

ФУНДАМЕНТАЛИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИЗЛОЖЕНИИ МЕТОДА АНАЛОГИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЯХ

Идея о теоретическом обобщении колебательных и волновых явлений не нова. Еще в пятидесятые годы XX в. она была реализована в книге Г. С. Горелика «Колебания и волны». Однако в методическую литературу и в учебный процесс эта идея пока полностью так и не внедрена. Между тем проблема объединения колебательных и волновых процессов в единой теме имеет важное значение для повышения качества общего и профессионального образования.

Не останавливаясь на истории вопроса, что не входит в наши задачи, обратимся к тем фундаментальным физическим основам, благодаря которым стало возможно теоретическое обобщение данного вида движений. Колебательные движения могут быть объединены по внешней схожести в изменении параметров. Так, для механических колебательных систем характерно периодическое изменение силы, скорости, ускорения, для электромагнитных процессов – периодическое изменение токов, напряжений, электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля и другие параметры. Вторая существенная особенность, позволяющая сделать теоретическое обобщение всех колебательных процессов, – это адекватность физических моделей данных явлений. Третье и главное в вопросе, – колебательные процессы описываются симметричными математическими уравнениями. Так, для всех систем с одной степенью свободы смещения «движущегося элемента» от положения равновесия, как известно из курса физики, определяется одной и той же временной зависимостью, выражаемой уравнением:

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Функция $\Psi(t)$ может быть в роли любого параметра колеблющейся системы: для колеблющейся массы она соответствует смещению массы от положения равновесия, для LC-цепи $\Psi(t)$ – это либо ток в индуктивности, либо заряд на обкладках конденсатора. Рассмотрим в качестве примера

простой маятник и колебательный контур. Движение маятника описывается вторым законом Ньютона:

$$Ml \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -Mg \sin \psi(t).$$

Если представить $\sin \psi(t)$ разложением в виде ряда Тейлора, то получим:

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots$$

Такое представление дает возможность пренебречь всеми членами ряда, за исключением первого. Получаем уравнение:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\omega^2 \psi,$$

где через коэффициент ω^2 записано:

$$\omega^2 = -\frac{g}{l}.$$

Общее решение полученного уравнения называют гармоническим колебанием и записывают:

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Для колебательного контура изменение величины тока определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{2I}{C}.$$

Таким образом, как и в первом случае, получили дифференциальное уравнение, решение которого симметрично полученному.

Можем записать:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{2I}{C}, \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 I, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{2}{CL},$$

$$I(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

В последнем примере роль силы играет э. д. с., равная $\frac{2Q}{C}$, а роль «смещения» принадлежит заряду. Нетрудно заметить формальную аналогию между массой и индуктивностью.

Аналогичными уравнениями могут быть представлены потенциальная и кинетическая энергии колеблющихся систем.

В плане нашей концепции методики решения задач обсуждаемый вопрос является, пожалуй, единственным, где сделана попытка реализации принципа теоретических обобщений. Не останавливаясь поэтому на известном, обратим внимание на тот факт, что при изучении механических колебаний обычно рассматриваются системы твердых тел. Поэтому переход к волновому движению, где моделью служит жидкость, бывает несколько искусственным. Чтобы ввести логически оправданную модель жидкой среды для изучения механических волн, наряду с изучением законов колебаний твердого тела, методически целесообразно рассмотреть колебания жидкости, например, в V -образной трубке.

Модель колебания жидкости в V -образной трубке

Поступательное движение	Вращательное движение	Электрические явления
Масса m	Момент инерций I	Индуктивность L
Жесткость при растяжении k	Жесткость при кручении k	(Емкость) $^1 C ^1$
Смещение x	Угловое смещение a	Заряд q
Скорость dx/dt	Угловая скорость da/dt	Ток dq/dt
Ускорение d^2x/dt^2	Угловое ускорение d^2a/dt^2	Скорость изменения тока d^2q/dt^2
Сила F	Момент силы $M = Fl$	Напряжение U
Коэффициент трения μ	Коэффициент трения μ	Сопротивление R
Частота свободных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	То же, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$	То же, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Волновое сопротивление $\rho = \sqrt{km}$	То же, $\rho = \sqrt{kl}$	То же, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$
Работа $\frac{dA}{dt} = F \frac{dx}{dt}$	То же, $\frac{dA}{dt} = M \frac{da}{dt}$	То же, $\frac{dA}{dt} = U \frac{dq}{dt}$
Мощность $P = F \frac{dx}{dt}$	То же, $P = M \frac{da}{dt}$	То же, $P = U \frac{dq}{dt}$
Кинетическая энергия $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$	То же, $\frac{1}{2} I \left(\frac{da}{dt} \right)^2$	Магнитная энергия $\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$
Потенциальная энергия $\frac{1}{2} kx^2$	То же, $\frac{1}{2} ka^2$	Электрическая энергия $\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$

Задача 1.

Определить период колебаний столба воды в V -образной трубке при выведения его из положения равновесия. Площадь сечения трубки S , масса воды m .

Задача 2.

В сплошной плите просверлено V -образное отверстие. В него заливают две жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Линия раздела жидкостей симметрично разрезает отверстие на две равные половины. При этом длина жидкости в правой части отверстия l_1 . Определить максимальную скорость жидкости, если в начальный момент уровень ее в правой части был понижен относительно равновесного на величину l_0 . Трением пренебречь.

Задача 3.

Газ с молекулярным весом μ заключен в вертикальный цилиндр. В цилиндре установлен поршень массой m , который делит весь объем на две части V_1 и V_2 . Вся система установлена в термостате, где поддерживается постоянная температура T . Поршень колеблется с периодом τ . Найти массу газа в цилиндре, считая, что в объемах, разделенных поршнем, она одинакова. Сечение цилиндра S .

Задача 4.

Два резервуара с одинаковым количеством газа соединены между собой V -образной трубкой, заполненной жидкостью. Найти частоту колебаний жидкости, если давление газа p_0 и объемы резервуаров одинаковы.

Задача 5.

Как изменяется условия колебания физического маятника массы M , если на него сядет воробей массы m , соизмеримой с массой маятника? Поездка осуществляется без толчка, плавно.

Задача 6.

Мелкий сухой песок плотности ρ насыпан в цилиндрическое ведро массой M , высотой H и сечением S . Ведро подвешено на тросе и способно совершать колебательные движения в плоскости. Расстояние от точки подвеса до дна ведра l . Как будет зависеть частота малых собственных колебаний получившегося маятника от уровня песка в ведре? Массой дна ведра пренебречь.

Задача 8.

Цепь представляет колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L и активным сопротивлением R , а также из конденсатора

емкостью C . Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе U_0 ?

Задача 9.

В вакууме через площадку S распространяется плоская электромагнитная волна, направление которой перпендикулярно площадке. Известна величина амплитуды напряженности электрического поля волны E_0 . Определить энергию, которую переносит эта электромагнитная волна за время t . Период волны $T \ll t$.

Задача 10.

С высоты h по отношению к дну подвешенной на пружине чашки падает шарик массой m . Считая удар о дно шарика не упругим, определить амплитуду колебания чашки.

Задача 11.

По желобу, одна из ветвей которого наклонена под углом α , а вторая – под углом β к горизонту, движется шарик. Каков будет характер его движения, если трение и потери скорости при переходе с одной ветви желоба на другую не учитывать?

Задача 12.

На тележке, которая движется по наклонной плоскости с ускорением a , установлен маятник длиной l . Найти период колебаний маятника, если угол наклонной плоскости α .

Задача 13.

На двух вращающихся в противоположные стороны валиках лежит горизонтально расположенная доска массы m . Расстояние между осями валиков $2l$. Коэффициент трения между доской и каждым из валиков равен μ . В начальный момент доска была расположена так, что ее центр тяжести был смещен на некоторое расстояние x от средней линии.

Определить, какие движения будет совершать доска под действием сил трения, создаваемых валиками.

Задача 14.

Для предотвращения короткого замыкания в колебательном контуре генератора (вследствие случайного касания пластин переменного конденсатора друг с другом) последовательно с этим конденсатором включается постоянный конденсатор, емкость которого намного больше емкости пе-

ременного конденсатора. Наибольшей емкости переменного конденсатора C_1 до включения постоянного конденсатора соответствовала частота колебаний ν . Во сколько раз изменится частота контура после включения постоянного конденсатора, если емкость этого конденсатора увеличена в n раз по сравнению с первоначальной?

А. А. Паин

Екатеринбург

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМООБРАЗУЮЩИХ ФАКТОРОВ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КУЛЬТУРЫ ПРИ ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ

Удвоение к 2010 г. ВВП, реструктуризация по мере исчерпания запасов углеводородных ресурсов экспортного потенциала страны с соответствующим освоением мировых рынков высоких технологий являются системообразующими задачами первого десятилетия XXI в. Эти задачи, с учетом процессов глобализации международных экономических, политических, научных, культурных, правовых отношений, решаются адекватно возникающим в современном мире проблемам только при условии опережающей подготовки высококлассных специалистов. При этом известный афоризм К. Прутковки становится не просто констатацией не слишком веселого факта, но информацией к размышлению, а следовательно, и руководством к действию.

Наши реалии и пример стран т. н. «технологического ядра» (США, Великобритании, Японии, Германии, Франции) и «первого технологического круга» (Швеции, Дани, Испании, Австрии и др.) показывают необходимость непрерывного образования, просветительской работы с населением, комплексного учета человеческого фактора, неукоснительной защиты авторских прав, ноу-хау, а также – управления карьерой молодых менеджеров, исследователей, инженеров.

Подготовка же к профессиональной деятельности в сфере бизнеса и в целом в социуме предполагает, наряду с выпуском специалистов и управленцев т. н. среднего звена (уровня), формирование элиты для экономики и топ-менеджмента. В этой связи представляется весьма эффективным инновационный подход, основанный на применении инструментария менеджмента знаний (*knowledge management*). При сложившейся на Западе