартов среднего профессионального образования (автомобилестроение и тракторостроение, метрология, автоматические системы управления и др.).

Далее, при отборе содержания вариативного обучения ДМ магистров необходимо выбрать базовые понятия языка структур и схем, которые должны стать своеобразными маяками обучения дискретной математике. Обязательное включение в содержание обучения ДМ тех или иных математических структур обеспечивает своеобразный «стандарт» вариативного обучения, свидетельствующий о фундаментальном, опережающем практику обучении математике, позволяющем реально научить выделять комплекс основных связей исследуемого технологического объекта или явления.

В реализации дискретной линии в вариативном обучении магистров должны присутствовать интегрированные программы и курсы, в содержании которых необходимо реализовать межпредметные связи ДМ с курсами математического моделирования, вычислительной математики, отражающими специфику выбранной отрасли подготовки. Такие методически ориентированные программы и курсы необходимы для совершенствования содержания методической подготовки магистров, которое в противном случае может остаться «методическим комментарием» к соответствующим специальным курсам подготовки специалистов в других областях (естественнонаучных, инженерных и др.).

При разработке содержания этих программ и курсов следует учесть существующие модели профильного обучения в колледжах (техникумах) и вузах, где планируют работать магистры, посещающие спецкурс или семинар. В то же время в них должна быть учтена сложившаяся в колледже (техникуме) и вузе система обучения – это необходимо для органичного вхождения данных программ и курсов в учебный процесс. Они должны способствовать фундаментальному, опережающему практику обучению.

Для органичного вхождения интегрированных программ и курсов в учебный процесс важно предусмотреть решение функциональных задач, возникающих в ходе обучения по этим программам и курсам. Для этого необходимо создание гибкого программно-методического сопровождения (и даже комплекса), позволяющего использовать технологию интегрированного представления информации и знаний с использованием систем гипермедиа, мультимедиа, электронных книг и др. Такое сопровождение обучения позволит интегрировать все ранее известные педагогические программные средства, способствуя тем самым использованию средств информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) в реализации дискретной линии в вариативном обучении магистров.

Представляется, что одним из наиболее продуктивных методов в реализации такого обучения по интегрированным программам и курсам, отражающим межпредметные связи ДМ, является метод учебных проектов, основанный на исследовательской деятельности студентов по решению задач из выбранной области математического моделирования и вычислительной математики, позволяющий расширить возможности преподавателей в формировании научно-исследовательского потенциала магистров. В результате будут созданы условия для реализации индивидуальных образовательных маршрутов обучаемых.

Отметим, что для обучения ДМ магистров профессионального обучения в технических отраслях производства пригодны учебные пособия автора [151–155], учебные пособия [4, 45, 104, 224] и сборник задач автора [175].

3.2.5. Специализированные курсы для магистров

Важную роль в вариативном обучении ДМ магистров играют специализированные курсы, выполняющие интегративную роль. Прежде всего они обеспечивают систематизацию изученного, благодаря которой отдельные знания, полученные ранее при изучении других дисциплин и представляющие частные случаи решения какой-то общепрофессиональной проблемы, сливаются в единое целое и создают основу для ее решения.

3.2.5.1. Программа спецкурса «Математическое моделирование в профессиональном образовании»

Нами разработана программа спецкурса «Математическое моделирование в профессиональном образовании» [157], ориентированная на подготовку инженеров-педагогов на уровне магистратуры и предназначенная для формирования следующих компетенций в соответствии с ФГОС:

- самостоятельно осваивать новые методы исследования, изменять научный и научно-педагогический профиль своей профессиональной деятельности (ОК-2);
- самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в профессионально-практической деятельности знания из новых областей науки (ОК-9);
- проводить научные эксперименты и оценивать результаты исследований (ОК-15);
- анализировать, синтезировать и обобщать информацию (ОК-16);
- использовать углубленные специализированные знания, практические навыки и умения для проведения научно-отраслевых и профессионально-педагогических исследований (ПК-30).

Для работы по этой программе рекомендуем первую главу нашей монографии [159] и монографию В. А. Тестова [229], а также монографии [127, 133, 189, 197, 198], содержание которых легло в основу этой программы.

Приведем примерное содержание этой программы.

Раздел 1. Методологические и теоретические основы математического моделирования

Процесс математизации наук. Математизация как форма интеграции научного знания. Этапы математизации. Математика как феномен современной «всечеловеческой» культуры исследований.

Современная модельная методология. Социокультурные детерминанты модельной методологии, выполняющие функцию корректировки развития и совершенствования моделирования в соответствии с общественной культурой и потребностями социума. Внутренние детерминанты модельной методологии, отражающие логику развития математики и кибернетики (информатики). Единство социокультурных и математико-кибернетических аспектов моделирования.

Этапы моделирования (решения задач) с использованием компьютера.

Историко-философские аспекты математического моделирования. Значение математического моделирования в модельной методологии и в методологии специальной (конкретной) науки.

Математическое моделирование как системообразующий фактор современного профессионального образования. Роль математического моделирования в решении проблем профессионального образования.

Системность знаний, умений и навыков как результат реализации интегративной функции математического моделирования в процессе обучения. Специфика математического моделирования в зависимости от области и предмета исследования.

Основные принципы математического моделирования: онтологический принцип единства качественной и количественной характеристик объекта, процесса или явления; гносеологический принцип «познание определенного качества предполагает исследование соответствующего ему количества»; принцип инверсии, который заменяет познание качества познанием соответствующего ему количества.

Об использовании методов математического моделирования в дополнительном профессиональном образовании. О методической системе обучения математическому моделированию (внешняя среда обучения, разработка целей, содержания, методов, форм и средств обучения).

Раздел 2. Теоретические основы математического моделирования

Различные подходы в определении понятия математической модели. Математическая модель задачи. Информационная математическая модель. Математическая модель – аналог оригинала. Математическая модель как абстрактный образец решения задачи.

Полная цепочка использования компьютера в решении задач математического моделирования: реальная ситуация, математическая модель, алгоритм, программа, симуляция решения, анализ результатов.

Математическая модель (структура) как множество с заданными на нем математическими операциями и отношениями. Математическая модель как представитель класса математических моделей.

Способы задания математических моделей. Интерпретация модели. Примеры математических моделей и их интерпретаций.

Понятие дискретной модели. О дискретной и классической («непрерывной») математике и их фундаментальной роли в математическом моделировании. О принципе единства в обучении непрерывной и дискретной математике.

Вычислительный процесс как завершающий этап математического моделирования. Вычислительный эксперимент, его значение и перспективы. Стирание противоположности между дедуктивным и индуктивным методами познания.

Виды математических задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и с конечным числом действий исполнителя алгоритма.

Проблема алгоритмической разрешимости. Понятие экспоненциального полиномиального алгоритма вычислений. Эффективные алгоритмы и их примеры.

Характерные особенности динамического, дискретного, стохастического (статистического), имитационного, компьютерного моделирования.

Виды стохастического моделирования в педагогике.

О классификации видов математического моделирования.

Прямая и обратная задачи математического моделирования.

Проблема оптимальной математической формализации наблюдаемого объекта, процесса или явления.

Изменение характера и роли математических моделей в процессе развития математики

Примеры решения задач динамического, дискретного и стохастического моделирования.

3.2.5.2. Программа спецкурса для подготовки высококвалифицированных рабочих

В вариативной подготовке магистров профессионального обучения необходимо предусмотреть спецкурсы для подготовки рабочих в высокотехнологичных отраслях, какими, например, являются отрасли «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений» и «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов». В качестве такого спецкурса нами разработана программа по ДМ для магистров. Приведем ее содержание.

Раздел 1. Булевы функции. Анализ и синтез электросхем

Понятие высказывания. Операции с высказываниями и таблицы истинности. Алгебра высказываний. Логические тождества. Вычисление значений формул алгебры высказываний. Тождественные преобразования формул алгебры высказываний.

Определение булевых функций одной и двух переменных. Описание булевых функций двух переменных.

Булева алгебра и алгебра Жегалкина.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма булевой функции. Упрощение СДНФ на основе логических тождеств. Реализация булевой функции на логических элементах «конъюнктор», «дизъюнктор», «инвертор» и «двоичный сумматор». Суперпозиция булевых функций. Полнота множества булевых функций.

Анализ и синтез электросхем, сконструированных из перечисленных логических элементов.

Раздел 2. Элементы теории графов

Задачи, приводящие к понятию графа. Определение графа и его элементов. Маршрут, цепь, цикл.

Виды графов: неориентированные, ориентированные, простые, эйлеровы, гамильтоновы, двудольные деревья, бинарные деревья, леса.

Изоморфизм графов. Описание *n*-элементных графов для малых *n*. Автоморфизм (симметрия) графа.

Машинное представление графа. Матрица смежности и инцидентности. Переход от матричного представления к машинному и обратный переход.

Разрезы графа. Связные графы. Компоненты графа. Разрезающее множество и разрез графа. Матрица разрезов в графе. Циклы и контуры в графе. Цикломатическая матрица. Дерево графа. Остов и коостов графа.

Пространство разрезов и пространство циклов графа, их ортогональность. Базисная система циклов и базисная система разрезов графа по заданному остову. Матрицы базисных циклов и разрезов, их ортогональность. Фундаментальные матрицы циклов и разрезов.

Граф электросхемы. Законы Кирхгофа. Анализ электросхемы с помощью ее графа. Теорема о токах и напряжениях в цепях с одинаковыми графами.

Укладка графа на поверхности. Планарность и толщина графа. Графы Куратовского. Формула Эйлера для связных и несвязных графов. Необходимые и достаточные условия планарности графа. Трассировка электросхем.

Раздел 3. Бинарные отношения

Декартово произведение множеств. Бинарное соответствие между множествами. Примеры. Декартов квадрат множества. Бинарные отношения на множестве и их основные свойства. Граф бинарного отношения. Отношения эквивалентности и частичного порядка.

Изоморфные частично упорядоченные множества (ч. у. множества). Описание n-элементных ч. у. множеств для $n \leqslant 4$.

Раздел 4. Конечные автоматы и их приложения в электротехнике

Определения конечных автоматов. Понятие алгоритма работы автомата. Примеры автоматов в электротехнике. Виды автоматов: информационные, управляющие и вычислительные. Конечные автоматы.

Базовое множество конечного автомата. Бесконечные, синхронные, асинхронные, детерминированные, вероятностные автоматы. Примеры автоматов перечисленных видов в электротехнике и системах энергоснабжения.

Математическая модель цифрового автомата. Автоматы Мили и Мура. Способы задания конечных автоматов. Три основные задачи теории автоматов. Композиция автоматов.

Раздел 5. Математические модели технологии сборки

Понятие дискретного технологического процесса. Примеры из электротехники и энергоснабжения.

Представление сборочных изделий упорядоченными множествами.

Мультиграфы и их применение в технологии сборки электроприборов, электрооборудования и обеспечении электроснабжения.

Нормальные алгоритмы и их применение в технологических процессах микроэлектроники.

Раздел 6. Компьютерные технологии в электротехнике

Компьютерный расчет параметров электрических и магнитных цепей.

Компьютерное моделирование графических изображений технологического оборудования и технологических схем. Компьютерная диагностика неисправностей.

Математический аппарат компьютерного моделирования технологии эксплуатации и диагностики электрооборудования и систем электроснабжения.

Основой для составления этой программы послужили учебники и учебные пособия [4, 10, 13, 46, 95, 98, 224, 232, 239, 254], которые можно использовать для работы по ней.

Глава 4

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИХ СВОЙСТВ

4.1. Анализ элементов дискретной математики в учебной литературе для школьников

Важное значение в курсе методики обучения дискретной математике для будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов имеют элементы ДМ, наиболее полно представленные в широко известных книгах для внеклассной работы [7, 11, 27, 30, 33, 50, 57, 72, 101, 187, 211, 215, 223, 241, 253, 262]. Перечисление содержащихся в них элементов ДМ и основные особенности изложения целесообразно упорядочить в соответствии с пп. 1–5, 7–10 из перечня основ ДМ из подп. 2.6.2.2.

Основные понятия теории множеств: объединение, пересечение, дополнение – изложены в книгах [27, 223], *прямое произведение* – в книге [30]. В книге для учащихся старших классов [27] рассмотрение понятия множества начинается с исторического экскурса с интересными примерами из греческой истории и мофологии. При изложении в процессе беседы с читателем способов задания множества и возникающих при этом трудностях и парадоксах, понятий подмножества, пустого множества, пересечения, объединения и разбиения множеств автор погружает учащихся в привычный мир окружающих их вещей, умело использует уже имеющиеся у них представления о самых разных областях знания и предстает при этом великолепным рассказчиком, владеющим классическим русским языком. При изложении понятия счетного множества автор мастерски использует сюжеты из рассказов известного польского фантаста Станислава Лема.

В учебном пособии [223] изложение проиллюстрировано большим числом примеров из школьной программы. Приводятся примеры на составление системы алгебраических неравенств и уравнений по заданному множеству решений. Излагается понятие выпуклого множества, на основе которого учащиеся знакомятся с линейным программированием.

В книге [30] при изложении основных теоретико-множественных понятий интересно использован задачный подход с использованием межпредметных связей и сюжетов из окружающей жизни. Наиболее впечатляет умелый подбор таких задач при изучении понятия прямого произведения.

Начальные понятия языка теории множеств и соответствующие задачи, удачно изложенные в учебнике [59] и задачнике [60] для 10-х классов, должны послужить ориентиром для изучения элементов теории множеств на базе действующей школьной программы.

Понятия отображения, обратного отображения, композиции отображений, бинарного отношения и их основные виды. В большинстве изданий изложение понятий отображения, обратного отображения, композиции отображений начинается с объяснения понятия бинарного отношения на разнообразных примерах соответствий между множествами [50, 72, 187, 242]. При этом происходит тонкое приспособление знания к задаче, что обеспечивает преемственность в обучении. На примерах функций из школьной программы разъясняется, что функция является важным частным случаем бинарного соответствия, которое есть отображение области определения функции на множество ее значений. В результате использования понятия функции обеспечивается преемственность и в изучении понятий обратного отображения и композиции отображений.

Наиболее полно понятия отображения, обратного отображения, композиции отображений изложены в книге [242]. Изложение отображений и их видов начинается с понятий симметрии и параллельного переноса как перемещений плоскости с учетом типичных геометрических знаний школьников. Изучение этих понятий происходит на основе решения самых разнообразных геометрических задач и выполнения практических заданий, которые возможно рассматривать в 7–9 классах. Все это удачно подкрепляется классификацией симметрий фигур и рассмотрением орнаментов и решеток. В процессе изложения уместно возникает и используется также понятие поворота. Все это подготавливает изучение композиции геометрических преобразований, обратного преобразования и групп геометрических преобразований (фигур), осуществляемое далее.

Понятие бинарного отношения и его основные виды наиболее исчерпывающе излагается в книгах [72, 187], где приводятся примеры разнообразных соответствий между различными множествами (между многочленом и сответствующими ему корнями, между существительным и прилагательным, согласованным с ним в роде, и т. д.).

В наибольшей степени соответствует восприятию школьников изложение в книге [72]. В начале очень удачно вводится понятие модели: «построение математической модели какого-либо явления начинается с того, что выделяют связанные с ним множества элементов и указывают соответствия между элементами этих множеств. Например, при построении математической модели производства надо выделить множества станков, инструментов, изготовляемых деталей, технологических операций и т. д. После этого вводят такие соответствия, как “операция x выполняется на станке y”, “заготовку x подвергают операции y”» [72, с. 140].

Далее для различных соответствий составляются все пары (x, y) соответствующих друг другу элементов множеств X и Y, между которыми установлено соответствие. При этом рассматриваются подходящие примеры соответствия между множествами слов, в результе чего обеспечивается пропедевтика определения бинарного отношения на основе понятия прямого произведения конечных множеств с небольшим числом элементов. Вводится синноним понятия бинарного отношения – понятие «график бинарного отношения». Приводятся примеры графиков дежурств в классе и др. и примеры графиков функций с конечным набором значений аргументов.

Для наглядного изображения соответствий между конечными множествами привлекаются ориентированные графы. При этом элементы конечных множеств X и Y изображаются точками, содержащимися в фигурах, ограничивемых замкнутыми линиями, а соответствие между элементами указывается ориентированным ребром графа.

Книга [187] интересна тем, что материал подается в форме литературного рассказа (перемежаемого диалогом с читателем), и тем, что в нем впервые популярно излагаются основные свойства и виды бинарных отношений, понятие частичного порядка и частично упорядоченного множества, производится ранняя пропедевтика понятия изоморфизма моделей с одним бинарным отношением (в сигнатуре).

Сначала излагаются понятия (взаимно-однозначного) отображения и изоморфных множеств (т. е. множеств, между которыми установлено взаимно однозначное отображение). Сообщается, что такие множества имеют одну и ту же мощность («численность» элементов).

Затем, как и в книге [72], приводятся различные соответствия между множествами, и на этой основе без использования понятия прямого произведения осуществляется знакомство с бинарными и тернарными отношениями. Демонстрируется ряд очень интересных примеров отношений (родственных, на множестве групп крови). На примерах объясняется понятие рефлексивного, симметричного, транзитивного бинарного отношения. Особенно ярко в доступной для учащихся 7–9-х классов форме излагается понятие частичного порядка.

Понятия алгебраической операции, алгебры и их основные виды приводятся в книгах [57, 253]. Достаточно удачное изложение в этих книгах все же носит несколько формализованный характер и не иллюстрируется в необходимой мере занимательными и практическими примерами и задачами, в том числе и из школьной программы (так, как это сделано по другой тематике, например, в работах [50, 253]). В работе [253] более детально, чем в работе [57], излагаются некоторые элементы теории групп. В книге [253] имеются первоначальные сведения о кольцах, модулях, телах, структурах и булевых алгебрах.

Адаптированное к школьной программе изложение понятия группы, кольца вычетов (по модулю 4) и пятиэлементного поля содержится в учебном пособии [150]. В пропедевтике изучения кольца вычетов важно учесть также изложение понятия сравнения, помещенное в работе [59]. Доступное изложение понятий кольца и поля и их применения в решении диофантовых уравнений и нахождении рациональных корней многочленов содержится в методической разработке [14]. О кольцах вычетов и криптографии можно прочесть в энциклопедии [240].

Группы геометрических преобразований на базе школьной программы наиболее полно и посильно для восприятия школьников представлены в книге [242]. В ней также рассматриваются различные свойства конечной группы преобразований, и в результате дается описание этой группы. Отметим также, что интересные методические особенности изложения понятия группы (и свойств порядка группы), группы преобразований, перестановок имеются в книгах [2, 78, 143, 144].

Популярное и в то же время строгое изложение важнейшей с точки зрения целей и содержания обучения ДМ элементов темы «Тождества в алгебрах» имеется в энциклопедии [262]. Оно на доступном для восприятия школьников уровне раскрывает понятие алгебраического тождества и основные виды алгебраических тождеств.

Отметим также, что первоначальное изучение элементов теории частично упорядоченных множеств и решеток можно осуществить на основе книги [11].

Основные понятия алгебры высказываний, а также начальные понятия логики предикатов впервые систематично изложены в пособии для учащихся [242]. Изложение начато с анализа большого числа различных высказываний, в процессе которого выявлены логические связки, объединяющие простые высказывания в сложные. В результате этого весьма естественно возникли логические операции и таблицы истинности оценки высказываний. Алгебра логики применяется в анализе и синтезе электрических схем. Изучение логики предикатов (логики высказывательных форм) начинается с изучения одноместного предиката. При этом на основе тонкого использования сказуемого как части речи выявляется содержательная суть понятий одноместного предиката и квантора. Далее вводится понятие многоместного предиката, излагаются операции над высказывательными формами. В заключение даются примеры анализа строения теорем. В повествование включаются разнообразные примеры и задачи из школьной программы, что обеспечивает преемственность в обучении.

Пособие [115] успешно дополняет пособие [242]. В первом из них систематизированы законы логики, приводятся примеры доказательств законов на основе диаграмм Эйлера-Венна и решения логических задач. Некоторые начальные понятия языка алгебры высказываний и логики предикатов задачи, удачно изложенные в учебнике [59] и задачнике [60], должны служить ориентиром для изучения элементов логики на базе действующей школьной программы. Систематическое и адаптированное к школьной программе изложение алгебры высказываний для 8–9-х классов можно отметить в пособии [150].

Среди других изданий, содержащих элементы логики, отметим пособие для учителей [222], а также книги [7, 58, 187, 220]. Примеры на использование кванторов в решении задач из школьной программы имеются в книге [178].

Аналитическое представление булевых функций (совершенные нормальные формы) частично излагается в книгах [115, 148]. В последней, в частности, последовательно даются определения и приводятся примеры булевых функции одной, двух и трех переменных, примеры представления булевых функций и формул алгебры высказываний в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы. В первом из упоминаемых выше изданий приводится описание булевых функций одной и двух переменных, излагаются простейшие преобразователи информации, приводится алгоритм представления булевой функции двух переменных в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы.

Основные определения, относящиеся к графам. Как следует из анализа содержания книги [146], раннюю пропедевтику изучения понятия графа можно осуществлять с шестилетнего возраста. Для этого в книге умело используются различные цветные рисунки, обеспечивающие постепенный переход от изображения совокупности предметов и связей между ними к изображению этих предметов и связей вершинами и ребрами графа.

В книге [50], на наш взгляд, впервые наиболее удачно были продемонстрированы преимущества задачного подхода в изложении начальных понятий теории графов для учащихся 6–8-х классов (задача с сюжетной основой из комедии Н. В. Гоголя «Ревизор» является ярким тому примером).

Задачный подход, исходящий из законов дифференциации и интеграции когнитивных структур и основанный на использовании различных видов задач с сюжетным текстом, был позднее реализован в книгах [30, 33, 91]. Оказалось, что возможно в форме, доступной для учащихся 7–9-х классов, изложить понятия полного, связного, эйлерова графов и некоторые их свойства, а для учащихся старших классов – понятия изоморфных графов, деревьев, ориентированных графов, а также некоторые утверждения, раскрывающие их свойства.

В книге для учителей [90] систематизированно излагаются основы теории графов. Достоинством данного издания является геометрический подход в изложении многих понятий и фактов. В частности, приводятся интересные геометрические реализации графов, графы многоугольников и многое другое, что дает возможность наглядно представить изучаемое.

Далее излагаются абстрактное определение графа и изоморфизм графов, понятия связного, эйлерова, гамильтонова, планарного, древовидного, ориентированного, раскрашиваемого графов, графы бинарных отношений и другие виды графов и их свойства; определяются компоненты связности, множества сочленений, разделяющие множества и разрезы, покрывающее дерево связного графа, признаки планарности, эйлеровости и другие важные теоремы теории графов. На языке теории графов решается большой круг самых разнообразных математических и прикладных задач, в том числе интересные практические задачи на правильные и полуправильные замощения плоскости (т. е., образно говоря, задачи на покрытие плоскости многоугольными «плитками» без взаимных наложений и просветов).

Большое количество занимательных и практических задач на различные виды и свойства графов имеется в книге [150].

Числовые характеристики графов, прикладные задачи на графах. Их можно изучать на основе книг [90, 239]. В частности, в них имеется изложение на посильном для восприятия школьников уровне задач о коммивояжере, соединении городов, составлении расписаний и др., а также некоторые алгоритмы поиска тех или иных видов графов. Доступное изложение приложений графов в лингвистике имеется в книге [100].

Изложение *начальных элементов теории алгоритмов* осуществлено в книгах [50, 101, 241]. В изданиях [50, 241] имеется описание машины Поста, изучение которой крайне необходимо для полноценного изучения основ теории алгоритмов. В книгах [7, 101] изложены общие свойства алгоритма и приведены многочисленные примеры алгоритмов из школьной математики. Отметим также пособие для учителей [32], на основе которого можно начать изучение понятий исполнителя, эквивалентного и эффективного алгоритмов, машины Тьюринга. Интересно о связи полугрупп и автоматов написано в книге [253].

Изучение проблемы алгоритмической разрешимости можно начать с пособия [101] и продолжить в известной мере на основе книги [126]. Задача о разрешимости уравнений в радикалах популярно изложена в книге [52]. Перечень интересных примеров алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач можно расширить на основе книг [28, 239, 255].

Отметим, что в некоторых пособиях по дискретной математике для изучения систем компьютерной математики и компьютерных технологий в основы ДМ включены также элементы комбинаторики. В связи с этим следует отметить доступное для учащихся изложение элементов комбинаторики в книгах [33, 59, 150, 242]. Некоторые интересные комбинаторные задачи имеются в издании [30].

Итак, анализ элементов дискретной математики в учебной литературе для школьников показывает, что в ней наиболее полно представлены основные понятия теории множеств; отображения и их основные виды; бинарные отношения и их основные виды; алгебраические операции, алгебры и их основные виды; основные понятия алгебры логики; аналитическое представление булевых функций; начальные понятия теории графов; прикладные задачи на графах; начальные элементы теории алгоритмов.

Отличительной особенностью большинства книг, в которых изложены перечисленные элементы ДМ, является задачный подход, т. е. обучение математике через решение специально подобранных (занимательных, практических и др.) задач, являющийся наиболее естественной реализацией системно-деятельностного подхода в обучении.

4.2. Основы методики элективного обучения дискретной математике в школе

Важное значение в реализации методической системы обучения дискретной математике имеет *методика* обучения ДМ в школе, являющаяся методической основой прикладной направленности обучения математике в школе и, в частности, основой методики обучения построению полной цепочки использования компьютера: реальная ситуация, математическая модель, алгоритм, программа, симуляция решения, анализ результатов.

Действительно, *методика* обучения переводу реальной задачи на математический язык, изучения понятий математического языка, математической модели, алгоритма и отбора задач по дискретной математике является *основой* для поиска совокупности *методов обучения*, посильных для восприятия учащихся и обеспечивающих усвоение ими *фундаментальных* идей, методов и фактов математического моделирования с использованием компьютеров, олицетворяющего собой прикладное значение математики.

Как показывает анализ методологических и теоретических основ обучения ДМ, определяющим в методике обучения ДМ является следующее. Математические структуры должны служить теоретической основой отбора содержания обучения. Следует учитывать психологические основы обучения математике, теоретические основы построения математических курсов (в частности, разработки программ); теоретические основы преемственности в обучении между школой и вузом.

Исходя из теоретических основ обучения ДМ и основного содержания обучения дискретной математике, анализ конкретных особенностей методики обучения ДМ в школе целесообразно рассмотреть как анализ методики:

1) отбора основного содержания дискретной математике для элективного обучения в 8–11-х классах;

2) реализации принципа преемственности в обучении;

3) методики изучения понятий математической модели, алгоритма и алгоритмической разрешимости;

4) изучения математического языка;

5) использования дискретного и непрерывного в обучении математике;

6) отбора задач по ДМ.

Аспекты отбора основного содержания дискретной математике для профильного обучения в 8–11-х классах. Исходя из анализа происходящих в последнее десятилетие концептуальных изменений в школьном математическом образовании, можно прогнозировать появление самых разных видов и уровней профильного обучения в школе. Министерством образования и науки РФ рекомендованы примерные учебные планы для тринадцати видов профильного обучения. Примерные учебные планы и содержание примерных программ по математике, информатике и информационным технологиям отражают жизненную необходимость обучения ДМ как математической основе информатики.

При обучении дискретной математике в рамках любого профиля необходимо исходить из теоретических основ обучения ДМ. Однако уже сейчас очевидно, что ввиду методологических оснований обучения дискретной математике при отборе содержания профильного обучения дискретной математике в школе нужно руководствоваться следующими целями обучения математическому моделированию в школе и вузе:

• выработка на основе дискретной математики *общего представления* о математических моделях и видах моделирования с использованием компьютера;

• обучение *специфическому* моделированию с использованием компьютера, присущему только выбранной специальности;

• *методологическое* осмысление явлений изучаемой конкретной науки;

• овладение способами корректного представления переработки, осмысления и использования *информации,* характерными для того или иного профиля.

Аспекты реализации принципа преемственности в обучении. Практика показывает, что студенты подавляющего большинства специальностей испытывают большие трудности в изучении ДМ. Трудности эти вызваны прежде всего тем, что при обучении математике в школе в основном преобладает функциональный подход. Ситуация усугубляется рассогласованием содержания обучения дискретной математике в школах, колледжах (техникумах) и вузах на педагогических специальностях. По этой причине изучение имеющихся учебных пособий по ДМ для вузов вызывает затруднения у большинства студентов. Нет адекватного отражения элементов дискретной математики и в популярной литературе для школьников, которая к тому же практически недоступна для чтения. В результате закономерно возникает разрыв между уровнем подготовки выпускников школы и требованиями, предъявляемыми к студентам на младших курсах вузов в условиях всеобщей компьютеризации обучения.

Как обосновано в подп. 2.3.3, в обучении школьников и студентов математическому моделированию важную роль играет преемственность обучения, без которой невозможно преодолеть указанный разрыв. При этом для осуществления преемственности обучения ДМ необходимо сначала учесть главное в проектировании и реализации процесса обучения, а затем на этой основе выявить главное в динамике изменения взаимосвязей всех основных элементов теории обучения дискретной математике [85, 196].

Главную роль в проектировании и реализации процесса обучения играют основные цели обучения ДМ. В их достижении определяющую роль играют базовые понятия дискретной математики: бинарное и n-арное отношения; отношения эквивалентности и частичного порядка; группа и кольцо; логическая операция; предикат и квантор; алгебраическая операция; отображение, гомоморфизм и изоморфизм; алгоритм; конечный автомат; формализованный язык; проблема разрешимости; эквивалентные и эффективные алгоритмы.

К сожалению, ввиду рассогласования содержания обучения дискретной математике в школах, колледжах (техникумах) и в вузах на педагогических специальностях реализовать преемственность в обучении между школой и вузом весьма и весьма затруднительно. Ситуацию с принципом преемственности на многих специальностях (экономических, естественнонаучных, гуманитарных и других) в колледжах и вузах усугубляет широко применяемый формальный подход в изложении базовых понятий и фактов дискретной математики [6, 44], неправомерно «унаследованный» из учебников по дискретной математике для подготовки математиков и специалистов по системам компьютерной математике и компьютерным технологиям, что будет подробно рассмотрено далее при изложении методики изучения основных понятий и фактов дискретной математики в школе на основе методической системы обучения дискретной математике.

Аспекты методики изучения понятия математической модели, алгоритма и алгоритмической разрешимости. Ключевую роль в изучении понятия математической модели играют основные *теоретико-модельные* понятия ДМ: отношение, алгебраическая операция (они необходимы для определения понятия математической модели), высказывание, предикат, гомоморфизм и изоморфизм, алгоритм и алгоритмическая разрешимость. Благодаря изучению этих понятий станет возможным выработка у школьников первых представлений о классификации видов моделирования и задач, о математике как о единой науке, что позволит преодолеть разобщенность в преподавании алгебры, начал анализа и геометрии. Вследствие этого данные понятия имеют важное значение для раннего становления математической культуры и математического мышления будущего специалиста.

Ясно, что в разработке этой методики определяющим является то, насколько правильно будут выбраны дидактические принципы изучения этих понятий для физико-математического, физико-химического и информационно-технологического профилей.

Аспекты изучения математического языка. Процесс математизации той или иной специальной науки происходит на основе взаимодействия языка современной математики и языка этой науки. Поэтому обучение ДМ на той или иной специальности должно быть *нацелено* на обучение *адекватному* избранной специальности владению всей мощью присущего ей математического языка в моделировании с использованием компьютеров. Для этого недостаточно разработать содержание обучения дискретной математике и методику изучения самого понятия модели и алгоритма (и всех предваряющих их теоретико-модельных понятий) для того или иного профиля.

Действительно, ДМ в использовании современного математического языка в моделировании с использованием компьютеров играет ту же роль, что и синтаксис в литературном языке, т. е. наука о законах соединения слов и строении предложений. Образно говоря, дискретная математика есть наука *о законах* гармоничного *соединения* языков различных разделов математики для правильного выбора «техники» моделирования при решении задачи *с использованием компьютера* и о правильном *«построении»* последовательности рассуждений при непосредственной разработке модели решения. Если не учитывать эту важнейшую языковую роль ДМ, то обучение математике (на нематематических специальностях) будет носить «механический» характер. В результате у обучаемого возникнет представление о математике как о совокупности разрозненных и никак не связанных между собою дисциплин.

«Синтаксическая» роль дискретной математики важна в реализации системно-структурного подхода при обучении математике, раскрывающего характер *соответствия* между структурами реальных процессов, операционными структурами мышления и структурами математики. В противном случае обучение математике не перестанет быть «очередной напастью и тягостной повинностью в ряду досадных событий, омрачающих жизнь студента (особенно гуманитария. – *Е. П.*)» [68, с. 11]. Системно-структурный подход и учет «синтаксической» роли ДМ играют важнейшую роль в обучении искусству математического моделирования, демонстрирующего его силу и красоту.

Например, при изучении дискретной математики следует обратить особое внимание на *методические особенности* изучения тех терминов языка ДМ, от которых зависит выработка в абстрактном мышлении обучаемого необходимых *законов* гармоничного *соединения* языков: дифференциального и интегрального исчисления, численных методов, теории вероятностей и математической статистики, теории графов, исследования операций и др. Только при этом условии разовьется умение правильно выбрать технику моделирования при решении задачи (аналитическую, статистическую, «объединенную» и пр.) и выстраивать последовательность рассуждений при непосредственном решении задачи.

Для того чтобы изучение математики стало интересным, уже со школьной скамьи учащемуся необходима соответствующая языковая «профилактика», основанная на полноценном использовании «синтаксической» роли языка ДМ в представлении школьникам математики как единой науки (не «разбитой» на математический анализ, алгебру и геометрию). И здесь особенно важно выявить в содержании обучения ДМ те конкретные математические структуры и схемы (логические, комбинаторные и т. д.), которые особенно необходимы для пропедевтики изложения ярких образцов моделирования, демонстрирующих «единство» математики.

В связи с этим важнейшую роль в обучении дискретной математике играет принцип генерализации знаний, означающий, что обучение ДМ следует начинать «с истоков, с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур…» [229, с. 96]. В качестве таких истоков могут служить структуры действительных чисел, пятиэлементное поле, кольцо остатков от деления целых чисел, алгебра высказываний и группы перестановок [150, 173, 174].

Аспекты использования дискретного и непрерывного в обучении математике. При обучении ДМ следует исходить из тезиса о единстве математики [102], поэтому построение курса дискретной математики должно обеспечивать гармоничное обучение всей системе методов математического моделирования, основанных как на «непрерывной», так и на дискретной математике (синонимом «непрерывной» обычно считается однозначно трактуемое понятие классической математики). Это позволит создать необходимые предпосылки для адекватного обучения моделированию, присущего той или иной специальности.

Аспекты отбора задач по дискретной математике. В обучении ДМ особенно необходимы «такие методы обучения, когда дорога к серьезным проблемам “мостится” из упрощенных, пусть даже сказочных и шуточных задач» [99, с. 22]. Только таким путем можно достичь детской, игровой манеры изложения, доступной восприятию учащихся уже с 8-го класса. Процитированное согласуется и с важнейшими в обучении математике принципом «от частного к общему» и принципом преемственности, а также с ролью упражнений как способа стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности школьников.

Для достижения детской, игровой манеры обучения ДМ необходимо разработать соответствующую профилю обучения структуру тщательно подобранных задач на основе полной цепочки использования компьютера.

Первыми в структуре задач должны стоять задачи, с которых уже в 8-м классе начинается пропедевтика перевода *реальной задачи* на математический язык. В качестве таковых могут использоваться нестандартные задачи, т. е. задачи, требующие применения в необычных ситуациях обычных, знакомых школьнику определений, теорем и формул. В частности, это могут быть задачи на свойства натуральных чисел, на параметры и пр. Важное значение в пропедевтике имеют занимательные и практические задачи, например, простые задачи на графы, на метод перебора, на принцип Дирихле, комбинаторные и игровые задачи, разные задачи логического характера и т. д.

Далее следует рассмотреть задачи на проблему *поиска решения* на выбранном математическом языке. Необходимо привести примеры задач с неверно составленным условием, с ненайденным решением и не имеющих решения на данном математическом языке. После этого целесообразно рассмотреть задачи, которые имеют решение на этом языке, и затем – задачи на составление алгоритма решения. Затем необходимо рассмотреть задачи с бесконечным числом действий (исполнителя алгоритма) и с конечным числом действий. Благодаря таким задачам курса школьники впервые познакомятся с проблемой существования алгоритма решения. После этого целесообразно перейти к задачам на составление эффективного алгоритма, что должно быть предусмотрено уже в 9-м классе. При этом в качестве исполнителя можно предложить различные виды микрокалькуляторов. Полезно отдельно выделить задачи на алгоритмы решения уравнений в конечном (пятиэлементном) поле, кольце остатков и алгебре высказываний [150], задачи на составление эффективных алгоритмов работы машины Поста и т. д.

Важную роль в «задачной» классификации играют занимательные, практические и теоретические задачи: на проблему изоморфизма, на проблему разрешимости (существования алгоритма решения на выбранном математическом языке), на выразимость в терминах языка логики предикатов тех или иных понятий, на составление алгоритмов на языке классической и дискретной математики. Все это очень важно с точки зрения развития общей математической культуры учащихся.

Итак, как показывает анализ основных аспектов методики обучения ДМ в школе, методика обучения ДМ в школе является методической основой прикладной направленности обучения математике в школе, поскольку она является основой методики изучения понятий математической модели, алгоритма и алгоритмической разрешимости, математического языка, использования дискретного и непрерывного в обучении математике.

4.3. Методические особенности элективного обучения дискретной математике учащихся 8–11-х классов

4.3.1. Инвариантные части содержания

По мнению известного психолога Н. Ф. Талызиной, «умение учиться состоит из разного вида познавательных действий, направленных на получение новых знаний, новых операциональных систем» [225, с. 92]. Она отмечает что «в состав любого действия входит та или иная система операций (Н. Ф. Талызина называет их «ориентировочными». – *Е. П.*), с помощью которых действие и выполняется» [225, с. 96]. В частности, применительно к математике среди операций (знаково-символических операций в моделировании, кодировании, декодировании информации) она выделяет операцию сравнения, меру обобщенности операции (например, «алгебраичность» операции с наиболее распространенным ее признаком ассоциативности и коммутативности операции) и др.

Становится очевидным, что с психологической точки зрения доминирующие в ДМ алгебраические операции, операции сравнения (решеточные операции), логические, алгоритмические, комбинаторные операции представляют собой «полный состав» (термин Н. Ф. Талызиной) ориентировочных операций дискретной математики, ориентиры которых представлены в общем виде, характерном для целого класса явлений (моделей).

На основе трудов Я. А. Пономарева, Л. М. Веккера, Д. Нормана, Ж. Пиаже и других ученых в п. 2.2 нами обосновано, что доминирующие в ДМ «ориентировочные» (по Н. Ф. Талызиной) операции представляют собой когнитивные структуры и схемы, формирующиеся в мышлении учащихся на основе математических структур и схем (и являющиеся их отражением). Поэтому изучение доминирующих в ДМ структур и схем, воздействуя указанным образом на развитие мышления учащихся, способствует выработке умения *структурировать* и тем самым систематизировать информацию, что необходимо для качественного анализа сложных проблем в любой области иследования.

Итак, психологической наукой установлено существование в мышлении специалиста в любой области знания математических когнитивных структур и схем, являющихся *инвариантами* его мышления, остающимися неизменными в течении времени. Образно говоря, они представляют собой, в трактовке Н. Ф. Талызиной, *долгоживущие знания* [225], формирование которых должно быть главной целью обучения.

Математические когнитивные структуры и схемы формируются на основе изучения математических структур и схем, отражением которых они являются. Следовательно, определяющую роль в выявлении *инвариантной части* содержания программы обучения ДМ по любому профилю и любой специальности являются *ключевые понятия* языка доминирующих в ДМ алгебраических структур и логических, алгоритмических, комбинаторных структур и схем. Как следует из анализа языка перечисленных структур и схем (см. подп. 2.1.2), такими понятиями являются:

1) бинарные отношения и их основные свойства (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность);

2) отношения эквивалентности и частичного порядка;

3) группа и кольцо;

4) логическая операция;

5) предикат и квантор;

6) алгебраическая операция;

7) отображение, изоморфизм;

8) алгоритм;

9) конечный автомат;

10) формализованный язык;

11) проблема разрешимости;

12) эквивалентные и эффективные алгоритмы;

13) основные комбинаторные конфигурации (перестановки, сочетания, размещения).

Эти понятия и послужили ориентиром для формирования *инвариантных частей (ИЧС)* программ элективного обучения ДМ в школе. Естественно, с учетом условий учебной среды учебные программы, составленные на основе той или иной инвариантной их части, могут модифицироваться, корректироваться и т. д.

4.3.2. Углубленное обучение

Углубленное обучение предназначено для подготовки будущих математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. Основной целью элективного обучения является ранняя пропедевтика построения полной цепочки использования компьютеров. Иными словами, основная цель – положить начало подготовке будущего «многоборца»: постановщика задачи (переводящего ее формулировку на точный математический язык), математика (обеспечивающего разработку модели и алгоритма ее решения), программиста (пишущего, отлаживающего программу и симулирующего результаты ее работы), и в определенной мере заказчика (анализирующего результаты решения задачи).

В соответствии с основной целью элективного углубленного обучения инвариантными частями программы обучения стали те основные понятия языка доминирующих в дискретной математике алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем, которые играют фундаментальную роль в обучении математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. При этом особое внимание при выборе ИЧС и, соответственно, при окончательном составлении программы уделено ранней пропедевтике понятий алгебры, бинарного отношения, модели, алгоритма, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий, являющихся ключевыми при изучении фундаментальных основ различных видов математического моделирования и поэтому играющих главную роль в обучении построению полной цепочки использования компьютера.

Углубленное обучение естественно дополняет функционально ориентированную специфику обучения по математике в 8–11-х классах с целью формирования первоначальных представлений о многообразных методах как «непрерывной», так и дискретной математики. Тем самым этот инвариант создает теоретическую основу интеграции обучения математике и информатике.

Конкретные методические особенности изучения ИЧС программы позволяют легко осуществить выбор дидактических принципов обучения и способы осуществления преемственности обучения. Для удобства работы соответствующая программа обучения приводится со ссылками на литературу.

Главную роль в изучении содержания программы играет структура задачи более чем из десяти различных видов из пособия [150] на раннюю пропедевтику изучения доминирующих в дискретной математике математических структур и схем.

Главную роль в поэтапном преемственном изложении в этом пособии играют задачи с сюжетным текстом, благодаря которым абстрактные понятия ДМ «возникают и развиваются» *естественным образом*. Возврат к изучаемым базовым понятиям происходит в каждом следующем классе. Спиралевидное построение содержания, при котором изучение темы не исчерпывается во всех деталях сразу же в течение одного учебного года, позволяет осуществить медленное, *тонкое приспособление* знания к задаче, облегчаемое и за счет использования внутриматематических и межпредметных связей. Напомним, что при написании пособия были учтены содержание и некоторые задачи из книг [30, 33, 50, 72, 242] и многих других источников, имеющихся в книге [150].

Примерная программа приведена в прил. 1. Она прошла многолетнюю экспериментальную проверку в различных общеобразовательных учебных заведениях.

В программе перечислены названия всех глав и параграфов, отражающих содержание обучения из пособия [150] (с комментариями, приводимыми в скобках).

С учетом целей обучения и объема содержания на обучение по программе в 8–9-х классах предусматривается 1 час в неделю, в 10–11-х классах – 2 часа в неделю.

Отметим, что в данном пособии приведен учебно-тематический план работы по программе и программа-минимум, отражающая уровень рекомендуемых требований к обучению. В разделе инварианта для 10–11-х классов помещены ссылки на литературу, необходимую для работы по этому разделу.

4.3.3. Базовое обучение

Иинвариантная часть содержания программы обучения школьников дискретной математике на базовом уровне являет собой сокращенный вариант ИЧС по математическому профилю. При сокращении ИЧС было учтено, что базовое обучение необходимо для подготовки специалистов инженерно-технических специальностей, в программах обучения которых не предусматривается получение фундаментальных знаний по математике и ее приложениям. Поэтому при выборе ИЧС программы главным ориентиром стало обучение умению использовать в решении профессиональных задач типичные языки математического моделирования, применяемые в указанной профессиональной области (связанной с разработкой, ремонтом и эксплуатацией техники), что не подразумевает обучение «многоборью». В частности, в процессе обучения студенты должны научиться использовать математику, применяемую в этой профессиональной области, и понимать математический язык книг по специальности. Ввиду этого основная цель ИЧС обучения и соответствующей ей программы обучения дискретной математике на данном уровне – ранняя пропедевтика изучения типичных языков математического моделирования (на инженерно-технических специальностях) и формирования инженерно-математического стиля мышления [198]. Естественно, для реализации этой цели необходима интеграция обучения математике, информатике и другим предметам (в том числе и демонстрация ярких образцов математического моделирования).

При составлении программы особое внимание уделено идейному смыслу изучаемых понятий и фактов дискретной математики, выработке умения применять их в решении практических задач. В программе не предусмотрено изучение доказательств теорем, основанных на сложных рассуждениях или развитой преобразовательной «технике».

Особенно важное значение в изучении программы имеют задачи с сюжетным текстом и задачи на использование межпредметных связей.

Отметим, что ориентиром для составления ИЧС соответствующей программы обучения явились понятия и факты дискретной математики из типичного содержания обучения на инженерно-технических специальностях, дополненные основными комбинаторными понятиями и фактами *современной* ДМ, необходимыми для изучения теоретических основ информатики.

В предлагаемой программе, как и в предыдущей, особое внимание уделено *ранней пропедевтике* изучения базовых понятий алгебры, отношения (бинарного), модели, алгоритма, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий, ключевых в изучении фундаментальных основ различных видов математического моделирования. В то же время из инварианта содержания исключены наиболее сложные для восприятия понятия, факты и доказательства, например, рекуррентные соотношения, производящие функции, асимптотические оценки, тема «Проблемы разрешимости», изучение которых не является необходимым в будущем для обучения на специальностях данного профиля.

Эта программа направлена также на формирование первоначальных представлений о многообразных методах как «непрерывной», так и дискретной математики, применяемых в решении инженерно-технических проблем. Конкретные методические особенности отражения в программе понятий ДМ позволяют осуществить выбор дидактических принципов обучения и конкретные способы реализации преемственности и поэтапности обучения, весьма важные именно для этого профиля обучения. Для удобства работы по программе в ней имеются соответствующие ссылки на литературу.

В соответствии с перечисленными целями обучения и профессиональной ориентацией учащихся обучение на базовом уровне, на наш взгляд, целесообразно осуществлять с 9-го класса.

Программа обучения школьников дискретной математике на базовом уровне приведена в прил. 2. Она прошла многолетнюю экспериментальную проверку в различных общеобразовательных учебных заведениях.

На элективное обучение по программе для реализации целей обучения предусматривается в 9-м классе – 1 час в неделю и в 10–11-х классах – 2 часа в неделю, что является вполне реальным в рамках регионального и школьного компонентов базисного учебного плана.

4.3.4. Начальное обучение

При начальном обучении ДМ в 9-х классах желательно предварительно изучить небольшой фрагмент программы обучения школьников дискретной математике на общем уровне (прил. 3) под названием «Необычная математика», помещенный далее перед самим инвариантом обучения по общему профилю.

Целью начального обучения является ранняя пропедевтика изучения *методов* систематизации и структуризации информации по проблеме формализованного описания или представления процессов или систем (экономических, социологических), перевода с одного языка описания на другой и т. д. Ориентиром для формирования ИЧС в соответствующей программе обучения послужили понятия и факты из типичного содержания обучения на экономических и управленческих специальностях. Они дополнены комбинаторными понятиями и фактами, необходимыми для полноценного овладения важными для данного уровня методами статистического и имитационного моделирования [169].

При окончательном составлении программы начального обучения на основе учета *типичных* знаний учащихся, на наш взгляд, реализована попытка разумного сочетания дидактических принципов обучения, в частности, принципов научности, генерации знаний, преемственности, обучения «по спирали». Было учтено то, что нельзя заменять обучение математике обучению ее приложениям и что необходимо учитывать внутреннюю логику самой математики. Образно говоря, при составлении программы был исключен принцип «чего изволите, социологи, экономисты, филологи и т. д.?».

В соответствии со спецификой профиля обучения не предусматривается систематическое изучение формальной математической сути ИЧС, понятий и фактов дискретной математики и математических доказательств, требующих строгих математических рассуждений и преобразований. Действительно, название «общий» (иными словами – общекультурный) нацеливает на изучение идейной сути *соответствующих базовых понятий и фактов*. Как показывает анализ содержания учебников [68, 122,132, 235] и другой разнообразной литературы (например, [100, 215]) к числу таких понятий и фактов относятся прежде всего некоторые базовые понятия и факты теории графов, математической логики, некоторые понятия и факты современной алгебры, комбинаторики (которые и положены в основу инварианта). Основная часть этих понятий и фактов приведена в описании концепции обучения на экономических и управленческих специальностях.

Некоторые особенности математического моделирования на основе ДМ уже заложены в программах углубленного и базового обучения. В обучении по такой программе список подобных примеров методологического характера был расширен в зависимости от профиля обучения в школе (см. их в п. 4 раздела программы для 11-го класса прил. 3).

В отличие от предыдущих программ обучения составить программу обучения дискретной математике по общему профилю, отвечающую всем перечисленным требованиям, очень сложно (в том числе и по причине пока «малой» практики преподавания ДМ на социально-экономических, гуманитарных и других специальностях). По нашему мнению, предлагаемая программа в основном им соответствует.

Программа приведена в прил. 3. Она также прошла многолетнюю экспериментальную проверку в различных общеобразовательных учебных заведениях

На обучение по программе для реализации целей обучения предусматривается *всего 15 ч* в 9-м классе и *1 ч в неделю* в 10–11-м классах, что является вполне реальным в рамках регионального и школьного компонентов базисного учебного плана.

Итак, анализ целей и содержания элективного обучения дискретной математике учащихся 8–11-х классов показал следующее.

Формирование у учащихся математических когнитивных структур и схем, являющихся инвариантами мышления, является важной целью обучения на любом уровне. Важной «предметной» целью обучения является ранняя пропедевтика:

- построения полной цепочки использования компьютеров (углубленное обучение);
- изучения типичных языков математического моделирования на инженерно-технических специальностях (базовое обучение);
- изучения методов систематизации и структуризации информации по проблеме, формализованного описания или представления процессов или систем (начальное обучение).

Определяющую роль в выявлении инвариантной части содержания программы обучения ДМ в любом виде обучения играют базовые понятия языка доминирующих в ДМ алгебраических структур и логических, алгоритмических, комбинаторных структур и схем.

4.4. Особенности методики изучения понятий графа и бинарного отношения

4.4.1. Методика изучения понятия графа

В появившейся недавно учебной литературе по ДМ для студентов колледжей и техникумов, а также для студентов экономических, естественнонаучных и других специальностей вузов [6, 44, 132] широко применяется формальный подход в изложении понятий и фактов теории графов, неправомерно «унаследованный» из учебников по ДМ для подготовки математиков и специалистов по СКМ и КТ. Например, в учебном пособии Г. А. Гончаровой и А. А. Мочалина [44] в процессе изложения (с весьма неудачной ссылкой на Эйлера) задачи о кенигсбергских мостах сначала появляются точки и линии, «обозначающие» части суши и мосты, а далее приводится следующее определение графа: «Пусть на плоскости задано некоторое множество вершин X и множество U соединяющих их дуг. *Графом* называют бинарное отношение множества X и множеств U: $G = (X;\ U)$ или, иначе, $f : X \to Y$. Здесь f – отображение *инциденции*» [44, с. 71].

Следует отметить, что задолго до этого дается стандартное формальное определение бинарного отношения на множестве как подмножества декартова квадрата этого множества. Таким образом, становятся очевидными некорректность и терминологические погрешности приведенного формального определения.

Такой формальный подход в определении графа в учебной литературе усугубляется большим числом различных определений, обычно весьма сжато излагаемых на нескольких страницах. Например, в учебнике Г. Г. Асеева, О. М. Абрамова, Д. Э. Ситникова [6] на четырех страницах приводятся определения 33 (!) понятий. Все это в совокупности отягощает существующий сегодня терминологический разнобой в учебной и научной литературе по теории графов. В связи с этим возникает вопрос: с какого возраста и как изучать начальные понятия и факты теории графов?

Первоначальное изучение некоторых графов может быть осуществлено в 5–7-м классах [31, 33, 50, 91], а первоначальное знакомство с графами – даже в начальной школе [18, 112, 146]. При этом знакомство с графами целесообразно выстраивать на основе использования их как цветных иллюстраций отношений между элементами множеств различных предметов (отношений родства, порядка и т. д.), выделения существенных связей между множествами предметов (например, взаимно однозначных соответствий), а также решения простейших логических, комбинаторных, игровых и других занимательных задач.

При первоначальном изучении некоторых графов в 5–7-м классах необходимо привести примеры и свойства связных, эйлеровых, гамильтоновых графов и деревьев [30, 33, 50, 91]. При этом знакомство с простейшими графами указанных видов должно происходить в процессе решения задач с занимательными и практическими сюжетами. Например, в учебном пособии Л. П. Конновой [91], посвященном первоначальному изучению графов, содержится серия более чем из восьми видов задач (логических, комбинаторных и др.), благодаря которым объемное многословное описание разнообразных сложных связей между элементами множеств предметов легко иллюстрируется с помощью графов. При этом учащиеся на интуитивном уровне знакомятся с зависимостями между числом ребер и вершин, зависимостью свойств графа от степеней его вершин.

В соответствии с программами профильного обучения ДМ систематическое изучение понятия графа, основных видов графов и их свойств необходимо на этапе предпрофильного обучения в 8–9-м классах. При этом должна быть осуществлена целенаправленная пропедевтика изучения в 10-м классе бинарных отношений и алгоритмов.

К сожалению, в методике изучения элементов теории графов в большинстве изданий для студентов колледжей (техникумов) (см., например, [44, 217]) такой пропедевтики не предусматривается.

На основе вышеизложенного можно предложить следующую *схему изучения элементов теории (неориентированных) графов* [150].

В 8-м классе в начале этапа предпрофильного обучения важно предусмотреть несколько наиболее ярких занимательных и практических задач, в процессе решения которых учащиеся изучат понятия вершины, ребра и степени вершины графа, а также на интуитивном уровне познакомятся с понятием связного графа. Далее на основе решения занимательных и практических задач с сюжетным текстом обеспечивается постепенное изучение понятий маршрута, цепи, цикла, связного графа, эйлерова и гамильтонова графов. Доказываются признак эйлерова графа и теорема о том, что в любом графе имеется четное число вершин нечетной степени. При этом доказательства возникают как естественное продолжение и обобщение решения ранее разобранной задачи.

В 9-м классе изучаются определения маршрута, связного графа, дерева, равных (изоморфных) графов. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1 (признак связного графа). Граф с n вершинами связен, если степень каждой его вершины не менее $\frac{n-1}{2}$.

Теорема 2 (признак дерева). В любом дереве нет циклов**.**

Теорема 3 (о висячей вершине). В любом дереве есть висячая вершина. Напомним, что вершина a графа называется висячей, если существует только одна вершина графа, смежная с a.

Теорема 4 (о числе ребер дерева). В дереве число ребер на единицу меньше числа вершин.

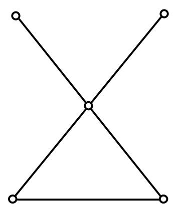
Теорема 5 (об удалении ребра). При удалении любого ребра дерева получается несвязный граф.

Кратко охарактеризуем методические особенности изложения перечисленных понятий и теорем.

Маршрут в графе G определяется как последовательность ребер $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4),\dots, (v_{n-1}, v_n)$ с началом v_1 и концом v_n.

Говорится, что этот маршрут соединяет вершины v_1 и v_n. Далее приводятся примеры маршрутов и примеры последовательностей ребер, не являющихся маршрутами. Начать можно с примера графа Г (рис. 4.1), в котором последовательность ребер (a, v), (v, c), (c, d) является маршрутом, соединяющим вершины a и d.

Далее отмечается, что в маршруте каждые два соседних, записанных рядом ребра имеют общую вершину. Но не всякая такая последовательность ребер графа является маршрутом. Приводится пример последовательности ребер, не являющейся маршрутом.



Граф *Г*

Рис. 4.1

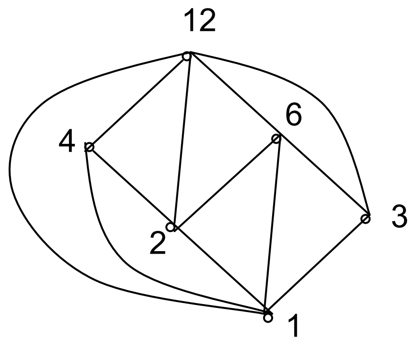


Рис. 4.2

Один из возможных примеров – последовательность ребер (a, v), (b, v), (c, v), (v, d) графа A, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Однако эта последовательность ребер не является маршрутом, соединяющим вершины a и d. Действительно, по определению маршрута общая вершина v двух соседних ребер (a, v), (b, v) должна быть записана в другом месте: (a, v), (v, b).

Объяснение определения связного графа начинается со следующего примера.

Пусть вершины графа обозначены числами 1, 2, 3, 4, 6, 12. Две вершины n и m образуют ребро (n, m) тогда и только тогда, когда одно из чисел n, m делится нацело на другое. Очевидно, в графе имеется 12 ребер (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (12, 1), (4, 2), (6, 2), (6, 3), (12, 3), (12, 4), (12, 6) (рис. 4.2).

Далее даются определения понятий цепи и связанных вершин.

Маршрут (1, 2), (2, 4), (4, 12) является *цепью*, т. е. маршрутом, в котором все ребра различны. Всего в графе имеется восемь цепей, соединяющих вершины 1 и 12. Две вершины a и b графа называются *связанными*, если существует цепь, соединяющая вершины a и b.

Определение. Граф называется *связным*, если любые две его вершины связанные.

Сообщается, что граф на рис. 4.2 связный, поскольку есть цепь, соединяющая любые две вершины из множества $\{a, b, c, d, v\}$. Граф на рис. 4.3 несвязный, поскольку нет цепи, соединяющей вершины a, p.

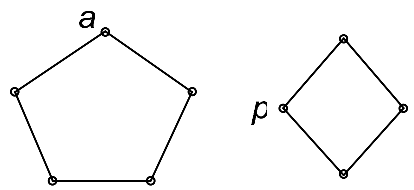


Рис. 4.3

Доказательство признака связного графа предваряет задача.

Задача. В стране Океании 11 островов. Каждый из островов соединен мостами не менее чем с пятью другими. Требуется доказать, что с любого острова можно добраться пешком через мосты до любого другого.

Доказательство начинается с предположения, что найдутся два таких острова, которые не связаны пешеходным маршрутом, проходящим через мосты. Предлагается изобразить эти два острова точками A и B, а линиями – мосты, соединяющие эти острова с другими (рис. 4.4). Каждый из этих островов связывают с другими островами не менее пяти мостов, что и показано на рис. 4.4. Поэтому в Океании есть не менее 12 островов. Отсюда учащиеся легко обнаруживают противоречие условию.

Объясняется, что граф, вершинам которого соответствуют острова, а ребрам – мосты, является связным. Иными словами, граф островов и мостов Океании связен, т. е. для любых двух его вершин существует цепь, их соединяющая.

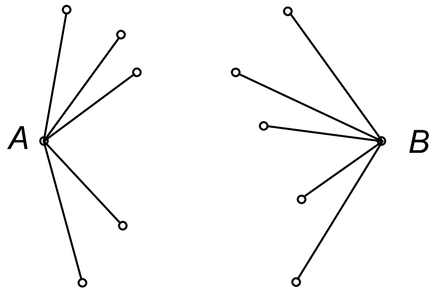


Рис. 4.4

После решения задачи учащимся будет легко понять, как аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема (*признак связного графа*). Граф с n вершинами связен, если степень каждой его вершины не менее $\frac{n-1}{2}$.

Для облегчения восприятия доказательства учащимся после аналогичного предположения о том, что существуют две такие вершины A и B, для которых нет цепи, их соединяющей, следует предложить обозначить степени вершины A и вершины B через $m = \frac{n-1}{2}$. Тогда учащимся будет легче понять, что по определению степени вершины из вершины A, как и из вершины B, выходит не менее m ребер (где m записано уже не в виде дроби).

Для доказательства других теорем используется тот же методический прием (сюжетный фактор).

Дерево определяется как граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной цепью, состоящей из различных вершин.

Наконец, охарактеризуем методические особенности изучения важнейшего понятия *изоморфных графов*.

Практика показывает, что типичное определение изоморфных графов на основе взаимно однозначного отображения множеств с трудом воспринимается учащимися даже 11-х классов. Поэтому было предложено следующее определение: «Два графа называются изоморфными, если у них поровну вершин (по n) и вершины каждого графа можно занумеровать числами от 1 до n так, чтобы вершины первого графа были соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие (занумерованные теми же числами) вершины второго графа» [148, с. 34].

Однако выяснилось, что учащиеся 7–9-х классов испытывают трудности при восприятии оборота «тогда и только тогда» и значений слов «изоморфизм» и «соответствующие». Это возможно устранить способом, изложенным в подп. 3.2.3.2 «Редукция понятия изоморфных графов».

4.4.2. Методика изучения понятия бинарного отношения

Как известно, граф без кратных ребер является частным случаем бинарного отношения. Поэтому методические основы изучения понятия бинарного отношения с использованием понятия графа разработаны в книге «Избранные вопросы математики»: факультативный курс для учащихся 9-х (ныне 10-х) классов [72]. Изложение начинается с понятия соответствия между элементами, разъясняемого с помощью удачно подобранных примеров и задач. Затем без использования декартова квадрата множества на основе понятия соответствия объясняется понятие бинарного отношения. Важно то, что при этом учитываются типичные знания и представления учащихся, соблюдаются разумная строгость, а также систематичность и последовательность.

На основе этой методики в несколько иной форме эта тема представлена автором монографии в работе «Введение в дискретную математику» [148]. В начале приводятся многочисленные примеры бинарных отношений из школьной программы, на основе которых затем изучаются свойства бинарных отношений. Некоторые бинарные отношения на конечном множестве изображаются точками в декартовой системе координат, что используется для определения декартова квадрата множества и бинарного отношения.

Отметим, что интересные методические особенности в изложении темы имеются в учебном пособии В. Я. Турецкого для студентов-гуманитариев [235].

К сожалению, в немногочисленных учебных изданиях для студентов техникумов и колледжей, а также для студентов вузов, не изучающих математику и ее приложения, понятие бинарного отношения объясняется на неадекватном абстрактном уровне без опоры на типичные знания указанной в аннотации категории читателей. Например, так же, как и в первых учебных изданиях по ДМ [45, 104, 264] для математических и других специальностей (связанных с приложениями математики), в учебном пособии для управленческих специальностей [132] изложение начинается фактически сразу со стандартного формального определения бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества (причем на этой же странице аналогичным образом определяется и n-местное отношение).

На наш взгляд, изучение бинарного отношения нецелесообразно начинать с рассмотрения соответствий между элементами различных множеств (в частности, с изучения отображений, образов и прообразов элементов). При этом представляется весьма удачным изображение отношений (соответствий) с использованием *графов* (см., например, [72]).

С учетом особенностей этапов профильного обучения в 10–11-х классах и объема отводимого на обучение времени можно предложить следующую методическую схему изучения понятия бинарного отношения в школах, колледжах и вузах (для специальностей, не связанных с математикой и ее приложениями).

Сначала приводятся примеры отношений порядка на множестве чисел, примеры параллельности и перпендикулярности на множестве прямых, отношения «делиться нацело» и т. д. В частности, поясняются записи $a < b$ или $a \perp b$, означающие, что число b больше *по отношению* к числу a или прямая b перпендикулярна *по отношению* к прямой a соответственно. Таким образом, элементы того или иного множества (чисел, прямых и т. д.) могут состоять между собой в каком-то отношении (быть больше, быть перпендикулярными и т. д.) Затем обьясняется, что если элементы a и b некоторого множества A состоят в каком-то произвольном (пока неизвестном) отношении, то это кратко записывается так: $a\rho b$, где $a, b \in A$.

Стало быть, если ρ является отношением порядка на множестве натуральных чисел N, то вместо $a\rho b$, a, $b \in A$ пишется, как и прежде, $a \leqslant b$, a, $b \in N$. Точно так же следует прокомментировать и другие рассматривавшиеся ранее отношения и еще раз подчеркнуть, что символом ρ принято обозначать любое отношение между элементами данного множества. Например, можно договориться, что запись $a\rho b$ для множества A учеников класса обозначает, что ученик a дружит с учеником b, и учесть таким образом все пары друзей из класса. Если же $a\rho b$ означает, что населенный пункт a соединен дорогой с населенным пунктом b, то следует записать $a - b$ вместо $a\rho b$ и с помощью уже изученного ранее понятия неориентированного графа изобразить это отношение на рисунке. В результате учащийся понимает, что неориентированный граф является бинарным отношением на множестве его вершин.

Затем можно объяснить, что слово «би» в переводе с латинского языка означает «два». Поскольку рассмотренные ранее отношения связывают между собой пары элементов, все такие отношения называются бинарными. Необходимо сообщить учащимся, что в математике изучаются тернарные, n-арные отношения, и пояснить это небольшим числом примеров.

Далее следует обеспечить привыкание к использованию обычного обозначения ρ бинарного отношения. Для этого целесообразно определить основные свойства бинарных отношений и предложить установить наличие этих свойств у отношений, неявно изучаемых в школьной программе или легко определяемых в рамках ее содержания, а также отношений, задаваемых графами.

Приводятся формулировки определений следующего вида:

1. Отношение ρ на множестве A называется рефлексивным, если справедливо $a\rho a$ для любого элемента $a \in A$.

2. Отношение ρ на множестве A называется симметричным, если из истинности $a\rho b$ следует истинность $b\rho a$ для любых элементов a, $b \in A$. (Образно говоря, это свойство означает, что в записи «$a\rho b$» элементы a и b можно поменять местами.)

3. Отношение ρ на множестве A называется антисимметричным, если для любых элементов a, $b \in A$ из истинности $a\rho b$ и $b\rho a$ следует $a = b$. (Это свойство означает, что в записи «$a\rho b$» различные элементы a и b менять местами нельзя.)

4. Отношение ρ на множестве A называется антисимметричным, если для любых элементов a, b, $c \in A$ из истинности $a\rho b$ и $b\rho c$ следует истинность $a\rho c$.

После этого можно выполнить упражнение.

Упражнение. Какими из свойств 1–4 обладают следующие бинарные отношения:

1) a, $b \in N$ и $a\rho b$ означает, что $a \leqslant b$;

2) a, b – прямые на плоскости, и $a\rho b$ означает, что $a \| b$;

3) c, $в$ – прямые на плоскости, и $c\rho d$ означает, что $c \perp d$;

4) m, $n \in N$ и $m\rho n$ означают, что m делится нацело на n (кратко $m \vdots n$);

5) x, $y \in R$ и $x\rho y$ означают, что $xy = 0$;

6) x, $y \in R$ и $x\rho y$ означают, что $(x + y)^2 = x^2 + y^2$;

7) x, $y \in R$ и $x\rho y$ означают, что $|x| = |y|$.

Используя изученное ранее правило произведения множеств, можно ввести понятие декартова квадрата множества. Изложение должно идти примерно следующим образом.

Определение 1. Пусть A – некоторое множество. Декартовым квадратом A^2 множества A называется множество всевозможных пар, составленных из элементов этого множества.

Пусть дано множество чисел $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда множество всевозможных пар, составленных из элементов A, можно изобразить точками в декартовой системе координат (рис. 4.5). Множество A^2 состоит из пар чисел, являющихся координатами изображенных на рисунке точек. Отсюда понятно, почему рассматриваемый квадрат множества называется декартовым.

Определение 2. Бинарным отношением на множестве A называется любое подмножество декартова квадрата A^2 множества A. Например, отношение порядка на множестве чисел $\{1, 2, 3, 4\}$ есть множество пар $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.

Если вместо, например, (1, 2) и (1, 3) писать $1 \leqslant 2$ и $1 \leqslant 3$, то мы увидим за обозначением пары (a, b) привычную запись $a \leqslant b$.

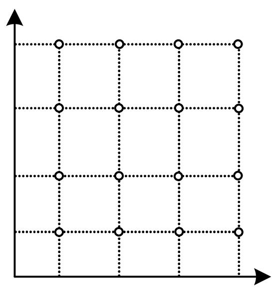


Рис. 4.5

Заметим, что отношение равенства на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$ состоит из пар $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

Бинарное отношение на множестве принято также обозначать греческими буквами α, β, γ, ρ и т. д. Например, пусть запись $a\rho b$ означает, что «a делится нацело на b», где $a,\ b \in \{2,\ 3,\ 6\}$. Ясно, что бинарное отношение ρ состоит из пар (6, 6), (6, 3), (6, 2), (3, 3), (2, 2).

Определение 3. Бинарные отношения на одном и том же множестве называются равными, если они образованы одним и тем же множеством пар.

Далее можно привести примеры бинарных отношений, являющихся графами, примеры таких отношений из окружающей (школьной) жизни (см., например, книги [72, 150]).

Следует объяснить, что функции и геометрические отображения являются бинарными отношениями, обладающими одним легко определяемым свойством. Это способствует построению профильного курса ДМ, при котором будет обеспечено гармоничное обучение всей системе методов математического моделирования, основанных как на «непрерывной», так и на дискретной математике.

Итак, основными методическими особенностями изучения понятий графа и бинарного отношения являются следующие. Во-первых, осуществляется необходимая максимальная мотивационная вовлеченность ученика в работу с занимательным или практическим сюжетным текстом. Тем самым реализуется идея Л. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств. Для такой реконструкции обстоятельств «жизни» и подбираются задачи с занимательным или практическим сюжетным текстом, в процессе решения которых подготавливается восприятие изучаемых понятий и фактов.

Во-вторых, реализуется преемственность в обучении (опора на понятия равных треугольников, параллельных и перпендикулярных прямых и др.). В-третьих, осуществляются внутриматематические связи изучаемого с понятиями и фактами из программы по математике общеобразовательной школы (функциями и геометрическими отображения). В-четвертых, методической особенностью является опора на привычные представления учащихся.

4.5. Особенности методики изучения первых понятий и фактов комбинаторики

Н. Я. Виленкин в книге «Популярная комбинаторика» [26] впервые доступно изложил для учащихся старших классов основные элементы комбинаторики, которые впоследствии вошли в раздел «Элементы комбинаторики» факультативного курса «Избранные вопросы математики» [72]. В дальнейшем методика изучения комбинаторики постепенно совершенствовалась [31, 33, 73 и др.]. В учебники по математике для средней школы под редакцией Г. В. Дорофеева впервые были включены элементы комбинаторики.

Благодаря методике изложения, применяемой в этих книгах, достигается максимальная вовлеченность учащихся в работу с *сюжетным* текстом. В результате происходит постепенная интеграция когнитивных структур в мышлении учащихся – развитие от простого к сложному на основе реконструкции обстоятельств жизни.

К сожалению, в имеющейся учебной литературе по ДМ для студентов колледжей и техникумов, а также для студентов вузов в изложении комбинаторики преобладает формальный подход. Приведем один достаточно характерный пример.

«Пусть X – конечное множество, содержащее n элементов. Такое множество в комбинаторике именуют n-множеством X или n–X множеством.

Мы будем строить размещения на основе постановок задач выбора и расположения.

Запишем эти задачи вначале в их простейшей формулировке.

Начнем с задачи *выбора.* Пусть задано n–X множество. Можно считать, что в качестве элементов n–$X = \{x_1, \ldots, x_2\}$ имеем пронумерованные шары, помещенные в непрозрачную урну. Требуется построить комбинаторную конфигурацию – множество Y всех возможных вариантов выбора одного шара без повторений. При этом порядок представления элементов в множестве Y существенным не является» [6, с. 61].

Формализованное изложение приведенного отрывка с терминами «конфигурация» и «n–X множество» (утяжеленное индексацией его элементов, обозначением Y) и неожиданную замену «шаров» на «письма» в следующем примере нельзя считать удачными даже с учетом восприятия учащихся выпускных математических классов, которым в первую очередь адресована книга Г. Г. Асеева, О. М. Абрамова, Д. Э. Ситникова [6]. Кстати, неудачный термин «n–X множество» встречается, по-видимому, только у этих авторов, поскольку классическими общепринятыми, в том числе и в комбинаторике, являются другие приемы указания числа элементов множества («n-элементное»), использование оборота «пусть дано» и т. д.

В госстандартах среднего профессионального образования для некоторых специальностей вообще не предусматривается изучение элементов комбинаторики, которое, как обосновано выше, крайне необходимо для развития комбинаторной компоненты мышления.

С учетом перечисленных распространенных недостатков изложения предлагаем следующую методику изучения первых комбинаторных понятий и фактов в 8–10-х классах в рамках концепции предпрофильного обучения ДМ.

Сначала осуществляется пропедевтика изучения правил суммы и произведения. При этом происходит чередование задач на каждое из правил, а затем даются задачи на совместное применение обоих правил [33, 73]. В результате этого у учашегося должно выработаться понимание того, «в какой ситуации при подсчете вариантов следует перемножать, а в какой – складывать» [33, с. 18]. Приведем наиболее простые задачи такого типа [150].

1. В продуктовом магазине есть 4 сорта шоколада и 3 сорта мороженого. Сколькими способами можно купить шоколад и мороженое?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную или согласную букву в слове «кабинет»?

3. В футбольной команде из 11 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколько диагоналей имеется у выпуклого десятиугольника?

Далее в процессе решения специально подобранных задач (см., например, работы [30, 33]) изучается метод перебора в решении нестандартных задач. Для облегчения восприятия метода перебора целесообразно предварительно решить несколько задач на метод перебора, применяемый при решении простых уравнений с параметрами, задач на свойства чисел, уравнений в целых числах. Приведем примеры наиболее характерных задач такого вида [30, 33, 150].

1. Решить уравнения с параметром a:

а) $a\,(x - 2) = 1$; б) $ax = 2a^2$; в) $x^2 - 2x + a = 0$.

2. Найти все двузначные числа, каждое из которых равно утроенному квадрату второй своей цифры.

3. Найти все натуральные числа n, при которых выражение $\frac{n+3}{n-1}$ есть целое число.

4. Найти все пары натуральных чисел x, y, для которых верно равенство $3x + 11y = 50$.

5. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верно равенство:

а) $4x = 12 + y^2$; б) $x^2 + y^2 = 4x + 1$.

6. В лыжных соревнованиях, в которых участвовали 100 спортсменов, все спортсмены получили номера от 1 до 100. Сколько спортсменов получили номера с цифрой 5?

7. Дважды бросается игральная кость, т. е. куб с пронумерованными гранями. Найти число случаев, в которых сумма выпавших очков может быть равна 10.

8. Сколько нулей в записи числа, равного произведению первых 100 натуральных чисел?

9. Сколько имеется квадратных трехчленов $ax^2 + bx + c = 0$ с коэффициентами a, b, c из множества $\{a, b, c\}$?

10. Петя забыл последние две цифры в шестизначном номере телефона одноклассника. Сколько различных звонков придется сделать Пете в самом неудачном случае, чтобы дозвониться до одноклассника?

11. Найти число треугольников с вершинами в пяти точках, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

На основе материала, пройденного в 9-м классе, можно начать изучение правил нахождения суммы и произведения двух множеств. При этом желательно предварительно решить несколько задач, например, таких:

Задача 1. Каждый из трех островов реки связан с обеими берегами мостом. Найти число мостов, связывающих острова с берегами.

В решении представляется удачным для восприятия обозначение островов буквами A, B, C, а берегов – цифрами $\{1, 2\}$. Далее учащимся предлагается рассмотреть множества $\{A, B, C\}$ и $\{1, 2\}$ и выписать все возможные пары (x, y), где $x \in \{A, B, C\}$ и $y \in \{1, 2\}$:

$(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, 2)$.

После этого отмечается, что каждой такой паре (x, y) соответствует мост, связывающий остров x с берегом y. Подсчитав число этих пар, учащиеся получают ответ: 6.

Задача 2. Каждый из четырех складов должен быть соединен напрямую линией телефонной связи с каждым из трех цехов завода. Найти число линий телефонной связи, соединяющих эти склады и цеха.

После решения этих задач легко воспринимается определение: *произведением* $X \cdot Y$ *множеств* X и Y называется множество всевозможных пар (x, y), где первый элемент x пары есть элемент множества X, второй элемент y есть элемент множества Y.

Благодаря предварительно решенным задачам легко доказать, что справедлива следующая теорема:

Теорема (правило произведения). Пусть множества X и Y состоят из n и m элементов соответственно. Тогда произведение $X \cdot Y$ состоит из $n \cdot m$ элементов.

С учетом знаний, полученных в 8, 9 и 10-м классах, изучаются перестановки, размещения и сочетания и выводятся формулы для подсчета числа этих основных конфигураций. При этом полезно давать задачи с некорректной формулировкой. Наиболее характерной задачей такого типа является, например, следующая задача [151].

Задача. Для обеспечения одного из вариантов работы заводского конвейера необходимо последовательно нажать две из трех различных кнопок, обозначенных на пульте управления буквами p, q и s. Сколько может существовать различных вариантов работы конвейера?

На этот вопрос даются различные ответы в зависимости от уточнения его формулировки:

1. Предусмотрен ли вариант работы, для включения которого необходимо нажать дважды на одну и ту же кнопку p, т. е. вариант pp?

2. Существуют ли варианты, отличающиеся порядком нажатия кнопок p и s? Иными словами, возможны ли варианты ps или sp?

Как показывает практика, при определении перечисленных конфигураций у учащихся вызывает трудности использование обобщенного правила произведения множеств и определяемого затем термина «кортеж», общепринятых в современной абстрактной алгебре. Вместо этого, например, используется понятие (упорядоченного) подмножества из k элементов n-элементного множества [33] и понятие комбинации k элементов n-элементного множества [73].

Наиболее целесообразно доказать формулы: сначала – для подсчета числа размещений, а затем – для числа перестановок. Из этих формул следует формула для подсчета числа сочетаний.

Восприятие доказательств могут значительно облегчить соответствующие задачи [30, 33, 72, 73], в процессе решения которых предварительно уясняется метод или суть доказательства.

Доказательство бинома Ньютона проще всего провести на основе метода математической индукции и треугольника Паскаля [72].

Итак, основными методическими особенностями изучения первых понятий и фактов комбинаторики являются следующие. Во-первых, достигается максимальная вовлеченность учащихся в работу с сюжетным текстом. Во-вторых, осуществляется пропедевтика изучения правил суммы и произведения на основе чередования задач на каждое из правил, в результате чего у учащегося вырабатывается понимание того, в какой ситуации при подсчете вариантов следует перемножать, а в какой – складывать.

В-третьих, для осуществления преемственности обучения применяется метод перебора в решении простых уравнений с параметрами, задач на свойства чисел, уравнений в целых числах. Также с учетом знаний, полученных в 8, 9 и 10-м классах, изучаются перестановки, размещения и сочетания и выводятся формулы для подсчета числа этих основных конфигураций.

4.6. Особенности методики изучения понятий алгебраической операции и алгебры

Сразу отметим, что изучение понятий алгебраической операции произвольной «природы» и алгебры не предусматривается в стандартах среднего (полного) общего образования на профильном уровне. По этой причине методика изучения указанных понятий при профильном обучении в школе до сих пор целенаправленно не разрабатывалась. Возможно, начало системного внедрения профильного обучения математике в школе позволит изменить существующую ситуацию.

Впервые понятие алгебраической операции, удовлетворяющей аксиомам группы (групповой операции), популярно изложил П. С. Александров [2]. В качестве основы им были использованы наглядные понятия группы вращений правильного треугольника и квадрата, являющихся их самосовмещениями и различающиеся только положением вершин. Доступность в изучении понятия данной операции была обеспечена также за счет применения группы целых чисел по сложению, групп подстановок, групп вращений геометрических фигур и правильных многогранников и других тел. Все это позволило изложить различные свойства этой операции и вытекающие из них элементарные понятия и факты теории групп (понятие циклической группы и нормальной подгруппы, теорема Кэли, изоморфизм групп, система образующих и т. д.).

Важная методическая особенность книги «Факультативный курс. Избранные вопросы математики» [242] заключается в том, что групповая операция предстает как композиция геометрических преобразований плоскости. Это обеспечивает наглядность при изучении основных абстрактных свойств алгебраической операции. Построение графиков функций элементарными преобразованиями обеспечивает преемственность в изучении групповой операции.

Э. Фридом на доступном для восприятия школьников уровне рассмотрены кольца, тела, модули, решетки, булевы алгебры [253]. Методический интерес представляют новые простые примеры групп, иллюстрируемое графами изложение групп движений на плоскости, подгрупп, полугрупп, колец на основе примеров колец четных и вещественных чисел; изучение многочленов с коэффициентами из различных числовых множеств; первые примеры решеточных операций.

А. Я. Блох, А. А. Бухштаб предложили интересный подход в определении кольцевой операции на основе понятий и фактов из школьной программы [14]. В частности, удачно изложены свойства замкнутости такой операции и приведены интересные примеры кольцевых операций. На основе понятия координатной плоскости раскрывается геометрический смысл операций элементов кольца $\{x,\ y \in Z \mid x + y\sqrt{2}\,\}$, прослеживается связь диофантовых уравнений с понятиями кольца и поля.

Впервые популярное определение произвольной алгебраической операции дал В. В. Деменчук [57]. Рассмотрим интересную методику, применяемую им при изучении этого понятия.

Вначале с помощью стрелок и точек изображаются отображения конечных множеств и изучаются свойства инъективности, сюръективности, биективности этих отображений. Затем изучаются композиции подстановок и преобразований конечных множеств, записываемых, как подстановки, в виде такой же таблицы (с возможно некоторыми равными элементами во второй строчке). Доказывается, что суперпозиция двух инъективных (сюръективных, биективных) преобразований множества есть инъективное (сюръективное, биективное) преобразование этого множества.

Далее со ссылкой на примеры операций на числовых множествах, с векторами, с подмножествами данного множества и с преобразованиями данного множества отмечается, что все эти операции обладают одной характерной особенностью, заключающейся в следующем: «всякий раз каждым двум элементам некоторого множества, взятым в определенном порядке (двум числам, двум векторам, двум подмножествам, двум преобразованиям), ставится в соответствие по некоторому правилу определенный элемент (число, вектор, подмножество, преобразование) из этого же множества» [57, с. 54]. Эта особенность иллюстрируется конкретными примерами выполнения этих операций с элементами перечисленных множеств. Процитируем общее определение, данное В. В. Деменчуком.

«Замеченная нами закономерность для рассмотренных операций приводит к естественному общему определению операции.

Пусть M – некоторое множество. *Если каждым двум элементам множества M (одинаковым или различным), взятым в определенном порядке, ставится в соответствие по некоторому правилу определенный элемент из этого же множества, то такое соответствие называется алгебраической операцией, заданной на множестве M.*

Операции обозначаются различными символами, например “+”, “–”, “·”, “×”, “∘”, “*” и т. д. Если алгебраическая операция, определенная на множестве M, обозначается символом “*” и двум элементам a, $b \in M$ (именно в таком порядке) ставится при этом в соответствие элемент $c \in M$, то пишут $a * b = c$ и элемент c называют результатом операции “*” для элементов a и b.

Для наиболее употребительных операций зафиксированы обозначения. Например, сложение чисел обозначают символом “+”, пересечение множеств – символом “∩” и т. д.» [57, с. 55].

После этого разъясняются признаки алгебраической операции, раскрывающие суть ее определения. В частности, констатируется факт существования результата операции и принадлежности его к заданному множеству (т. е. замкнутость операции), приводятся интересные примеры проверки наличия или отсутствия этих свойств существования и замкнутости. Например, проверяется существование результата операций сложения, вычитания, умножения и деления на различных числовых множествах, операции $x \Delta y = \max\{x, y\}$ – на множестве натуральных чисел, операции $x \triangleright y = y$ – на произвольном множестве и т. д.

Изучается операция поворотов квадрата, являющихся его самосовмещениями, и способы задания алгебраической операции, в том числе и с помощью таблицы Кэли.

На основе всего изложенного определяется понятие группоида, приводятся многочисленные простые примеры группоидов. Рассматриваются свойства ассоциативности и сократимости операции группоида и определяется понятие полугруппы. Изучаются типичные алгебраические свойства элементов этих алгебр (свойства быть идемпотентом, симметричным, нейтральным, аннулирующим элементом).

Представленные методические особенности [2, 11, 14, 57, 253] создают основу для дальнейшей разработки методики изучения понятия алгебраической операции и алгебры в 9–11-м классах средних общеобразовательных учреждений. Исходя из этих особенностей предложим следующий вариант изучения этих понятий в 8–9-х классах, изложенный в учебном пособии [150].

Сначала сообщается, что для операции сложения на множестве целых чисел Z справедливы законы:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых a, b, c (*сочетательный* закон).

2. Существует такой элемент 0, что для любого элемента a справедливо равенство $a + 0 = 0 + a$ (*существование ноля* 0).

3. Для любого элемента a существует такой элемент $-a$, что справедливо равенство $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (*существование противоположного слагаемого).*

Целесообразно доказать справедливость аналогов этих законов для других изученных ранее учащимися операций сложения:

1) сложения остатков от деления целых чисел на 3;

2) сложения вращений правильного треугольника;

3) сложения векторов.

Отметим следующие существенные особенности использования символики в доказательствах [150]:

1) *Сложение остатков* от деления целых чисел на 3.

Сначала с помощью теоремы об остатке суммы составляется таблица сложения остатков $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ от деления натуральных чисел на 3:

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Далее доказывается *существование ноля* 0. При этом замечается, что нолем 0 при сложении остатков является остаток $\overline{0}$. Поэтому для проверки равенства $a + 0 = 0 + a = a$ следует подставить в него вместо символа 0 остаток $\overline{0}$:

$a + \overline{0} = \overline{0} + a = a$.

Затем учащимся предлагается последовательно подставлять в $a + \overline{0} = \overline{0} + a = a$ вместо символа a его значения $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ и убедиться в справедливости закона.

Замечается, что для проверки закона $a + (–a) = (–a) + a = 0$ (о существовании *противоположного слагаемого*) необходимо подставить в это равенство вместо символа 0 остаток $\overline{0}$: $a + (–a) = (–a) + a = \overline{0}$. Тогда очевидно, что для слагаемого $a = \overline{0}$ имеем противоположное слагаемое $– a = \overline{0}$, для $a = \overline{1}$ имеем $–a = \overline{3}$, для $a = \overline{2}$ имеем $–a = \overline{2}$, для $a = \overline{3}$ имеем $– a = \overline{1}$.

При доказательстве сочетательного закона предлагается подставить в равенство $(a + b) + c = a + (b + c) = 0$ вместо a, b, c все возможные наборы их значений. При этом особо отмечается, что по закону о существовании нуля 0 равенство $(a + b) + c = a + (b + c) = 0$ справедливо для всех наборов, содержащих элемент $\overline{0}$:

$(\overline{0} + b) + c = b + c = \overline{0} + (b + c)$; $(a + \overline{0}) + c = a + c = a + (\overline{0} + c)$;

$(a + b) + \overline{0} = a + b = a + (b + \overline{0})$.

Далее рассматриваются все наборы значений a, b, c, не содержащие $\overline{0}$.

2) *Сложение вращений правильного треугольника*.

В начале доказательства напоминается таблица сложения поворотов правильного треугольника, являющихся его самосовмещениями:

$+$	n_0	n_1	n_2
n_0	n_0	n_1	n_2
n_1	n_1	n_2	n_0
n_2	n_2	n_0	n_1

Для доказательства законов *существования ноля* 0 и *существования противоположного слагаемого* учащимся предлагается подставить в равенства вместо символа ноля 0 поворот на ноль градусов n_0. Тогда эти законы перепишутся в более удобном для восприятия учащихся виде:

$a + (-a) = (-a) + a = 0;$

$a + n_0 = n_0 + a = a;$

$a + (-a) = (-a) + a = n_0.$

При проверке справедливости этих равенств учащимся следует подсказать, что для слагаемого $a = n_0$ имеем противоположное слагаемое $-a = n_0$, для $a = n_1$ имеем $-a = n_2$, для $a = n_2$ имеем $-a = n_1$.

При доказательстве сочетательного закона, как обычно, предлагается подставить в равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ вместо a, b, c все возможные наборы (тройки) их значений из множества $\{n_0, n_1, n_2\}$. Следует заранее сообщить, что имеется 8 таких наборов.

Учащимся целесообразно напомнить, что ранее изучались вращения квадрата и правильного пятиугольника, являющиеся их самосовмещениями. Точно так же, как и для вращений треугольника, учащимся можно доказать законы 1–3 для операций сложения этих вращений квадрата и правильного пятиугольника.

3) *Сложение векторов*.

Сообщается, что доказательство законов 1–3 имеется в учебнике геометрии для 9-го класса. Отмечается, что символы a, b, c и 0 в этом случае обозначают векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{0}$, где $\vec{0}$ – нулевой вектор. Символ $-a$ обозначает вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$.

Далее рассматривается операция сложения на произвольном множестве и дается следующее определение.

Операция сложения определена на множестве, если при сложении двух любых элементов множества получается элемент этого же множества.

Сообщается, что обычная операция сложения чисел на множестве простых чисел не определена, поскольку сумма простых чисел не всегда является простым числом (т. е. может оказаться «чужим» числом). Дается следующее определение.

Множество G с определенной на нем операцией сложения, удовлетворяющей законам 1–3, называется группой.

Сообщается, что, согласно определению, множество целых чисел Z, множество остатков от деления целых чисел на три, множество вращений правильного треугольника, квадрата и пятиугольника, множество векторов являются группами относительно операций, рассмотренных нами.

Приводятся следующие примеры множеств с операцией сложения, *не являющихся группами*.

1. Рассмотрим множество натуральных чисел N с определенной на нем обычной операцией сложения его чисел. Число нуль не принадлежит множеству N и поэтому его нельзя подставлять в равенство $a + 0 = 0 + a = a$ вместо символа 0. Ясно, что в множестве N не существует элемента 0, такого, что $a + 0 = 0 + a = a$ для любого a из N. Стало быть, операция сложения натуральных чисел не удовлетворяет закону 2. Следовательно, множество N не является группой.

Отмечается также, что для любого натурального числа a противоположное ему отрицательное число не принадлежит множеству натуральных чисел. Поэтому на множестве N для любого a не существует такого $–a$, что $a + (–a) = (–a) + a = 0$. Следовательно, закон 3 не справедлив для операции сложения на N.

2. Рассмотрим множество неотрицательных целых чисел M с определенной на нем операцией сложения. Очевидно, для операции сложения справедливы законы 1 и 2. Для положительного целого числа противоположное ему отрицательное число уже не принадлежит M. Отсюда следует, что закон 3 не справедлив для операции сложения чисел из M и поэтому множество M не является группой.

3. Рассмотрим три целых числа: –1, 0, 1, из множества целых чисел с операцией сложения. Очевидно, для сложения чисел –1, 0, 1 справедливы законы 1–3. Но число $1 + 1 = 2$ уже не принадлежит множеству чисел –1, 0, 1 (является «чужим» числом!). Поэтому операция сложения не определена на множестве чисел –1, 0, 1. Следовательно, это множество не является группой.

Приводятся другие примеры групп.

1. Рассмотрим числа ноль 0 и 1 из множества целых чисел. Поскольку $1 + 1 = 2$, множество чисел 0, 1 не является группой. Однако изменим равенство $1 + 1 = 2$, положив $1 + 1 = 0$. Очевидно, множество чисел 0, 1 с определенной на нем новой операцией сложения + является группой с таблицей сложения 3.

2. Рассмотрим вращения отрезка AB (рис. 4.6) вокруг его центра O по плоскости, являющиеся его самосовмещениями. При этом будем считать совпадающими вращения отрезка, отличающиеся друг от друга на целое число поворотов на 360º. Вращения, при которых точка A переходит в эту же точку, обозначим через 0; вращения, при которых точка A переходит в точку B, обозначим через 1.

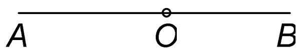


Рис. 4.6

Сложением вращений назовем последовательное их выполнение. Очевидно, множество вращений 0, 1 с определенной на нем операцией сложения + является группой S с таблицей сложения

+	0	1
0	0	1
1	1	0

3. Легко проверить, что множество многочленов $ax = b$, где a, b – произвольные числа, с операцией сложения многочленов является группой. В этой группе нолем 0 является многочлен $0x +0$. Для многочлена $ax + b$ противоположным многочленом является многочлен $-ax - b$.

4. Напомним таблицу сложения вращений квадрата, являющихся его самосовмещениями:

+	n_0	n_1	n_2	n_3
n_0	n_0	n_1	n_2	n_3
n_1	n_1	n_2	n_3	n_0
n_2	n_2	n_3	n_0	n_1
n_3	n_3	n_0	n_1	n_2

Это множество является группой, в которой ноль 0 есть вращение на 0 градусов, а противоположными являются вращения, сумма градусных величин которых равна 0°.

Таблица сложения, согласно которой выполняется операция сложения элементов группы, называется *таблицей Кэли*, по имени немецкого математика Артура Кэли. Он первый применил такие таблицы для записи сложения элементов группы. Таким образом, группа вращений квадрата является группой с таблицей Кэли № 4 [150, с. 99–103].

На основе изученного таким образом понятия группы далее в 10–11-м классах можно следующим образом изложить понятие произвольной алгебраической операции.

Сначала определяется, что упорядоченной парой (a, b) называется двухэлементное подмножество $\{a, b\}$ элементов множества, в котором элемент a находится на первом месте. Поэтому (a, b) и (b, a) – различные пары.

Затем объясняется, что операции возведения числа $a \in R$ в n-ю степень, взятия логарифма производятся с одним числом a. В отличие от этих операций, операции умножения чисел из R, сложения векторов являются бинарными. Поскольку операции производятся с двумя элементами множества, понятно, почему в названии операции имеется приставка «би-» (напомним, что «би» в переводе с латинского означает «два»).

Далее дается общее определение алгебраической операции. Пусть A – непустое множество. Говорят, что на множестве A задана бинарная алгебраическая операция, если *каждой* упорядоченной паре элементов из A поставлен в соответствие по некоторому правилу *единственный* элемент этого же множества A.

Определение необходимо прокомментировать: правило, по которому каждой упорядоченной паре чисел из R (векторов) ставится в соответствие их произведение (сумма), является алгоритмом умножения «столбиком» (правилом «параллелограмма»). Правила, или описания, с помощью которых задаются или описываются бинарные алгебраические операции, могут быть самыми разными. Например, описывается формулой $c = \frac{a+b}{2}$ правило, задающее на множестве R бинарную операцию, по которой каждой упорядоченной паре (a, b)

чисел ставится в соответствие число $\frac{a+b}{2}$. Нельзя назвать формулой правило, по которому каждой упорядоченной паре (a, b) чисел из N ставится в соответствие (находится) наибольший общий делитель *НОД* (a, b).

Кратко бинарную алгебраическую операцию на произвольном множестве A обозначают символом «*» и пишут $a * b = c$. Например, $a * b =$ *НОД* (a, b), или $a * b = \frac{a+b}{2}$. При этом $a * b$ называют результатом операции с элементами a и b. Когда речь идет об одной и той же операции, слова «бинарная алгебраическая» обычно опускаются.

Для наиболее употребительных операций зафиксированы обозначения: «+», «–», «×», «:» – для арифметических операций на множестве R и $\cap$, $\cup$ – для операций с множествами.

После этого приводятся примеры множеств с бинарными алгебраическими операциями:

1. Множество n-элементных подстановок с операцией умножения.
2. Множество многочленов (одной переменной с действительными коэффициентами) с операциями сложения, вычитания, умножения.
3. Множество преобразований и функций с операцией композиции.
4. Множество поворотов квадрата с операцией сложения поворотов, означающей последовательное их выполнение.
5. Множество R с операцией $a \nabla b = \max(a, b)$, где есть большее из чисел a и b.
6. B (M) – множество всех подмножеств множества M с операциями объединения $\cup$ и пересечения $\cap$.

Важную роль в определении алгебраической операции играет понятие упорядоченной пары. Поэтому следует заметить, что, подставляя в равенство $a * b = b * a$ вместо знака «*» символ соответствующей операции, можно проверить, что для операций из примеров 1, 3 несправедлив коммутативный, т. е. переместительный, закон. Именно по этой причине в определении бинарной алгебраической операции говорится об упорядоченной паре элементов.

Далее следует вернуться к самому определению алгебраической операции и объяснить подробнее, что означают слова «на множестве A задана *бинарная алгебраическая операция*».

Для того, чтобы операция была задана на множестве A, по определению предъявляются три требования:

1. *Существование* результата. Результат $a * b$ операции «*» должен существовать или быть известен для *каждой* пары элементов a, b множества A. Например, для пары a, 0 на множестве R не существует результат операции $a * b = \frac{a}{0}$. На множестве R не каждой пары (a, b) существует результат операции $a * b = \sqrt{ab}$ извлечения корня.

2. *Единственность* результата. Результат $a * b$ операции «*» должен быть *единственным*.

Например, результатом операции $\sqrt{ab}$ являются два противоположных числа. Поэтому есть соглашение считать результатом этой операции арифметический корень, т. е. положительное число.

3. *Замкнутость* результата. Результат $a * b$ операции «*» на множестве A должен принадлежать этому же множеству. Например, результат операции вычитания на множестве N может быть отрицательным числом и, следовательно, может не принадлежать N. Поэтому вычитание на N не является бинарной алгебраической операцией. На множестве Z целых чисел вычитание – бинарная алгебраическая операция.

Следует заметить, что бинарная алгебраическая операция на множестве A является отображением φ множества всевозможных пар элементов A (декартова квадрата A^2) в это же множество A. Если при отображении φ паре соответствует элемент c, то вместо $\varphi(a, b) = c$ обычно пишут $a * b = c$. Элемент c называется еще *композицией* элементов a и b.

Сообщается, что наиболее часто используются аддитивная и мультипликативная формы записи бинарной операции. При аддитивной записи операции ее называют *сложением*, а элемент $a + b$ – *суммой*. При мультипликативной записи операцию называют *умножением*, а ее результат элемент ab – *произведением*.

Отметим, что в программе для 10-го класса [150] предусмотрено изучение решеточных операций (в частности, таблиц Кэли этих операций) (прил. 4), что также может быть использовано в предложенной методике.

Итак, основными методическими особенностями изучения понятий алгебраической операции и алгебры являются следующие. Во-первых, обеспечивается преемственность изучения на основе наглядных понятий группы вращений правильного треугольника и квадрата, групп целых чисел по сложению и др. Во-вторых, разъясняются признаки произвольной алгебраической операции, раскрывающие суть ее определения. В третьих, используются внутрипредметные связи математики (использование понятий вектора, наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя, многочлена, функции и др.).

4.7. Особенности методики изучения понятия математической модели

Понятие «математическая модель» является ключевым в описании сути термина «математическое моделирование», трудно обозримого в своей современной полноте и глубине, особенно в изложении для школьников. Поэтому проблемы методики изучения этого понятия в школе особенно трудноразрешимы.

Глубокий, многообразный смысл понятия идеальной математической модели, существующей лишь в сознании, даже профессиональными математиками воспринимается по-разному. Специалист в области математического анализа привычно отождествляет это понятие с одними важными признаками «своих» математических моделей, специалист в области современной алгебры – с другими важными признаками. Как известно, многообразие современных видов математического моделирования и, соответственно, математических моделей настолько велико, что его можно уподобить безграничному океану со многими сотнями островов, соответствующих конкретным типам задач [131, 133, 164]. Таким образом, даже краткое описание всех их отличительных признаков потребует издания многих сотен томов.

Таким образом, понятие модели настолько объемно и глубоко, что его в принципе следует считать неопределяемым, как и понятие множества, алгоритма и т. д. В силу этого в литературе для факультативных занятий по математике для школьников отсутствуют какие-либо методические особенности изложения многогранной сути самого понятия математической модели. Например, в широко известной книге Н. Я. Виленкина, Л. П. Шибасова, З. Ф. Шибасовой [25] в предметном указателе нет даже самого термина «модель».

В литературе по информатике объяснение этого понятия традиционно начинается обычно с простых примеров из физики, химии, биологии и других наук, а также из окружающей жизни: модели – это макеты, таблицы, словесные описания, чертежи, планы действий и пр. [12, 29]. В статье А. Я. Фридланд и И. А. Фридланд, посвященной методологии моделирования, описание понятия модели начинается со слов о том, что модель – «реальный физический объект или процесс» [Цит. по: 159, с. 175].

Современные математические модели многообразны, поэтому неудивительно, что подходы в определении понятия модели различаются даже в учебниках по информатике для школ. Приведем характерные примеры.

«Четко сформулировать (хорошо поставить задачу) – это значит высказать те предположения, которые позволят из всего многообразия информации об изучаемом явлении или объекте выделить исходные данные, определить, что будет служить результатом и какова связь между исходными данными и результатами. Все это – предположения, исходные данные, результаты и связи между ними – называют моделью задачи» [32, с. 32]. Моделирование с точки зрения авторов пособия [32] – это решение задачи на ЭВМ.

А. Г. Кушниренко, Г. В. Лебедев, Р. А. Сворень при определении понятия *информационной модели* отталкиваются от понятия модели, не объясняя, что такое модель вообще. «Набор величин, содержащий всю необходимую информацию об исследуемых объектах и процессах, в информатике называют информационной моделью» [145, с. 170].

В учебнике по информатике для учащихся 7–9-х классов под редакцией Н. В. Макаровой понятие модели трактуется так: «*Модель – аналог (заместитель) оригинала (объекта), отражающий некоторые его характеристики.* Этот аналог служит для хранения и расширения знания об оригинале (объекте). Разнообразие моделей определяется разнообразием *целей,* поставленных при их создании» [74, с. 153].

В результате попыток «объять необъятный смысл» понятия модели (как и понятия математики) в литературе по информатике для учащихся школ возникла классификация моделей, подобная философской. Так, модели делятся на материальные (физические, формальные, функциональные, геометрические и пр.) и мысленные (информационные, интуитивные, образные, образно-знаковые, знаковые и пр.) [128].

С учетом приведенных описаний разных трактовок смысла понятия математической модели можно предложить следующую методическую схему изучения этого понятия.

1. *Математическая модель как абстрактный образец решения задачи*. Любой старшеклассник знает смысл понятий «модель обуви», «модель одежды» и т. п. Слово «модель» ассоциируется прежде всего с моделью одежды, автомашины или с другой материальной моделью, т. е. каким-то новым, более совершенным, готовым для массового использования образцом. Поэтому на основе осознания школьниками потребности в решении математических задач следует дать первое представление о математической модели как о «рекламном» математическом *образце* (теореме, формуле, правиле и т. д.), готовом для массового использования в приложениях, т. е. для решения различных задач или хотя бы *однотипных* задач. Только при условии однотипности этот образец (как и модель одежды) будет пригоден для массового использования в решении задач. Подчеркнем, что этот элемент массовости очень важен для восприятия школьников. Здесь уместно сослаться на общеизвестную теорему Пифагора как великолепный образец математической «красоты», которой должно желать в понятии модели (красоты в смысле неожиданности, изящества формулировки теоремы, нетривиальности доказательства и универсальности приложений).

Итак, при первоначальном знакомстве с понятием модели оно должно быть представлено как готовый *результат* исследования объекта, пригодный и удобный для использования на практике. В качестве результата могут быть даны формула, теорема, правило (алгоритм), метод и т. д. При этом не надо бояться обвинений в показе школьникам каких-то готовых результатов исследования (объекта или явления), поскольку в школьной программе имеется достаточно тем для развития умения решать задачи, тем более что отсутствие самого решения дает так называемый эффект многосерийного кино, когда изложение обрывается на самом интригующем эпизоде и тем самым вызывает острый интерес к излагаемому.

Необходимо демонстрировать такие образцы, которые произведут большое впечатление на обучаемых своей неожиданностью, универсальностью, простотой и нетривиальностью при получении конкретных практических результатов в различных областях. Лучшие образцы могут быть найдены прежде всего на основе использования внутрипредметных и межпредметных связей математики [12, 75, 106]. Типичными «модельными» образцами являются физические формулы (в частности, формула для расчета времени падения тела с заданной высоты). Немало хороших образцов математических моделей можно найти в популярных изданиях и литературе, предназначенной для факультативного изучения [25, 29, 30, 33, 50, 72, 223].

Напомним, что методологической основой достижения гармонии между формальным языком математики и неформальными языками других наук в моделировании является понятие полной цепочки использования компьютера. Поэтому «желательны обучение и тренировка в самостоятельном построении полной цепочки использования компьютера: реальная ситуация, математическая модель, алгоритм, программа, симуляция решения, анализ результатов» [99, с. 13]. Не случайно авторы учебника [75] ввели понятие «модель задачи» как образец решения задачи на ЭВМ.

2. *Математическая модель как важнейший этап в построении полной цепочки использования компьютера*. Раскрытие понятия математической модели на основе понятия полной цепочки использования компьютера соответствует идее Л. С. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств (см. подп. 2.2.2). Для такой реконструкции обстоятельств «жизни» и необходимы практические задачи, позволяющие обучить построению полной цепочки использования компьютера. Яркие примеры такого построения на языке теории графов, геометрии и тригонометрии, дифференциального и интегрального исчисления и т. д. необходимы для популярного объяснения *роли* и *места* математической модели в процессе исследования объекта или явления. Понятие математической модели, «вырванное» из процесса исследования, не отражает сам процесс исследования и поэтому не может служить ориентиром в обучении.

Изучение понятия модели, осуществляемое в рамках обучения построению полной цепочки использования компьютера, должно сопровождаться (естественно) объяснением смысла следующего ряда терминов.

Реальная ситуация – это осознание субъектом потребности в изучении какого-либо объекта или явления. Например, объектом может быть схема железнодорожных путей, а реальной ситуацией – осознание необходимости найти такой вариант обхода железнодорожных путей, при котором каждое звено пути между пунктами можно обойти только раз (проблема путевого обходчика, решаемая с помощью эйлеровых графов).

Выбор языка – это поиск той темы, раздела из данной математической дисциплины (алгебры, геометрии, тригонометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теории графов и т. д.), на языке терминов которого возможно составить схему (план) решения задачи. Случается так, что для решения сложной задачи необходимо использовать знания из различных тем или дисциплин.

Разработка модели – это процесс нахождения плана (схемы, алгоритма) использования определений, теорем, формул или методов, на основе которого можно подробно описать и обосновать решение задачи. Яркий пример такого плана – этапы решения стереометрической задачи (запись данных и иллюстрация их на рисунке, обоснование дополнительного построения, решение и его анализ, приведение ответа к каноническому виду).

Математическая модель – это готовый *результат* решения задачи, пригодный и удобный для использования на практике: формула, теорема, правило или какой-нибудь другой результат (алгоритм, чертеж) и т. д.

Алгоритм – это последовательность действий, которую надлежит выполнить исполнителю (конторским счетам, калькулятору, машине Поста, компьютеру) для получения конкретного ответа при заданных исходных данных в условии задачи.

Программа – это последовательность команд языка программирования, на котором дано точное описание алгоритма действий (вычислений) исполнителя.

Симуляция решения – это проверка на простом примере правильности построения полной цепочки использования компьютера в процессе решения задачи. Если обнаружено несоответствие результата решения исходным данным, то необходимо выявить слабое звено в построении цепочки. В связи с этим целесообразно использование задач на обучение выявлению того или иного некорректного звена (этапа) в полной цепочке использования компьютеров (задачи на некорректно построенные цепочки).

Анализ результата – это выявление пригодности или непригодности (частичной) полученной математической модели (математического образца) для массового математического или прикладного использования. Особенно яркие примеры такого анализа можно продемонстрировать на основе понятий комбинаторики (при анализе азартных игр, возможностей выигрыша в лотереях), теории вероятностей и математической статистики.

Для полноценного раскрытия смысла понятия математической модели на основе построения полной цепочки использования компьютера требуется поэтапное профильное обучение, в процессе которого осуществится неоднократный (и на более высоком, чем ранее, уровне) возврат к объяснению смысла этого понятия.

Далее следует объяснить, что существует очень много видов математического моделирования, классифицируемых по тем или иным математическим методам или, в более широком смысле, – языкам математики, на основе которых решаются задачи (проводятся большие исследования). Необходимо привести примеры моделирования, в том числе и с использованием компьютера, на языке «непрерывной» математики (задачи на нахождение наименьшей или наибольшей площади, объема и т. д.), дискретной математики (нахождение кратчайшего маршрута, минимального остового дерева и т. д.), линейного программирования (нахождение оптимального плана перевозок, выпуска продукции и т. д.), теории игр [28] и т. д. Целесообразно продемонстрировать простейшие примеры совместного использования языка дифференциального и интегрального исчисления и языка дискретной математики (примеры асимптотических оценок комбинаторных чисел частичных сумм рядов и др.).

3. *Модель есть множество с заданными на нем операциями и отношениями заданного типа (т. е. абстрактная структура)*. Напомним, что понятие *тип операции* и отношения (способ определения или задания, арность, свойства и т. д.), образно говоря, играет такую же важную роль в классификации математических моделей, как и понятие *атомного веса* элемента при создании периодической таблицы химических элементов Менделеева.

При дальнейшем изложении следует объяснить, что данное определение универсально с точки зрения математического моделирования. Другим важнейшим его достоинством является то, что оно позволяет избежать очень сложного описания всех видов математического моделирования. Вместо этого на основе типа модели дается возможность уяснить и запомнить самые главные «параметры» каждого вида моделей, что существенно облегчает запоминание, классификацию и описание многообразных видов математического моделирования.

Очень важно провести исторический обзор возникновения понятия математической модели, причем следует начать с примера модели натуральных чисел как счетного множества с заданными на нем операциями сложения, умножения и отношением линейного порядка. Далее целесообразно рассказать об истории возникновения моделей геометрии Евклида (Лобачевского, Римана), дифференциального и интегрального исчислений, алгебры высказываний.

4. *Модель как представитель класса математических моделей*. Этот смысл понятия математической модели, по-видимому, целесообразно объяснять в рамках физико-математического профиля обучения ДМ. При этом следует начать с того, что в математике (например, в современной алгебре) изучаются классы математических моделей, т. е. множества, образованные теми и только теми моделями, на каждой из которых истинны заданные аксиомы (в частности, тождества), описывающие конкретные свойства моделей этого класса. В качестве примера можно привести аксиомы, определяющие понятия группы, полугруппы, кольца, эквивалентности, частично упорядоченного множества, решетки, и показать содержательные различия между моделями (интерпретациями аксиом).

Как видно из изложенной методической схемы, не надо пытаться в рамках «жесткой» модели обучения ДМ давать *общее* определение математической модели (см., например, [133, с. 44]), поскольку любое общее определение ограничит глубокий многообразный смысл этого понятия и окажется непосильным для восприятия школьников. К тому же рассмотренное выше определение модели как абстрактной структуры является общепринятым в современной дискретной математике, достаточно посильным для восприятия при условии соответствующей пропедевтики его изучения и поэтому хотя бы отчасти может удовлетворить целям обучения ДМ.

В заключение полезно сделать краткий обзор философских проблем моделирования (проблем математизации, компьютеризации). Целесообразно дать представление о классификации видов моделирования: математического, информационного, стохастического, имитационного; привести примеры поиска оптимального языка моделирования (в зависимости от видов используемых переменных, операций в инженерно-технических, экономических, социологических, лингвистических и других исследованиях). Все это расширит представления учащихся об определяющей роли понятий модели и языка моделирования.

Итак, основными методическими особенностями изучения понятия модели являются следующие. Во-первых, понятие модели рассматривается с разных точек зрения, а именно: математическая модель есть абстрактный образец решения задачи, важнейший этап в построении полной цепочки использования компьютера, множество с заданными на нем операциями и отношениями заданного типа, представитель класса математических моделей. Тем самым осуществляется ранняя пропедевтика изучения различных видов моделирования с использованием компьютера, основанных на различных математических языках (классической математики, абстрактной алгебры, математического программирования, теории моделей и др). Во-вторых, методическим ориентиром изучения понятия модели является пропедевтика гармоничного использования формального языка математики и неформального языка других наук. В-третьих, разъясняется содержательная суть понятий, являющихся терминологической основой понятия полной цепочки использования компьютеров. В-четвертых, предусмотрен исторический обзор возникновения понятия математической модели, вызывающий у учащихся большой интерес к изучению этого понятия и проясняющий формальную суть изучаемого.

4.8. Особенности методики изучения математического языка, алгоритма и алгоритмической разрешимости

Методика изучения математического языка, алгоритма и алгоритмической разрешимости задачи на выбранном для ее решения математическом языке позволяет учащемуся выработать представления о проблемах моделирования в решении задач и поэтому играет важную роль в формировании общей математической культуры их решения.

При изучении математического языка следует исходить из концептуальных различий понятий: формального языка (например, в СКМ и математической лингвистике), формальной системы (например, теорий, исчислений в математической логике и алгебре), формального языка в КТ («представимого машиной») [218, 219].

Необходимо предусмотреть последовательное изучение следующих основных понятий: алфавит, формула (слово), аксиома, правило вывода, теорема, доказательство, формальная теория, интерпретация формальной теории, метаязык. Процесс изучения этих понятий целесообразно сопровождать примерами корректного и некорректного перевода формулировок практических задач на математический язык.

С точки зрения поэтапности обучения в школе следует выделить три этапа, определяющие основные особенности методики изучения математического языка: предобучения, предпрофильного и профильного обучения ДМ.

Предобучение ДМ (с 1-го по 7-й класс). Как следует из характеристики этапа предобучения (см. п. 3.5), в его начале возможна ранняя пропедевтика изучения понятий алфавита, формулы (слова) и простейших преобразований формул (слов) по заданным правилам. Можно решать задачи на уяснение различий между произвольным набором букв алфавита (в частности, русского) и словом из этих же букв, имеющим смысловое значение. Приведем примеры задач такого типа.

1. По заданным анаграммам найти исходные слова:

а) амам; б) апап; в) цяза; г) колв; д) околбок.

2. Не переставляя буквы в слове, последовательно заменить одну букву на другую так, чтобы из одного слова получилось другое.

Записать алгоритм превращения слова:

а) «рак» в слово «маг»;

б) «рама» в слово «кора».

(Заметим, что данная задача является задачей на преобразование формул (слов) языка по «смысловым» правилам.)

3. Подобрать такой слог, чтобы он был последним слогом для первого слова и первым для второго:

а) по (…) а (ответ: «ПоСОХ», «СОХа»);

б) по (…) ва (ответ: «ПоМОЛ», «МОЛва»).

Последняя задача является задачей на определение формулы (терма) по известной ее (его) части или в соответствии с заданными условиями.

Как следует из характеристики психологических особенностей среднего звена обучения, наряду с тождественными преобразованиями «школьных» алгебраических выражений можно предложить задачи на преобразования произвольных формул (слов) над заданным алфавитом по заданным формальным простейшим правилам, являющимся, например, тождествами коммутативности ($xy = yx$), идемпотентности ($xx = x$) и т. д. [159]. Можно предложить, например, задачи типа следующей.

Задача. В слове «комбинатор» можно менять местами любые две соседние буквы и вместо двух одинаковых оказавшихся рядом букв можно записать одну такую же. Доказать, что в результате таких изменений получится слово «комбинаторика».

Целесообразно решение задач на подсчет числа всех одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

Задача. Алфавит племени мумбо-юмбо состоит из трех букв: *А*, *Б*, *В*. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырех букв. Сколько слов в языке племени мумбо-юмбо?

На основе различных упорядочений множеств «предметов» (сочетаний, перестановок, размещений таких множеств), биекций, операций пересечений и объединения этих множеств можно расширить круг возможных задач, предназначенных для изучения понятий алфавита и формулы (слова) формального языка. Дополнительно можно составить другие задачи, например, путем модифицикации некоторых задач из ряда книг [18, 30, 33, 112].

Предпрофильное обучение ДМ (8–9-й классы). На этом этапе целесообразно осуществлять систематическую пропедевтику изучения понятий алфавита, формулы (слова), аксиомы, правила вывода, теоремы, доказательства, формальной теории, интерпретации формальной теории. В рамках базового учебного плана по геометрии из всех перечисленных понятий предусмотрено первоначальное изучение только понятий аксиомы, теоремы и доказательств (простых теорем).

В этот период необходимо подготовить учащихся к восприятию аксиом кольца посредством изучения кольца остатков от деления на 4 и пятиэлементного поля (алгебры вращений) [150]. Затем следует приступить к изучению преобразований выражений (слов) алгебры высказываний.

В качестве произвольных слов над заданным алфавитом (больших латинских букв), естественно, рассматриваются простые высказывания [150]. После изучения в 8-м классе таблицы истинности логического умножения и сложения можно на основе примеров научить учащихся составлять из простых высказываний (слов) более сложные. После доказательства с помощью таблиц истинности переместительного, сочетательного и распределительного законов логических действий можно рассмотреть простейшие преобразования логических выражений. После того как учащиеся усвоят законы идемпотентности и операцию логического отрицания, целесообразно показать отличие законов алгебраических преобразований «школьных» алгебраических выражений (слов) от законов преобразований логических выражений (логических слов), а также различие в порядке выполнения операций (см. [150]). В завершение изучения темы следует обсудить различие алфавитов, формул (слов), аксиом (таблиц истинности и законов арифметических действий), правил вывода (преобразований), теорем (доказываемых формул) алгебры буквенных числовых выражений и алгебры высказываний.

Далее можно осуществить интерпретацию аксиом кольца: в кольце целых чисел, в кольце многочленов, в кольце остатков от деления на 4, пятиэлементном поле (алгебре пятиугольника) [150]. Затем следует показать невозможность интерпретации аксиом кольца в алгебре высказываний и алгебре векторов.

При «жесткой» модели обучения ДМ возможно изучение более общих тем: «Алгебра высказываний», «Алгебра пятиугольника» и «Алгебра кольца остатков» [150].

Профильное обучение (10–11-й классы). Из характеристики данного этапа следует, что на основе уже изученного ранее можно перейти к изучению понятия формальной теории и ее интерпретации (с учетом профиля обучения).

При обучении по любому профилю целесообразно рассмотреть несколько примеров.

Пример. Формальная теория палиндромов в алфавите $\{a, b\}$.

Палиндромом является слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево. Такими словами в русском алфавите являются, например, слова «топот» и «потоп».

Аксиомы теории палиндромов – формулы $A_1 = a$, $A_2 = a$, $A_3 = aa$, $A_4 = bb$.

Правила вывода:

1) $A| -aAa$; 2) $A| -bAb$.

Легко убедиться, что теоремами этой теории являются любые непустые слова – палиндромы в алфавите.

Пример теоремы

Теорема: *abababa*.

Доказательство. Рассмотрим аксиому $A_2 = b$. На основании правила вывода $A| -aAa$ при $A = b$ получаем $B_1 = aba$. По правилу вывода $A| -bAb$ при $A = B_1$ получаем $B_2 = babab$. Из правила $A| -aAa$ при $A = B$ следует *abababa*.

Изменяя буквы алфавита и правила вывода, можно получить достаточное количество подобных примеров.

При обучении на углубленном уровне далее целесообразно дать представление об исчислении высказываний и аксиоматическом методе построения формальных теорий: геометрии Евклида, Лобачевского, векторного пространства, теории групп и полугрупп, колец, решеток. Изложение желательно сопровождать яркими историческими экскурсами (фактами из жизни Лобачевского, Гаусса, Больяй, Галуа и др.).

При обучении на базовом и общем уровне можно ограничиться только примерами «палиндромного» типа, выводом простейших свойств элементов произвольной коммутативной группы и ассоциативно-коммутативного кольца, изучением аксиом произвольного векторного пространства (с последующими различными интерпретациями).

Важнейшим в изучении алгоритма и алгоритмической разрешимости является «дискретный» подход, заключающийся в решении разнообразных алгоритмически разрешимых задач (из теории графов, комбинаторного анализа, булевых функций и других разделов ДМ). Напомним, что под алгоритмической разрешимостью понимается решение проблемы существования алгоритма (решения однотипных задач). При этом задача является алгоритмически разрешимой или неразрешимой, если существует или, соответственно, не существует алгоритм ее решения на используемом математическом языке. На основе понятия алгоритмически разрешимой задачи сформировалось понятие исполнителя (алгоритма) и было уточнено само понятие алгоритма. В результате вошли в обиход понятия эквивалентных и эффективных алгоритмов, являющиеся ключевыми для понимания сути и корректности вычислений на компьютере.

На наш взгляд, наиболее полно суть «дискретного» подхода в изучении понятий алгоритма и алгоритмической разрешимости отражает следующая методика [150].

В *8-м классе* на основе ряда занимательных, практических примеров и задач, рассмотрения вращений правильных многоугольников изучаются таблицы Кэли операций кольца Z_4 остатков от деления на 4, пятиэлементного поля P и таблицы истинности алгебры высказываний B. Вычисляются значения буквенных выражений алгебр Z_4, P, B и доказываются основные законы операций.

В *9-м классе* предлагаются упражнения на доказательство тождеств и решение уравнений (в том числе с параметрами) в каждой из алгебр Z_4, P, B. Изучаются сходство и различие свойств операций, методов доказательства тождеств и решений уравнений.

Вводятся персонажи Смекалкин (см. [262]), Ленивкин и совсем не знающий математику Кнопкин. Рассматриваются различные алгоритмы решения этими персонажами одних и тех же практических задач в кольце целых чисел Z и поле рациональных чисел Q, алгоритмы вычислений и решения простых уравнений в алгебрах Z_4, P, B.

10-й класс. Предлагаются следующие виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и конечным числом действий (исполнителя). Осуществляются вычисления в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B на микрокалькуляторах, различающихся перечнем выполняемых операций и размером табло. Выясняется возможность вычисления точного ответа задачи. Определяется число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Приводятся примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина, алгоритмы решений квадратного уравнения в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B.

Далее рассматриваются устройство, команды и примеры программ машины Поста, виды программ, массивы и их объединения, программы сложения натуральных чисел и некоторые программы вычитания, умножения и деления натуральных чисел.

11-й класс. В этом классе приступают к изучению алгоритмов построений циркулем и линейкой, нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, поиска эйлеровой цепи в графе (с предварительным изучением соответствующих понятий).

После этого изучают следующее:

1. Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

2. Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$; $xy + x + y + 1$ и др.

3. Устройство, команды и примеры программ машины Тьюринга. Программа сложения натуральных чисел. Понятие автомата. Примеры автоматов. Понятие исполнителя. Уточнение понятия алгоритма. Эквивалентные и эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и Тьюринга к ЭВМ.

4. Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. О разрешимости уравнений в радикалах. Разрешимость уравнений в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B. Распознавание конечных изоморфных (равных) графов.

5. О проблеме разрешимости. Разрешающие алгоритмы. Полиномиальное и экспоненциальное время работы алгоритма. Новые примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач.

Естественно, с учетом профиля при «мягкой» модели обучения ДМ возможны сокращения или модификации предложенной методики.

В заключение изучения понятия алгоритмической разрешимости учащимся следует дать классификацию видов задач. Вначале необходимо предложить задачи с неверно составленным условием, с ненайденным решением, не имеющие решения. Далее естественно перейти к задачам, которые имеют решение в выбранном математическом языке, и к первоначальным задачам на понятие алгоритма. Из задач с уже найденным решением выделяются задачи с бесконечным числом действий (исполнителя алгоритма) и с конечным числом действий. Благодаря таким задачам обучаемые впервые знакомятся с проблемой существования алгоритма решения. Здесь целесообразно отдельно обсудить проблему разрешимости уравнений в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B. Далее нужно рассмотреть задачи на составление эффективного алгоритма. При этом в качестве исполнителя можно предложить различные виды микрокалькуляторов, машину Поста и т. д.

Важную роль в «задачной» классификации играют занимательные, практические и теоретико-модельные задачи: на проблему изоморфизма, проблему разрешимости (существования алгоритма решения на выбранном математическом языке); задачи на выразимость на языке первого порядка тех или иных понятий; на составление алгоритмов по всем изученным ранее разделам как классической, так и дискретной математики. Все это очень важно с точки зрения развития общей культуры в приложениях математики.

Итак, основными методическими особенностями изучения математического языка, алгоритма и алгоритмической разрешимости являются следующие. Во-первых, предусмотрено изучение следующих понятий, раскрывающих содержательный смысл понятий, перечисленных выше: алфавит, формула (слово), аксиома, правило вывода, теорема, доказательство, формальная теория, интерпретация формальной теории, метаязык. Во-вторых, осуществляется поэтапное преемственное изучение перечисленных понятий. В-третьих, при изложении материала учитываются психологические особенности учащихся на каждом этапе обучения. В-четвертых, реализуются внутриматематические связи изучаемого (с комбинаторикой, с тождественными преобразованиями «школьных» алгебраических выражений).

Заключение

В ходе проведенного нами методологического, теоретического и экспериментального исследований установлено, что проблема разработки методической системы обучения студентов педагогических специальностей в аспекте интеграции образования является актуальной и требует всестороннего изучения. В данной работе обоснованы необходимость и возможность ее решения в рамках содержательного направления интеграции образования.

Решены задачи исследования, поставленные в соответствии с проблемой исследования, и в результате разработана концепция методической системы обучения будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. Для студентов соответствующих профилей подготовки разработаны различные модели реализации методической системы обучения и охарактеризованы их компоненты.

Обосновано, что в разработке компонентов методической системы обучения дискретной математике и ее различных моделей в зависимости от специальности фундаментальную роль играют следующие принципы:

- адекватности языка обучения, являющегося основным в формировании умений гармоничного сочетания языка математики, языка науки в соответствующей профессиональной научной области, и уникальных возможностей современного компьютера;
- единства в обучении непрерывной и дискретной математике, являющегося основой интеграции содержания обучения математическому моделированию будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов;
- адекватного специальности студентов корректного использования систем компьютерной математики и компьютерных технологий, что необходимо для выработки у них умения адаптироваться к постоянно происходящим в области информатики изменениям.

В процессе разработки концепции охарактеризованы предмет и функции современной дискретной математики и ее фундаментальная роль в современной математической культуре. Кроме того, исходя из анализа имеющихся подходов в реализации содержательного направления интеграции высшего педагогического образования раскрыт интеграционный потенциал дискретной математики в обучении математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. При этом установлено следующее:

1. Дискретная математика наряду с непрерывной математикой в силу их фундаментальной роли в математическом моделировании и вычислительных процессах лежит в основе методологии реализации существующих подходов в содержательном направлении интеграции математической, естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

2. Доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического познания) лежат в основе отбора содержания обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

3. Обучение дискретной математике будущих учителей математики и информатики в магистратуре должно быть направлено на формирование у них умения реализовывать обучение учащихся начальным элементам математического моделирования и разработки алгоритмов вычислений с учетом профиля обучения. Практическая реализация этого обучения основана на деятельностном подходе в работе с *определениями* фундаментальных понятий и принципиальными *теоремами* курса дискретной математики, имеющими прикладное значение, и должна учитывать сложившуюся систему организации научно-исследовательской работы студентов.

4. Дискретная математика играет фундаментальную роль в формировании у инженеров-педагогов умений научной, дидактической и методической переработки содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки.

Переработка содержания учебного материала означает проведение структурно-логического анализа содержания дисциплины, в процессе которого выделяются опорные математические понятия и методы, составляющие математический аппарат изучаемой технической дисциплины, необходимый для обучения учащихся математическому моделированию технических объектов и разработке алгоритмов вычислительных процессов, реализующих технологию их функционирования в отрасли производства.

При переработке содержания осуществляется методическая редукция этих понятий, т. е. трансформация математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания учащихся.

В ходе исследования разработан доступный и рациональный подход в изучении дискретной математики в вариативной части дисциплин профессионального цикла обучения будущих учителей математики и информатики на уровне бакалавриата, основанный на систематическом применении основных классических комбинаторных конфигураций и их свойств, производящих функций и асимптотических оценок и приближений в решении перечислительных задач дискретной математики и анализе эффективности алгоритмов решения задач математического моделирования.

Предложены направления методической специализации учителей математики, информатики и инженеров-педагогов на уровне магистратуры в зависимости от направлений обучения дискретной математике, существующих в системе высшего профессионального образования.

Разработана методическая схема реализации дискретной линии в переработке содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогической направленности подготовки) инженеров-педагогов на уровне бакалавриата.

Библиографический список

1. *Абрамян А. О.* Математизация знаний / А. О. Абрамян. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1972. 160 с.

2. *Александров П. С.* Введение в теорию групп / П. С. Александров. Москва: Учпедгиз, 1951. 125 с.

3. *Ананьев Б. Г.* Развитие психологических функций взрослых людей / Б. Г. Ананьев, Е. И. Степанова. Москва: Педагогика, 1977. 248 с.

4. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика: перевод с английского / Д. А. Андерсон. Москва: Вильямс, 2003. 960 с.

5. *Асанов М. О.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. Ижевск: НИЦ «Регуляр. и хаот. динамика», 2001. 288 с.

6. *Асеев Г. Г.* Дискретная математика: учебное пособие / Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. Ростов-на-Дону: Феникс; Харьков: Торсинг, 2003. 144 с.

7. *Балк М. Б.* Математика после уроков / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. Москва: Просвещение, 1971. 462 с.

8. *Балханов В. А.* Философско-методологические основы математизации знания / В. А. Балханов. Улан-Удэ: Бурят. кн. изд-во, 1986. 171 с.

9. *Безрукова В. С.* Интеграционные процессы в педагогической теории и практике / В. С. Безрукова; Урал. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 1994. 243 с.

10. *Белоусов А. И.* Дискретная математика: учебник для вузов / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 744 с.

11. *Беран Л.* Упорядоченные множества и решетки: перевод с чешского / Л. Беран. Москва: Наука, 1981. 64 с.

12. *Бешенков С. А.* Решение типовых задач по моделированию / С. А. Бешенков, Е. А. Ракитина // Информатика в школе: приложение к журналу «Информатика и образование». 2005. № 1. С. 1–96.

13. *Биркгоф Г.* Современная прикладная алгебра: перевод с английского / Г. Биркгоф, Т. Барти. Москва: Мир, 1976. 400 с.

14. *Блох А. Я.* Алгебраические числовые кольца и поля: методическая разработка к спецкурсу «Факультативные занятия в старших классах средней школы» / А. Я. Блох, А. А. Бухштаб. Москва: МГПИ, 1973. 63 с.

15. *Бодрикова Г. Н.* Использование межпредметных связей при обучении иностранным языкам на младших курсах языкового вуза: автореферат диссертации … кандидата педагогических наук / Г. Н. Бодрикова. Москва, 1982. 16 с.

16. *Большая* советская энциклопедия: в 50 томах. 2-е изд. Москва: Большая советская энциклопедия, 1955. Т. 36. 672 с.: ил.

17. *Борн М.* Физика в жизни моего поколения / М. Борн. Москва: Иностранная литература, 1963. 142 с.

18. *Босова Л. Л.* Развивающие задачи по информатике / Л. Л. Босова // Информатика и образование. 2000. 127 с. (Информатика – школе).

19. *Бороненко Т. А*. Компьютерная математика в педагогическом вузе / Т. А. Бороненко, Н. И. Рыжова // Информатика и образование. 2001. № 2. С. 7–10.

20. *Брунер Дж.* Торжество разнообразия: Пиаже и Выготский / Дж. Брунер // Вопросы психологии. 2001. № 4. С. 3–13.

21. *Бунимович Е. А.* Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики / Е. А. Бунимович // Математика в школе. 2002. № 6. С. 52–58.

22. *Веккер Л. М.* Психика и реальность: единая теория психических процессов / Л. М. Веккер. Москва: Смысл, 1998. 685 с.

23. *Вечтомов Е. М.* Философия математики: монография / Е. М. Вечтомов. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. 192 с.

24. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ: учебное пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. 5-е изд. Москва: Просвещение, 1996. 288 с.

25. *Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: книга для учащихся 10–11-х классов общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. Москва: Просвещение: Учебная литература, 1996. 320 с.

26. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика / Н. Я. Виленкин. Москва: Наука, 1975. 208 с.

27. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. 128 с.

28. *Воробьев Н. Н.* Теория игр / Н. Н. Воробьев. Москва: Знание, 1976. 64 с.

29. *Ворожцов А. В.* Путь в современную математику / А. В. Ворожцов. Москва: Эдиториал УРРС, 2003. 144 с.

30. *Галкин Е. В.* Нестандартные задачи по математике: задачи логического характера: книга для учащихся 5–11-х классов / Е. В. Галкин. Москва: Просвещение: Учебная литература, 1996. 160 с.

31. *Гальперин Г. А.* Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. Москва: Просвещение, 1986. 303 с.

32. *Гейн А.Г* Земля Информатика: пособие для учителей / А. Гейн. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та: Изд-во Дома учителя, 1997. 206 с.

33. *Генкин С. А.* Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Киров: АСА, 1994. 272 с.

34. *Гладкий А. В.* Формальные грамматики и языки / А. В. Гладкий. Москва: Наука, 1973. 368 с.

35. *Гласс Р.* Факты и заблуждения профессионального программирования: перевод с английского / Р. Гласс. Санкт-Петербург: Символ-Плюс, 2007. 240 с.

36. *Глушков В. М.* Введение в АСУ / В. М. Глушков. Киев: Техника, 1974. 319 с.

37. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику / В. М. Глушков. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. 324 с.

38. *Глушков В. М.* Гносеологическая природа информационного моделирования / В. М. Глушков // Вопросы философии. 1963. № 10. С. 13–18.

39. *Глушков В. М.* Кибернетика: вопросы теории и практики / В. М. Глушков. Москва: Наука, 1986. 477 с.

40. *Глушков В. М.* Кибернетика, вычислительная техника, информатика. Избранные труды: в 3 томах / В. М. Глушков. Киев: Наукова думка, 1990. Т. 1. 264 с.; Т. 2. 266 с.; Т. 3. 224 с.

41. *Гнеденко Б. В.* О математике / Б. В. Гнеденко. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 207 с.

42. *Гнеденко Б. В.* Проблемы математизации современного естествознания / Б. В. Гнеденко // Диалектика и современное естествознание: сборник. Москва: Наука, 1970. С. 82–102.

43. *Голованов Я.* Незабываемый апрель / Я. Голованов // Новый мир. 1981. № 4. С. 4–8.

44. *Гончарова Г. А.* Элементы дискретной математики: учебное пособие / Г. А. Гончарова, А. А. Мочалин. Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2004. 128 с.

45. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики: учебное пособие для студентов вузов / В. А. Горбатов. Москва: Высшая школа, 1986. 311 с.

46. *Граф Ш.* Схемы поиска неисправностей: перевод с немецкого / Ш. Граф, М. Гессель. Москва: Энергоатомиздат, 1989. 144 с.

47. *Григорьев С. Г.* Информатизация образования. Фундаментальные основы: учебник для педагогических вузов и системы повышения квалификации / С. Г. Григорьев, В. В. Гриншкун. Томск: ТМЛ-Пресс, 2008. 286 с.

48. *Гринченко Т. О.* Машинный интеллект и новые информационные технологии / Т. О. Гринченко, А. О. Стогний. Киев: Манускрипт, 1993. 164 с.

49. *Грэхем Р.* Конкретная математика. Основания информатики: перевод с английского / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Москва: Мир, 1998. 703 с.

50. *Гусев В. А.* Внеклассная работа по математике в 6–8-х классах / В. А. Гусев, А. Н. Орлов, А. Л. Розенталь. Москва: Просвещение, 1984. 286 с.

51. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения / В. В. Давыдов. Москва: Интор, 1996. 544 с.

52. *Дальма А.* Эварист Галуа, революционер и математик: перевод с французского / А. Дальма. 2-е изд. Москва: Наука, 1984. 111 с.

53. *Данилюк А. Я.* Принцип культурогенеза в образовании / А. Я. Данилюк // Педагогика. 2008. № 10. С. 3–9.

54. *Данилюк А. Я.* Теория интеграции образования / А. Я. Данилюк. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. пед. ун-та, 2000. 440 с.

55. *Деза Е. И.* Индивидуальные траектории фундаментальной подготовки учителя математики в условиях вариативного образования: диссертация … доктора педагогических наук / Е. И. Деза. Москва, 2012. 367 с.

56. *Деза Е. И.* Основы дискретной математики: учебное пособие / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. 2-е изд. Москва: URSS, 2010. 224 с.

57. *Деменчук В. В.* На пороге алгебры / В. В. Деменчук. Минск: Вышэйша школа, 1987. 144 с.

58. *Депман И. Я.* Первое знакомство с математической логикой / И. Я. Депман; О-во «Знание» РСФСР, Ленингр. отд-ние. Ленинград, 1963. 56 с.

59. *Дорофеев Г. В.* Алгебра и начала анализа. 10-й класс: учебник для общеобразовательных учреждений: в 2 частях / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова. Москва: Дрофа, 2003. Ч. 1. 320 с.

60. *Дорофеев Г. В.* Алгебра и начала анализа. 10-й класс: задачник для общеобразовательных учреждений: в 2 частях / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова. Москва: Дрофа, 2004. Ч. 2. 304 с.

61. *Дьяконов В. П.* Mathematica 4: учебный курс / В. П. Дьяконов. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 656 с.

62. *Егорченко И. В.* Фундаментализация математического образования / И. В. Егорченко // Математика в образовании: сборник статей. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2006. Вып. 2. С. 8–20.

63. *Егорченко И. В.* Фундаментализация математического образования: аспекты особенности трактовок направления реализации / И. В. Егорченко // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: состояние, перспективы: материалы Всероссийской научной конференции; Морд. гос. пед. ин-т. Саранск, 2005. С. 7–10.

64. *Епишева О. Б.* Формирование профессиональной компетентности выпускника и преподавателя профессионального учебного заведения: вопросы теории и практики: учебное пособие / О. Б. Епишева. Тюмень: ТюмГНГУ, 2010. 300 с.

65. *Еремкин А. И.* Система межпредметных связей в высшей школе (Аспект подготовки учителя) / А. И. Еремкин. Харьков: Изд-во при Харьков. гос. ун-те изд. об-ния «Вища шк.», 1984. 152 с.

66. *Ершов А. П.* Избранные труды / А. П. Ершов. Новосибирск: Наука: Сиб. изд. фирма, 1994. 413 с.

67. *Жмурова И. Ю.* Интеграционные связи дискретной математики как средство повышения эффективности профессиональной подготовки бакалавров физико-математического образования: диссертация … кандидата педагогических наук. Ростов-на-Дону, 2005. 207 с.

68. *Жолков С. Ю.* Математика и информатика для гуманитариев: учебник / С. Ю. Жолков. Москва: Гардарики, 2002. 531 с.

69. *Замятин А. П.* Элементы математической теории информационных систем: выразимость и вычислимость: учебное пособие / А. П. Замятин, А. Б. Ливчак; Урал. гос. ун-т. Екатеринбург, 1996. 104 с.

70. *Иванов Б. Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы: учебное пособие / Б. Н. Иванов. Москва: Лаб. базовых знаний, 2002. 288 с.

71. *Иванюк М. Е.* Интеграция математического образования студентов факультета информатики педагогического вуза с применением систем компьютерной математики: диссертация … кандидата педагогических наук / М. Е. Иванюк. Самара, 2008. 199 с.

72. *Избранные* вопросы математики. 9-й класс: факультативный курс. Москва: Просвещение, 1979. 191 с.

73. *Избранные* вопросы школьного курса математики. Самара: СИПКРО, 2002. Вып. 7: Комбинаторика. Бином Ньютона: материалы для учителей математики и учащихся 10–11-х классов естественно-математического направления. 59 с.

74. *Информатика* 7–9: Базовый курс: Теория: учебник / под ред. Н. В. Макаровой. Санкт-Петербург: Питер, 2000. 328 с.

75. *Информатика* 7–9 / Гейн А. Г. [и др.]. Москва: Дрофа, 2003. 288 с.

76. *Информатика:* учебник для 8–9-х классов общеобразовательных учреждений / А. Г. Гейн [и др.]. 3-е изд. Москва: Просвещение, 1996. 246 с.

77. *Ительсон Л. Б.* Психологические основы обучения / Л. Б. Ительсон. Москва: Знание, 1978. 59 с.

78. *Калужнин К. А.* Преобразования и перестановки / К. А. Калужнин, В. И. Сущанский. Москва: Наука, 1985. 160 с.

79. *Каплунович И. Я.* Психологические закономерности генезиса математического мышления / И. Я. Каплунович // Математика в школе и вузе: обучение и развитие: тезисы 16-го Всероссийского семинара преподавателей математики и методики ее преподавания. Новгород, 1997. С. 106–107.

80. *Капустина Т. В.* Методологические аспекты использования компьютерной системы Mathematica в обучении / Т. В. Капустина // Проблемы и перспективы информатизации математического образования: сборник научных работ Всероссийской научно-методической школы-семинара. Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2004. С. 10–24.

81. *Каримов З. Ш.* Теория и практика институциональной интеграции высшего профессионального педагогического образования на основе синтеза внешнего и внутреннего компонентов: автореферат диссертации … доктора педагогических наук / З. Ш. Каримов. Уфа, 2009. 48 с.

82. *Кейслер Г.* Теория моделей: перевод с английского / Г. Кейслер, Ч. Чен. Москва: Мир, 1977. 614 с.

83. *Кемени Дж.* Введение в конечную математику: перевод с английского / Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. Москва: Иностранная литература, 1963. 486 с.

84. *Клековкин Г. А.* О различных подходах к постановке курса «Дискретная математика» для будущих учителей информатики // Г. А. Клековкин, М. Е. Надеждина // Естественнонаучное образование в вузе: проблемы и перспективы: сборник трудов Всероссийской научно-методической конференции. Самара: СГАСУ, 2006. С. 192–194.

85. *Клековкин Г. А.* Преемственность в обучении: в поисках теоретических оснований / Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во СИПКРО, 2000. 328 с.

86. *Кодухов В. И.* Общее языкознание / В. И. Кодухов. Москва: Высшая школа, 1974. 303 с.

87. *Колмогоров А. Н.* Алгоритм, информация, сложность / А. Н. Колмогоров. Москва: Знание, 1991. 43 с.

88. *Колмогоров А. Н.* Научные основы школьного курса математики. Первая лекция / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. 1969. № 3. С. 12– 18.

89. *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов / А. Н. Колмогоров. Москва: Наука, 1987. 303 с.

90. *Коннов В. В.* Геометрическая теория графов / В. В. Коннов, Г. А. Клековкин, Л. П. Коннова. Москва: Народное образование, 1999. 240 с.

91. *Коннова Л. П.* Знакомьтесь, графы: учебное пособие для учащихся 5–6-х классов / Л. П. Коннова. Самара: Изд-во СИПКРО, 2001. 107 с.

92. *Концепция* долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года [Электронный ресурс]. Режим доступа: ofdocs/rus/rus006.pdf.

93. *Конышева Л. К.* Дискретная математика: учебное пособие / Л. К. Конышева; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2010. 205 с.

94. *Конышева Л. К.* Основы дискретной математики: учебное пособие / Л. К. Конышева, В. В. Мешков; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2001. 104 с.

95. *Конышева Л. К.* Основы теории нечетких множеств / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. Санкт-Петербург: Питер, 2011. 192 с.

96. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. Санкт-Петербург: Манускрипт, 1994. 496 с.

97. *Коробков С. С.* Введение в теорию решеток / С. С. Коробков; Свердл. гос. пед. ун-т. Екатеринбург, 1996. 64 с.

98. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств: перевод с французского / А. Кофман. Москва: Радио и связь, 1982. 432 с.

99. *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе / Н. Н. Красовский // Известия УрГУ. 1995. № 4. С. 12–24.

100. *Крейдлин Г. Е.* Математика помогает лингвистике / Г. Е. Крейдлин, А. Д. Шмелев. Москва: Просвещение, 1994. 174 с.

101. *Криницкий Н. А.* Алгоритмы вокруг нас / Н. А. Криницкий. 2-е изд. Москва: Наука, 1984. 224 с.

102. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. Москва: Наука, 1985. 176 с.

103. *Кузнецов А. А.* Современный курс информатики: от элементов к системе / А. А. Кузнецов, С. А. Бешенков, Е. А. Ракитина // Информатика и образование. 2004. № 1. С. 2–8.

104. *Кузнецов О. П.* Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Энергоатомиздат, 1988. 480 с.

105. *Кук Д.* Компьютерная математика: перевод с английского / Д. Кук, Г. Гейз. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 384 с.

106. *Кушниренко А. Г.* Основы информатики и вычислительной техники: учебник для 10–11-х классов общеобразовательных учреждений / А. Г. Кушниренко, Г. В. Лебедев, Р. А. Сворень. Москва: Просвещение, 1996. 224 с.

107. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения: перевод с английского / Ж. Лаллеман. Москва: Мир, 1985. 439 с.

108. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. 2-е изд., испр. Москва: МЦНМО, 2004. 144 с.

109. *Лапчик М. П.* Проблемы фундаментального и прикладного математического образования учителей информатики [Электронный ресурс] / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер // Вестник Омского государственного педагогического университета. Вып. 2006. Разд. «Теория и методика обучения». Режим доступа: http//www.omsk.edu.

110. *Леонтьев А. А.* Основы психолингвистики / А. А. Леонтьев. Москва: Смысл, 1997. 287 с.

111. *Липский В.* Комбинаторика для программистов / В. Липский. Москва: Мир, 1988. 213 с.

112. *Лихтарников Л. М.* Занимательные логические задачи / Л. М. Лихтарников. Санкт-Петербург: Лань, 1996. 105 с.

113. *Лошкарева Н. А.* Место межпрежметных связей в системе дидактических принципов советской дидактики / Н. А. Лошкарева // Межпредметные связи в процессе преподавания основ науки в средней школе: в 2 частях. Москва, 1973. Ч. 1. С. 36–37.

114. *Луканкин Г. Л.* Об одном подходе к построению учебно-методического комплекта по математике / Г. Л. Луканкин, А. Н. Павлов // Тезисы докладов XXIII Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. Челябинск; Москва, 2004. С. 166–168.

115. *Лыскова В. Ю.* Логика в информатике / В. Ю. Лыскова, Е. А. Ракитина. Москва: Информатика и образование, 1999. 141 с.

116. *Майоров И. А.* Системный анализ педагогической компетенции / И. А. Майоров // Образование и саморазвитие. 2009. № 4(14). С. 54–59.

117. *Максимова В. Н.* Межпредметные связи в процессе обучения / В. Н. Максимова. Москва: Просвещение, 1988. 191 с.

118. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы / А. И. Мальцев. Москва: Наука, 1970. 392 с.

119. *Мальцев А. И.* Избранные труды: в 2 томах / А. И. Мальцев. Москва: Наука, 1976. Т. 1. 485 с.; Т. 2. 388 с.

120. *Математизация* науки (социокультурные и методологические проблемы / А. Н. Нысанбаев [и др.]. Алма-Ата: Гылым, 1990. 230 с.

121. *Математика*: учебник-собеседник для 5–6-х классов средней школы / Л. Н. Шеврин [и др.]. Москва: Просвещение, 1989. 495 с.

122. *Математика* и информатика: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Н. Л. Стефанова [и др.]. Москва: Высшая школа, 2004. 349 с.

123. *Математическая* энциклопедия: в 5 томах. Москва: Советская энциклопедия, 1979. Т. 1. 1152 стб.; Т. 2. 1104 стб.; Т. 5. 1248 стб.: ил.

124. *Матросов В. Л.* Лекции по дискретной математике / В. Л. Матросов, В. А. Стеценко. Москва: МПГУ, 1997. 220 с.

125. *Матросов В. Л.* Место и роль МПГУ в современной системе образования России / В. Л. Матросов. Москва: Прометей, 2005. 184 с.

126. *Машины* Тьюринга и рекурсивные функции: перевод с немецкого / Г.-Д. Эббинхауз [и др.]. Москва: Мир, 1972. 264 с.

127. *Мельников О. И.* Обучение дискретной математике / О. И. Мельников. Москва: Изд-во ЛКИ, 2008. 224 с.

128. *Минькович Т. В.* Классификация моделей в литературе по информатике / Т. В. Минькович // Информатика и образование. 2001. № 9. С. 21–29.

129. *Мониторинг* качества профессионально-педагогической подготовки будущего учителя в педагогическом вузе: учебно-методическое пособие / Л. В. Шкерина [и др.]; Краснояр. гос. ун-т им. В. П. Астафьева. Красноярск, 2004. 244 с.

130. *Мордкович А. Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: диссертация … доктора педагогических наук / А. Г. Мордкович. Москва, 1986. 355 с.

131. *Морозов К. Е.* Математическое моделирование в научном познании / К. Е. Морозов. Москва: Мысль, 1969. 212 с.

132. *Москинова Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: учебное пособие / Г. И. Москинова. Москва: Логос, 2002. 240 с.

133. *Неуймин Я. Г.* Модели в науке и технике / Я. Г. Неуймин. Москва: Наука, Ленингр. отд-ние, 1984. 189 с.

134. *Нефедов В. Н.* Курс дискретной математики: учебное пособие / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. Москва: Изд-во МАИ, 1992. 262 с.

135. *Новиков П. П.* Исследование особенностей межпредметных связей в средних профессионально-технических училищах: автореферат диссертации … кандидата педагогических наук / П. П. Новиков. Москва, 1975. 26 с.

136. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 304 с.

137. *Норман Д.* Память и научение / Д. Норман. Москва: Мир, 1985. 159 с.

138. *Нугмонов М.* Теоретико-методологические основы методики обучения математике: диссертация … доктора педагогических наук / М. Нугмонов. Москва, 2000. 306 с.

139. *Общая* психология: учебник для студентов педагогических институтов / под ред. А. В. Петровского. Москва: Просвещение, 1976. 479 с.

140. *Оганесян В. А.* Научные принципы отбора основного содержания обучения математике в средней школе: диссертация … доктора педагогических наук / В. А. Оганесян. Ереван, 1984. 352 с.

141. *Окулов С. М.* Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие / С. М. Окулов. Москва: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2008. 422 с.

142. *Окулов С. М.* О стандартизации курса «Дискретная математика» / С. М. Окулов, А. В. Козвонина // Стандарты и мониторинг в образовании. 2005. № 2. С. 24–27.

143. *Ольшанский А. Ю.* Групповые исчисления / А. Ю. Ольшанский // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах. Москва: МАГИСТР-ПРЕСС, 2000. Т. 3. С. 12–16.

144. *Ольшанский А. Ю.* Умножение симметрий и преобразований / А. Ю. Ольшанский // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах. Москва: МАГИСТР-ПРЕСС, 2000. Т. 3. С. 7–11.

145. *Основы* информатики и вычислительной техники: учебник для 10–11-х классов общеобразовательных учреждений / А. Г. Кушниренко [и др.]. Москва: Просвещение, 1996. 224 с.

146. *Папи Ф.* Дети и графы. Обучение детей шестилетнего возраста математическим понятиям: перевод с французского / Ф. Папи, Ж. Папи. Москва: Педагогика, 1974. 192 с.

147. *Паули Г.* ДНК-компьютер. Новые парадигмы вычислений / Г. Паули, Г. Розенберг, А. Саломаа. Москва: Мир, 2004. 307 с.

148. *Перминов Е. А.* Введение в дискретную математику / Е. А. Перминов; Свердл. инж.-пед. ин-т. Екатеринбург, 1993. 46 с.

149. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: рабочая программа дисциплины / Е. А. Перминов; ФГАОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». Екатеринбург, 2011. 11 с.

150. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы / Е. А. Перминов. Екатеринбург: ИРРО, 2004. 206 с.

151. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2005. Ч. 1: Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа. 112 с.

152. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях /

Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2005. Ч. 2: Рекуррентные соотношения и производящие функции. 110 с.

153. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учеб. пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2005. Ч. 3: Графы. 194 с.

154. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2005. Ч. 4: Асимптотические оценки и приближения. 50 с.

155. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. 2-е изд., испр. и доп. Самара: СФ МГПУ, 2007. Ч. 1: Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа. 141 с.

156. *Перминов Е. А.* Задания и методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Дискретная математика» / Е. А. Перминов; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2012. 22 с.

157. *Перминов Е. А.* Математическое моделирование в профессиональном образовании: рабочая программа дисциплины / Е. А. Перминов; ФГАОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». Екатеринбург, 2011. 8 с.

158. *Перминов Е. А.* Математическое моделирование в психологии: рабочая программа для студентов всех форм обучения направления подготовки 030300 Психология, магистерской программы профиля 030300.68 Организационная психология / Е. А. Перминов; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2012. 11 с.

159. *Перминов Е. А.* Методические основы обучения дискретной математике в системе «школа – вуз»: монография / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2006. 237 с.

160. *Перминов Е. А.* О концептуальной роли дискретной математики в формировании общей культуры специалиста / Е. А. Перминов // Образование и наука: Известия Уральского отделения Российской академии образования. Приложение. 2006. № 2 (2). С. 37–40.

161. *Перминов Е. А.* О концепции, содержании и методике обучения дискретной математике в классах физико-математического профиля / Е. А. Перминов // 4-е Колмогоровские чтения: сборник трудов. Ярославль: ЯГПУ, 2006. С. 264–270.

162. *Перминов Е. А.* О методике изучения понятия математической модели / Е. А. Перминов // Информатика и образование. 2006. № 7. С. 40–43.

163. *Перминов Е. А.* О методологии реализации дискретной линии в содержании профильного обучения математике в школе / Е. А. Перминов // Вестник ЧГПУ. 2012. № 6. С. 69–79.

164. *Перминов Е. А.*О методологических аспектах реализации культурологического подхода в математическом образовании / Е. А. Перминов // Педагогика. 2011. № 9. С. 49–55.

165. *Перминов Е. А.* О методологических основах обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей / Е. А. Перминов // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 3(3). С. 80–82.

166. *Перминов Е. А.* О проблемах и методике обучения дискретной математике в средней профессиональной школе / Е. А. Перминов // Среднее профессиональное образование. 2006. № 3. С. 15–18.

167. *Перминов Е. А.* О реализации дискретной линии в модернизации математического образования / Е. А. Перминов // Инновации в образовании. 2011. № 10. С. 82–90.

168. *Перминов Е. А.* О реализации дискретной линии в развитии методической компетентности учителя математики / Е. А. Перминов // Вестник Красноярского государственного педагогического университета. 2012. № 1(19). С. 101–104.

169. *Перминов Е. А.* О роли дискретной математики в обучении стохастическому моделированию в школе и вузе / Е. А. Перминов // Материалы 2-й Российской конференции. Калуга: Изд-во КГУ, 2004. С. 244–249.

170. *Перминов Е. А.* О роли современной математической культуры в подготовке будущих педагогов / Е. А. Перминов // Казанский педагогический журнал. 2011. № 4. С. 52–57.

171. *Перминов Е. А.* Основные аспекты обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей / Е. А. Перминов // Современные проблемы математического образования: вопросы теории и практики: коллективная монография / Е. А. Перминов [и др.]. Екатеринбург: Изд-во УрГПУ, 2010. С. 176–190.

172. *Перминов Е. А.* О фундаментальной роли дискретной математики в обучении алгоритмизации в школе и вузе / Е. А. Перминов // Педагогическая информатика. 2006. № 2. С. 30–32.

173. *Перминов Е. А.* Понятие математической модели на факультативных занятиях в школе / Е. А. Перминов // Педагогический про-

цесс как культурная деятельность: материалы 4-й Международной научно-практической конференции. Самара: СИПКРО, 2002. С. 351–353.

174. *Перминов Е. А.* Понятия кольца и поля на факультативных занятиях в школе / Е. А. Перминов // Проблемы качества подготовки учителя математики и информатики: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Нижний Новгород: НГПУ, 2002. С. 135–136.

175. *Перминов Е. А.* Сборник задач по дискретной математике / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2008. Ч. 1: Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа. 134 с.

176. *Перминов Е. А.* Теоретические аспекты обучения будущих учителей дискретной математике / Е. А. Перминов // Ярославский педагогический вестник. 2011. Т. 2, № 2. С. 154–157.

177. *Перминов Е. А.* Теоретические основы обучения дискретной математике студентов профессионально-педагогических специальностей (по отраслям) / Е. А. Перминов // Образование и наука: Известия Уральского отделения Российской академии образования. 2012. № 3(92). С. 25–34.

178. *Перминов Е. А.* Чистовик экзаменационной работы абитуриента по математике / Е. А. Перминов. Екатеринбург: УГПУ, 2001. 75 с.

179. *Перминов Е. А.* Элементы абстрактной и компьютерной алгебры: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2006. Ч. 1: Алгебры. Алгебраические системы. 73 с.

180. *Перминов Е. А.* Элементы абстрактной и компьютерной алгебры: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: СФ МГПУ, 2006. Ч. 2: Группы. Кольца. 91 с.

181. *Перспективы* развития предметной подготовки учителей информатики [Электронный ресурс] / В. Л. Матросов [и др.] // Преподавание информационных технологий в России: открытая Всероссийская конференция. Режим доступа: http://www.it-education.ru/2006/reports/Karakozov.htm.

182. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды: перевод с французского / Ж. Пиаже. Москва: Междунар. пед. акад., 1994. 675 с.

183. *Пиаже Ж.* Структуры математические и операторные структуры мышления. Преподавание математики / Ж. Пиаже. Москва: Учпедгиз, 1960. 237 с.

184. *Писарев Д. И.* Сочинения: в 4 томах / Д. И. Писарев . Москва: ГИХЛ, 1955. Т. 2. 431 с.

185. *Плоткин Б. И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б. И. Плоткин. Москва: Наука, 1991. 446 с.

186. *Пономарев Я. А*. Психология творения / Я. А. Пономарев. Москва: Моск. психол.-соц. ин-т; Воронеж: Модэк, 1999. 480 с.

187. *Пухначев Ю. В*. Математика без формул / Ю. В. Пухначев, Ю. П. Попов. Москва: Знание, 1979. Вып 3. 160 с.

188. *Пышкало А. М*. Средства обучения – один из важнейших компонентов методики обучения математике / А. М. Пышкало // Средства обучения математике: сборник статей / сост. А. М. Пышкало. Москва: Просвещение, 1980. С. 3–11.

189. *Пятницын Б. Н.* Философские проблемы вероятностных и статистических методов / Б. Н. Пятницын. Москва: Наука, 1976. 335 с.

190. *Растригин А. А.* Кибернетические модели познания / А. А. Растригин, В. А. Марков. Рига: Зинатне, 1976. 236 с.

191. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ: перевод с английского / Дж. Риордан. Москва: Иностранная литература, 1963. 287 с.

192. *Родионов М. А.* Теория и методика формирования мотивации учебной деятельности школьников в процессе обучения математике: диссертация … доктора педагогических наук / М. А. Родионов. Саранск, 2001. 381 с.

193. *Розанова С. А.* Математическая культура студентов технических вузов / С. А. Розанова. Москва: ФИЗМАТГИЗ, 2004. 176 с.

194. *Розов Н. Х.* Гуманитарная математика / Н. Х. Розов // Вестник Московского университета. Серия «Педагогическое образование». 2004. № 2. С. 3–13.

195. *Романовский И. В.* Дискретный анализ: учебное пособие / И. В. Романовский. 3-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург: Невский диалект: БХВ-Петербург, 2004. 320 с.

196. *Российская* педагогическая энциклопедия: в 2 томах / гл. ред. В. В. Давыдов. Москва: Большая Российская энциклопедия, 1993. Т. 1. 608 с.; Т. 2. 671 с.

197. *Рузавин Г. И.* Математизация научного знания / Г. И. Рузавин. Москва: Мысль, 1984. 207 с.

198. *Румянцева Э. А.* Инженерно-математический стиль мышления в современной науке / Э. А. Румянцева. Москва: Высшая школа, 1978. 148 с.

199. *Рыбников К. К.* Элементы численного дискретного анализа в подготовке преподавателей математики. Связь непрерывного и дискретного / К. К. Рыбников // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: материалы Всероссийской научной конференции: в 2 частях. Саранск: Морд. гос. пед. ин-т им. М. Е. Евсеева, 2002. Ч. 2. С. 132–135.

200. *Рыжова Н. И.* Развитие методической системы фундаментальной подготовки будущих учителей информатики в предметной области: диссертация … доктора педагогических наук / Н. И. Рыжова. Санкт-Петербург: РГПУ, 2000. 429 с.

201. *Садовников Н. В.* Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: монография / Н. В. Садовников; Пенз. гос. пед. ун-т. Пенза, 2005. 283 с.

202. *Садовничий В. А.* Математическое образование: настоящее и будущее: доклад на Всероссийской конференции / В. А. Садовничий // Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков: Всероссийская конференция, Дубна, сентябрь 2000. Москва: МЦНМО, 2000. 664 с.

203. *Садовничий В. А.* Традиции и современность / В. А. Садовничий // Высшее образование в России. 2003. № 1. С. 11–18.

204. *Сазонова З. С.* Интеграция образования, науки и производства как методологическое основание подготовки современного инженера: автореферат диссертации … доктора педагогических наук / З. С. Сазонова. Казань, 2008. 39 с.

205. *Самарин Ю. А.* Очерки психологии ума / Ю. А. Самарин. Москва: Изд-во АПН РСФСР, 1962. 504 с.

206. *Самсонов Б. Б.* Компьютерная математика (основание информатики) / Б. Б. Самсонов, Е. М. Плохов, А. И. Филоненков. Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. 512 с.

207. *Саранцев Г. И.* Методическое мышление: взгляд из прошлого и настоящего / Г. И. Саранцев // Методическая подготовка студентов математических специальностей педвуза в условиях фундаментализации образования: материалы Всероссийской научной конференции: в 2 частях / Морд. гос. пед. ин-т. Саранск, 2009. Ч. 1. С. 3–7.

208. *Саранцев Г. И.* Методологические основы школьного учебника математики / Г. И. Саранцев // Педагогика. 2003. № 10. С. 25–35.

209. *Саранцев Г. И.* Методология методики обучения математике / Г. И. Саранцев. Саранск: Красный Октябрь, 2001. 144 с.

210. *Саранцев Г. И.* Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. Москва: Просвещение, 1995. 240 с. (Библиотека учителя математики).

211. *Сборник* задач по математике: пособие для педучилищ / А. М. Пышкало [и др.]. Москва: Просвещение, 1979. 208 с.

212. *Система* обучения информатике в современной общеобразовательной школе. Компьютерные инструменты в образовании / А. А. Кузнецов [и др.] // Информатизация образования. 1999. № 6. С. 3–6.

213. *Скаткин М. Н.* Принципы обучения // Дидактика средней школы: учебное пособие / под ред. М. Н. Скаткина. Москва: Просвещение, 1982. С. 48–89.

214. *Сластенин В. А.* Педагогика: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; под ред. В. А. Сластенина. Москва: Академия, 2002. 576 с.

215. *Современные* основы школьного курса математики / Н. Я. Виленкин [и др.]. Москва: Просвещение, 1980. 239 с.

216. *Сойер У.* Путь в современную математику: перевод с английского / У. Сойер. Москва: Мир, 1972. 200 с.

217. *Спирина М. С.* Дискретная математика: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования / М. С. Спирина, П. А. Спирин. Москва: Академия, 2004. 368 с.

218. *Справочная* книга по математической логике: в 4 частях: перевод с английского. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. Ч. 1: Теория моделей. 392 с.

219. *Справочная* книга по математической логике: в 4 частях: перевод с английского. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. Ч. 4: Теория доказательств и конструктивная математика. 392 с.

220. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории: перевод с английского / Р. Столл. Москва: Просвещение, 1968. 231 с.

221. *Столяр А. А.* Педагогика математики / А. А. Столяр. Минск: Вышэйшая школа, 1969. 414 с.

222. *Столяр А. А.* Элементарное введение в математическую логику: пособие для учителей / А. А. Столяр. Москва: Просвещение, 1965. 163 с.

223. *Стратилатов П. В.* Дополнительные главы по курсу математики: учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9-х классов / П. В. Стратилатов. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Просвещение, 1974. 144 с.

224. *Судоплатов С. В.* Элементы дискретной математики: учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. Москва: ИНФРА-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. 280 с.

225. *Талызина Н. Ф.* Педагогическая психология: учебник для студентов средних педагогических учебных заведений / Н. Ф. Талызина. 3-е изд., стер. Москва: Академия, 1999. 288 с.

226. *Тейз А.* Логический подход к искусственному интеллекту (От модальной логики к логике баз данных) / А. Тейз. Москва: Мир, 1998. 249 с.

227. *Тестов В. А.* «Жесткие» и «мягкие» модели обучения математике / В. А. Тестов // 23-й Всероссийский семинар преподавателей математики университетов и педагогических вузов: тезисы докладов / Моск. гор. пед. ун-т; Челяб. гос. пед. ун-т. Челябинск; Москва, 2004. С. 76–78.

228. *Тестов В. А.* О проблеме обновления содержания обучения математике в школе / В. А. Тестов // Преподавание математики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Всероссийской научно-практической конференции / Глазов. гос. пед. ин-т. Глазов, 2009. С. 106–111.

229. *Тестов В. А.* Стратегия обучения математике / В. А. Тестов. Москва: Технологическая школа бизнеса, 1999. 304 с.

230. *Тестов В. А.* Фундаментальность математического образования в условиях перехода к профильному обучению / В. А. Тестов // Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: материалы 25-го Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педвузов. Киров: ВятГГУ; Москва: ММГПУ, 2006. С. 26–27.

231. *Тестов В. А.* Фундаментальность образования: современные подходы / В. А. Тестов // Педагогика. 2006. № 4. С. 3–9.

232. *Тимковский В. Г.* Дискретная математика в мире станков и деталей / В. Г. Тимковский. Москва: Наука, 2002. 144 с.

233. *Тихомиров В. М.* О некоторых проблемах математического образования / В. М. Тихомиров // Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков: Всероссийская конференция, Дубна, сентябрь 2000. Москва: МЦНМО, 2000. С. 3–15.

234. *Тумашева О. В.* О методической компетентности учителя / О. В. Тумашева // Вестник Красноярского педагогического университета. 2009. № 1. С. 65–70.

235. *Турецкий В. Я.* Математика и информатика: учебное пособие / В. Я. Турецкий. 3-е изд., испр. и доп. Москва: ИНФРА-М, 2002. 560 с.

236. *Тырыгина Г. А.* Ведущая идея курса дискретного анализа для математиков-программистов / Г. А. Тырыгина // Проблемы математического образования и культуры: Международная научная конференция: тезисы докладов. Тольятти: ТГУ, 2003. С. 73–75.

237. *Тырыгина Г. А.* О различных подходах к формированию курса дискретной математики в высшем профессиональном образовании / Г. А. Тырыгина, М. А. Тренина // Проблемы математического образования и культуры: тезисы докладов Международной научной конференции. Тольятти: ТГУ, 2004. С. 102–105.

238. *Уемов А. И.* Логические основы моделирования / А. И. Уемов. Москва: Наука, 1971. 311 с.

239. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов: перевод с английского / Р. Уилсон. Москва: Мир, 1977. 208 с.

240. *Успенский В. А.* Арифметика вычетов и криптография // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах. Москва: МАГИСТР-ПРЕСС, 2000. Т. 3. С. 27–32.

241. *Успенский В. А.* Машина Поста / В. А. Успенский // Популярные лекции по математике. Москва: Наука, 1979. Вып. 54. 93 с.

242. *Факультативный* курс. Избранные вопросы математики (7–8-й кл.). Москва: Просвещение, 1978. 192 с.

243. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230100 Информатика и вычислительная техника. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

244. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230700 Прикладная информатика. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

245. *Федеральный* государственный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 081800 Механика и математическое моделирование. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

246. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 010300 Фундаментальная информатика и информационные технологии. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

247. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.fgosvo.ru.

248. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 051000 Профессиональное обучение (по отраслям). Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

249. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 051000 Профессиональное обучение (по отраслям). Квалификация «магистр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

250. *Федоров В. А.* Профессионально-педагогическое образование в изменяющихся социально-экономических условиях: научное обеспечение развития / В. А. Федоров // Образование и наука: Известия Уральского отделения Российской академии образования. 2008. № 9 (57). С. 127–134.

251. *Федорова В. Н.* Межпредметные связи / В. Н. Федорова, Д. М. Кирюшкин. Москва: Педагогика, 1972. 152 с.

252. *Федосеев В. Н.* Элементы теории вероятностей для 7–8-х классов средней школы / В. Н. Федосеев // Математика в школе. 2002. № 6. С. 58–66.

253. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру / Э. Фрид. Москва: Мир, 1979. 260 с.

254. *Хаггарти Р.* Дискретная математика для программистов: перевод с английского / Р. Хаггарти. Москва: Техносфера, 2003. 315 с.

255. *Хамов Г. Г.* Алгебра и теория чисел в школьной математике / Г. Г. Хамов; Мурм. гос. пед. ин-т. Мурманск, 1991. 119 с.

256. *Холодная М. А.* Психология интеллекта. Парадоксы исследования / М. А. Холодная. 2-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 272 с.

257. *Хуторской А. В.* Развитие одаренности школьников: методика продуктивного обучения: пособие для учителя / А. В. Хуторской. Москва: Владос, 2000. 320 с.

258. *Чапаев Н. К.* Теоретико-методологические основы педагогической интеграции: диссертация … доктора педагогических наук / Н. К. Чапаев. Екатеринбург, 1998. 462 с.

259. *Чуйко Л. В.* Математические методы в педагогике как условие совершенствования качества образования: автореферат диссертации … кандидата педагогических наук / Л. В. Чуйко. Смоленск, 2006. 19 с.

260. *Чуприкова Н. И.* Умственное развитие и обучение / Н. И. Чуприкова. Москва: Столетие, 1995. 189 с. (Психологические основы развивающего обучения).

261. *Шадриков В. Д.* Ментальное развитие человека / В. Д. Шадриков. Москва: Аспект Пресс, 2007. 328 с.

262. *Шеврин Л. Н.* Тождества в алгебре / Л. Н. Шеврин // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах. Москва: МАГИСТР-ПРЕСС, 2000. Т. 3. С. 17–22.

263. *Эрганова Н. Е.* Методика профессионального обучения: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Н. Е. Эрганова. 2-е изд. Москва: Академия, 2008. 160 с.

264. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов / С. В. Яблонский. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. 384 с.

265. *Grimaldi R. P.* Discrete and Combinatorial mathematics. An Applied Introductions / R. P. Grimaldi. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. 891 p.

266. *Piage J.* Structuralism / J. Piage. Paris: Paris University Press, 1968. 289 p.

Приложение 1

Программа элективного обучения школьников дискретной математике на углубленном уровне

8-й класс (1 час в неделю)

1. *Практические задачи и графы.* Понятие графа. Маршруты цепи и циклы. Применение графов в решении занимательных и практических задач.

2. *Необычные таблицы сложения и умножения.* Шифры и остатки. Действия с остатками. Законы действий с остатками. Вращения фигур. Законы действий алгебры пятиугольника.

3. *Первое знакомство с математической логикой.* Логические умножение, сложение и отрицание. Вычисление значений логических выражений. Тождественные преобразования логических выражений. Физический смысл логических действий.

4. *Различные задачи.* Уравнения с параметрами. Задачи на свойства натуральных чисел. Нестандартные задачи. Решения Смекалкина, Ленивкина и Кнопкина.

9-й класс (1 час в неделю)

1. *Графы и группы.* Связные графы. Деревья. Равные графы. Понятие группы. Примеры групп. Группа симметрий (автоморфизмов) графа.

2. *Алгебра высказываний.* Логические умозаключения. Анализ текстов и логические выражения. Вычисление значений логических выражений. Законы алгебры высказываний. Доказательство логических тождеств. Логические тождества и электрические схемы.

3. *Решение уравнений в различных алгебрах.* Решение уравнений в различных числовых множествах. Свойства операций алгебры пятиугольника. Решение уравнений в алгебре пятиугольника (в том числе и с параметрами). Свойства операций алгебры остатков. Решение уравнений в алгебре остатков. Решение уравнений в алгебре высказываний.

4. *Нестандартные задачи.* Метод перебора. Метод перебора в занимательных задачах. Комбинаторные задачи. Произведение множеств. Различные задачи.

10-й класс (2 часа в неделю)

1. *Элементы комбинаторики.* Правила суммы и произведения. Размещения и перестановки (с повторениями). Сочетания (с повторениями). Бином Ньютона. Разложение предметов по ящикам (чисел на слагаемые). Примеры рекуррентных соотношений и производящих функций и их применение в решении комбинаторных задач. Понятие об асимптотических оценках. Практические задачи на целочисленное решение уравнений.

2. *Вычисления в решении задач. Машина Поста.* Виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и с конечным числом действий (исполнителя). Вычисления на различных микрокалькуляторах. Возможность вычислить точный ответ задачи. Число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина. Алгоритмы решения квадратного уравнения в различных алгебрах.

Устройство и работа машины Поста. Примеры программ. Эффективные алгоритмы. Об арифметических действиях с натуральными числами.

3. *Бинарные отношения.* Примеры бинарных отношений (равенства, сравнения, делимость нацело на множестве чисел, параллельность и перпендикулярность на множестве прямых и др.). Свойства бинарных отношений. Декартов квадрат множества и его графическое изображение (на примере трех-, четырехэлементного множества). Определение бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества. Примеры бинарных отношений на конечном (3, 4, 5-элементном) множестве. Связь между бинарными отношения и графами. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфные (равные) графы и бинарные отношения. Машинное представление графов. Сеть. Граф сети. Отображения и функции.

Способы задания отображений.

4. *Частично упорядоченные множества (ч. у. множества) и решетки.* Примеры ч. у. множеств (целые числа с обычным отношением порядка или с отношением «делиться нацело»; множество всех подмножеств данного множества с отношением включения и др.). Сравнимые и несравнимые элементы ч. у.множества. Определение ч. у. множества как множества с рефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением.

Диаграмма ч. у. множества. Изоморфные (равные) ч. у. множества. Описание «малых» ч. у. множеств.

Пересечение двух сравнимых элементов ч. у. множества. Пересечение $a \wedge b$ двух несравнимых элементов a, b ч. у. множества как элемент, наибольший среди всех элементов ч. у. множества, меньших a, b одновременно.

Полурешетка. Полурешетка как алгебра с одной операцией. Таблицы Кэли полурешетки. Полугруппа. Примеры полугрупп.

11-й класс (2 часа в неделю)

1. *Высказывательные формы*. Понятие высказывательной формы, или предиката, от одной переменной. Примеры предикатов. Область определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Связь операций над предикатами с их множествами истинности. Кванторы. Двухместные предикаты. Примеры кванторов. Определения уравнения, тождества и неравенства. Определение функции и периодической функции. Отрицание высказываний, содержащих кванторы.

Строение математической теоремы. Виды теорем. Понятие о логике предикатов.

2. *Язык математики*. Понятие унарной, бинарной и n-арной алгебраической операции и алгебры. Примеры алгебр. Понятие кольца. Примеры колец. Кольцо вычетов и криптография. Примеры бинарных и тернарных отношений. Понятие n-арного отношения. Понятие математической модели, языка и подъязыка. Язык «непрерывной» и дискретной математики.

О математической лингвистике: основные понятия, типы синтаксических языков, принципы синтаксической простоты. Анализ текстов художественных произведений.

3. *Алгоритмы и ЭВМ*. Алгоритмы построений циркулем и линейкой. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Алгоритм Флери поиска эйлеровой цепи в графе.

Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$; $xy + x + y + 1$ и др.

Устройство и команды машины Тьюринга. Примеры программ машины Тьюринга. Программа сложения натуральных чисел. Понятие автомата. Примеры автоматов. Понятие исполнителя. Уточнение понятие алгоритма. Понятие эквивалентных алгоритмов и их примеры. Эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и машины Тьюринга к ЭВМ.

4. *Проблемы разрешимости.* Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. О разрешимости уравнений в радикалах. О разрешимости уравнений в алгебре пятиугольника и кольце вычетов. Распознавание конечных изоморфных (равных) графов и ч. у. множеств.

О проблеме разрешимости. Разрешающие алгоритмы. Полиномиальное и экспоненциальное время работы алгоритма. Примеры алгоритмически разрешимых задач.

5. *Предмет и функции ДМ.* О процессе математизации наук. О классификации видов математического моделирования. Машинный эксперимент и его отличие от «натурного». ДМ как фундаментальная основа математического моделирования. Предмет и функции ДМ. Понятие полной цепочки использования компьютера. О сути этапов решения задачи: постановки задачи; выбора математического языка для ее решения; разработки модели решения; разработки алгоритма решения, написания и отладки программы; симуляции и анализа результатов.

Приложение 2

Программа обучения школьников дискретной математике на базовом уровне

9-й класс (1 час в неделю)

1. *Практические задачи и графы.* Понятие графа. Маршруты цепи и циклы. Связные графы. Деревья. Равные графы. Применение графов в решении занимательных и практических задач.

2. *Необычные таблицы сложения и умножения.* Шифры и остатки. Действия с остатками. Законы действий с остатками. Вращения фигур. Законы действий алгебры пятиугольника (пятиэлементного поля, интерпретируемого как вращения правильного пятиугольника, являющиеся его самосовмещениями).

3. *Алгебра высказываний.* Логические умножение, сложение, следование и равносильность. Вычисление значений логических выражений. Законы алгебры высказываний. Тождественные преобразования простых логических выражений. Логические тождества и электрические схемы.

4. *Различные задачи.* Уравнения с параметрами. Задачи на свойства натуральных чисел. Нестандартные задачи. Решения Смекалкина, Ленивкина и Кнопкина.

10-й класс (2 часа в неделю)

1. *Элементы комбинаторики*. Метод перебора в «школьных» и занимательных задачах. Комбинаторные задачи. Произведение множеств. Правила суммы и произведения. Размещения и перестановки (с повторениями). Сочетания (с повторениями). Бином Ньютона. Примеры практического применения комбинаторных формул.

2. *Вычисления в решении задач. Машина Поста*. Виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и с конечным числом действий (исполнителя). Вычисления на различных условных микрокалькуляторах. Возможность вычислить точный ответ задачи. Число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина. Алгоритмы решения квадратного уравнения в различных алгебрах.

Устройство и работа машины Поста. Примеры программ. Эффективные алгоритмы. Об арифметических действиях с натуральными числами.

3. *Бинарные отношения*. Примеры бинарных отношений (равенства, сравнения, делимость нацело на множестве чисел, параллельность и перпендикулярность на множестве прямых и др.). Свойства бинарных отношений. Декартов квадрат множества и его графическое изображение (на примере трех-, четырехэлементного множества). Определение бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества. Примеры бинарных отношений на конечном (3, 4, 5-элементном) множестве. Связь между бинарными отношениями и графами. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфные (равные) графы и бинарные отношения. Машинное представление графов. Сеть. Граф сети.

Отображения и функции. Способы задания отображений.

4. *Частично упорядоченные множества (ч. у. множества) и решетки*. Примеры ч. у. множеств (целые числа с обычным отношением порядка или с отношением «делиться нацело»; множество всех подмножеств данного множества с отношением включения и др.). Сравнимые и несравнимые элементы ч. у. множества. Определение ч. у. множества как множества с рефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением. Диаграмма ч. у. множества.

11-й класс (2 часа в неделю)

1. *Высказывательные формы*. Понятие высказывательной формы или предиката от одной переменной. Примеры предикатов. Область определения и истинности предиката. Примеры двухместных предикатов. Примеры кванторов. Определения уравнения, тождества и неравенства. Определения функции и окружности.

Строение математической теоремы. Виды теорем.

2. *Язык математики*. Понятие группы. Примеры групп. Группа симметрий (автоморфизмов) графа. Понятие унарной, бинарной операций и алгебры. Примеры алгебр. Понятие кольца. Примеры колец. Кольцо вычетов и криптография. Практические задачи на целочисленное решение уравнений.

Примеры бинарных и тернарных отношений. Понятие математической модели, языка и подъязыка.

3. *Алгоритмы и ЭВМ.* Алгоритмы построений циркулем и линейкой. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Алгоритм Флери поиска эйлеровой цепи в графе.

Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$; $xy + x + y + 1$ и др.

Понятие автомата. Примеры автоматов. Понятие исполнителя. Уточнение понятие алгоритма. Понятие эквивалентных алгоритмов и их примеры. Эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и машины Тьюринга к ЭВМ.

4. *Предмет и функции ДМ.* О процессе математизации наук. О классификации видов математического моделирования. Машинный эксперимент и его отличие от «натурного». ДМ как фундаментальная основа математического моделирования. Предмет и функции ДМ. Понятие полной цепочки использования компьютера. О сути этапов решения задачи: постановки задачи; выбора математического языка для ее решения; разработки модели решения; разработки алгоритма решения, написания и отладки программы; симуляции и анализа результатов.

Приложение 3

Программа обучения школьников дискретной математике на общем уровне

9-й класс. Необычная математика (15 часов)

Практические задачи и графы. Понятие графа. Маршруты цепи и циклы. Связные графы. Применение графов в решении занимательных и практических задач. Необычные таблицы сложения и умножения. Шифры и остатки. Действия с остатками. Логические умножение, сложение и отрицание. Вычисление значений логических выражений. Логические умозаключения. Анализ текстов и логические выражения. Законы алгебры высказываний. Простые тождественные преобразования логических выражений. Нестандартные задачи. Решения Смекалкина, Ленивкина и Кнопкина. Метод перебора в занимательных задачах. Комбинаторные задачи. Произведение множеств.

10-й класс (1 час в неделю)

1. *Множества и операции над ними.* Множества предметов. Равенство множеств. Подмножества. Операции пересечения, объединения и дополнения. Законы операций. Числовые множества. Натуральные числа. Целые числа. Рациональные и иррациональные числа.

2. *Элементы комбинаторики*. Правила суммы и произведения. Размещения и перестановки (с повторениями). Сочетания (с повторениями). Бином Ньютона. Классическое определение вероятности. Теоремы о вероятности суммы и произведения событий.

3. *Вычисления в решении задач*. Виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и с конечным числом действий (исполнителя). Вычисления на различных условных микрокалькуляторах. Возможность вычислить точный ответ задачи. Число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина.

4. *Бинарные отношения*. Примеры бинарных отношений (равенства, сравнения, делимость нацело на множестве чисел, параллельность и перпендикулярность на множестве прямых и др.). Свойства бинар-

ных отношений. Декартов квадрат множества и его графическое изображение (на примере трех-четырехэлементного множества). Определение бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества. Примеры бинарных отношений на конечном (3, 4, 5-элементном) множестве. Связь между бинарными отношениями и графами. Ориентированные и неориентированные графы. Деревья. Изоморфные (равные) графы.

11-й класс (1 час в неделю)

1. *Высказывательные формы.* Понятие высказывательной формы или предиката от одной переменной. Примеры предикатов. Область определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Двухместные предикаты. Примеры формул с кванторами. Виды определений, теорем и их запись в виде формулы логики предикатов. Анализ логической структуры различных официальных текстов (из экономической, социологической, юридической, политической и других областей).

2. *Язык математики и проблема разрешимости.* Таблицы Кэли операций кольца вычетов (по модулю 4) пятиэлементного поля и алгебры высказываний. Понятие унарной, бинарной и n-арной алгебраической операции и алгебры. Примеры алгебр (полугрупп, групп).

Примеры тернарных отношений. Понятие n-арного отношения. О понятии математической модели, языка и подъязыка. О языках «непрерывной» и дискретной математики.

Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. О разрешимости уравнений в радикалах. О разрешимости задачи об определении эйлеровости графа. О проблеме разрешимости.

3. *Примеры математического моделирования.* Поиск минимального остового дерева (жадный, или алгоритм Крускала). Алгоритм Флери поиска эйлеровой цепи в графе. Сеть. Граф сети. Сетевая модель выполнения комплекса работ. Матрица смежности графа и решение задач на графы с помощью компьютера.

О математической лингвистике: основные понятия, типы синтаксических языков, принципы синтаксической простоты. Анализ текстов художественных произведений.

4. *Предмет и функции ДМ. О* процессе математизации наук. О классификации видов математического моделирования. Машинный

эксперимент и его отличие от «натурного». ДМ как фундаментальная основа математического моделирования. Предмет и функции ДМ. Понятие полной цепочки использования компьютера. О сути этапов решения задачи: постановки задачи; выбора математического языка для ее решения; разработки модели решения; разработки алгоритма решения, написания и отладки программы; симуляции и анализа результатов.

Приложение 4

Программа
«Алгебраические и логические структуры»
(8–10-й классы)

8-й класс

Простейшие методы шифровки, основанные на понятиях остатков от деления суммы и произведения натуральных чисел. Таблицы Кэли операций сложения, вычитания и умножения в кольце остатков от деления на 4. Свойства операций кольца, в частности, формулы сокращенного умножения и свойства степеней (для операции умножения). Вычисление значений и тождественные преобразования выражений. Решение уравнений (в том числе и с параметром).

Вращения правильного пятиугольника, являющиеся его самосовмещениями и различающиеся только расположением вершин. Таблицы Кэли операций сложения, вычитания умножения и деления в пятиэлементном поле («новой арифметике»). Свойства операций пятиэлементного поля. Вычисление значений и тождественные преобразования выражений. Решение уравнений (в том числе и с параметром).

9-й класс

Понятие высказывания. Грамматические связки и логические операции. Таблицы истинности. Вычисление значений логических выражений. Логические тождества. Тождественные преобразования логических выражений. Решение логических уравнений. Простейшие примеры анализа и синтеза электрических схем.

Вычисление значений, тождественные преобразования выражений и решение уравнений в кольце остатков от деления на 4, пятиэлементном поле и алгебре высказываний (уравнений, являющихся аналогами обычных «школьных» алгебраических выражений и уравнений, в том числе и квадратных).

10-й класс

Примеры графов и бинарных отношений. Свойства рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности. Упражнения на свойства бинарных отношений. Определение отношения частичного порядка и частично упорядоченного множества (ч. у. множества). Примеры ч. у. множеств (с отношением линейного порядка, с отношением «делиться нацело» на множестве целых чисел и др.). Диаграмма ч. у. множества. Описание n-элементных ч. у. множеств для $n \leqslant 4$. Наибольший и наименьший элементы ч. у. множества. Сумма (объединение) и произведение (пересечение) двух элементов ч. у. множества. Определение решетки. Описание n-элементных решеток для $n \leqslant 6$. Решетка как алгебра. Таблицы Кэли решеточных операций. Свойства решеточных операций. Применение решеток в радиотехнике, генетике и кристаллографии.

Понятия произвольной алгебраической операции и алгебры. Примеры алгебр. О современной алгебре и математической логике как теоретической основе программирования, разработки вычислительной техники, криптографии и др.

Научное издание

Перминов Евгений Александрович

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ В АСПЕКТЕ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Монография

Редактор Т. А. Кузьминых
Компьютерная верстка Н. А. Ушениной

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 30.12.13. Формат 60×84/16. Бумага для множ. аппаратов. Печать плоская. Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 10,8. Тираж 500 экз. Заказ № ___.
Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.