Емельянов А.А., Медведев А.В., Кобзев А.В.,
Шепельков А.В., Зарубин Е. А., Воробьев А.Н.
ФГАОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет», Екатеринбург

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АД В НЕПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ С ПЕРЕМЕННЫМИ $\bar{\psi}_m - \bar{i}_R$

При выполнении студентами дипломных и курсовых работ, связанных с моделированием асинхронного двигателя, возникает необходимость увеличения вариантов их модификаций. Одним из способов решения этой задачи является возможность выразить электромагнитный момент через различную комбинацию переменных токов и потокосцеплений двигателя [1, с.238] и [2].

Основные уравнения математической модели АД, записаны в векторной форме в относительных единицах, имеют следующий вид [3]:

$$\begin{cases} \bar{u}_S = r_S \cdot \bar{i}_S + \dfrac{d\bar{\psi}_S}{d\bar{t}} + j \cdot \alpha_k \cdot \bar{\psi}_S & (1) \\ 0 = r_R \cdot \bar{i}_R + \dfrac{d\bar{\psi}_R}{d\bar{t}} + j \cdot (\alpha_k - \nu \cdot p) \cdot \bar{\psi}_R & (2) \\ \bar{\psi}_S = x_S \cdot \bar{i}_S + x_m \cdot \bar{i}_R & (3) \\ \bar{\psi}_R = x_R \cdot \bar{i}_R + x_m \cdot \bar{i}_S & (4) \end{cases}$$

Рассмотрим асинхронный двигатель с К.З. ротором ($\bar{u}_R = 0$), кроме того, определим электромагнитный момент по следующей формуле [1, с.238]

$$m = \psi_{m\beta} \cdot i_{R\alpha} - \psi_{m\alpha} \cdot i_{R\beta}$$

$$\bar{\psi}_m = x_m \cdot (\bar{i}_S + \bar{i}_R), \quad \bar{i}_S = \frac{1}{x_m} \cdot \bar{\psi}_m - \bar{i}_R$$

Исключим из системы уравнений $\bar{\psi}_S$, $\bar{\psi}_R$ и $\bar{i}_S$:

$$\bar{\psi}_S = x_S \cdot (\frac{1}{x_m} \cdot \bar{\psi}_m - \bar{i}_R) + x_m \cdot \bar{i}_R = \frac{x_S}{x_m} \cdot \bar{\psi}_m - x_S \cdot \bar{i}_R + x_m \cdot \bar{i}_R = \frac{x_S}{x_m} \cdot \bar{\psi}_m - (x_S - x_m) \cdot \bar{i}_R$$

$$\bar{\psi}_R = x_R \cdot \bar{i}_R + x_m \cdot (\frac{1}{x_m} \cdot \bar{\psi}_m - \bar{i}_R) = x_R \cdot \bar{i}_R + \bar{\psi}_m - x_m \cdot \bar{i}_R = (x_R - x_m) \cdot \bar{i}_R + \bar{\psi}_m$$

$$\begin{cases} \bar{u}_S = \dfrac{r_S}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m - r_S\cdot\bar{i}_R + \dfrac{x_S}{x_m}\cdot\dfrac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} - (x_S - x_m)\cdot\dfrac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} + j\cdot\alpha_k\cdot\dfrac{x_S}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m - j\cdot\alpha_k\cdot(x_S - x_m)\cdot\bar{i}_R \\ 0 = r_R\cdot\bar{i}_R + (x_R - x_m)\dfrac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} + \dfrac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} + j\cdot\alpha_k\cdot\bar{\psi}_m + j\cdot\alpha_k\cdot(x_R - x_m)\cdot\bar{i}_R - j\cdot p\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m) - \\ - j\cdot p\cdot(x_R - x_m)\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) \end{cases} \qquad (*)$$

$$0 = \frac{r_R\cdot x_S}{x_m}\cdot\bar{i}_R + \frac{x_S\cdot(x_R - x_m)}{x_m}\cdot\frac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} + \frac{x_S}{x_m}\cdot\frac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} + j\cdot\alpha_k\cdot\frac{x_S\cdot(x_R - x_m)}{x_m}\cdot\bar{i}_R + j\cdot\alpha_k\cdot\frac{x_S}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m -$$
$$- j\cdot p\cdot\frac{x_S\cdot(x_R - x_m)}{x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - j\cdot p\cdot\frac{x_S}{x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m)$$

$$-\bar{u}_S = \frac{r_S\cdot x_S + r_S\cdot x_m}{x_m}\cdot\bar{i}_R + \left(\frac{x_S\cdot x_R - x_m^2}{x_m}\right)\cdot\frac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} - \frac{r_S}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m + j\cdot\alpha_k\cdot\left(\frac{x_S\cdot x_R - x_m^2}{x_m}\right)\cdot\bar{i}_R -$$
$$- j\cdot p\cdot\frac{x_S\cdot(x_R - x_m)}{x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - j\cdot p\cdot\frac{x_S}{x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m)$$

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{x_m}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}$ и обозначим

$$\frac{x_S\cdot x_R - x_m^2}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m} = T_{R4}$$

$$-\frac{x_m}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot\bar{u}_S = \bar{i}_R + T_{R4}\cdot\frac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} - \frac{r_S}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot\bar{\psi}_m + j\cdot\alpha_k\cdot T_{R4}\cdot\bar{i}_R -$$
$$- j\cdot p\cdot\frac{x_S\cdot(x_R - x_m)}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - j\cdot p\cdot\frac{x_S}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m)$$

Исключим из системы уравнений (*) $\dfrac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}}$, умножим первое уравнение на $(x_R - x_m)$, а второе на $(x_S - x_m)$ и далее их сложим:

$$\begin{cases} (x_R - x_m)\cdot\bar{u}_S = \dfrac{r_S\cdot(x_R - x_m)}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m - r_S\cdot(x_R - x_m)\cdot\bar{i}_R + \dfrac{(x_R - x_m)\cdot x_S}{x_m}\cdot\dfrac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} - \\ -(x_R - x_m)\cdot(x_S - x_m)\cdot\dfrac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} + j\cdot\alpha_k\cdot\dfrac{(x_R - x_m)\cdot x_S}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m - j\cdot\alpha_k\cdot(x_R - x_m)\cdot(x_S - x_m)\cdot\bar{i}_R \\ 0 = r_R\cdot(x_S - x_m)\cdot\bar{i}_R + (x_R - x_m)\cdot(x_S - x_m)\cdot\dfrac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} + (x_S - x_m)\cdot\dfrac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} + \\ + j\cdot\alpha_k\cdot(x_S - x_m)\cdot(x_R - x_m)\cdot\bar{i}_R + j\cdot\alpha_k\cdot(x_S - x_m)\cdot\bar{\psi}_m - j\cdot p\cdot(x_S - x_m)\cdot(x_R - x_m)\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - \\ - j\cdot p\cdot(x_S - x_m)\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m) \end{cases}$$

$$(x_R - x_m)\cdot \bar{u}_S = \left[r_R\cdot(x_S - x_m) - r_S\cdot(x_R - x_m)\right]\cdot \bar{i}_R + \frac{r_S\cdot(x_R - x_m)}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m + \frac{x_R\cdot x_S - x_m^2}{x_m}\cdot\frac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} +$$

$$+ j\cdot\alpha_k\cdot\frac{x_R\cdot x_S - x_m^2}{x_m}\cdot\bar{\psi}_m - j\cdot p\cdot(x_S - x_m)\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m) - j\cdot p\cdot(x_S - x_m)\cdot(x_R - x_m)\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R)$$

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{x_m}{r_S\cdot(x_R - x_m)}$ и обозначим

$$\frac{x_R\cdot x_S - x_m^2}{r_S\cdot(x_R - x_m)} = T_{m4}:$$

$$\frac{x_m}{r_S}\cdot\bar{u}_S = \bar{\psi}_m + T_{m4}\cdot\frac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} + \frac{x_m\cdot(r_R\cdot(x_S - x_m) - r_S\cdot(x_R - x_m))}{r_S\cdot(x_R - x_m)}\cdot\bar{i}_R +$$

$$+ j\cdot\alpha_k\cdot T_{m4}\cdot\bar{\psi}_m - j\cdot p\cdot\frac{x_m\cdot(x_S - x_m)}{r_S}\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - j\cdot p\cdot\frac{x_m\cdot(x_S - x_m)}{r_S\cdot(x_R - x_m)}\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m)$$

Рассмотрим процессы в неподвижной системе координат $\omega_k = 0$, $\alpha_k = 0$:

$$\begin{cases} -\dfrac{x_m}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot\bar{u}_S = \bar{i}_R + T_{R4}\cdot\dfrac{d\bar{i}_R}{d\bar{t}} - \dfrac{r_S}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot\bar{\psi}_m - j\cdot p\cdot\dfrac{x_S\cdot(x_R - x_m)}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - \\ - j\cdot p\cdot\dfrac{x_S}{r_R\cdot x_S + r_S\cdot x_m}\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m) \\ \dfrac{x_m}{r_S}\cdot\bar{u}_S = \bar{\psi}_m + T_{m4}\cdot\dfrac{d\bar{\psi}_m}{d\bar{t}} + \dfrac{x_m\cdot(r_R\cdot(x_S - x_m) - r_S\cdot(x_R - x_m))}{r_S\cdot(x_R - x_m)}\cdot\bar{i}_R - j\cdot p\cdot\dfrac{x_m\cdot(x_S - x_m)}{r_S}\cdot(\nu\cdot\bar{i}_R) - \\ - j\cdot p\cdot\dfrac{x_m\cdot(x_S - x_m)}{r_S\cdot(x_R - x_m)}\cdot(\nu\cdot\bar{\psi}_m) \end{cases}$$

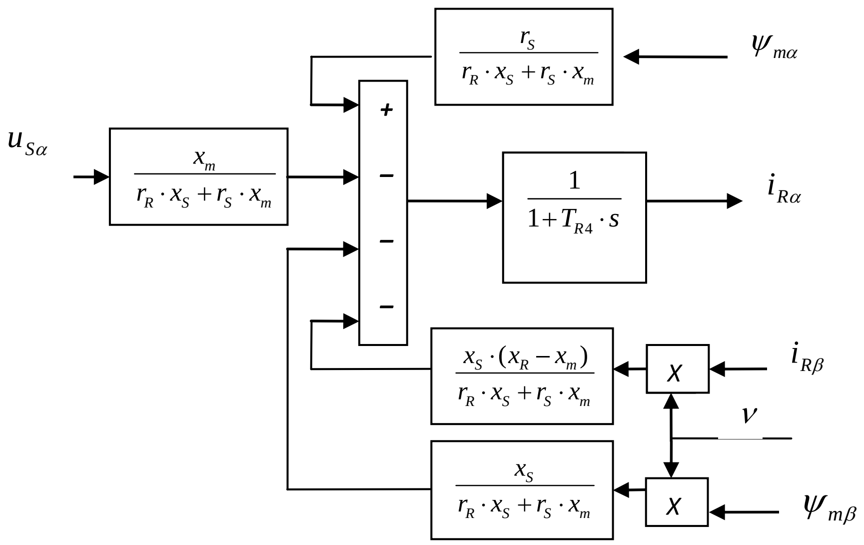
Вещественную ось обозначим α, а мнимую через β. Пространственные векторы в этом случае раскладываются по осям:

$$\begin{cases} \overline{u_S} = u_{S\alpha} + j \cdot u_{S\beta}; \quad \bar{i}_R = i_{R\alpha} + j \cdot i_{R\beta}; \quad \bar{i}_S = i_{S\alpha} + j \cdot i_{S\beta}; \quad \overline{\psi}_m = \psi_{m\alpha} + j \cdot \psi_{m\beta} \\ -\dfrac{x_m}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \bar{u}_{S\alpha} = \bar{i}_{R\alpha} + T_{R4} \cdot \dfrac{d\bar{i}_{R\alpha}}{d\bar{t}} - \dfrac{r_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \overline{\psi}_{m\alpha} + p \cdot \dfrac{x_S \cdot (x_R - x_m)}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\beta}) + \\ + p \cdot \dfrac{x_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\beta}) \\ -\dfrac{x_m}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \bar{u}_{S\beta} = \bar{i}_{R\beta} + T_{R4} \cdot \dfrac{d\bar{i}_{R\beta}}{d\bar{t}} - \dfrac{r_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \overline{\psi}_{m\beta} - p \cdot \dfrac{x_S \cdot (x_R - x_m)}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\alpha}) - \\ - p \cdot \dfrac{x_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\alpha}) \\ \dfrac{x_m}{r_S} \cdot \bar{u}_{S\alpha} = \overline{\psi}_{m\alpha} + T_{m4} \cdot \dfrac{d\overline{\psi}_{m\alpha}}{d\bar{t}} + \dfrac{x_m \cdot (r_R \cdot (x_S - x_m) - r_S \cdot (x_R - x_m))}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot \bar{i}_{R\alpha} + p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\beta}) + \\ + p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\beta}) \\ \dfrac{x_m}{r_S} \cdot \bar{u}_{S\beta} = \overline{\psi}_{m\beta} + T_{m4} \cdot \dfrac{d\overline{\psi}_{m\beta}}{d\bar{t}} + \dfrac{x_m \cdot (r_R \cdot (x_S - x_m) - r_S \cdot (x_R - x_m))}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot \bar{i}_{R\beta} - p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\alpha}) - \\ - p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\alpha}) \end{cases}$$

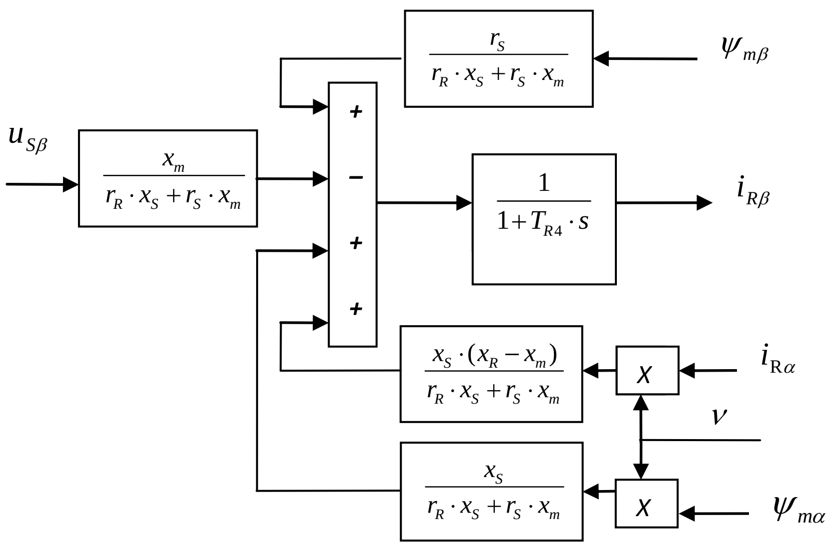
С учетом электромагнитных моментов система уравнений в операторной форме $\dfrac{d}{d\bar{t}} = s$ примет вид:

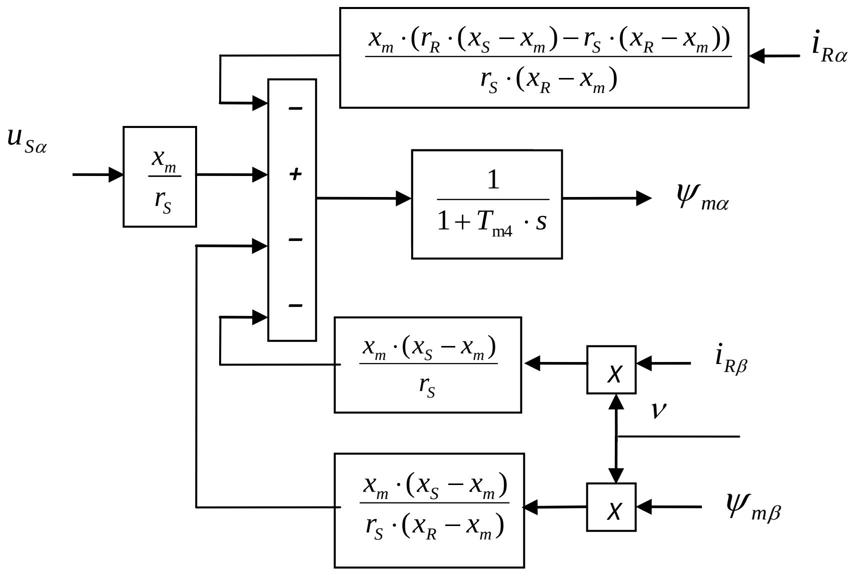
$$\begin{cases} -\dfrac{x_m}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \bar{u}_{S\alpha} = (1 + T_{R4} \cdot s) \cdot \bar{i}_{R\alpha} - \dfrac{r_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \overline{\psi}_{m\alpha} + p \cdot \dfrac{x_S \cdot (x_R - x_m)}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\beta}) + \\ + p \cdot \dfrac{x_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\beta}) \qquad (1) \\ -\dfrac{x_m}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \bar{u}_{S\beta} = (1 + T_{R4} \cdot s) \cdot \bar{i}_{R\beta} - \dfrac{r_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot \overline{\psi}_{m\beta} - p \cdot \dfrac{x_S \cdot (x_R - x_m)}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\alpha}) - \\ - p \cdot \dfrac{x_S}{r_R \cdot x_S + r_S \cdot x_m} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\alpha}) \qquad (2) \\ \dfrac{x_m}{r_S} \cdot \bar{u}_{S\alpha} = (1 + T_{m4} \cdot s) \cdot \overline{\psi}_{m\alpha} + \dfrac{x_m \cdot (r_R \cdot (x_S - x_m) - r_S \cdot (x_R - x_m))}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot \bar{i}_{R\alpha} + \\ + p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\beta}) + p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\beta}) \qquad (3) \\ \dfrac{x_m}{r_S} \cdot \bar{u}_{S\beta} = (1 + T_{m4} \cdot s) \cdot \overline{\psi}_{m\beta} + \dfrac{x_m \cdot (r_R \cdot (x_S - x_m) - r_S \cdot (x_R - x_m))}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot \bar{i}_{R\beta} - \\ - p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S} \cdot (\nu \cdot \bar{i}_{R\alpha}) - p \cdot \dfrac{x_m \cdot (x_S - x_m)}{r_S \cdot (x_R - x_m)} \cdot (\nu \cdot \overline{\psi}_{m\alpha}) \qquad (4) \\ m = \psi_{m\beta} \cdot i_{\mathrm{R}\alpha} - \psi_{m\alpha} \cdot i_{R\beta} \qquad (5) \\ m - m_C = T_m \cdot s \cdot \nu \qquad (6) \end{cases}$$

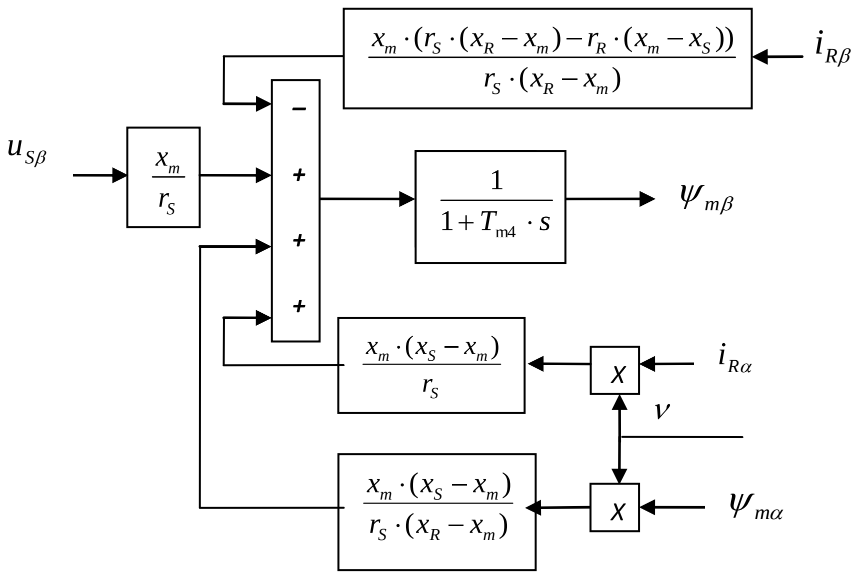
Структурная схема для уравнения (1):



Аналогично структурные схемы для уравнений (2), (3) и (4):

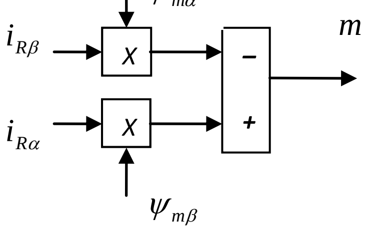


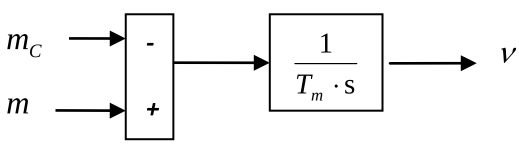




Структурные схемы для уравнений (5) и (6):

$$m = \psi_{m\beta} \cdot i_{R\alpha} - \psi_{m\alpha} \cdot i_{R\beta} \qquad \nu = (m - m_C) \cdot \left(\frac{1}{T_m \cdot S} \right)$$





Для моделирования выберем АКЗ со следующими паспортными данными и параметрами [4], [5]: $P = 320кВт$, $U_1 = 380В$, $I_1 = 324А$, $f = 50Гц$, $p = 3$, $R_s = 0.0178Ом$, $R_r = 0.0194Ом$, $L_{\sigma\ s} = 0.118Ом$, $L_{\sigma\ r} = 0.123Ом$, $X_s = 4.67Гн$, $X_r = 4.675Г$, $X_m = 4.552Гн$, $J = 28кг \cdot м^2$.

Значения безразмерных коэффициентов в уравнениях, рассчитанные по выражениям приведенным выше:

Коэффициент	T_{S4}	T_{R4}	$l_{S\sigma}$	T_m
Значение	507,694	6,477	0,118	783,496

На вход модели в момент времени $\bar{t} = 0$ подаются напряжения $U_{s\alpha} = \cos\bar{t}$ и $U_{s\beta} = \sin\bar{t}$. Осциллоскопы измеряют относительные значения электромагнитного момента и скорости. Результаты моделирования представлены на рис.1. Они показывают, что при прямом пуске вначале наблюдается значительные колебания момента.

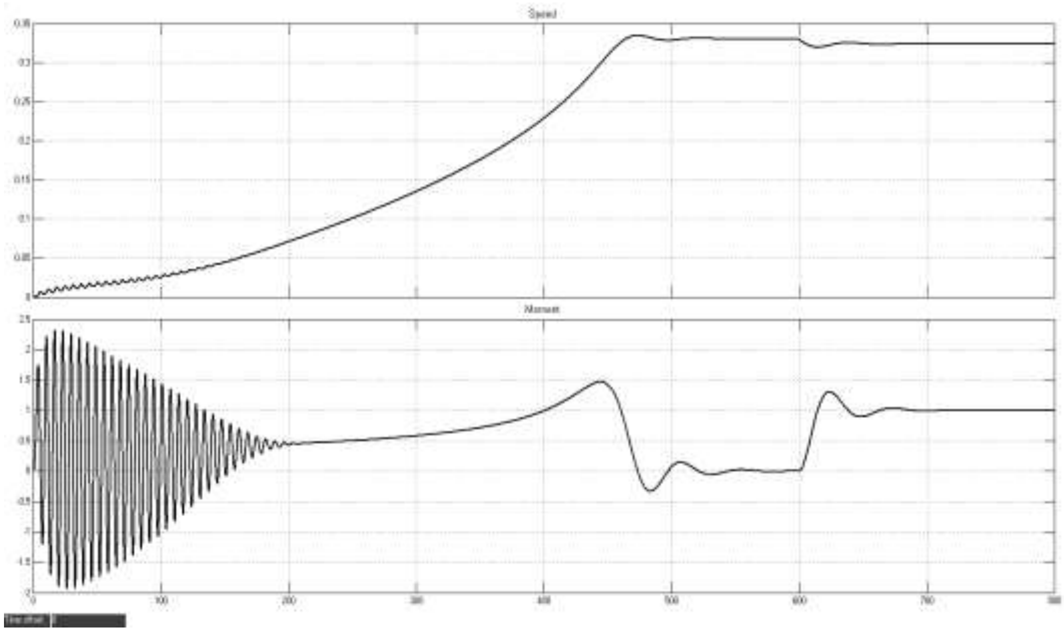


Рис. 1. Результаты моделирования, относительные значения электромагнитного момента и скорости

Литература

1. *Шрейнер Р.Т.* Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. Екатеринбург: УРО РАН, 2000. 654 с.

2. *Герман-Галкин С.Г.* Компьютерное моделирование полупроводниковых систем Matlab 6.0: Учебное пособие. – Спб.: Корона принт. 2001. – 320с., ил.

3. *Емельянов А.А., Клишин А.В., Медведев А.В.* Математическая модель АД в неподвижной системе координат с переменными $\overline{\psi}_R - \bar{i}_R$ [Текст] / Молодой ученый. – 2010. -№4. – С. 8-24.

4. *Шрейнер Р.Т.* Электромеханические и тепловые режимы асинхронных двигателей в системах частотного управления. Екатеринбург: ГОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2008. 361 с.

5. *Емельянов А.А., Медведев А.В., Кобзев А.В., Медведев А.В., Шепельков А.В., Зарубин Е.А., Воробьев А.Н.* Математическая модель АД в неподвижной системе координат с переменными $\overline{\psi}_m - \bar{i}_S$ [Текст] / Молодой ученый. – 2011. -№3. – С. 11-21.