

Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет»
Учреждение Российской академии образования
«Уральское отделение»

О. И. Ключников, А. В. Степанов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 4

Переходные процессы в линейных электрических цепях

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением по профессионально-педагогическому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 050501.19 – Профессиональное обучение (электроэнергетика, электротехника и электротехнологии)

Екатеринбург
РГППУ
2010

УДК 621.3 (075.8)

ББК 32я73–1

К52

Клюшников О. И. Теоретические основы электротехники [Текст]: учеб. пособие: в 5 ч. Ч. 4: Переходные процессы в линейных электрических цепях / О. И. Клюшников, А. В. Степанов. Екатеринбург: Изд-во ФГАОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2010. 100 с.

ISBN 978-5-8050-0374-6

Изложены основные сведения о переходных процессах в линейных электрических цепях и о законах отображения переходных процессов. Приведено теоретическое описание расчета переходных процессов в электрических цепях с источником постоянной ЭДС и синусоидальным источником, рассмотрен порядок расчета переходных процессов, приведены примеры решения задач классическим и операторным методами.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, осуществляющих подготовку педагогов и инженеров по электротехническим направлениям.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Г. В. Ермаков (Институт теплофизики УрО РАН); канд. техн. наук, доц. А. А. Карпов (ФГАОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0374-6

© ФГАОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», 2010

© Клюшников О. И., Степанов А. В., 2010

Введение

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с действующей типовой программой и предназначено для изучения студентами вузов дисциплин «Теоретические основы электротехники», «Электротехника и электроника», «Электрические цепи и сигналы». Основное внимание авторы стремились уделять логичности и стройности изложения материала, по возможности теснее увязывая его с практическими приложениями, однако в зависимости от специальности, принятой методики обучения и рабочих программ по дисциплинам последовательность изложения материала и степень его детализации могут варьироваться.

В данном пособии рассмотрены переходные процессы в линейных электрических цепях. Материал пособия служит основой для создания теоретической базы, необходимой при изучении специальных дисциплин, тематически связанных с автоматизацией технологических процессов, электроснабжением и электрооборудованием.

Учебное пособие состоит из семи глав, в каждой из которых приведены необходимые теоретические сведения, примеры практических расчетов, а также контрольные вопросы и задания, позволяющие глубже усвоить изучаемый материал.

В приложении рассмотрен порядок выполнения расчетно-графической работы по теме «Переходный процесс в разветвленной цепи».

По сравнению с содержанием известных изданий материал пособия переработан с учетом требований ГОСТов и современных методов математического описания процессов в электротехнических устройствах и электрических цепях.

Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

1.1. Определение переходных процессов

Под *переходными процессами* понимают процессы перехода от одного установившегося режима работы электрической цепи (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например амплитудой, фазой, формой или частотой.

Периодическими являются режимы синусоидального и постоянного тока, а также режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы вызываются коммутацией в цепи. *Коммутация* – это любое переключение электрической цепи, т. е. процесс замыкания (рис. 1.1, *а*) или размыкания (рис. 1.1, *б*) выключателей.

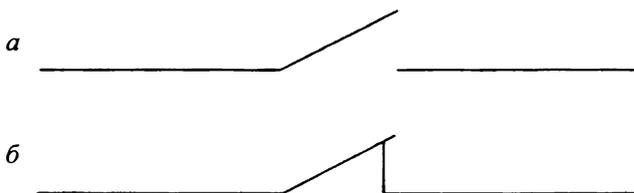


Рис. 1.1. Участок электрической цепи:

а – с замкнутым выключателем; *б* – с разомкнутым выключателем

Физической причиной возникновения переходных процессов в цепях является наличие в них катушек индуктивности и конденсаторов, т. е. индуктивных и емкостных элементов в соответствующих схемах замещения. Энергия магнитного и электрического полей этих элементов не может изменяться скачком при коммутации в цепи. Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от одного энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму. Процесс перехода от одного установившегося состояния к другому протекает не мгновенно (скачком), а постепенно, в течение некоторого времени.

Переходные процессы обычно являются быстро протекающими; длительность их составляет десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунды; сравнительно редко длительность переходных процессов дости-

гает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов важно, так как оно дает возможность установить, как деформируются по форме и амплитуде сигналы при прохождении их через усилители и другие устройства, выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, опасные для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса (и вызывать недопустимые механические усилия), а также позволяет определить продолжительность переходного процесса.

Для описания переходного процесса была предложена так называемая базовая модель. Поведение электрической цепи в такой модели предложено описывать с помощью дифференциальных уравнений. Название «базовая» принято в силу того, что любая механическая (любая другая) система может быть представлена как электрическая цепь. Далее ее поведение можно рассматривать в соответствии с законами электрических цепей.

1.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы (рис. 1.2) при замкнутом ключе. Сумма падений напряжений на элементах L и R равна ЭДС E :

$$u_L + u_R = E, \quad (1.1)$$

или

$$L(di/dt) + Ri = E. \quad (1.2)$$

Как известно из курса математики, уравнение, содержащее неизвестную функцию (в нашем случае i) и ее производные (в нашем случае $L(di/dt)$), называют дифференциальным уравнением.

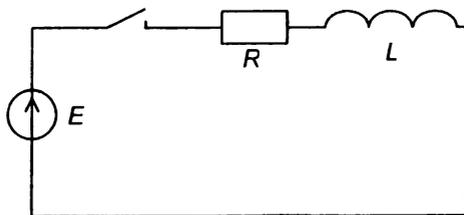


Рис. 1.2. RL -цепь

Таким образом, определение тока как функции времени по сути есть решение дифференциального уравнения.

Известно, что решение дифференциального уравнения – это отыскание функции, удовлетворяющей ему. Подстановка этой функции и ее производных превращает дифференциальное уравнение в тождество.

Переходный процесс в цепи описывается дифференциальным уравнением: неоднородным или однородным в зависимости от того, содержит схема замещения источники ЭДС и тока или нет. Заметим, что переходный процесс в линейной цепи описывается линейными дифференциальными уравнениями, а в нелинейной – нелинейными. В дальнейшем ограничимся расчетом переходных процессов в линейных цепях, содержащих элементы с постоянными параметрами. Для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами разработаны различные аналитические методы: классический, операторный, метод интеграла Фурье и др., которые применяются и для расчета переходных процессов. Ограничимся применением классического и операторного методов. Первый обладает физической наглядностью и удобен для расчета простых цепей, а второй упрощает расчет сложных цепей.

Перед тем как изучать эти методы, необходимо рассмотреть общие свойства линейных цепей при переходных процессах, а также общие законы, которым подчиняются переходные процессы в линейных электрических цепях. Справедливость представления переходного процесса решением дифференциального уравнения покажем на примере подключения цепи (см. рис. 1.2). Состояние цепи описывается неоднородным дифференциальным уравнением (1.2).

1.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений

Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем называть *принужденной составляющей* тока (напряжения), а результат решения однородного уравнения – *свободной составляющей*. Сумма частного решения неоднородного уравнения и результата решения однородного уравнения является полным решением уравнения (для уравнения (1.1) это полный ток).

Из трех токов (полного, принужденного и свободного) и трех напряжений (полного, принужденного и свободного) основное значение имеют полный ток и полное напряжение.

Полный ток является тем током, который в действительности протекает по той или иной ветви при переходном процессе. Его можно измерить и записать на осциллограмме. Аналогично полное напряжение – это напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе. Его также можно измерить и записать на осциллограмме.

Применительно к рассмотренному примеру принужденная составляющая тока – это частное решение уравнения (1.2) для случая, когда система будет иметь энергетическое состояние во времени $t \gg T_{\text{пер}}$, где $T_{\text{пер}}$ – время переходного состояния.

$$i_{\text{пр}} = E/R,$$

где E – постоянная ЭДС.

Принужденная составляющая тока (напряжения) физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая ЭДС. Если в схеме действует принуждающая синусоидальная ЭДС с частотой ω , то принужденная составляющая любого тока и любого напряжения в схеме является соответственно синусоидальным током (синусоидальным напряжением) частоты ω .

Определяются принужденные составляющие в цепи синусоидального тока с помощью символического метода. Если в схеме действует источник постоянной ЭДС (см. рис. 1.2), то принужденный ток есть постоянный ток, и находят его с помощью методов, рассмотренных для цепей с источниками постоянной ЭДС или тока.

Постоянный ток через конденсатор не проходит, поэтому принужденная составляющая тока через него в цепях с источниками постоянной ЭДС равна нулю. Кроме того, напомним, что падение напряжения на индуктивной катушке от неизменного во времени тока равно нулю.

Свободная составляющая определяется из однородного уравнения. Свободный процесс вызывается несоответствием между энергией, сосредоточенной в электрическом и магнитном полях емкостных и индуктивных элементов в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации, и энергией этих элементов при новом установившемся режиме в момент времени, непосредственно следующий за коммутацией. Энергия элементов не может измениться скачком, и ее постепенное изменение обуславливает переходный процесс.

Однородное уравнение получаем из исходного, если в нем возьмем правую часть равной нулю. В нашем случае

$$L(di/dt) + Ri = 0. \quad (1.3)$$

Решением однородного уравнения является показательная функция вида Ae^{pt} .

Для всех переходных процессов условимся, что момент $t = 0$ соответствует моменту коммутации.

Постоянные A и p не зависят от времени. Без вывода дадим их значения для рассматриваемого примера:

$$A = -\frac{E}{R}, \quad p = -\frac{R}{L}.$$

В линейных электрических цепях свободные составляющие токов и напряжений затухают во времени по показательному закону e^{pt} . Так, в рассмотренном примере $i_{св} = (E/R)e^{pt}$. С увеличением времени t множитель $e^{-(r/L)t}$ быстро уменьшается. Название «свободная» объясняется тем, что эта составляющая есть решение уравнения, свободного от вынуждающей силы (однородного уравнения без правой части).

Находим полный ток:

$$i = i_{пр} + i_{св}.$$

Следовательно, решение уравнения (1.2) можно записать в виде

$$i = (E/R) - (E/R) e^{-(r/L)t}, \quad (1.4)$$

где (E/R) – частное решение неоднородного уравнения (1.2); $(E/R)e^{-(r/L)t}$ – общее решение однородного уравнения (1.3).

Подстановка (1.4) в (1.2) дает тождество.

$$\begin{aligned} L[d(E/R) - (E/R)e^{-(r/L)t}/dt] + R[(E/R) - (E/R)e^{-(r/L)t}] = \\ = -L(E/R)[-R/L]e^{-(r/L)t} + E - Ee^{-(r/L)t} = E. \end{aligned}$$

Следовательно, (1.4) действительно является решением уравнения (1.2).

Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений во время переходного процесса играют вспомогательную роль; они являются теми расчетными компонентами, сумма которых дает действительные величины. Согласно закону сохранения энергии, энергия скачком изменяться не может и, следовательно, не может изменяться скачком обуслови-

вающая ее величина. Если предположить, что энергия изменится мгновенно за время $t = 0$, то мощность, необходимая для этого, оказалась бы равной бесконечности:

$$P = (dw/dt) = w/0 = \infty,$$

а источников с бесконечной мощностью в природе не существует.

Здесь следует еще раз обратить внимание на тот факт, что при любых переходных и установившихся процессах соблюдают два основных положения: ток через индуктивную катушку и напряжение на конденсаторе не могут изменяться скачком.

1.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивную катушку и скачка напряжения на конденсаторе

Доказательство того, что ток через индуктивную катушку не может изменяться скачком, проведем на примере схемы, показанной на рис. 1.2. По второму закону Кирхгофа $L(di/dt) + Ri = E$.

Ток i и ЭДС E могут принимать конечные (не бесконечно большие) значения.

Допустим, что ток i может измениться скачком. Скачок тока означает, что за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \rightarrow 0$ ток изменится на конечное значение Δi . При этом $\Delta i/\Delta t \rightarrow \infty$. Если вместо $L(di/dt)$ в уравнение (1.1) подставить ∞ , то его левая часть не будет равна правой части и не будет выполнен второй закон Кирхгофа.

Следовательно, допущение о возможности скачкообразного изменения тока через индуктивную катушку противоречит второму закону Кирхгофа.

Ток через L не может изменяться скачком, но напряжение на L , равное $L(di/dt)$, скачком измениться может. Это не противоречит второму закону Кирхгофа.

Доказательство того, что напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком, проводится аналогично.

Обратимся к простейшей цепи с конденсатором (рис. 1.3). Составим для нее уравнение по второму закону Кирхгофа при замыкании ключа:

$$Ri + U_c = E,$$

где E – ЭДС источника, конечная величина;

U_c – напряжение на конденсаторе.

Так как $i = C(dU_c/dt)$, то $\Delta U_c/\Delta t \approx dU_c/dt$, следовательно

$$RC(dU_c/dt) + U_c = E. \quad (1.5)$$

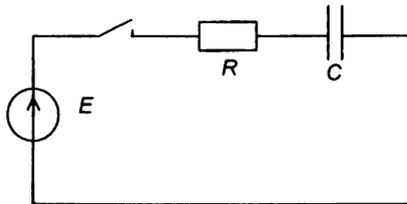


Рис. 1.3. RC-цепь

Если допустить, что напряжение U_c может измениться скачком, то $\Delta U_c/\Delta t \approx dU_c/dt \rightarrow \infty$ и левая часть (1.5) не будет равна правой части. Отсюда следует, что допущение о возможности скачкообразного изменения напряжения на конденсаторе противоречит второму закону Кирхгофа.

Однако ток через конденсатор, равный $C(dU_c/dt)$, может изменяться скачком; это не противоречит второму закону Кирхгофа.

Из указанных двух основных положений следуют два закона (правила) коммутации, рассмотренные в гл. 2.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение переходного процесса.
2. Что понимают под принужденными (установившимися) и свободными токами и напряжениями?
3. Существуют ли электрические цепи, подключение которых к источнику постоянного напряжения создает в цепи установившиеся значения тока сразу после коммутации без переходного процесса?

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Первый закон (правило) коммутации

В любой ветви с индуктивностью ток i_L через индуктивный элемент L и магнитный поток ψ , созданный этим током, в момент коммутации сохраняют те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и дальше начинают изменяться именно с этих значений.

Пояснение первого закона коммутации на примере тока в ветви с индуктивностью представлено на рис. 2.1, где $t_- = 0$ – момент времени непосредственно перед коммутацией, $t_+ = 0$ – момент времени непосредственно после коммутации.

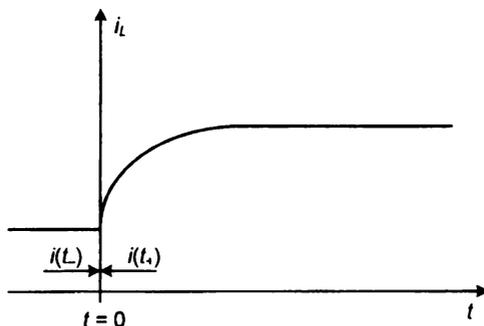


Рис. 2.1. График возрастания тока в цепи с индуктивностью

Время $t = 0$ – начало отсчета переходного процесса. С математической точки зрения первый закон коммутации можно представить в следующем виде:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0).$$

Аналогично для магнитного потока (или потокосцепления) можно записать

$$\Phi(0_+) = \Phi(0_-) = \Phi(0).$$

Необходимо иметь в виду, что требование неизменности магнитного потока является более жестким, чем требование неизменности тока в ветви с индуктивностью (например, в сложных цепях с взаимной индукцией, для которых остается неизменным общий магнитный поток таких цепей).

2.2. Второй закон (правило) коммутации

В любой ветви с конденсатором напряжение и заряд на емкости сохраняют в момент коммутации те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем начинают изменяться именно с этих значений.

Обозначим напряжение на конденсаторе непосредственно до коммутации как U_{c-} , а напряжение на нем непосредственно после коммутации – как U_{c+} . С математических позиций второй закон коммутации выглядит следующим образом:

$$U_{c-} = U_{c+} = U_{c-}$$

либо

$$q(0_+) = q(0_-) = q(0). \quad (2.1)$$

В сложных электрических цепях неизменность заряда на обкладках конденсатора является более жестким условием, чем сохранение напряжения на конденсаторе.

При расчетах переходных процессов используют так называемые начальные значения тока и напряжения в ветвях цепи, которые в совокупности с законами коммутации позволяют определить постоянные интегрирования.

2.3. Начальные значения величин

Под *начальными значениями величин* (в литературе их называют еще начальными условиями) понимают значения токов и напряжений в схеме при $t = 0$.

Как уже отмечалось, токи через индуктивные элементы и напряжения на конденсаторах непосредственно после коммутации равны их значениям непосредственно до коммутации. Остальные величины: напряжения на индуктивных элементах, напряжения на резисторах, токи через конденсаторы, токи через резисторы – могут изменяться скачком, следовательно, их значения после коммутации чаще всего оказываются не равными их значениям до коммутации. Поэтому следует различать докоммутационные и послекоммутационные начальные значения.

Докоммутационными начальными значениями называют значения токов и напряжений непосредственно до коммутации (при $t = 0_-$); *послекоммутационными начальными значениями* – значения токов и напряжений непосредственно после коммутации (при $t = 0_+$).

2.4. Независимые и зависимые (послекоммутационные) начальные значения

Для любой схемы после коммутации в ней можно записать уравнения по законам Кирхгофа и из этих уравнений определить значения токов во всех ветвях и напряжений на любых участках схемы в послекоммутационном режиме (при $t = 0_+$).

С этой целью значения токов в ветвях, содержащих индуктивные элементы, и значения напряжений на конденсаторах берут равными тем значениям, которые они имели до коммутации при $t = 0_-$, а остальные токи и напряжения после коммутации при $t = 0_+$ находят из уравнений Кирхгофа, поскольку часть слагаемых в них известна.

Значения токов через индуктивные элементы и напряжений на конденсаторах, известные из докоммутационного режима, условимся называть *независимыми начальными значениями*.

Значения остальных токов и напряжений при $t = 0_+$ в послекоммутационной схеме, определяемые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа, будем называть *зависимыми начальными значениями*.

2.5. Основные и неосновные зависимые начальные значения

Для сложных схем со многими накопителями энергии число независимых начальных значений (начальных условий) может оказаться больше, чем порядок характеристического уравнения, и, следовательно, больше числа постоянных интегрирования. В этом случае при определении постоянных интегрирования используем не все независимые начальные значения, а часть из них.

Основными независимыми начальными значениями называют те токи в индуктивных элементах и напряжения на конденсаторах, которые могут быть заданы независимо от других. Остальные независимые начальные значения называют *неосновными*.

В качестве иллюстрации обратимся к схеме, изображенной на рис. 2.2. Она содержит три индуктивных элемента и один емкостной.

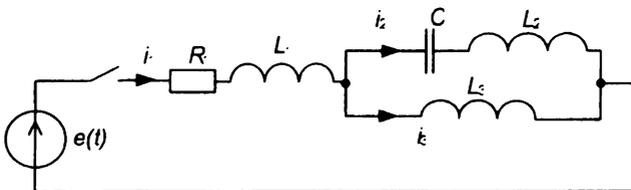


Рис. 2.2. Сложная электрическая цепь с тремя L -элементами

В схеме всего четыре независимых начальных значения (начальных условия): 1) $i_1(0_+) = 0$; 2) $i_2(0_+) = 0$; 3) $i_3(0_+) = 0$; 4) $U_c(0_+) = 0$. Из них три являются основными и одно – неосновным. Выбор основных значений здесь произволен. Если за основные взять первое, второе и четвертое значения, то неосновным будет третье.

2.6. Нулевые и ненулевые начальные условия

Если к началу переходного процесса непосредственно *перед коммутацией* все токи и напряжения на пассивных элементах схемы *равны нулю*, то в схеме имеют место *нулевые начальные условия*. Если же к началу переходного процесса хотя бы часть токов и напряжений в схеме *не равны нулю*, то в схеме имеют место *ненулевые начальные условия*.

При нулевых начальных условиях токи в индуктивных элементах и напряжения на конденсаторах начнут изменяться с нулевых значений, при ненулевых условиях – с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

При рассмотрении переходных процессов в линейных электрических цепях исключают нелинейный элемент, а именно электрическую дугу, возникшую при коммутации. Принято считать, что переключатель, осуществляющий коммутацию, включается или отключается мгновенно без дуги. За начало переходного процесса принимается сам момент коммутации, который в дальнейшем будет представлен как $t = (0_-)$ и $t = (0_+)$. Влияние дуги может быть учтено лишь при изучении нелинейных электрических цепей.

2.7. Расчетные методы. Классический метод расчета

При расчете переходных процессов классическим методом предполагается решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений и вычисление постоянных интегрирования.

В классическом варианте расчета неоднородного линейного дифференциального уравнения предусмотрено решение любого параметра в виде

$$X(t) = X_{уст(t)} + X_{св(t)},$$

где $X_{уст(t)}$ – установившееся (принужденное) значение величины после окончания переходного процесса, или частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

$X_{св(t)}$ – свободная составляющая переходного процесса, или общее решение однородного линейного дифференциального уравнения.

Длительность переходного процесса теоретически бесконечно велика, поэтому в качестве временного показателя используется $t = \infty$, и принято считать, что в этот момент времени все токи и напряжения принимают устойчивые значения. Расчет установившегося режима представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Если учесть, что в момент времени $t = \infty$ при наличии в цепи источника постоянной ЭДС все токи и напряжения примут устойчивые, неизменные во времени значения, то из уравнения (1.2) следует, что если $(di/dt)_{t=\infty} = 0$, то

$$i_{уст}R = E,$$

или

$$i_{уст} = \frac{E}{R}.$$

Остальные величины равны

$$U_{R\ уст} = i_{уст}R = E, \quad U_{L\ уст} = L(di/dt)_{t=\infty} = 0.$$

Расчет подобных простейших цепей с источником постоянной ЭДС можно выполнить непосредственно по схеме (см. рис. 1.2), предусмотрев в принужденном режиме $U_{L\ уст} = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте законы (правила) коммутации.
2. В чем заключается смысл первого и второго законов коммутации?
3. Дайте определения зависимых и независимых начальных условий.
4. Какие Вы знаете способы составления характеристического уравнения?
5. Каков физический смысл постоянной времени?

Глава 3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ПЕРЕХОДНОМ СОСТОЯНИИ

3.1. Составление уравнений для свободных токов и напряжений

Для послекоммутационной схемы составляют уравнения по законам Кирхгофа для полных токов и напряжений, как это делалось и раньше: сначала обозначают токи в ветвях и произвольно выбирают для них положительные направления, затем составляют уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. Так, для схемы, изображенной на рис. 3.1, после выбора положительных направлений для токов имеем

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0;$$

$$L(di_1/dt) + R_1i_1 + R_2i_2 = E;$$

$$R_2i_2 - (1/C) \int i_3 dt = 0.$$

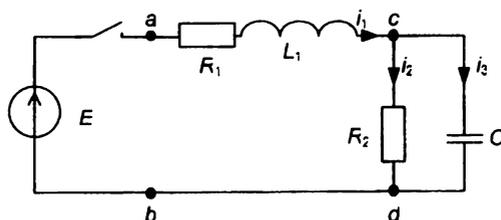


Рис. 3.1. Сложная электрическая цепь с двумя R -элементами

В этих уравнениях i_1 , i_2 , i_3 – полные токи. Каждый из них состоит из свободного и принужденного токов. Для того чтобы от этой системы уравнений перейти к уравнениям для свободных токов, «освободим» систему от вынуждающих ЭДС (в нашем случае от ЭДС E) и вместо i_1 запишем $i_{1св}$, вместо $i_2 - i_{2св}$ и т. д. В результате получим

$$\begin{cases} i_{1св} + i_{2св} + i_{3св} = 0, \\ L(di_{1св}/dt) + R_1i_{1св} + R_2i_{2св} = E, \\ R_2i_{2св} - (1/C) \int i_{3св} dt = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что для любого контура любой электрической цепи сумма падений напряжений от свободных составляющих токов равна нулю.

3.2. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов

В п. 1.3 говорилось о том, что свободный ток представляет собой решение однородного дифференциального уравнения (уравнения без правой части). Как известно из курса математики, решение однородного дифференциального уравнения записывают в виде показательных функций, например в виде суммы экспонент

$$X_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} + \dots,$$

где A_1, A_2, A_3, \dots – постоянные интегрирования;

p_1, p_2, p_3 – корни характеристического уравнения.

Таким образом, уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде

$$i_{св} = A e^{pt}.$$

Постоянная интегрирования A для каждого свободного тока своя. Показатели же затухания p одинаковы для свободных токов ветвей. Физически это объясняется тем, что вся цепь охвачена единым (общим) переходным процессом.

Составим производную от свободного тока:

$$di_{св}/dt = d(Ae^{pt})/dt = pAe^{pt} = pi_{св}.$$

Следовательно, производную от свободного тока можно заменить на $pi_{св}$, а свободное напряжение на индуктивном элементе $L(di_{св}/dt)$ – на $Lpi_{св}$.

Найдем интеграл от свободного тока:

$$\int i_{св} dt = \int Ae^{pt} dt = Ae^{pt}/p = i_{св}/p.$$

Постоянная интегрирования взята здесь равной нулю, так как свободные составляющие не содержат не зависящих от времени слагаемых. Следовательно, интеграл от свободного тока можно заменить на $i_{св}/p$, а свободное напряжение на конденсаторе $(1/C)\int i_{св} dt$ – на $i_{св}/pC$.

В систему дифференциальных уравнений для свободных токов подставим $Lpi_{св}$ вместо $L(di_{св}/dt)$ и $i_{св}/pC$ вместо $(1/C)\int i_{св} dt$.

Следовательно,

$$\begin{cases} i_{1св} + i_{2св} + i_{3св} = 0, \\ (L_{1p} + R_1)i_{1св} + R_{2i2св} = 0, \\ R_{2i2св} - (i_{3св} / pC) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$, $i_{3св}$ и в отличие от исходной системы не содержат производных и интегралов. Переход от системы линейных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений называют *алгебраизацией системы дифференциальных уравнений* для свободных токов. Можно сказать, что система (3.2) есть результат алгебраизации системы дифференциальных уравнений (3.1).

3.3. Составление характеристического уравнения системы

Число алгебраических уравнений равно числу неизвестных свободных токов. Положим, что p известно (в действительности оно пока не найдено и будет определено в дальнейшем) и решим систему (3.2) относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$, $i_{3св}$. По правилу Крамера

$$i_{1св} = \Delta_1/\Delta, \quad i_{2св} = \Delta_2/\Delta, \quad i_{3св} = \Delta_3/\Delta, \quad (3.3)$$

где Δ – определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1p + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -1/(pC) \end{vmatrix}.$$

Пример

Используя уравнения (3.2), составить характеристическое уравнение для схемы (см. рис. 3.1) и найти его корни.

Решение

$$R_2/(pC) + (L_1p + R_1)R_2 + (L_1p + R_1)/pC = 0,$$

или

$$[P2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2]/pC = 0.$$

Если дробь равна нулю, то равен нулю ее числитель. Следовательно,

$$P2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2 = 0.$$

Определитель Δ_1 получим из выражения для определителя Δ путем замены первого столбца правой частью уравнений (3.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -1/(Cp) \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получим из выражения для Δ путем замены второго столбца правой частью системы (3.2) и т. д.

Так как в правой части системы (3.2) находятся нули, то в каждом определителе Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 один из столбцов будет состоять из нулей.

Известно, что если в определителе один из столбцов состоит из нулей, то этот определитель равен нулю. Следовательно,

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0.$$

Из физических соображений ясно, что каждый из свободных токов не может быть равен нулю, ибо в этом случае не будут выполнены законы коммутации. Однако из (3.3) следует, что

$$i_{1св} = 0/\Delta; i_{2св} = 0/\Delta; i_{3св} = 0/\Delta.$$

Свободные токи могут быть не равны нулю в том случае, когда определитель системы

$$\Delta = 0.$$

Таким образом, определитель Δ алгебраизированной системы уравнений должен равняться нулю.

Уравнение $\Delta = 0$ называют *характеристическим уравнением*. Единственным неизвестным в нем является p (показатель затухания).

3.4. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе

Характеристическое уравнение для определения p часто составляют более простым способом, чем обсуждавшийся в п. 3.3. С этой целью составляют выражение входного сопротивления двухполюсника на переменном токе (обозначим его $Z(j\omega)$), заменяют в нем $j\omega$ на p (получают $Z(p)$) и приравнивают $Z(p)$ к нулю.

Уравнение $Z(p) = 0$ совпадает с характеристическим. Такой способ составления характеристического уравнения предполагает, что в схеме отсутствуют магнитно-связанные ветви. Если же магнитная связь между ветвями имеется, то предварительно следует осуществить развязывание магнитно-связанных ветвей и создание эквивалентной схемы.

Поясним сказанное. Как отмечалось ранее, если для некоторой цепи на постоянном токе составить систему уравнений по методу контурных токов, то входная проводимость относительно m -ветви $g_m = \Delta_m(j\omega)/\Delta(j\omega)$, а входное сопротивление $R_m = \Delta_m/\Delta$. Для режима синусоидального тока входное сопротивление определяется по формуле

$$Z_{вх\ m} = \Delta_m(j\omega)/\Delta(j\omega).$$

Комплексное число $p = a + jb$ представим в виде $p = j(b - ja) = j\Omega$, где Ω – комплексная угловая частота.

Сопротивление $Z(p)$ – это сопротивление цепи на комплексной частоте, $Z(j\omega)$ – частный случай $Z(p)$, когда $\Omega = \omega$. Имея это в виду, запишем

$$Z_{вх\ m}(p) = \Delta_m(p)/\Delta(p),$$

где $\Delta(p)$ – определитель системы уравнений, составленных по методу контурных токов.

Таким образом, уравнение $Z_{вх\ m}(p) = 0$ имеет те же корни, что и уравнение $\Delta(p) = 0$.

При составлении $Z(p)$ следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания.

Характеристическое уравнение можно составить так же, взяв за основу не метод контурных токов, а метод узловых потенциалов. В этом случае следует приравнять к нулю определитель матрицы узловых проводимостей, полагая при составлении матрицы один из узлов схемы заземленным.

Пример

Для схемы (см. рис. 3.1) составить характеристическое уравнение.

Решение

Входное сопротивление относительно зажимов ab при переменном токе находим следующим образом:

$$Z_{ab}(j\omega) = j\omega L_1 + R_1 + [R_2(1/j\omega C)]/[R_2 + (1/j\omega C)]. \quad (3.4)$$

Заменим в уравнении (3.4) $j\omega$ на p и приравняем его к нулю:

$$Z_{ab}(p) = pL_1 + R_1 + [R_2(1/pC)]/[R_2 + (1/pC)].$$

Отсюда

$$P2L_1CR_2 + R_1 + R_2 + p(L_1 + R_1R_2C)/[1 + R_2Cp] = 0,$$

или

$$P2L_1CR_2 + R_1 + R_2 + p(L_1 + R_1R_2C) = 0.$$

3.5. Определение степени характеристического уравнения

Степень характеристического уравнения цепи необходимо уметь оценивать, взглянув на схему, в которой исследуется переходный процесс. Быстрая ориентация позволяет определить трудоемкость предстоящих выкладок и способствует выявлению ошибки, если она возникает при составлении характеристического уравнения. Степень характеристического уравнения равна числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального ее упрощения и не зависит от вида источников ЭДС в схеме.

Упомянутое упрощение состоит в том, что последовательно соединенные индуктивные элементы должны быть заменены одним эквивалентным; конденсаторы, включенные последовательно и параллельно, тоже должны быть заменены эквивалентными.

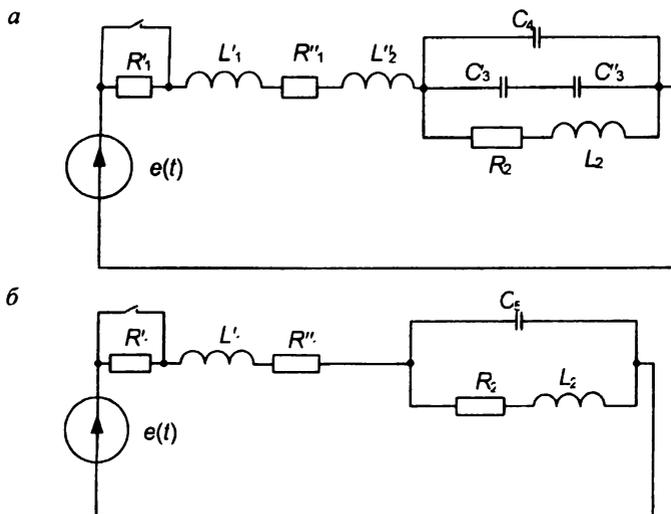


Рис. 3.2. Электрическая цепь:

а – с последовательным включением L'_1 и L''_2 ; б – упрощенная схема

Применительно к схеме, изображенной на рис. 3.2, *а*, последовательно включенные L'_1 и L''_2 следует заменить на $L = L'_1 + L''_2 \pm 2M$, если между ними есть магнитная связь (если нет магнитной связи, то $M = 0$), а конденсаторы емкостью C'_3, C''_3, C_4 – на конденсатор емкостью $C_5 = C_4 + [(C'_3 C''_3)/(C'_3 + C''_3)]$. Начальное значение напряжения на C_5 равно начальному значению напряжения на C_4 .

В результате упрощений схемы, изображенной на рис. 3.2, *а*, получаем схему, показанную на рис. 3.2, *б*, в которой два индуктивных элемента и один конденсатор. Все три независимых начальных значения – основные. Следовательно, характеристическое уравнение будет третьей степени.

Степень характеристического уравнения не зависит от того, имеется ли магнитная связь между индуктивными элементами схемы или она отсутствует.

Условимся под *емкостным контуром* понимать контур, в каждой из ветвей которого имеются только конденсаторы (рис. 3.3, *а*) либо в одни ветви которого входят только конденсаторы, а в другие – только источники ЭДС (рис. 3.3, *б*). Положим, что после максимального упрощения схемы в емкостный контур входит n конденсаторов. Если учесть, что по второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений на ветвях контура равна нулю, то только на $n-1$ конденсаторах контура напряжения могут быть заданы произвольно. Условимся под *индуктивным узлом* понимать узел, в котором сходятся ветви, в каждой из которой имеются индуктивности (рис. 3.3, *в*) либо в части которых имеются индуктивности, а в других – источники тока (рис. 3.3, *г*). Положим, что в индуктивный узел сходятся m ветвей, содержащих индуктивности. Если учесть, что по первому закону Кирхгофа сумма токов в узле равна нулю, то только в $m-1$ индуктивностях токи могут быть заданы произвольно.

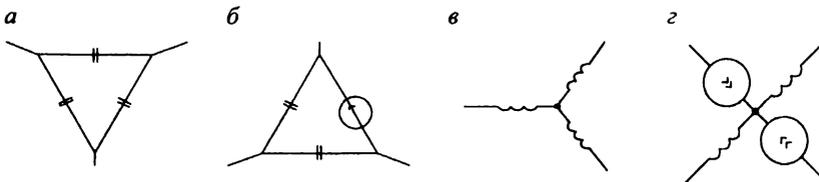


Рис. 3.3. Участки цепи:

а – с емкостным контуром; *б* – с контуром, содержащим ЭДС;
в – с индуктивным узлом; *г* – с двумя источниками тока

Обобщенно можно сказать, что после максимального упрощения схемы степень характеристического уравнения может быть определена путем подсчета величины $n_L + n_C - y_L - k_C$, где n_L – число индуктивных элементов в схеме; n_C – число конденсаторов; y_L – число индуктивных элементов, токи в которых не могут быть заданы произвольно; k_C – число конденсаторов, напряжения на которых не могут быть заданы произвольно.

Необходимо обратить внимание на следующее:

1. Если схема с источником тока имеет несколько последовательных участков, содержащих параллельно соединенные ветви с R, L, C , то для каждой группы параллельных ветвей будет свое характеристическое уравнение со своими корнями (свободные токи не могут замыкаться через источник тока, поскольку его сопротивление равно бесконечности).

2. Если в схеме имеются так называемые дополняющие двухполюсники, содержащие элементы R, L, C , между которыми выполняются определенные соотношения, то при упрощении схемы они должны быть заменены на эквивалентные им резисторы. Это значительно упрощает выкладки.

3.6. Свойства корней характеристического уравнения

Число корней характеристического уравнения равно степени этого уравнения. Если характеристическое уравнение представляет собой уравнение первой степени, то оно имеет один корень, если второй степени – два корня и т. д.

Уравнение первой степени имеет всегда отрицательный действительный (не мнимый и не комплексный) корень.

Уравнение второй степени может иметь:

- два действительных неравных отрицательных корня;
- два действительных равных отрицательных корня;
- два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

Уравнение третьей степени может иметь:

- три действительных неравных отрицательных корня;
- три действительных отрицательных корня, из которых два равны друг другу;
- три действительных равных отрицательных корня;
- один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряженных с отрицательной действительной частью.

3.7. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений

Свободный процесс происходит в цепи, освобожденной от источника ЭДС. Он описывается слагаемыми вида Ae^{pt} . В цепи, освобожденной от источников ЭДС, свободные токи не могут протекать сколь угодно длительно, так как в ней отсутствуют источники энергии, которые были бы способны в течение сколь угодно длительного времени покрывать тепловые потери от свободных токов, т. е. свободные токи должны затухать во времени.

Если свободные токи (выраженные слагаемыми e^{pt}) должны затухать (спадать) во времени, то действительная часть p должна быть отрицательной.

Значения функции $e^{-at} = f(at)$, где $at = x$, приведены в таблице.

Значения функции $e^{-at} = f(at)$

| x | e^x | e^{-x} | shx | chx | x | e^x | e^{-x} | shx | chx |
|-----|-------|----------|-------|-------|-----|-------|----------|-------|-------|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2,1 | 8,47 | 0,122 | 4,02 | 4,14 |
| 0,1 | 1,1 | 0,905 | 0,1 | 1,005 | 2,2 | 9,02 | 0,111 | 4,46 | 4,56 |
| 0,2 | 1,22 | 0,819 | 0,2 | 1,02 | 2,3 | 9,97 | 0,1 | 4,94 | 5,04 |
| 0,3 | 1,35 | 0,741 | 0,3 | 1,04 | 2,4 | 11,02 | 0,09 | 5,47 | 5,56 |
| 0,4 | 1,49 | 0,67 | 0,41 | 1,08 | 2,5 | 12,18 | 0,082 | 6,05 | 6,13 |
| 0,5 | 1,65 | 0,606 | 0,52 | 1,13 | 2,6 | 13,46 | 0,074 | 6,7 | 6,77 |
| 0,6 | 1,82 | 0,549 | 0,64 | 1,18 | 2,7 | 14,88 | 0,067 | 7,41 | 7,47 |
| 0,7 | 2,01 | 0,497 | 0,76 | 1,25 | 2,8 | 16,44 | 0,061 | 8,19 | 8,25 |
| 0,8 | 2,22 | 0,449 | 0,89 | 1,34 | 2,9 | 18,17 | 0,055 | 9,06 | 9,11 |
| 0,9 | 2,46 | 0,407 | 1,03 | 1,43 | 3 | 20,08 | 0,05 | 10,02 | 10,07 |
| 1 | 2,72 | 0,368 | 1,17 | 1,54 | 3,2 | 24,53 | 0,041 | 12,25 | 12,29 |
| 1,1 | 3 | 0,333 | 1,34 | 1,67 | 3,4 | 29,96 | 0,033 | 14,96 | 15 |
| 1,2 | 3,32 | 0,301 | 1,51 | 1,81 | 3,6 | 36,6 | 0,027 | 18,28 | 18,31 |
| 1,3 | 3,67 | 0,272 | 1,7 | 1,94 | 3,8 | 44,7 | 0,022 | 22,34 | 22,36 |
| 1,4 | 4,05 | 0,247 | 1,9 | 2,15 | 4 | 54,6 | 0,018 | 27,29 | 27,3 |
| 1,5 | 4,48 | 0,223 | 2,13 | 2,25 | 4,2 | 66,69 | 0,015 | 33,33 | 33,35 |
| 1,6 | 4,95 | 0,202 | 2,38 | 2,58 | 4,4 | 81,45 | 0,012 | 40,72 | 40,73 |
| 1,7 | 5,47 | 0,183 | 2,65 | 2,83 | 4,6 | 99,48 | 0,01 | 49,74 | 49,75 |
| 1,8 | 6,05 | 0,165 | 2,94 | 3,11 | 4,8 | 121,5 | 0,0082 | 60,75 | 60,76 |
| 1,9 | 6,68 | 0,15 | 3,27 | 3,42 | 5 | 184,4 | 0,0067 | 74,2 | 74,21 |
| 2 | 7,39 | 0,135 | 3,63 | 3,76 | 6 | 400 | 0,0025 | 200 | 200 |

Рассмотрим характер изменения свободных составляющих для простейших переходных процессов в цепях с характеристическим уравнением первой и второй степеней.

Если число корней характеристического уравнения больше двух, то свободный процесс может быть представлен как процесс, составленный из нескольких простейших процессов.

3.8. Характер свободного процесса при одном корне

Когда характеристическое уравнение имеет один корень, свободный ток

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-at},$$

где $p = (-a)$ зависит только от параметров цепи; A – от параметров цепи, величины ЭДС.

Характер изменения $i_{св}$ при $A > 0$ показан на рис. 3.4.

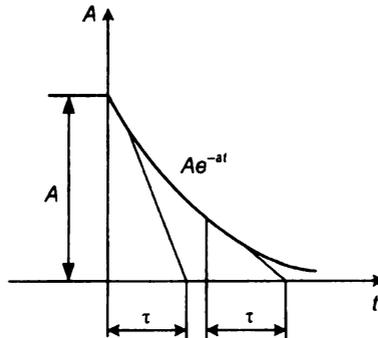


Рис. 3.4. Кривая свободного процесса

За интервал времени $t = \tau = 1/a$ функция Ae^{-at} уменьшится в $e = 2,72$ раза. Действительно, при $t = \tau = 1/a$ $at = a\tau = a/a = 1$; $e^{-at} = e^{-\tau a} = e^{-1} = 1/e = 1/2,72$.

Величину $\tau = 1/a = 1/|p|$ называют *постоянной времени цепи*; τ зависит от вида и параметров схемы. Для цепи, изображенной на рис. 1.2, $\tau = L/R$, для цепи, показанной на рис. 1.3, $\tau = RC$.

Название «постоянная времени» отражает постоянство подкасательной к экспоненте: подкасательная к экспоненте $e^{-t/\tau}$ численно равна τ (см. рис. 3.4).

3.9. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях

Пусть $p_1 = -a$, $p_2 = -b$ (для определенности положим $b > a$). Тогда

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-at} + A_2 e^{-bt}.$$

Характер изменения свободного тока при разных по значению и знаку постоянных интегрирования A_1 и A_2 качественно иллюстрируется

кривыми на рис. 3.5, $a-z$; кривая 1 представляет собой функцию Ae^{-at} , кривая 2 – функцию A_2e^{-bt} ; результирующая («жирная») кривая получена путем суммирования ординат кривых 1 и 2.

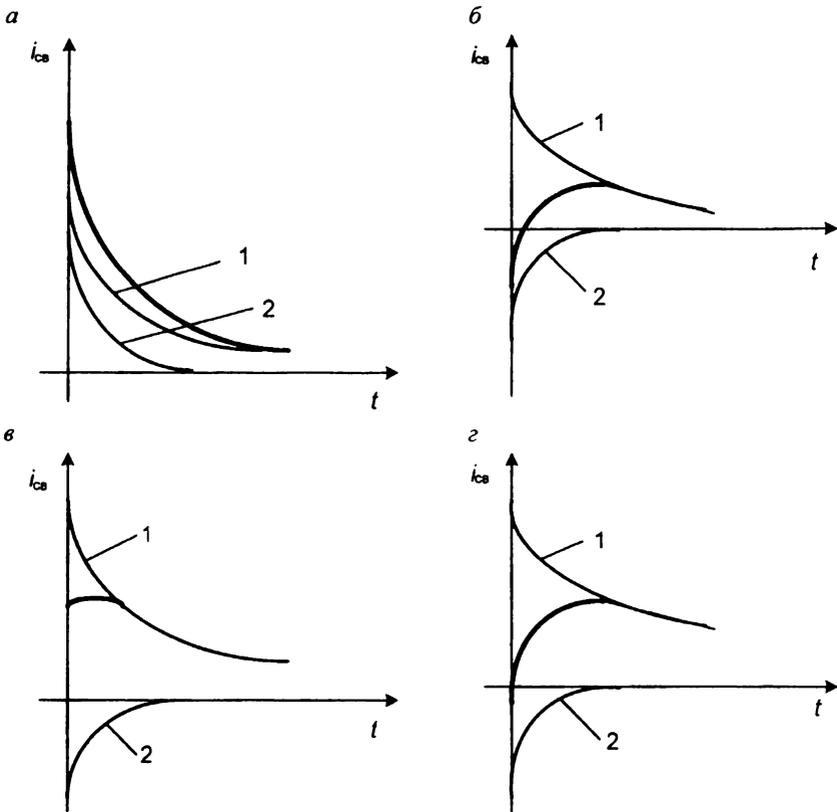


Рис. 3.5. Кривые изменения свободного тока при двух постоянных интегрирования для различных случаев:

$a - A_1 > 0, A_2 > 0$; $б - A_1 > 0, A_2 < 0, |A_2| > |A_1|$;
 $в - A_1 > 0, A_2 < 0, |A_2| < |A_1|$; $з - A_1 > 0, A_2 < 0, |A_2| = |A_1|$

3.10. Характер свободного процесса при двух равных корнях

Известно, что если среди корней характеристического уравнения есть два равных корня $p_1 = p_2 = -a$, то соответствующие слагаемые решения должны быть взяты в виде $A_1e^{pt} + A_2te^{pt} = (A_1 + A_2t)e^{-at}$. На рис. 3.6 построены пять кривых. Они показывают возможный характер изменения функции $(A_1 + A_2t)e^{-at}$

при различных значениях постоянных интегрирования A_1 и A_2 , а также при равенстве нулю одной из постоянных.

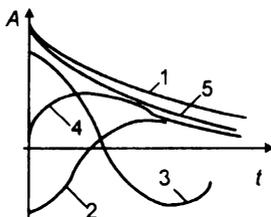


Рис. 3.6. Кривые свободного процесса при двух корнях

Кривая 1 построена при $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$; кривая 2 – при $A_1 < 0$ и $A_2 > 0$; кривая 3 – при $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$; кривая 4 – при $A_1 = 0$ и $A_2 > 0$; кривая 5 – при $A_1 > 0$ и $A_2 = 0$.

3.11. Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях

Комплексные корни всегда встречаются попарно сопряженными. Так, если $p_1 = -\delta + j\omega_0$, то $p_2 = -\delta - j\omega_0$. Соответствующее им слагаемое решения должно быть взято в виде

$$i_{св} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu). \quad (3.5)$$

Формула (3.5) описывает затухающее синусоидальное колебание (рис. 3.7) при угловой частоте ω_0 и начальной фазе ν .

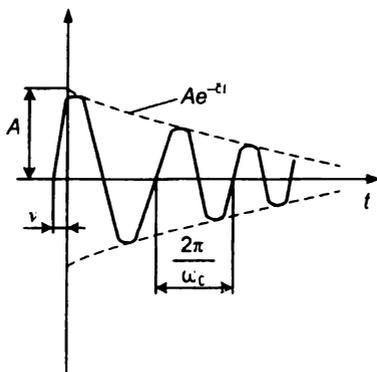


Рис. 3.7. Затухающие синусоидальные колебания

Огибающая колебания описывается кривой $e^{-\delta t}$. Чем больше δ , тем быстрее затухает колебательный процесс; A и ν определяются значениями параметров схемы, начальными условиями и ЭДС источника; ω_0 и δ зависят только от параметров цепи после коммутации; ω_0 называют *угловой частотой свободных колебаний*; δ – *коэффициентом затухания*.

3.12. Некоторые особенности переходных процессов

Как известно, полное значение любой величины (тока, напряжения, заряда) равно сумме принужденной и свободной составляющих. Если среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряженные корни $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ и значение угловой частоты свободных колебаний ω_0 почти равно значению угловой частоты ω источника синусоидальной ЭДС (источника питания), а коэффициент затухания δ мал (цепь с малыми потерями), то сложение принужденной и свободной составляющих дает колебание, для которого характерно биение амплитуды (рис. 3.8, а).

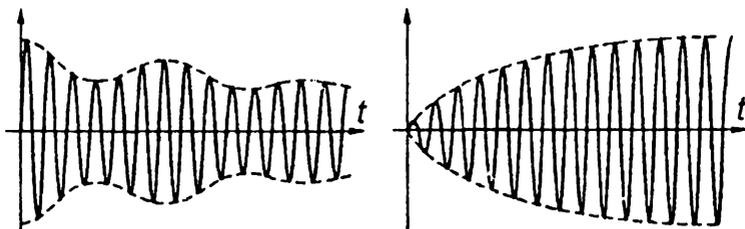


Рис. 3.8. Кривые колебаний амплитуды:

а – с уменьшением амплитуды; б – с увеличением амплитуды

Если угловая частота свободных колебаний ω_0 точно равна угловой частоте ω источника синусоидальной ЭДС, то результирующее колебание имеет форму, изображенную на рис. 3.8, б.

Простейшим примером колебаний такого типа является колебание, возникающее на конденсаторе схемы (рис. 3.9) в результате сложения принужденного $U_{cm}\cos\omega t$ и свободного $U_{cm}e^{-\delta t}\cos\omega t$ колебаний:

$$U_c = U_{cm}(1 - e^{-\delta t})\cos\omega t.$$

Амплитуда результирующего колебания нарастает по экспоненциальному закону.

При наличии конденсатора (конденсаторов) в схеме могут возникать большие начальные броски токов, в несколько раз превышающие ампли-

туды тока установившегося режима. Так, в схеме (рис. 3.10) при нулевых начальных условиях в первый момент после замыкания ключа напряжения на конденсаторах равны нулю и ток в неразветвленной части цепи равен $(U_m/R_1)\sin\psi$. Если $\psi = 90^\circ$, то в первый момент после замыкания ключа ток I_m равен U_m/R_1 . При размыкании ключа в индуктивных цепях возникают опасные увеличения напряжения на отдельных участках.

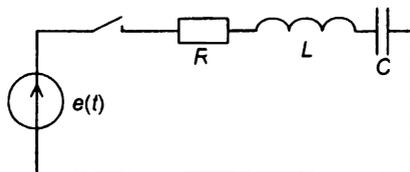


Рис. 3.9. Последовательная цепь RLC -элементов

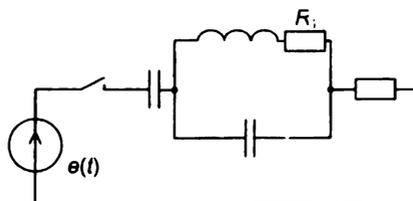


Рис. 3.10. Смешанная цепь RLC -элементов

3.13. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивные катушки

При размыкании ключей в электрических цепях, содержащих катушки с большой индуктивностью, на отдельных участках могут возникнуть напряжения, во много раз превышающие установившиеся. Напряжения, превышающие установившиеся, называют *перенапряжениями*. Они могут оказаться настолько значительными, что при определенных условиях вызовут пробой изоляции и выход из строя измерительной аппаратуры.

Пример

К зажимам индуктивной катушки с $R = 100$ Ом, $L = 10$ Гн подключен вольтметр (рис. 3.11). Сопротивление вольтметра $R_v = 3000$ Ом; $E = 100$ В. Найти приближенное значение напряжения на зажимах вольтметра при $t = 0$, если допустить, что размыкание ключа произойдет мгновенно и искры не возникнет.

Решение

До размыкания ключа (рис. 3.12) через L протекает ток $i = E/R = 1$ А. В индуктивной катушке была запасена магнитная энергия $Li^2/2$. Если допустить, что размыкание ключа произошло мгновенно и искры не появилось, и учесть, что ток через L должен оставаться равным 1 А, то по замкнутому контуру, составленному вольтметром и катушкой, за счет запаса энергии магнитного поля индуктивной катушки в первое мгновение будет протекать ток в 1 А. При этом на вольтметре возникнет пик напряжения 2 кВ. Прохождение большого импульса тока через вольтметр может вызвать перегорание катушки прибора и выход его из строя.

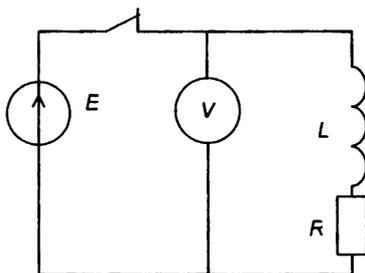


Рис. 3.11. Электрическая цепь с вольтметром

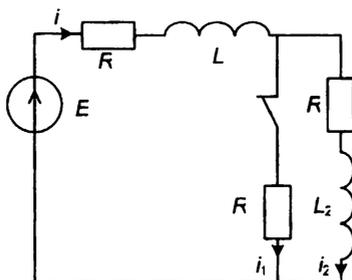


Рис. 3.12. Электрическая цепь с замкнутым ключом

При размыкании ключа с конечной скоростью между его расходящимися контактами возникнет электрическая искра. Это приведет к тому, что увеличение напряжения на вольтметре будет меньше, чем в только что рассмотренном идеализированном случае, когда ключ размыкался мгновенно без искры.

При более детальном рассмотрении процесса необходимо также учесть влияние межвитковых емкостей и емкостей на землю. Если не учи-

тывать возникновение искры, распределенные емкости и индуктивности, то приведенный расчет является грубым и носит иллюстративный характер.

Чтобы не «сжечь» вольтметр в цепи (см. рис. 3.11), сначала следует отключить вольтметр, а затем разомкнуть ключ. Перенапряжения проявляются тем сильнее, чем больше индуктивность в цепях. Особенно опасны они в цепях постоянного тока, содержащих индуктивности порядка единиц и десятков генри. В таких цепях при отключениях соблюдают специальные меры предосторожности (ключ размыкают после введения дополнительных резисторов в цепь).

3.14. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Расчет переходных процессов в любой линейной электрической цепи состоит из следующих основных операций:

- 1) выбора положительных направлений токов в ветвях цепи;
- 2) определения значений токов и напряжений непосредственно до коммутации;
- 3) составления характеристического уравнения и нахождения его корней;
- 4) получения выражения для искомых токов и напряжений как функции времени.

Широко распространенными методами расчета переходных процессов являются:

- метод, называемый в литературе классическим;
- операторный метод;
- метод расчета с помощью интеграла Дюамеля.

Для всех этих методов перечисленные операции (этапы расчета) являются обязательными. Для всех методов первые три операции совершают одинаково, и их необходимо рассматривать как общую для всех методов часть расчета. Различие между методами имеет место на четвертом, наиболее трудоемком этапе расчета.

Чаще используют классический и операторный методы, реже – метод расчета с применением интеграла Дюамеля. В дальнейшем будут даны сравнительная оценка и рекомендуемая область применения каждого из них.

В радиотехнике, вычислительной и импульсной технике, электронике, автоматике и в технике, связанной с теорией информации, кроме этих трех методов применяют метод анализа переходных процессов, основывающийся на интеграле Фурье. Для исследования характера переходного процесса, описываемого уравнениями высоких порядков, используют моделирующие установки, а также метод пространства состояний.

Контрольные вопросы и задания

1. Что определяет степень характеристического уравнения?
2. Нужно ли заменять дополняющие двухплюсники в цепи, содержащей элементы R , L , C , на эквивалентные резисторы при определении степени характеристического уравнения?
3. Объясните, почему при составлении характеристического уравнения путем приравнивания к нулю входного сопротивления $Z(p) = N(p)/M(p)$ в общем случае нельзя сокращать числитель и знаменатель на общий множитель?
4. Чем определяется число корней характеристического уравнения?
5. Опишите свойства корней характеристического уравнения.
6. Зависит ли степень характеристического уравнения от того, есть ли магнитная связь между индуктивными элементами схемы?

Глава 4. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

4.1. Определение классического метода расчета переходных процессов

Классическим методом расчета переходных процессов называют метод, в котором решение дифференциального уравнения представляет собой сумму принужденной и свободной составляющих. Определение постоянных интегрирования, входящих в выражение для свободного тока (напряжения), производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным значениям корней характеристического уравнения, а также по известным значениям свободной составляющей тока (напряжения) и ее производных, взятых при $t = (0_+)$.

4.2. Переходные процессы в цепи с одним накопителем энергии

В этом разделе рассмотрим общее понимание сути переходных процессов и роли параметров электрической цепи. Здесь и далее в качестве источника энергии рекомендуется использовать источник постоянной ЭДС. Как известно, источник энергии определяет лишь установившиеся (принужденные) значения токов и напряжений, а наиболее сложная часть расчета связана с определением свободных составляющих, которые не зависят от рода источника питания, а определяются многими другими параметрами, в том числе пассивными элементами цепи R, L, C . Результаты расчета свободных составляющих во многом определяют их практическую значимость.

Название метода «классический» отражает использование в нем решений дифференциальных уравнений с постоянными параметрами методами классической математики.

Расчет переходного процесса в цепи классическим методом включает следующие этапы:

1. Составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и т. д., описывающих состояние цепи после коммутации, и исключением переменных получить одно дифференциальное уравнение, в общем случае неоднородное относительно искомого тока i_L или напряжения u_C . Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на емкостном элементе.

2. Составить общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения цепи в виде суммы частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Применительно к электрическим цепям в качестве частного решения неоднородного дифференциального уравнения выбирают установившийся режим в рассматриваемой цепи (если он существует), т. е. постоянные токи и напряжения, если в цепи действуют источники постоянных ЭДС и токов, или синусоидальные напряжения и токи при действии источников синусоидальных ЭДС и токов. Токи и напряжения установившегося режима обозначают $i_{уст}$ ($i_{пр}$), $U_{уст}$ ($U_{пр}$) и называют *установившимися*.

Общее решение однородного дифференциального уравнения описывает процесс в цепи без источников ЭДС и тока, который поэтому называют *свободным процессом*. Токи и напряжения свободного процесса обозначают $i_{св}$ и называют *свободными*, а их выражения должны содержать постоянные интегрирования, число которых равно порядку однородного уравнения.

4.2.1. Подключение источника постоянной ЭДС к неразветвленной цепи с резистивным и индуктивным элементами

Проанализируем переходный процесс в цепи (рис. 4.1, а) при замыкании ключа K в момент времени $t = 0$ (рис. 4.1, б), выполнив последовательно все этапы расчета классическим методом. В дальнейшем для сокращения решений математические операции отдельных этапов будем совмещать.

При выбранных положительных направлениях тока i и напряжений u_R и u_L составим систему уравнений, описывающих состояние цепи на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и закона электромагнитной индукции:

$$u_R + u_L = E; u_L = L(di/dt); u_R = ri. \quad (4.1)$$

В практике расчетов переходных процессов в электрических цепях используют известный метод решения линейных дифференциальных уравнений с правой частью.

Результат решения дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего

решения однородного уравнения (когда правая часть исходного уравнения равна нулю). Для использования этого метода действительный (переходный) ток в ветви представляют как сумму двух составляющих: $i = i_{уст} + i_{св}$.

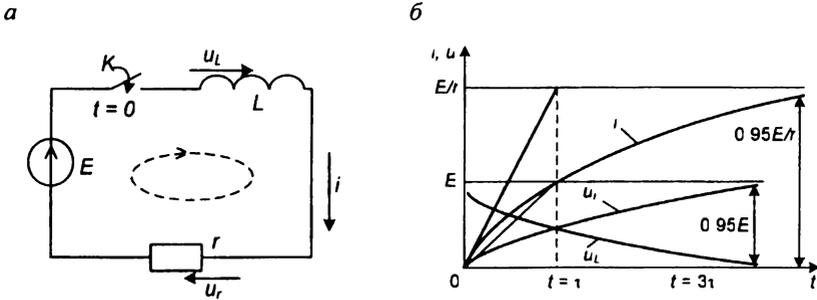


Рис. 4.1. Графосхематическое представление последовательного включения L - R -элементов с источником постоянной E :

a – схема замещения; b – кривые изменения отдельных параметров от времени в момент переходного процесса

Исключая из системы уравнений (4.1) переменные u_R и u_L , получаем неоднородное дифференциальное уравнение переходного процесса первого порядка

$$L(di/dt) + ri = E. \quad (4.2)$$

Представим ток в виде $i = i_{уст} + i_{св}$, где $i_{уст}$ – установившийся ток, т. е. ток, который устанавливается в цепи после окончания переходного процесса; $i_{св}$ – свободный ток, действующий только в течение времени переходного процесса.

Выразив в дифференциальном уравнении (4.2) ток через две составляющие, получим

$$L[d(i_{уст} + i_{св})/dt] + r(i_{уст} + i_{св}) = E. \quad (4.3)$$

Так как в установившемся режиме $i_{св} = 0$, то уравнение (4.3) приобретает вид

$$L(di_{уст}/dt) + ri_{уст} = E. \quad (4.4)$$

Ток в установившемся режиме есть величина постоянная, и его производная равна

$$(di_{уст}/dt) = 0.$$

Тогда из (4.4) следует, что

$$i_{уст} = U/r = I. \quad (4.5)$$

Вычитая (4.4) из (4.3), получим дифференциальное уравнение для свободного тока

$$L(di_{св}/dt) + ri_{св} = 0. \quad (4.6)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (4.6) называется *свободным током*:

$$i_{св} = Ae^{pt}. \quad (4.7)$$

Таким образом, с учетом (4.5) и (4.7) общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4.4) имеет вид

$$i = i_{уст} + i_{св} + r(i_{уст} + i_{св}) = E/r + Ae^{-(r/L)t}. \quad (4.8)$$

Постоянные интегрирования определяют из начальных условий, т. е. условий в цепи в начальный момент времени после коммутации.

Для определения величины корня p составляем характеристическое уравнение. Теоретически возможны два варианта составления этого уравнения:

1. Если в уравнении (4.6) обозначить $i = 1$ и $(di_{св}/dt) = p$, характеристическое уравнение примет вид

$$r + Lp = 0,$$

из чего следует $p = (-r/L)$.

2. Учитывая единственный источник в цепи, можно записать комплекс входного сопротивления:

$$Z_{вх} = r + j\omega L = 0.$$

Обозначив $j\omega = p$, получим

$$Z_{вх} = r + pL = 0, p = (-r/L). \quad (4.9)$$

Из приведенного расчета следует, что в обоих вариантах получен одинаковый единственный корень характеристического уравнения.

Определим постоянную интегрирования A в общем решении (4.9). Для этого обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента $i(0_-) = i(0_+)$ в момент времени замыкания ключа $t = 0$. Так как ток в индуктивном эле-

менте не может измениться скачком, а до коммутации, т. е. в момент $t = 0_-$, он был равен нулю, то $i(0_-) = 0 = i(0_+) = E/r + A$. Из этого следует, что $A = -E/r$.

Подставив это значение постоянной A в (4.8), получим закон нарастания тока в цепи (см. рис. 4.1, б):

$$i(0_+) = -E/r(1 - e^{-t/\tau}),$$

где $\tau = L/r$ имеет размерность времени (Гн/Ом или с) и называется *постоянной времени* цепи.

Постоянная времени определяет скорость нарастания тока и равна времени, за которое ток достиг бы установившегося значения $i_{уст} = E/r$, если бы скорость его изменения оставалась неизменной и равной начальному значению скорости $(di/dt)_{t=0} = E/L$.

Практически же наблюдается следующая зависимость:

– при $t = 3T$ $i = 0,95i_{уст}$;

– при $t = 4T$ $i = 0,98i_{уст}$;

– при $t = 5T$ $i = 0,993i_{уст}$.

Обычно считают, что длительность переходного процесса составляет $t_{пер} = (3 \div 4)\tau$.

Переходный процесс часто можно считать практически закончившимся через интервал времени $t_{пер} = 3\tau$ с момента коммутации, когда ток достигнет значения $i(3\tau) = 0,95E/r$.

Так как зависимость тока от времени найдена, то нетрудно определить и зависимости от времени напряжений на резистивном и индуктивном элементах (см. рис. 4.1, б):

$$u_r = ri = E(1 - e^{-t/\tau}); \quad u_L = L(di/dt) = Ee^{-t/\tau}.$$

При $0 < t < \tau$ скорость изменения тока в цепи можно считать приближенно постоянной и равной $(di/dt)_{t=0} = E/L$. Следовательно, в этом интервале времени напряжение на резистивном элементе приближенно равно

$$u_r = (r/L)Et = (r/L) \int_0^t E dt,$$

т. е. пропорционально интегралу напряжения источника ЭДС E . Такую цепь принято называть *интегрирующей цепью*. При действии на входе цепи источника изменяющейся ЭДС может оказаться, что в некоторые интервалы времени переходного процесса $u_r \ll u_L$. Для этих интервалов времени ток в цепи $i \approx e/r$, а напряжение на индуктивном элементе $u_L = L(di/dt) \approx (L/r)(de/dt)$, т. е. пропорционально скорости изменения на-

пряжения источника ЭДС. Имея это в виду, эту же цепь называют *дифференцирующей цепью*.

Проверка решений. Полученные уравнения подлежат проверке при $t = (0_+ = 0)$ и при $t = \infty$ путем сравнения результатов с промежуточными вычислениями. Так, при $t = (0_+)$ после подстановки имеем: $i(0_+) = 0$, $u_R(0_+) = 0$, $u_L(0_+) = E$.

При $t = \infty$ после подстановки этого времени в расчетные уравнения имеем: $i_{уст} = (E/R)$, $U_{R\ уст} = E$, $U_{L\ уст} = 0$, что полностью совпадает с результатами промежуточных вычислений.

Графическое представление решений. Если учесть, что величина постоянной времени $\tau = (1/p) = (L/R)$, то выведенные уравнения удобнее представить в виде

$$i(t) = E/r(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$u_{R(t)} = E(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$u_{L(t)} = Ee^{-t/\tau}.$$

Задаваясь, например, значениями t в долях, кратных τ , можно составить таблицу постоянной времени.

Таблица постоянной времени

| Параметр | t | | | | | | |
|------------|-------|-------|------------|------------|-----------|------------|------------|
| | 0_- | 0_+ | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ |
| $i(t)$ | 0 | 0 | $0,633E/R$ | $0,865E/R$ | $0,95E/R$ | $0,982E/R$ | $0,994E/R$ |
| $U_{R(t)}$ | 0 | 0 | $0,633E/R$ | $0,865E$ | $0,95E$ | $0,982E$ | $0,994E$ |
| $U_{L(t)}$ | 0 | E | $0,367E$ | $0,135E$ | $0,05E$ | $0,018E$ | $0,006E$ |

Графическое представление некоторых результатов расчета показано на рис. 4.2. Полученные графики дают возможность сделать важный вывод: реальная длительность переходного процесса может быть ограничена временем $t \sim (3 \dots 5)\tau$ в зависимости от заданной точности расчета, так как по истечении этого времени отличие от установившихся (принудительных) значений не превышает $(1 \dots 5)\%$.

Если придать значению τ некоторые конкретные значения, то можно выяснить, что в реальных устройствах длительность переходного процесса составляет микросекунды, миллисекунды и лишь в некоторых случаях – доли секунд. Например, если $L = 1$ Гн, $R = 10$ Ом, то $\tau = 0,1$ с. Если увеличить значение индуктивности или уменьшить значение активного

сопротивления, то произойдет увеличение постоянной времени и, следовательно, процесс нарастания тока в ветви с индуктивностью замедлится.

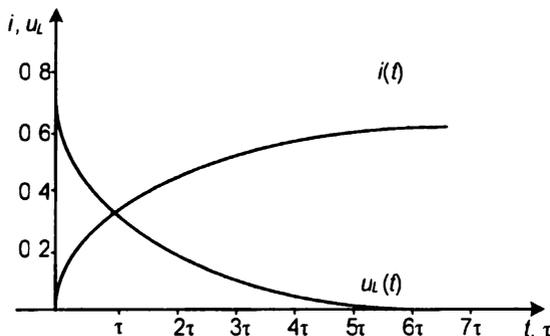


Рис. 4.2. График изменения тока и напряжения

4.2.2. Короткое замыкание катушки индуктивности с током

Рассмотрим переходный процесс в цепи катушки индуктивности с током, обладающей кроме индуктивности L также сопротивлением r , при замыкании ее накоротко ключом K . Подобные условия имеют место в обмотках электрических машин и аппаратов. Для этого представим катушку индуктивности схемой замещения в виде последовательного соединения индуктивного и резистивного элементов (рис. 4.3, а).

Запишем дифференциальное уравнение переходного процесса в цепи после замыкания ключа:

$$u_L + u_r = L(di/dt) + ri = 0. \quad (4.10)$$

Так как дифференциальное уравнение (4.10) однородное (совпадает с уравнением (4.9)), то его общее решение содержит только свободную составляющую:

$$i = i_{св} = Ae^{-t/\tau}, \quad (4.11)$$

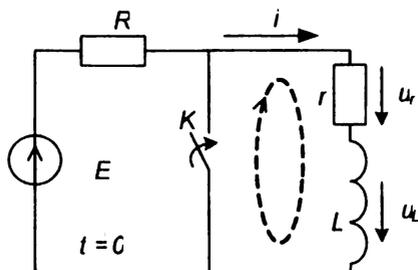
где $\tau = L/r$ – постоянная времени цепи.

Осталось найти значение постоянной A . Для этого опять обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента (2.1). Так как до замыка-

ния ключа и, следовательно, в момент времени $i = 0_-$ в катушке был постоянный ток, равный $i(0) = E/(r + R)$, то

$$i(0_-) = i(0_+) = E/(r + R) = A.$$

а



б

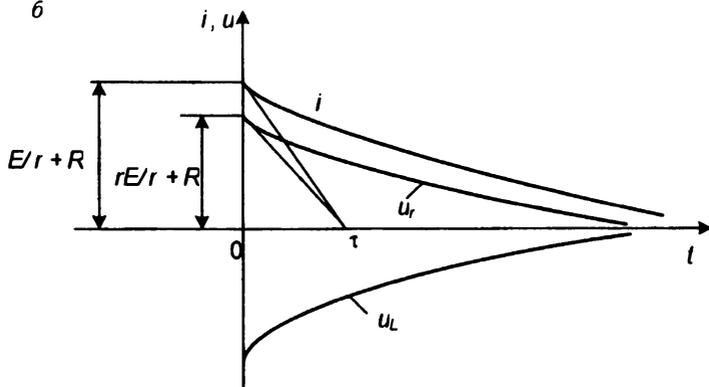


Рис. 4.3. Графосхематическое представление короткого замыкания катушки индуктивности:

а – электрическая цепь с замещением катушки индуктивности;

б – зависимость напряжений на индуктивном и резистивных элементах

Подставив значение постоянной A в (4.11), получим ток в катушке индуктивности:

$$i(0_+) = E/(r + R)e^{-t/\tau}.$$

Ток в катушке индуктивности после коммутации (рис. 4.3, б) поддерживается за счет энергии, накопленной в ее магнитном поле.

Теперь можно определить и зависимости от времени напряжений на резистивном и индуктивном элементах (см. рис. 4.3, б):

$$u_r = ri = [rE/(r + R)]e^{-t/\tau},$$

$$u_L = L(di/dt) = -[rE/(r + R)]e^{-t/\tau}.$$

4.2.3. Размыкание цепи с катушкой индуктивности

При размыкании неразветвленной электрической цепи с катушкой индуктивности между размыкающимися контактами возникает дуговой разряд. Такой разряд наблюдается, например, в скользящих контактах электрического транспорта. Чтобы дугового разряда не было, необходимо параллельно участку цепи между контактами включить резистор. На рис. 4.4, а приведена схема замещения электрической цепи, в которой катушка индуктивности представлена последовательным соединением индуктивного L и резистивного r элементов, а выключатель изображен в виде параллельного соединения идеального ключа и резистивного элемента R .

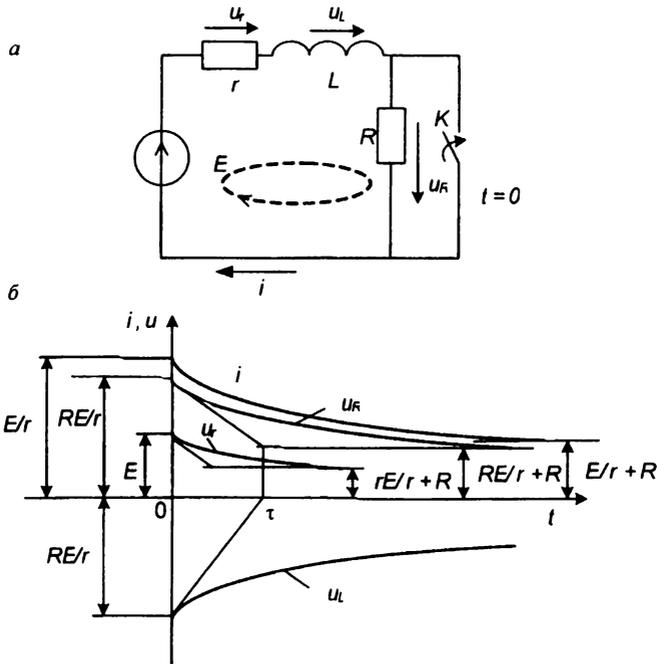


Рис. 4.4. Размыкание цепи с катушкой индуктивности:
 а – электрическая цепь с замещением катушки индуктивности;
 б – зависимость напряжений на индуктивном и резистивных элементах

Составим дифференциальное уравнение переходного процесса цепи после размыкания ключа:

$$u_L + u_r + u_R = L(di/dt) + (r + R)i = E. \quad (4.12)$$

Дифференциальное уравнение (4.12) полностью совпадает (вплоть до обозначений элементов) с уравнением (4.2). Следовательно, его общее решение аналогично (4.8):

$$i = i_{уст} + i_{св} = [E/(r + R)] + Ae^{-(r+R)Lt}, \quad (4.13)$$

где $i_{уст} = [E/(r + R)]$ – установившаяся составляющая тока, равная постоянному току в цепи после размыкания ключа.

Для определения постоянной A в (4.13) обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента (2.1). До размыкания ключа, т. е. и при $t = (0_-)$, в катушке был постоянный ток $i = E/r$. Поэтому по закону коммутации

$$i(0_-) = E/r = i(0_+) = E/(r + R) + A,$$

откуда

$$A = E/r - E/(r + R) = RE/[r(r + R)].$$

Подставив значение постоянной A в (4.13), найдем ток в цепи катушки индуктивности после размыкания ключа (рис. 4.4, б):

$$i(0_+) = E/(r + R)[1 + (R/r)e^{-t/\tau}],$$

где $\tau = L/(r+R)$ – постоянная времени цепи.

Зная ток в цепи, нетрудно определить зависимости от времени напряжений на резистивных и индуктивном элементах (см. рис. 4.4, б):

$$u_r = ri = rE/(r + R)[1 + (R/r)e^{-t/\tau}],$$

$$u_R = Ri = RE/(r + R)[1 + (R/r)e^{-t/\tau}],$$

$$u_L = L(di/dt) = -(R/r)Ee^{-t/\tau}.$$

В первый момент времени после размыкания ключа $t = 0$ напряжение на резистивном элементе R скачком возрастает от нуля $u_R(0_-) = 0$ до $u_R(0_+) = ER/r$. Поэтому при $R \gg r$ между контактами ключа появляется значительное напряжение, которое и может вызвать дуговой разряд.

4.2.4. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним емкостным элементом

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи при зарядке и разрядке емкостного элемента.

4.2.4.1. Зарядка емкостного элемента от источника постоянной ЭДС через резистивный элемент

Переходный процесс в цепи (рис. 4.5) описывается неоднородным дифференциальным уравнением на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома $u_r = ri$ и соотношения между током зарядки и напряжением в емкостном элементе $i = C(du_c/dt)$, т. е.

$$u_r + u_c = ri + u_c = rC(du_c/dt) + u_c = E. \quad (4.14)$$

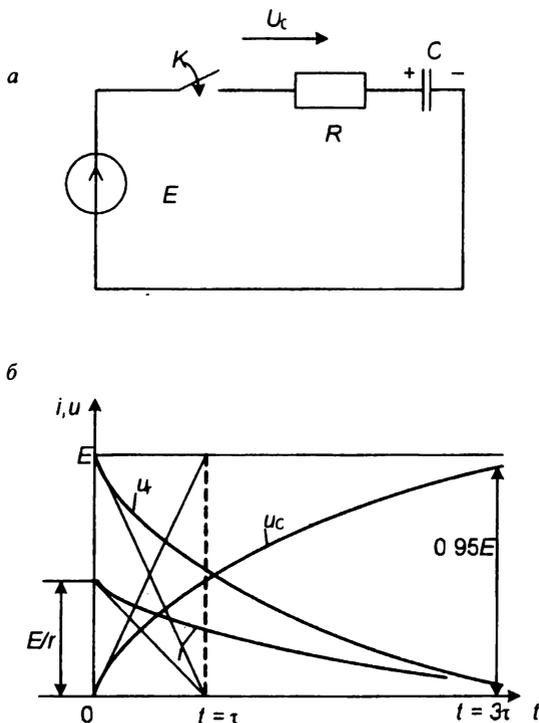


Рис. 4.5. Графосхематическое представление зарядки C -элемента:
 а – расчетная схема; б – зависимость напряжений на емкостном и резистивном элементах

Общее решение уравнения (4.14) представляет собой сумму двух составляющих:

$$u_c = u_{c \text{ уст}} + u_{c \text{ св.}}$$

Первая составляющая соответствует установившемуся режиму $u_{c \text{ уст}} = E$, так как зарядка емкостного элемента закончится, когда напряжение u_c будет равно напряжению источника ЭДС.

Вторая составляющая соответствует свободному процессу, т. е. решению однородного дифференциального уравнения первого порядка

$$rC(du_c/dt) + u_c = 0,$$

и равна $u_c = Ae^{pt}$, где $p = -1/rC$ – корень характеристического уравнения, а $rCp + 1 = 0$.

Таким образом, общее решение будет иметь вид

$$u_c = u_{c \text{ уст}} + u_{c \text{ св}} = E + Ae^{-t/rC}. \quad (4.15)$$

Для определения значения постоянной A в (4.15) обратимся к закону коммутации для емкостного элемента (2.1). Будем считать, что до замыкания ключа, т. е. в момент времени $t = (0_-)$, емкостный элемент не был заряжен. Поэтому

$$u_c(0_-) = 0 = u_c(0_+) = E + A,$$

откуда $A = -E$.

Подставив значение постоянной A в (4.15), найдем напряжение на емкостном элементе во время зарядки (рис. 4.5, б):

$$u_c = E(1 - e^{-t/rC}),$$

где $\tau = rC$ имеет размерность времени ($\text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с} / \text{В} = \text{с}$) и называется *постоянной времени цепи*. Она определяет скорость переходного процесса.

Зависимость от времени напряжения на емкостном элементе определяет зависимости от времени зарядного тока и напряжения на резистивном элементе (см. рис. 4.5, б): $i_c = C(du_c/dt) = Ee^{-t/rC}$; $u_r = ri = Ee^{-t/rC}$.

Заметим, что в первый момент после замыкания ключа, т. е. при $t = (0_+)$, ток в цепи $i(0_+) = E/r$. Емкостный элемент в этот момент времени как бы коротко замкнут (напряжение на нем равно нулю). Поэтому при малом значении сопротивления r в цепи может наблюдаться значительный скачок тока.

При $0 < t < \tau$ скорость изменения напряжения на емкостном элементе можно приближенно считать постоянной: $(du_c/dt)_{t=0} = E/rC$, а напряжение $u_c \approx (E/rC) = (1/rC) \int E dt$ – пропорциональным интегралу напряжения источника ЭДС (E).

Если на входе цепи действует источник изменяющейся ЭДС e , то может оказаться, что для моментов времени переходного процесса, в которые $u_r \ll u_c$, $u_c \approx e$, а $u_r = ri = rC(du_c/dt) \approx rC(du_e/dt)$, $\frac{du_c}{dt} = \frac{rCde}{dt}$ пропорционально скорости изменения напряжения источника. Следовательно, цепь с последовательным соединением резистивного и емкостного элементов, так же как и цепь с последовательным соединением резистивного и индуктивного элементов, рассмотренную выше, при определенных условиях можно рассматривать и как интегрирующую, и как дифференцирующую.

В большинстве случаев процесс зарядки можно считать практически закончившимся через интервал времени, равный 3τ . Этот интервал времени может быть достаточно большим (чем больше r и C , тем больше и τ), что широко используется, например, в реле времени – устройствах, срабатывающих по истечении определенного времени.

4.2.4.2. Разрядка емкостного элемента через резистивный элемент

В электрическом поле заряженного емкостного элемента сосредоточена энергия, за счет которой емкостный элемент в течение некоторого времени сам может служить источником энергии. После подключения емкостного элемента, предварительно заряженного до напряжения $u_c = E$, к резистивному элементу с сопротивлением r (рис. 4.6, а) ток в цепи будет обусловлен изменением заряда q емкостного элемента:

$$i = -(dq/dt) = -C(du_c/dt), \quad (4.16)$$

Знак «минус» указывает, что ток i – это ток разрядки в контуре цепи, обозначенном на рис. 4.6, а штриховой линией, который направлен навстречу напряжению на емкостном элементе.

Составим дифференциальное уравнение переходного процесса в контуре цепи, обозначенном штриховой линией (см. рис. 4.6, а), на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и соотношения (4.16):

$$u_r - u_c = ri - u_c = rC(du_c/dt) - u_c = 0. \quad (4.17)$$

Так как в цепи разрядки емкостного элемента нет источника ЭДС, то дифференциальное уравнение (4.17) однородное и его общее решение состоит только из свободной составляющей:

$$u_c = u_{c\text{св}} = Ae^{-t/rC}. \quad (4.18)$$

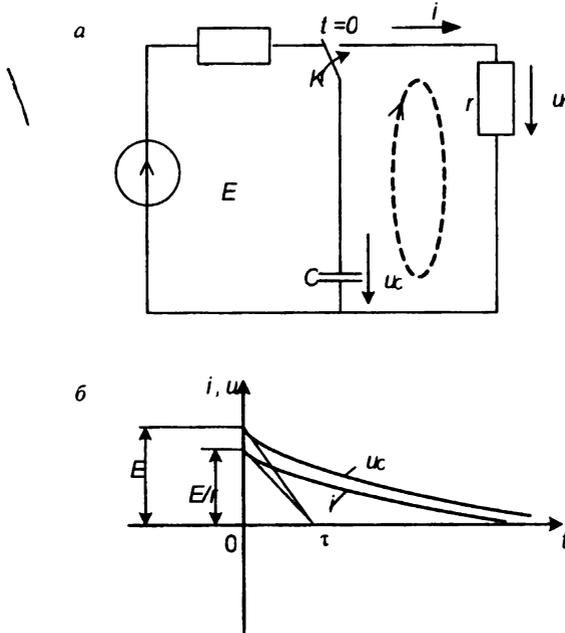


Рис. 4.6. Графосхематическое представление разрядки C -элемента:

a – электрическая цепь с емкостным конденсатором;

b – закон изменения напряжения при разрядке емкостного элемента

Для определения постоянной A в (4.18) обратимся к закону коммутации для емкостного элемента (2.1). Так как до коммутации, т. е. в момент времени $t = 0_-$, емкостный элемент был заряжен до напряжения источника, то

$$u_c(0_-) = E = u_c(0_+) = A.$$

Подставив значение постоянной A в (4.18), получим закон изменения напряжения при разрядке емкостного элемента (рис. 4.6, б):

$$u_c = u_{c\text{св}} = Ee^{-t/\tau},$$

где $\tau = rC$ – постоянная времени цепи.

Разрядный ток найдем по (4.17):

$$i_c = -C(du_c/dt) = (E/r)e^{-t/\tau}.$$

Ток разрядки скачком изменяется от нуля до значения $i(0_+) = E/r$, а затем убывает по экспоненциальному закону (см. рис. 4.6, б).

4.2.4.3. Разрядка емкостного элемента в цепи с резистивным и индуктивным элементами

Большое практическое значение имеет цепь разрядки емкостного элемента через последовательно соединенные индуктивный и резистивный элементы, например в генераторах импульсов напряжений с конденсаторами в качестве источников энергии.

Предположим, что емкостный элемент C (рис. 4.7) был сначала заряжен от источника постоянной ЭДС до напряжения, равного E (ключ K в положении 1). Затем ключ K переводится в положение 2 и емкостный элемент подключается к последовательно соединенным индуктивному L и резистивному r элементам (эти элементы могут быть элементами схемы замещения катушки индуктивности). Емкостный элемент начинает разряжаться (ток разрядки i), его заряд q и напряжение u_c убывают. При этом энергия электрического поля емкостного элемента преобразуется в энергию магнитного поля индуктивного элемента и частично рассеивается в резистивном элементе.

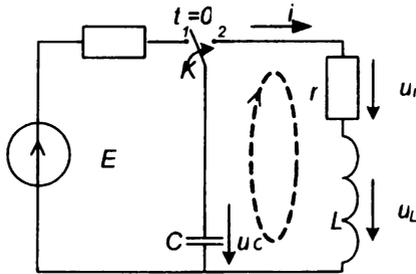


Рис. 4.7. Схема с параллельным включением LC -элементов

Запишем для контура цепи, обозначенного штриховой линией, дифференциальное уравнение на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и закона электромагнитной индукции:

$$-u_c + u_r + u_L = -u_c + ri + L(di/dt) = 0. \quad (4.19)$$

Так как положительные направления тока и напряжения на емкостном элементе противоположны, т. е. ток i – это ток разрядки, то, как и для цепи, изображенной на рис. 4.6, а,

$$i_c = -C(du_c/dt). \quad (4.20)$$

После подстановки (4.20) в (4.19) получим однородное дифференциальное уравнение цепи второго порядка:

$$LC(du_c^2/dt^2) + rC(du_c/dt) + u_c = 0. \quad (4.21)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (4.21) состоит только из свободной составляющей:

$$u_c = u_{c\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Для расчета постоянных интегрирования приходится, как правило, продифференцировать имеющиеся уравнения и решить их совместно для начального момента времени $t = (0_+)$.

Значения p_1 и p_2 определяем по уравнению для входного сопротивления $Z_{\text{вх}}$

$$Z_{\text{вх}} = R + j\omega L - j(1/\omega C) = 0,$$

или

$$Z_{\text{вх}}(p) = R + pL + 1/pC = (RpC + p^2 LC + 1)/pC = 0,$$

поэтому $(RpC + p^2 LC + 1) = 0$. Если принять коэффициент при p^2 равным единице, то уравнение примет вид

$$(p^2 + Rp/L + 1/LC) = 0,$$

или

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0.$$

4.3. Определение постоянных интегрирования при использовании классического метода

Как известно, любой свободный ток (напряжение) можно представить в виде суммы экспоненциальных слагаемых. Число членов суммы равно числу корней характеристического уравнения.

При двух действительных неравных корнях

$$i_{c\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

при трех действительных неравных корнях

$$i_{c\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

Для любой схемы с помощью уравнений Кирхгофа и законов коммутации можно найти: 1) числовое значение искомого свободного тока при $t = (0_+)$, обозначим его $i_{c\text{св}} = (0_+)$; 2) числовое значение первой, а если понадобится, то и высших производных от свободного тока, взятых при $t = (0_+)$. Числовое значение первой производной от свободного тока при $t = (0_+)$ обозначим как $i'_{c\text{св}} = (0_+)$, второй – $i''_{c\text{св}} = (0_+)$ и т. д.

Рассмотрим методику определения постоянных интегрирования A_1, A_2, \dots , полагая известными $i_{c\text{св}}, i'_{c\text{св}}, i''_{c\text{св}}$ и значения корней p_1, p_2, \dots .

Если характеристическое уравнение цепи представляет собой уравнение первой степени, то $i_{c\text{св}} = A e^{p t}$. Постоянную интегрирования A определяют по значению свободного тока $i_{c\text{св}} = (0_+)$:

$$A = i_{c\text{св}}(0_+).$$

Если дано характеристическое уравнение второй степени и его корни действительны и не равны, то

$$i_{c\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.22)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$i'_{c\text{св}} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (4.23)$$

Запишем уравнения (4.22) и (4.23) при $t = 0$ (учтем, что $e^{p t} = e^{p \cdot 0} = 1$ при $t = 0$). В результате получим

$$i_{c\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2, \quad (4.24)$$

$$i'_{c\text{св}} = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (4.25)$$

В этой системе уравнений известными являются $i_{c\text{св}}(0_+)$, $i'_{c\text{св}}$, p_1 и p_2 , неизвестными – A_1 и A_2 .

Совместное решение (4.24) и (4.25) дает

$$A_1 = [i'_{c\text{св}}(0_+) - p_2 i_{c\text{св}}(0_+)] / (p_1 - p_2); \quad A_2 = i_{c\text{св}}(0_+) - A_1.$$

Если корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, то в (4.22) сопряжены не только p_1 и p_2 ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$), но также A_1 и A_2 . Поэтому свободный ток определяется по формуле

$$i_{c\text{св}} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.26)$$

Угловая частота ω_0 и коэффициент затухания δ известны из решения характеристического уравнения.

Определение двух неизвестных A и φ_{0i} производят и в этом случае по значениям $i_{cb}(0_+)$, i'_{cb} .

Продифференцировав по времени уравнение (4.26), получим

$$i'_{cb} = -A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_{0i}) + A\omega_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_{0i}). \quad (4.27)$$

Запишем уравнение (4.27) при $t = 0_+$:

$$i'_{cb} = -A\delta \sin(\varphi_{0i}) + A\omega_0 \cos\varphi_{0i}.$$

Таким образом, для нахождения неизвестных A и φ_0 имеем два уравнения:

$$i_{cb}(0_+) = A \sin\varphi_{0i},$$

$$i'_{cb} = -A\delta \sin\varphi_{0i} + A\omega_0 \cos\varphi_{0i}.$$

Для цепи, имеющей характеристическое уравнение третьей степени, свободный ток равен

$$i_{cb} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} + A_3 p_3 e^{p_3 t}. \quad (4.28)$$

Найдем первую, а затем вторую производную от левой и правой частей уравнения (4.28):

$$i'_{cb} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} + A_3 p_3 e^{p_3 t}, \quad (4.29)$$

$$i''_{cb} = A_1 p_1^2 e^{p_1 t} + A_2 p_2^2 e^{p_2 t} + A_3 p_3^2 e^{p_3 t}. \quad (4.30)$$

Запишем (4.28)–(4.30) при $t = 0_+$:

$$i_{cb} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$i'_{cb} = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3,$$

$$i''_{cb} = A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + A_3 p_3^2.$$

Данная система уравнений представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: A_1 , A_2 и A_3 . Все остальные входящие в нее величины (p_1 , p_2 , p_3 , i_{cb} , i'_{cb} , i''_{cb}) известны.

Сначала, пока еще не накоплено опыта в решении задач, для облегчения расчета величины и ее производной (производных) при $t = 0_+$ реко-

мендуется решать задачу относительно тока через L или напряжения на C и только затем, используя законы Кирхгофа, определять любую другую величину через найденную.

Рассмотрим в общем виде несколько примеров расчета коэффициентов переходных процессов классическим методом в цепях первого и второго порядков с источниками постоянной и синусоидальной ЭДС при ненулевых начальных условиях.

На примере (см. рис. 4.7) покажем возможные варианты получения трех видов процессов: *апериодического, граничного, колебательного*.

4.4. Процессы зарядки и разрядки

4.4.1. Апериодический процесс разрядки

Если корни p_1 и p_2 действительные, отрицательные, разные, то мы имеем апериодический процесс. В этом случае $r/(4L^2) > 1/(LC)$. Свободная составляющая имеет апериодический характер и описывается уравнением вида

$$u_{c\text{ св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.31)$$

Для нахождения A_1 и A_2 в общем решении (4.31) воспользуемся законами коммутации для емкостного и индуктивного элементов:

$$\begin{aligned} u_c(0_-) = E = u_c(0_+) = A_1 + A_2, \\ i(0_-) = 0 = i(0_+) = -C(du_c/dt)_{t=0} = -C(p_1 A_1 + p_2 A_2), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} A_1 = p_2 E / (p_2 - p_1) > 0, \\ A_2 = p_1 E / (p_1 - p_2) < 0. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в (4.31), получим напряжение на емкостном элементе

$$u_c = p_2 E / (p_2 - p_1) e^{p_1 t} + p_1 E / (p_1 - p_2) e^{p_2 t}$$

и ток разрядки

$$i(0_+) = -C(du_c/dt) = -[C(p_1 p_2 E) / (p_2 - p_1)](e^{p_1 t} + e^{p_2 t}).$$

Кривые изменения напряжения и тока показаны на рис. 4.8, где штриховыми линиями нанесены также вспомогательные экспоненты. В течение

всего переходного процесса напряжение и ток остаются положительными, т. е. разрядка емкостного элемента аperiodическая.

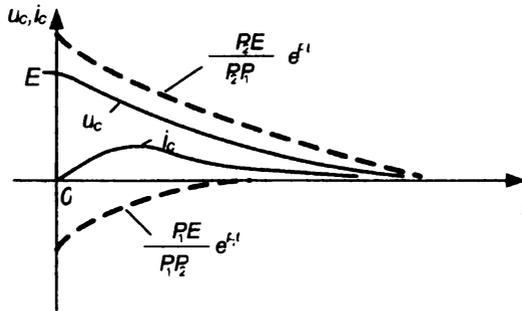


Рис. 4.8. Графическое изображение изменения u_c , i_c и их составляющих во время переходного процесса

4.4.2. Граничный процесс разрядки

Для предельного случая аperiodического процесса при $r/(4L^2) = 1/(LC)$ характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $p_1 = p_2 = -r/(2L)$ (кратные корни). При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (4.21) отличается от (4.31) и записывается в виде

$$u_c = (A_1 + A_2 t) e^{p t},$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются на основании законов коммутации.

Напряжение на емкостном элементе и ток во время предельного аperiodического процесса разрядки определяются по формулам

$$\begin{aligned} U_c &= E[1 + (r/2L)t] e^{-(r/2L)t}, \\ i &= (E/L) t e^{-(r/2L)t}. \end{aligned}$$

4.4.3. Колебательный процесс разрядки

Для случая $r/(4L^2) < 1/(LC)$ корни p_1 и p_2 комплексные и сопряженные и разрядка имеет колебательный характер. В этом случае корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0,$$

где $\delta = r/2L$ — коэффициент затухания;

ω_0 — собственная угловая частота колебательного процесса.

Подставив комплексные значения корней в (4.31), получим зависимости искомых величин напряжения на емкостном элементе и разрядного тока от времени при колебательном режиме переходного процесса

$$u_c = e^{-\delta t}(A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}), \quad (4.32)$$

$$i = -C(du_c/dt) = -C e^{-\delta t}[(A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}) + j\omega_0(A_1 e^{j\omega_0 t} - A_2 e^{-j\omega_0 t})].$$

Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 обратимся, как и в других задачах, к законам коммутации для индуктивного и емкостного элементов. До коммутации, в частности в момент времени $t = 0_-$, непосредственно предшествовавший коммутации, напряжение на емкостном элементе равнялось ЭДС E источника, а тока в индуктивном элементе не было. Поэтому

$$u_c(0_-) = E = u_c(0_+) = A_1 + A_2,$$

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = -C[\delta(A_1 + A_2) - j\omega_0(A_1 - A_2)],$$

откуда

$$A_1 = E(\delta + j\omega_0)/2j\omega_0; \quad A_2 = E(\delta - j\omega_0)/2j\omega_0.$$

Подставим эти значения в (4.32) и учтем, что по формуле Эйлера $e \pm j\omega_0 t = \cos\omega_0 t \pm j\sin\omega_0 t$.

В результате получим зависимость изменения напряжения на емкостном элементе от времени в виде

$$u_c = (E/\omega_0)e^{-\delta t}(\omega_0 \cos\omega_0 t + \delta \sin\omega_0 t). \quad (4.33)$$

Сумму косинусоидальной и синусоидальной функций можно заменить одной синусоидальной функцией. Для этого положим, что $\omega_0/\delta = \operatorname{tg}\psi$, т. е. будем считать, что ω_0 и δ – *катеты прямоугольного треугольника* (рис. 4.9, а), гипотенузу которого можно найти следующим образом:

$$\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} = \sqrt{1/(LC) - \delta^2 + \delta^2} = 1/\sqrt{LC}. \quad (4.34)$$

Разделив и умножив (4.33) на $1/(LC)$, получим

$$u_c = \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi), \quad (4.35)$$

и по (4.20) разрядный ток будет равен

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = \left(\frac{E}{\omega_0 L}\right) e^{-\delta t} \sin\omega_0 t.$$

Зависимости (4.34) и (4.35) показывают, что напряжение емкостного элемента и разрядный ток цепи можно рассматривать как синусоидально изменяющиеся во времени величины, но с амплитудами, уменьшающимися по экспоненциальному закону при постоянной времени $\tau = 1/\delta = 2L/r$.

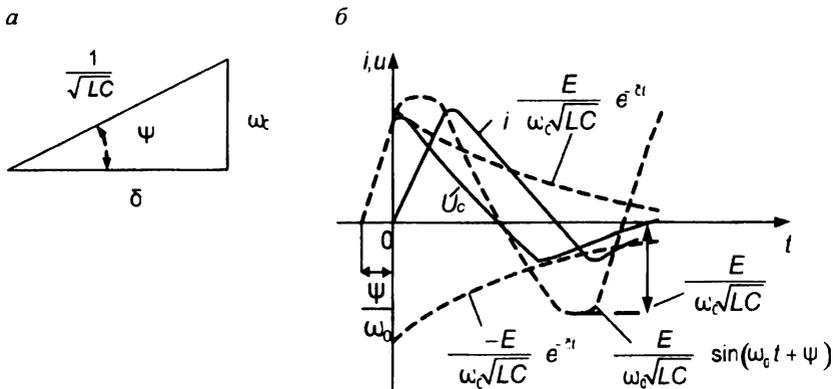


Рис. 4.9. Графическое представление колебательного процесса разрядки:
 а – треугольник с катетами ω_0 и δ ; б – кривые изменения напряжения и тока

Для построения соответствующих зависимостей можно сначала построить вспомогательные экспоненты $\pm \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t}$ для напряжения (рис. 4.9, б) и $\pm (E/\omega_0 L) e^{-\delta t}$ для тока. Кривые изменения напряжения и тока (см. рис. 4.9, б) должны вписаться в пределы, ограниченные указанными вспомогательными экспонентами. Для нахождения характерных точек кривой изменения напряжения на емкостном элементе, таких как $u_c(0) = E$ и $u_c(t) = 0$, на рис. 4.9, б штриховой линией показана вспомогательная кривая – синусоида.

4.5. Подключение неразветвленной цепи с индуктивным, резистивным и емкостным элементами к источнику ЭДС

В отличие от процесса разрядки емкостного элемента в цепи (см. рис. 4.6), описываемого однородным дифференциальным уравнением, процесс зарядки в аналогичной цепи от источника постоянной ЭДС E (рис. 4.10) описывается неоднородным дифференциальным уравнением

$$LC \frac{du_c^2}{dt^2} + rC \frac{du_c}{dt} + u_c = E.$$

Решение этого уравнения представляет собой наложение установившегося и свободного процессов:

$$u_c = u_{c \text{ уст}} + u_{c \text{ св}},$$

где составляющая свободного процесса находится по (4.31), а составляющая установившегося процесса $u_{c \text{ уст}} = E$ (зарядка до напряжения, равного ЭДС), т. е. общее решение для напряжения на емкостном элементе имеет вид

$$u_c = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

и зарядный ток равен

$$i = C \frac{du_c}{dt} = Cp_1 A_1 e^{p_1 t} + Cp_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

До замыкания ключа напряжения на емкостном элементе и тока в цепи не было. Поэтому в соответствии с законами коммутации получим для момента замыкания ключа ($t = 0$) два уравнения для определения постоянных A_1 и A_2 :

$$u_c(0_-) = 0 = u_c(0_+) = E + A_1 + A_2,$$

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

откуда определяются постоянные:

$$A_1 = p_2 E / (p_2 - p_1),$$

$$A_2 = p_1 E / (p_1 - p_2).$$

Ограничимся здесь анализом колебательного процесса зарядки. Выполнив преобразования, аналогичные переходу от (4.33) к (4.35), получим зависимости изменения во времени напряжения на емкостном элементе и зарядного тока (рис. 4.10):

$$u_c - u_{c \text{ уст}} + u_{c \text{ св}} = E - \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t,$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t.$$

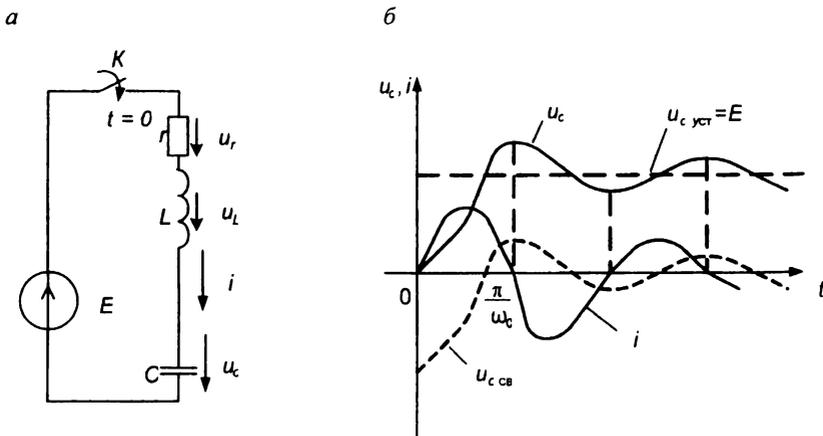


Рис. 4.10. Графосхематическое представление для L - C - R -элементов, синусоидальной E :

a – неразветвленная цепь с индуктивным, емкостным и резистивным элементами;
 b – график мгновенных значений тока, установившегося и свободного напряжений при включении цепи

Напряжение на емкостном элементе достигает наибольшего значения в момент времени $t = \pi/\omega_0$. Оно тем больше, чем постоянная времени $\tau = 1/\delta$ больше периода собственных колебаний $T_0 = \pi/\omega_0$, и в пределе может превышать почти в 2 раза установившееся напряжение. Такое перенапряжение может быть опасно для изоляции высоковольтных установок. Чтобы исключить перенапряжение, нужно осуществить аperiodический режим зарядки, например включить последовательно в цепь добавочный резистор.

4.6. Подключение неразветвленной цепи с индуктивным и резистивным элементами к источнику синусоидальной ЭДС

Уравнение для цепи (рис. 4.11, a), составленное по второму закону Кирхгофа, представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение переходного процесса, возникающего после замыкания ключа, и имеет вид

$$u_L + u_r = L(di/dt) + ri = e(t) = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Его общее решение равно сумме свободной и установившейся составляющих тока: $i = i_{уст} + i_{св}$.

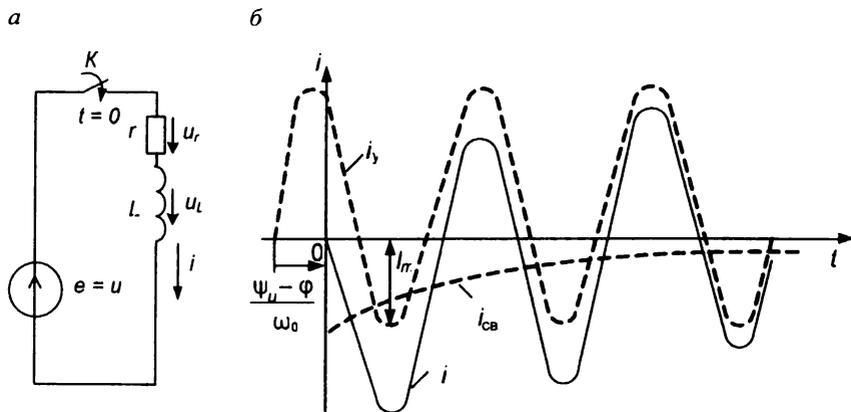


Рис. 4.11. Графосхематическое представление классического метода расчета для L - R -элементов:

- a* – неразветвленная цепь с индуктивным и резистивным элементами;
- б* – графики мгновенных значений напряжения; установившегося, свободного и полного токов при включении цепи

Принужденный ток в цепи после окончания переходного процесса определяют по закону Ома. В неразветвленной цепи (см. рис. 4.11, *a*) с источником синусоидальной ЭДС $e = u = U\sin(\omega t + \psi)$ при установившемся режиме синусоидальный ток равен

$$i_{уст} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

или

$$i_{уст} = (U_m/z) \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где $I_m = U_m / \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$ – амплитуда тока;
 $\varphi = \arctg(\omega L/r)$ – аргумент комплексного сопротивления цепи;
 ψ – начальная фаза;
 $z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$ – комплексное сопротивление.

Решение дифференциального уравнения для свободного тока $u_L + u_r = L(di_{св}/dt) + ri_{св} = 0$ имеет вид

$$i_{св} = Ae^{pt}.$$

Показатель степени p определяют из характеристического уравнения $Lp + r = 0$:

$$p = -L/r = -1/\tau,$$

где $\tau = L/r$ – постоянная времени цепи.

Ток в цепи в переходный период определяется по формуле

$$i = i_{уст} + Ae^{-t/\tau} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-(r/L)t}. \quad (4.36)$$

Значение A определяют из (4.36) с помощью первого закона коммутации: при $t = (0_+)$ $i(0_+) = i(0_-) = 0$.

На основании закона коммутации для индуктивного элемента в момент времени $t = 0$ справедливо соотношение

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A,$$

откуда определяется постоянная интегрирования:

$$A = -I_m \sin(\psi - \varphi) = -\frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi).$$

Подставив значение постоянной A в общее решение, найдем зависимость тока от времени:

$$i = i_{уст} + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}, \quad (4.37)$$

или $i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}$.

Из анализа (4.37) вытекает, что характер переходного процесса зависит от ψ и φ . На рис. 4.11, б изображены графики мгновенных значений напряжения; установившегося, свободного и полного токов при включении цепи, показанной на рис. 4.11, а. Если в момент включения при $t = (0_+)$ $\psi - \varphi = 0$, или $\psi = \varphi$, то принужденный ток равен нулю, поэтому свободный ток не возникает и в цепи после включения сразу наступает установившийся режим.

Таким образом, во время переходного процесса ток в цепи состоит из синусоидальной составляющей и свободной составляющей, убывающей экспоненциально (см. рис. 4.11, б). Через интервал времени, равный 3τ после замыкания ключа, свободной составляющей можно пренебречь.

Аналогично рассчитывается переходный процесс при подключении источника синусоидальной ЭДС к цепи с последовательно соединенными резистивным и емкостным элементами и в других случаях. И здесь переходный процесс зависит от начальной фазы напряжения источника. Он отсутствует при $\psi = \varphi + \pi/2$, где $\varphi = \operatorname{arctg}[-l/(\omega Cr)] < 0$, и выражен наиболее сильно при $\psi = \varphi$, когда максимальное напряжение на емкостном элементе может почти в 2 раза превысить амплитуду установившегося напряжения. Такое перенапряжение может привести к пробое изоляции в высоковольтных установках.

Контрольные вопросы и задания

1. Изложите сущность классического метода расчета и принцип составления уравнений для определения постоянных интегрирования.
2. Переходный процесс в некоторой цепи сопровождается биениями. О чем это может свидетельствовать?
3. Дайте обоснование обобщенных законов коммутации.
4. В чем состоит сходство и различия аperiodического и граничного режимов?

Глава 5. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Операторный метод не обладает физической наглядностью в силу своей глубокой математической формализации, но в ряде случаев упрощает расчеты. Его идея заключается в том, что расчет переходного процесса переносится из области функций действительной переменной (времени t) в область функций комплексной переменной p , в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические. Такое преобразование называется *прямым*. Полученное решение алгебраических уравнений *обратным* преобразованием переносится в область действительной переменной. Строгое обоснование метода дается в курсе математики. Здесь мы познакомимся лишь с техникой применения операторного метода.

5.1. Логарифм как изображение числа

Известно, что для выполнения операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня из многозначных чисел целесообразно пользоваться логарифмами. Действительно, операция умножения сводится к сложению логарифмов, операция деления – к вычитанию логарифмов и т. д. Таким образом, произвести расчет легче в силу того, что сравнительно сложная операция сводится к более простой. Каждому числу соответствует свой логарифм, поэтому логарифм можно рассматривать как изображение числа. Так, 0,30103 есть изображение (логарифм) при основании 10 числа 2.

5.2. Комплексные изображения синусоидальных функций

С понятием изображения встречаются также при изучении символического метода расчета цепей синусоидального тока. Согласно символическому методу, комплексная амплитуда есть изображение синусоидальной функции. Так, \dot{I}_m – изображение синусоидального тока $\dot{I}_m \sin(\omega t + \psi)$. Между изображением числа в виде логарифма и изображением синусоидальной функции времени в виде комплексного числа имеется существенная разница. В первом случае речь идет об изображении числа (не функции), во втором – об изображении функции времени.

Подобно тому, как введение логарифмов упростило проведение операций над числами, введение комплексных изображений синусоидальных функций времени позволило упростить операции над функциями времени.

5.3. Введение в операторный метод

Операторный метод тоже основан на использовании понятия об изображении функций времени. В операторном методе каждой функции времени соответствует функция новой переменной, обозначаемой буквой p , и наоборот – функции переменной p отвечает определенная функция времени.

Переход от функции времени к функции p осуществляют с помощью преобразования (прямого) Лапласа.

Таким образом, операторный метод расчета переходных процессов представляет собой метод расчета, основанный на преобразовании Лапласа.

Операторный метод позволяет свести операцию дифференцирования к умножению, а операцию интегрирования – к делению. Это облегчает интегрирование дифференциальных уравнений.

5.4. Преобразование Лапласа

Условимся под p (в ряде книг вместо буквы p пишут s) понимать комплексное число

$$p = a + jb,$$

где a – действительная часть комплексного числа;

jb – мнимая часть комплексного числа.

В дальнейшем в соответствии с установившейся практикой коэффициент b с учетом знака условимся называть не коэффициентом при мнимой части комплекса (чем он в действительности является), а мнимой частью.

Функцию времени (ток, напряжение, ЭДС, заряд) обозначают $f(t)$ и называют *оригиналом*. Ей соответствует функция $F(p)$, называемая *изображением*. Для прямого преобразования функций времени $f(t)$ применяется преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (5.1)$$

Соответствие между функциями $F(p)$ и $f(t)$ записывают так:

$$F(p) \doteq f(t).$$

Здесь функция времени $f(t)$ – однозначная, называемая оригиналом, определенная при $t > 0$, интегрируемая в интервале времени $0 \div \infty$ и равная нулю при $t < 0$; $F(p)$ – функция комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$ при $\text{Re} p = \sigma > 0$, называемая лапласовым изображением.

Знак \cdot называют знаком соответствия.

Верхний предел интеграла (5.1) равен бесконечности. Интегралы с бесконечным верхним пределом называют несобственными. Если в результате интегрирования и подстановки пределов получают конечное число (не бесконечность), то говорят, что интеграл сходится.

В курсе математики доказывается, что интеграл (5.1), в состав которого входит функция $e^{-pt} = e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}$, сходится только в том случае, когда модуль функции $f(t)$ если и увеличивается с ростом t , то все же медленнее, чем модуль функции e^{-pt} , равный $e^{-\alpha t}$.

Практически все функции $f(t)$, с которыми имеют дело в курсе «Теоретические основы электротехники», этому условию удовлетворяют.

Составим изображения некоторых простейших функций.

5.5. Изображение постоянной

Требуется найти изображение функции $f(t) = A$, где A – постоянная величина. С этой целью в (5.1) вместо $f(t)$ подставим A и проведем интегрирование:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = A(-1/p) \int_0^{\infty} d(e^{-pt}) = \frac{-A e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Следовательно, изображение постоянной равно постоянной A , деленной на p :

$$A \cdot = A/p.$$

5.6. Изображение показательной функции $e^{\alpha t}$

Вместо $f(t)$ в (5.1) подставим $e^{\alpha t}$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-\alpha)} dt = \left(-\frac{1}{p-\alpha}\right) \int_0^{\infty} e^{-t(p-\alpha)} d(-t(p-\alpha)) = \frac{-1}{p-\alpha} e^{-t(p-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{p-\alpha} (0-1) = \frac{1}{p-\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{\alpha t} \cdot = [1/(p-\alpha)]. \quad (5.2)$$

При выводе формулы (5.2) (при подстановке пределов) было учтено, что действительная часть оператора p больше, чем α . Только при этом условии интеграл сходится.

Из формулы (5.2) вытекает ряд важных следствий. Положив в ней $\alpha = e^{j\omega t}$, получим

$$e^{j\omega t} := [1/(p - j\omega)]. \quad (5.3)$$

Формула (5.3) дает возможность найти изображение комплекса синусоидального тока $\dot{I}_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$.

С этой целью обе части (5.3) умножим на постоянное число \dot{I}_m :

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} := \dot{I}_m [1/(p - j\omega)].$$

Аналогично изображение комплекса синусоидального напряжения имеет вид

$$U_m e^{j\omega t} := U_m [1/(p - j\omega)].$$

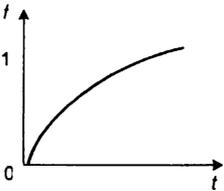
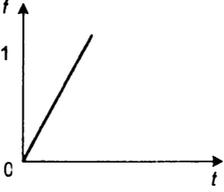
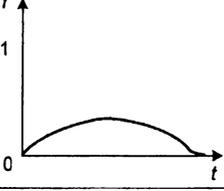
Функции $e^{-\alpha t}$ соответствует изображение $1/(p + \alpha)$:

$$e^{-\alpha t} := 1/(p + \alpha).$$

В таблице приведены примеры изображения простых функций.

Примеры изображения простых функций

| Выражение функции | Вид функции | Изображение функции $F(p)$ |
|--|-------------|----------------------------|
| 1 | 2 | 3 |
| $1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$ | | $1/p$ |
| $e^{-\alpha t}$ | | $1/p + \alpha$ |

| 1 | 2 | 3 |
|--------------------------------|---|--|
| $1 - e^{-\alpha t}$ |  | $\alpha/p(p + \alpha)$ |
| t |  | $1/p^2$ |
| $e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$ |  | $\frac{\beta - \alpha}{(p + \alpha)(p + \beta)}$ |

5.7. Изображение первой производной

Известно, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$. Требуется найти изображение первой производной $d[f(t)]/dt$, если известно, что значение функции $f(t)$ при $t = 0$ равно $f(0)$.

Подвергнем функцию $df(t)/dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} d(f(t)).$$

Интегрирование произведем по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. Обозначив $e^{-pt} = u$ и $df(t)/dt = dv$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} d(f(t)) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d(e^{-pt}).$$

Но

$$e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} = 0 - f(0) = -f(0),$$

второе слагаемое

$$\int_0^{\infty} f(t)de^{-pt} = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0),$$

или

$$df(t)/dt = pF(p) - f(0). \quad (5.4)$$

5.8. Изображение второй производной

Без вывода дадим формулу

$$d^2[f(t)]/dt^2 = p^2F(p) - pf(0) - df(t)/dt \Big|_{t=0}.$$

Следовательно, изображение второй производной тока

$$d^2i/dt^2 = p^2i(p) - pi(0) - i'(0). \quad (5.5)$$

5.9. Изображение интеграла

Требуется найти изображение функции $\int_0^1 f(t)dt$, если известно, что изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$.

Подвергнем функцию $\int_0^1 f(t)dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^1 f(t)dt \right) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 f(t)dt \right) d(e^{-pt}).$$

Примем $\int_0^1 f(t)dt = u$, $d(e^{-pt}) = dv$ и возьмем интеграл по частям:

$$-\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 f(t)dt \right) d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p} \left(\int_0^1 f(t)dt \right) e^{-pt} \Bigg|_0^{\infty} + \frac{\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt}{p} = \frac{F(p)}{p}.$$

Первое слагаемое правой части при подстановке верхнего и нижнего пределов обращается в нуль. При подстановке верхнего предела нуль получается за счет ранее наложенного ограничения на функцию $f(t)$. Функция $f(t)$ если и растет с увеличением t , то все же медленнее, чем функция e^{-pt} ,

где α – действительная часть p . При подстановке нижнего предела нуль получим за счет обращения в нуль $\int_0^1 f(t) dt$. Следовательно, если $f(t) = F(p)$, то

$$\int_0^1 f(t) dt = F(p)/p. \quad (5.6)$$

Преобразование (5.6) позволяет получить соотношения между напряжением $u(t) = u$ и током $i(t) = i$ в операторной форме для резистивного, индуктивного и емкостного элементов.

Изображение напряжения на резистивном элементе (рис. 5.1) $u_r(t) = ri(t)$ равно

$$U_r(p) = r \int_0^{\infty} e^{-pt} i(t) dt = rI(p).$$

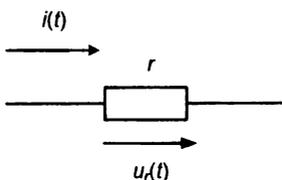


Рис. 5.1. Схема замещения активного сопротивления в операторной форме

5.10. Изображение напряжения на индуктивном элементе

На рис. 5.2 представлена схема замещения индуктивности в операторной форме.



Рис. 5.2. Схема замещения индуктивности в операторной форме:

а – пассивная; *б* – активная

Изображение тока i равно $I(p)$. Запишем изображение напряжения на L : $u_L = L(di/dt)$. По формуле (5.5) $(di/dt) = pI(p) - i(0)$, где $i(0)$ – значение тока i при $t = 0$. Следовательно,

$$U_L(p) = L(di/dt) = pLI(p) - Li(0),$$

где $i(0) = i(0_-) = i(0_+)$ – ток в индуктивном элементе в момент коммутации $t = 0$ с учетом начальных условий.

Если $i(0) = 0$, то

$$L(di/dt) = pLI(p).$$

5.11. Изображение напряжения на конденсаторе

На рис. 5.3 представлены схемы замещения конденсатора в операторной форме. Напряжение на конденсаторе u_c часто записывают в виде $u_c = \frac{1}{C} \int i dt$, где не указаны пределы интегрирования по времени. Более полной является следующая запись:

$$u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

где учтено, что к моменту времени t напряжение на конденсаторе определяется не только током, протекшим через него в интервале времени от 0 до t , но и тем напряжением $u_c(0)$, которое на нем было при $t = 0$.

В соответствии с формулой (5.6) изображение $\frac{1}{C} \int_0^t i dt$ равно $I(p)/(pC)$, а изображение постоянной $u_c(0)$ есть постоянная, деленная на p . Поэтому изображение напряжения на конденсаторе записывают следующим образом:

$$u_c = I(p)/pC + u_c(0)/p.$$

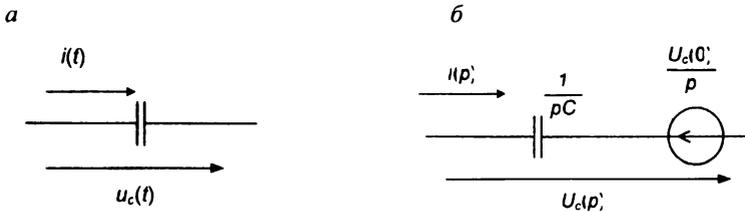


Рис. 5.3. Схема замещения конденсатора в операторной форме:

а – пассивная; б – активная

Приведем простейшие операторные соотношения; часть их была выведена ранее, другая дается без вывода.

Частный случай $u_c(0_-) = 0$ для емкостного элемента можно записать в виде

$$u_c = I(p)/Cp.$$

Отметим некоторые свойства преобразования Лапласа, называемые также теоремами.

5.12. Некоторые теоремы и предельные соотношения

Теорема смещения в области оригиналов (теорема запаздывания)

Если изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$, то изображение функции $f(t - \tau)$ равно $e^{-p\tau}F(p)$.

Теорема доказывается путем подстановки $f(t - \tau)$ в формулу преобразования Лапласа и введения новой переменной $(t - \tau) = t_1$; $dt = dt_1$; $e^{-pt} = e^{-p\tau}e^{-pt_1}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt_1} f(t_1) dt_1 = e^{-p\tau} F(p).$$

Теорема смещения в области изображений

Если изображению функции $F(p)$ соответствует функция $f(t)$, то изображению $F(p - \lambda)$ – функция $e^{-\lambda t}f(t)$.

Доказательство проводят путем подстановки функции $e^{-\lambda t}f(t)$ в формулу преобразования Лапласа:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} f(t) dt = F(p - \lambda).$$

Пример

Найти оригинал $1/(p + \lambda)^2$, если известно, что $1/p^2 = t$.

Решение: $1/(p + \lambda)^2 = e^{-\lambda t}$.

Теорема об изменении масштаба (теорема подобия)

Если функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$, то функции $f(\lambda t)$ – изображение $(1/\lambda)F(p/\lambda)$.

Теорема доказывается следующим образом:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda}(\lambda t)} f(\lambda t) d(\lambda t) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Найдем начальное значение функции времени $f(0_+)$ по изображению функции $F(p)$:

$$f(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

при $p \rightarrow \infty$.

Далее найдем установившееся значение функции времени $f(\infty)$ по изображению функции $F(p)$:

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p)$$

при $p \rightarrow 0$.

Соотношение получим, если в (5.4) p устремим к нулю и учтем, что $e^{-pt}|_{p \rightarrow 0} = 1$.

В результате имеем

$$\int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0),$$

или

$$f(0)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)|_{p \rightarrow 0}.$$

Если искомая функция $f(t)$ в послеконмутационном режиме содержит в своем составе периодическую составляющую (принужденную или свободную), то понятие $f(\infty)$ для нее оказывается неопределенным. Например, не имеет определенного смысла функция $\sin \omega t$ при $t = \infty$. Так, при подключении последовательно соединенных L и C (при нулевых начальных условиях) к единичному напряжению $1(t)$ по цепи протекает свободная составляющая тока, численно равная $\sqrt{C/L} \sin(L/\sqrt{LC})$. В этом случае определять $f(\infty)$ как $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ также не имеет смысла при $p \rightarrow 0$.

Теорема о дифференцировании в области изображений

Если $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$, то $-[dF(p)/dp] = \int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt} dt$.

Доказательство:

$$p - \frac{d}{dp} \left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right) = - \int_0^{\infty} f(t) \left(\frac{d}{dp} e^{-pt} \right) dt = - \int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt} dt.$$

Например, если $f(t) = e^{-\alpha t}$, $F(p) = 1/(p + \alpha)$, то

$$te^{-\alpha t} - [dF(p)/dp] = 1/(p + \alpha)^2.$$

Теорема об интегрировании в области изображений

Если при $t \geq 0$ $f(t)$ и $f(t)/t$ преобразуемы по Лапласу и $\int_p^{\infty} F(p) dp$ существует, то

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \frac{f(t)}{t}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_p^{\infty} F(p) dp &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) dp = \int_0^{\infty} f(t) \left(\int_p^{\infty} e^{-pt} dp \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \left(\frac{e^{-pt}}{t} \right) \Big|_p^{\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Например, если $f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$), $F(p) = \alpha/p(p + \alpha)$, то

$$\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} = \int_p^{\infty} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} dp = \int_p^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} \right) dp = \ln \frac{p + \alpha}{p}.$$

5.13. Закон Ома в операторной форме

На рис. 5.4 изображена часть сложной разветвленной электрической цепи. Между узлами a и b этой цепи включена ветвь, содержащая R , L , C и источник ЭДС $e(t)$. Ток, протекающий по ветви, обозначим через i .

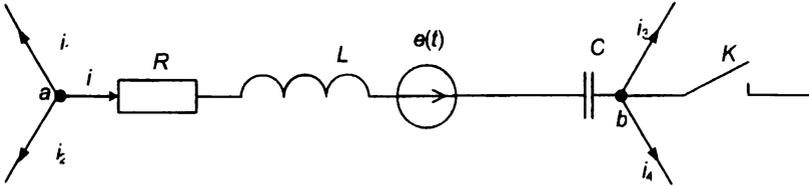


Рис. 5.4. Участок электрической цепи

Замыкание ключа K в схеме приводит к переходному процессу. До коммутации ток $i = i(0_-)$ и напряжение на конденсаторе $u_c = u(0_-)$. Выразим потенциал точки a через потенциал точки b для послекоммутационного режима:

$$\varphi_a = \varphi_b + u_c + u_L + u_R - e(t), \quad u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = u_c + u_L + u_R - e(t). \quad (5.7)$$

Вместо u_L запишем $L(di/dt)$, вместо u_c — соответственно $u_c(0_+)$.

Тогда

$$u_{ab} = iR + L \frac{di}{dt} + u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^1 idt - e(t). \quad (5.8)$$

К уравнению (5.8) применим преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа является линейным, поэтому изображение суммы равно сумме изображений.

Каждое слагаемое уравнения заменим операторным изображением: вместо iR запишем $R I(p)$; вместо $u_{ab} - U_{ab}(p)$; $L(di/dt) = LpI(p) - Li(0)$; $u_c(0) = u_c(0)/p$; $\frac{1}{C} \int_0^1 idt - e(t) = I(p)Cp$; $e(t) = E(p)$.

Слагаемое $Li(0)$ представляет собой внутреннюю ЭДС, обусловленную запасом энергии в магнитном поле индуктивной катушки вследствие протекания через нее тока $i(0)$ непосредственно до коммутации. Слагаемое $u_c(0)/p$ представляет собой внутреннюю ЭДС, обусловленную запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие напряжения на нем $u_c(0)$ непосредственно до коммутации.

В соответствии с формулой (5.8) на рис. 5.5 изображена операторная схема замещения участка цепи (см. рис. 5.4). Ее операторные сопротивления – R , pL , $[1/(Cp)]$. Как следует из формулы (5.7), внутренняя ЭДС $Li(0)$ направлена согласно направлению тока $I(p)$, внутренняя ЭДС $U_c(0)/p$ – встречно току $I(p)$. В результате найдем

$$U_{ab}(p) = \{I(p)[R + pL + (1/Cp)] + Li(0) - u_c(0)/p + E(p)\}/Z(p). \quad (5.9)$$

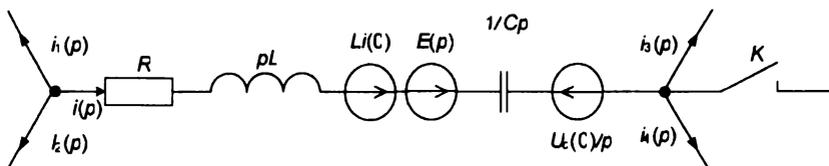


Рис. 5.5. Операторная схема замещения участка цепи, изображенной на рис. 5.4

Смысл проведенного преобразования состоит в том, что вместо дифференциального уравнения (5.8) мы получили алгебраическое уравнение (5.9), связывающее изображение тока $I(p)$ с изображением ЭДС $E(p)$ и изображением напряжения $U_{ab}(p)$. Из уравнения (5.9) следует, что

$$I(p) = \{U_{ab}(p) + Li(0) - u_c(0)/p + E(p)\}/Z(p), \quad (5.10)$$

где $Z(p) = R + pL + [1/(Cp)]$ – операторное сопротивление участка цепи между точками a и b .

Структура его аналогична структуре комплекса сопротивления того же участка цепи переменного тока, если $j\omega$ заменить на p .

Как указывалось ранее, комплексное число $p = a + jb$ может быть записано в виде $p = j(b - ja) = j\Omega$, где $\Omega = b - ja$ – комплексная частота; $Z(p) = Z(j\Omega)$ – сопротивление, оказываемое рассматриваемой цепью воздействию $\int e^{j\Omega t} = \int e^{pt}$, подобно тому как $Z(j\omega)$ есть сопротивление, оказываемое воздействию $\int e^{j\omega t}$. Поэтому $Z(p)$ называют *сопротивлением на комплексной частоте*.

Уравнение (5.10) может быть названо законом Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего ЭДС. Оно записано при ненулевых начальных условиях.

В частном случае, когда на участке ab отсутствует ЭДС $e(t)$ и к моменту коммутации $i(0) = 0$ и $u_c(0) = 0$, уравнение (5.10) приобретает более простой вид:

$$I(p) = U_{ab}(p)/Z(p). \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) есть математическая запись закона Ома в операторной форме для участка цепи, не содержащего источник ЭДС при нулевых начальных условиях.

5.14. Первый закон Кирхгофа в операторной форме

По первому закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю. Так, для узла a схемы, изображенной на рис. 5.4, $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Воспользуемся преобразованием Лапласа для суммы токов в любом узле цепи $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$ (изображение суммы равно сумме изображений):

$$I(p)_1 + I(p)_2 + I(p)_3 = 0.$$

В общем случае

$$\Sigma I(p) = 0, \quad (5.12)$$

где $I_k(p) = \mathcal{L}[i_k(t)]$.

Уравнение (5.12) выражает собой первый закон Кирхгофа в операторной форме.

5.15. Второй закон Кирхгофа в операторной форме

Для любого замкнутого контура любой электрической цепи можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значе-

ний. Предварительно необходимо выбрать положительные направления для токов в ветвях и направление обхода контура.

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0,$$

или в другой форме

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n e_k(t).$$

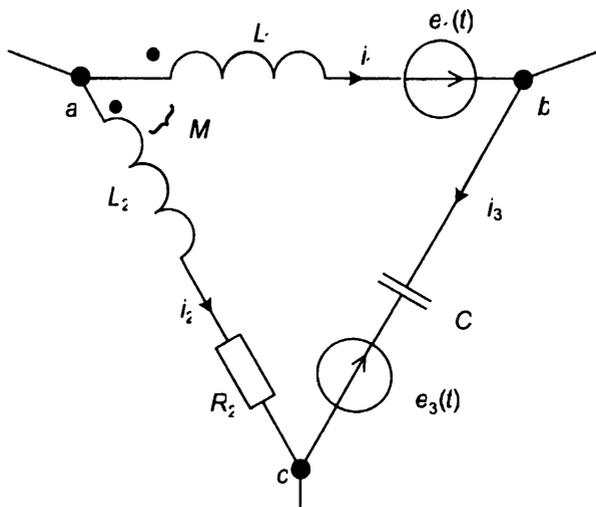


Рис. 5.6. Участок цепи в виде контура

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, изображенного на рис. 5.6. Контур обходим по часовой стрелке. Учтем, что индуктивности L_1 и L_2 связаны магнитно. При выбранных положительных направлениях токов i_1 и i_2 между L_1 и L_2 имеет место согласное включение.

Падение напряжения на L_1 равно $L_1(di_1/dt) + M(di_2/dt)$; на $L_2 - L(di_1/dt) + M(di_2/dt)$.

При составлении уравнения учтем, что начальное напряжение на конденсаторе равно $u_c(0_-)$. Пусть оно действует согласно с током i_3 . Начальное значение $i_1 = i_1(0)$; $i_2 = i_2(0)$.

В результате имеем

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^1 i_3 dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t). \quad (5.13)$$

Каждое из слагаемых уравнения (5.13) заменим операторным изображением:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 p I_1(p) - L_1 i_1(0); M \frac{di_2}{dt} = M p I_2(p) - M i_2(0); \frac{1}{C} \int_0^1 i_3 dt = I_3(p) / C p;$$

$$i_2 R_2 = I_2(p) R_2; L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 p I_2(p) - L_2 i_2(0); M \frac{di_1}{dt} = M p I_1(p) - M i_1(0);$$

$$e_1(t) = E_1(p); e_2(t) = E_2(p).$$

Подставив данные слагаемые в (5.13), объединим их с $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, перенесем в правую часть $u_c(0)/p$, $L_1 i_1(0)$ и другие внутренние ЭДС. В результате получим

$$I_1(p) Z_1(p) + I_2(p) Z_2(p) + I_3(p) Z_3(p) = E_1(p) - E_3(p) + E_{\text{вн}}(p), \quad (5.14)$$

где $Z_1(p) = p(L_1 - M)$; $Z_2(p) = p(M - L_2)$; $Z_3(p) = l/(Cp)$;

$$E(p) = (L_1 - M) i_1(0) + (M - L_2) i_2(0) - u_c(0)/p.$$

В более общем виде уравнение (5.14) можно записать так:

$$\sum_{k=1}^m U_k(p) = 0,$$

или

$$\Sigma I_k(p) Z_k(p) = \Sigma E_k(p), \quad (5.15)$$

где $U_k(p) = L[u_k(t)]$, $E_k(p) = L[e_k(t)]$.

Уравнение (5.15) представляет собой математическую запись второго закона Кирхгофа в операторной форме. В состав $E_k(p)$ в общем случае входят и внутренние ЭДС.

5.16. Составление уравнений для изображений путем использования методов, рассмотренных в третьей главе

Из уравнений, составленных по законам Кирхгофа для мгновенных значений, вытекают соответствующие уравнения для изображений.

Уравнения для изображений по форме аналогичны уравнениям, составленным для той же цепи с помощью символического метода для комплексов токов и напряжений.

Но если каждому уравнению для комплексов отвечает соответствующее уравнение для изображений, то все основанные на законах Кирхгофа приемы и методы составления уравнений (методы эквивалентного генератора, контурных токов, узловых потенциалов, наложения и т. п.) можно применить и при составлении уравнений для изображений.

При составлении уравнений для изображений ненулевые начальные условия учитывают путем введения «внутренних» ЭДС, обусловленных начальными токами через индуктивные элементы и начальными напряжениями на конденсаторах.

5.17. Последовательность расчета операторным методом

Расчет операторным методом состоит из двух основных этапов:

- 1) составления изображения искомой функции времени;
- 2) перехода от изображения к функции времени.

Это означает, что необходимо:

– представить исходные данные о параметрах всех элементов схемы цепи в операторной форме, т. е. представить, во-первых, ЭДС источников напряжения и токи источников тока, заданные мгновенными значениями $e(t)$ и $J(t)$, соответствующими изображениями $E(p)$ и $J(p)$ и, во-вторых, пассивные элементы – схемами замещения (см. рис. 5.5);

– для полученной схемы замещения в операторной форме составить и решить полную систему независимых уравнений по первому и второму законам Кирхгофа в операторной форме, т. е. найти изображение $F(p)$ искомой величины, например ток $I(p)$.

Кроме того, наиболее часто изображение имеет вид рациональной дроби $F(p) = [N(p)/M(p)]$, для которой обратным преобразованием нужно найти оригинал $f(t)$, например ток $i(t)$. Для этого можно воспользоваться теоремой разложения

$$f(t) = \sum [N(p_k)/M'(p_k)] e^{p_k t},$$

где $N(p)$ и $M'(p)$ – многочлены в числителе и знаменателе изображения $F(p)$,
 $M'(p)$ – производная многочлена $M(p)$ по p ;
 p_k – корни многочлена $M(p) = 0$ (предполагается, что корни простые).

При наличии кратных корней теорема разложения записывается в другой форме.

5.18. Переход от изображения к функции времени

В п. 5.17 указывалось, что вторым этапом расчета переходных процессов с помощью операторного метода является переход от изображения к функции времени. Эту операцию можно осуществить различными путями.

Первый путь состоит в применении формул соответствия между функциями оператора p и функциями времени t . Часть формул соответствия приведена в п. 5.15. В научной литературе имеются специальные исследования, содержащие большое число формул соответствия, охватывающих все возможные практические задачи. Формулами соответствия рекомендуется пользоваться в том случае, когда среди корней уравнения $M(p) = 0$ есть несколько одинаковых (кратные корни).

Второй путь состоит в применении так называемой формулы разложения. Формула разложения (см. п. 5.19) выведена исходя из предположения, что уравнение $M(p) = 0$ не имеет кратных корней (при наличии кратных корней формула разложения записывается иначе).

Третий путь – непосредственное применение формулы обратного преобразования Лапласа с использованием теории вычетов.

Формулой разложения широко пользуются на практике, и ее принято рассматривать как основную формулу для перехода от изображения к функции времени.

5.19. Разложение сложной дроби на простые

Из курса математики известно, что дробь

$$\frac{N(x)}{M(x)} = [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0] / [b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0]$$

при условии, что $n < m$ и полином $M(x) = 0$ не имеет кратных корней, может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$\frac{N(x)}{M(x)} = A_1 [1/(x - x_1)] + A_2 [1/(x - x_2)] + \dots + A_m [1/(x - x_m)],$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^m A_k \frac{1}{x - x_k}, \quad (5.16)$$

где x_k – корни уравнения $M(x) = 0$.

Для определения коэффициента A_1 умножим обе части уравнения (5.16) на $(x - x_1)$. В результате получим

$$\frac{N(x)}{M(x)}(x - x_1) = A_1 + (x - x_1) \sum_{k=1}^m A_k \frac{1}{x - x_k}. \quad (5.17)$$

Рассмотрим выражение (5.17) при $x \rightarrow x_1$. Правая часть уравнения равна A_1 , а левая представляет собой неопределенность, так как множитель $(x - x_1)$ при $x \rightarrow x_1$ равен нулю и знаменатель $M(x)$ при $x = x_1$ также равен нулю (x_1 есть корень уравнения $M(x) = 0$).

Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя. С этой целью производную от числителя разделим на производную от знаменателя и найдем предел дроби:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(x - x_1)N(x)}{M(x)} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{N(x) + (x - x_1)N'(x)}{M'(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)},$$

где $M'(x)$ – производная от $M(x)$ по x ;

$M'(x_1)$ – значение $M'(x)$ при $x = x_1$;

$N(x_1)$ – значение $N(x)$ при $x = x_1$.

Следовательно, из (5.17) при $x \rightarrow x_1$ получаем

$$N'(x)/M'(x) = A_1,$$

или

$$A_1 = N'(x)/M'(x).$$

Аналогично

$$A_k = N(x_k)/M'(x_k). \quad (5.18)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{M(x)} &= [N(x_1)/M'(x_1)][1/(x - x_1)] + [N(x_2)/M'(x_2)][1/(x - x_2)] + \\ &+ \dots [N(x_k)/M'(x_k)][1/(x - x_k)], \end{aligned}$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^m \frac{N(x_k)}{M'(x_k)} A_k \frac{1}{x - x_k}.$$

Пример

Найти коэффициенты разложения дроби $1/(x^2 + 5x + 6)$.

Решение

Корни уравнения $M(x) = 0$: $x_1 = -2, x_2 = -3$.

$M'(x) = 2x + 5$; $M'(x_1) = -2 \cdot 2 + 5 = +1$; $M'(x_2) = -1$; $N(x_1) = N(x_2) = 1$.

По формуле (5.18) $A_1 = N(x_1)/M'(x_1) = +1$, $A_2 = N(x_2)/M'(x_2) = -1$.

5.20. Изображение функции времени в виде отношения $N(x)/M(x)$ двух полиномов по степеням p

Для перехода от изображения $F(p)$ к функции времени $f(t)$ может быть использовано обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu-j\infty}^{\nu+j\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (5.19)$$

Функция $F(p)$ аналитична в области $Re(p > \nu)$ и стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$. При практическом использовании формулы (5.19) интеграл по бесконечной прямой, параллельной оси ординат, заменяют контурным интегралом, охватывающим все полюсы функции $F(p)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(p)e^{pt} dp. \quad (5.20)$$

Полюсами называют значения p , при которых $F(p)$ обращается в бесконечность. В том случае, когда $F(p) = N(p)/M(p)$, полюсами являются корни уравнения $M(p) = 0$. В теории функций комплексной переменной доказывается, что правая часть формулы (5.20) равна сумме вычетов (Res) подынтегральной функции во всех ее полюсах, т. е.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint F(p)e^{pt} dp = \sum \text{Res} F(p)e^{pt}.$$

Вычетом функции в некотором полюсе называют величину, на которую уменьшается разделенный на $2\pi j$ контурный интеграл от этой функции, когда контур при его стягивании пересечет данный полюс. Но вычет функции $[N(p)/M(p)]e^{-pt}$ в простом полюсе p_k равен $[N(p_k)/M'(p_k)]e^{-p_k t}$.

$$\text{Поэтому } f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p)}{M'(p)} e^{pt}.$$

5.21. Формула разложения

Переход от изображения $N(p)/M(p)$ к функции времени часто производят с помощью формулы

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (5.21)$$

которую называют *формулой разложения*.

Левая часть формулы (5.21) является функцией p , правая часть – соответствующей ей функцией времени t .

Вывод формулы (5.21) можно осуществить следующим образом. Пусть изображение какой-либо функции времени, например тока, имеет вид

$$f(p) = i(p) = N(p)/M(p).$$

Для получения тока как функции времени $i(t)$ представим сначала $N(p)/M(p)$ в виде суммы простых дробей, т. е. разложим $N(p)/M(p)$. С этой целью в формуле (5.16) заменим x на p :

$$f(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}. \quad (5.22)$$

Перейдем от изображения к оригиналу. Оригиналом левой части является $i(t)$. Оригинал правой части равен сумме оригиналов ее слагаемых. Учтем, что множители $N(p_k)/M'(p_k)$ у слагаемых суммы правой части формулы (5.22) есть постоянные числа (не функции p). Кроме того, функциями p в правой части являются только множители $1/(p - p_k)$; им соответствуют функции времени вида $e^{p_k t}$. Поэтому

$$i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (5.23)$$

Переход от изображения (функции p) к оригиналу (функции t) с помощью формулы разложения (5.23) основан на том, что изображение представлено в виде суммы простых дробей $[N(p_k)/M'(p_k)][1/(p - p_k)]$, а оригиналами их являются показательные функции $[N(p_k)/M'(p_k)] e^{p_k t}$.

Запишем формулу разложения при наличии кратных корней. Положим, что уравнение $M(p) = 0$ имеет q простых корней (p_1, p_2, \dots, p_q) , корень p_r кратности r и корень p_s кратности s .

Тогда

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^q \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t} + \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \frac{N(p)(p-p_r)^r e^{p t}}{M(p)} \Big|_{p=p_r} + \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \frac{N(p)(p-p_s)^r e^{p t}}{M(p)} \Big|_{p=p_s}. \quad (5.24)$$

Число слагаемых $[N(p_k)/M'(p_k)] e^{p_k t}$ равно числу корней уравнения $M(p) = 0$. Коэффициенты $N(p_k)/M'(p_k)$ можно сопоставить с постоянными интегрирования дифференциального уравнения (уравнений) цепи при использовании классического метода расчета.

Если среди корней уравнения $M(p) = 0$ есть нулевой корень ($p = 0$), то ему в правой части уравнения (5.24) соответствует слагаемое $[N(0)/M'(0)] e^{0t} = [N(0)/M'(0)]$. Слагаемое $N(0)/M'(p)$ представляет собой составляющую искомого тока (напряжения), обусловленную постоянными вынуждающими силами. Если постоянных вынуждающих сил в схеме нет, то $N(0)/M'(0) = 0$.

Важно сделать некоторые замечания к формуле (5.24).

Формула разложения применима при любых начальных условиях и при любых практически встречающихся формах напряжения источника ЭДС или тока, воздействующего на схему.

Если начальные условия не нулевые, то в состав $N(p)$ войдут внутренние ЭДС.

Если уравнение $M(p) = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни, то слагаемые, соответствующие им в формуле (5.24), оказываются также комплексно-сопряженными и в сумме дают действительное слагаемое.

Если воздействующая на схему ЭДС является синусоидальной: $E_m \sin(\omega t + \psi)$ и изображение ЭДС взято в виде $\dot{E}_m [1/p - j\omega]$, где комплексная амплитуда $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$, то при использовании формулы разложения из правой части ее для перехода от комплекса к мгновенному значению следует взять коэффициент при j (мнимую часть). В соответствии с этим внутренние ЭДС, которые появляются в правой части формулы разложения при ненулевых начальных условиях в цепях с синусоидальной ЭДС, должны быть умножены на коэффициент j . Только в этом случае наличие внутренних ЭДС будет учтено при взятии мнимой части из правой части формулы разложения. В цепях с постоянной ЭДС внутренние ЭДС умножать на j не нужно.

Если воздействующее на схему напряжение является синусоидальным, то принужденная составляющая решения входит в число слагаемых $\Sigma [N(p_k)/M'(p_k)] e^{p_k t}$ и определяется корнем $p = j\omega$. Вычисление принужден-

ной составляющей в виде члена этой суммы, соответствующего корню $p = j\omega$, для сложных схем в большинстве случаев более громоздко, чем непосредственное вычисление ее с помощью символического метода. Поэтому для сложных схем переменного тока принужденную составляющую рекомендуется вычислять символическим методом.

5.22. Расчет переходных процессов с помощью вычислительных машин

Токи i_L в индуктивных и напряжения u_C на емкостных элементах определяют энергию этих элементов, инерционность изменения которой при различного рода коммутациях вызывает переходный процесс в цепи. Совокупность токов i_L и напряжений u_C называется *переменными состояниями цепи*.

Различают два подхода при применении ЭВМ для расчета цепи. Первый подход предполагает универсальные программные средства, включая входной язык формирования системы уравнений цепи по ее топологии. Такие средства созданы в настоящее время, но их разработка и совершенствование требуют специальных знаний в области математики и программирования. Второй подход основан на численном решении систем уравнений цепи при помощи подпрограмм стандартного математического обеспечения ЭВМ. При этом расчетчик самостоятельно составляет систему уравнений в форме, необходимой для реализации подпрограмм. Для расчета стационарных режимов цепи это система уравнений в матричной форме, а для расчета переходных процессов – система дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния.

В последнем случае система уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и соотношения между током и напряжением для емкостных элементов, описывающая переходный процесс в цепи, преобразуется в систему уравнений, разрешенную относительно первых производных токов i_L и напряжений u_C :

$$\begin{cases} di_{L1}/dt = f_1(i_{L1}, \dots, i_{Lm}, u_{C1}, \dots, u_{Cn}, t), \\ \dots \\ di_{Lm}/dt = f_m(i_{L1}, \dots, i_{Lm}, u_{C1}, \dots, u_{Cn}, t), \\ du_{C1}/dt = f_{m+1}(i_{L1}, \dots, i_{Lm}, u_{C1}, \dots, u_{Cn}, t), \\ \dots \\ du_{Cm}/dt = f_{m+n}(i_{L1}, \dots, i_{Lm}, u_{C1}, \dots, u_{Cn}, t), \end{cases} \quad (5.25)$$

где m и n – число индуктивных и емкостных элементов с начальными значениями токов $i_L > (0)$ и напряжений $u_C(0)$.

Система уравнений (5.25) называется *системой уравнений в нормальной форме*. Для ее решения разработан ряд эффективных численных методов: метод Эйлера, метод Рунге–Кутты и др., входящие в современное стандартное математическое обеспечение ЭВМ.

Контрольные вопросы и задания

1. Охарактеризуйте этапы расчета операторным методом. Что означает прямое и обратное преобразование Лапласа?

2. В чем особенности расчета переходных процессов операторным методом при синусоидальном источнике?

3. Охарактеризуйте особенности расчета с ненулевыми начальными условиями.

4. Охарактеризуйте свойства единичной функции $1(t)$ и свойства дельта-функции $\delta(t)$.

5. Запишите известные Вам соотношения между $f(t)$ и $F(p)$, а также теоремы операторного метода и предельное соотношение.

6. Почему p называют комплексной величиной?

7. Приведите примеры преобразования элементов реальной схемы в эквивалентные элементы операторной схемы.

Глава 6. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Познакомимся с третьим методом расчета переходных процессов в линейных электрических цепях – расчетом с помощью интеграла Дюамеля.

При использовании интеграла Дюамеля переменную, по которой производится интегрирование, обозначим τ , а под t по-прежнему будем понимать тот момент времени, в который требуется найти ток в цепи. Пусть к цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени $t = 0$ подключается напряжение $u(\tau)$ (рис. 6.1).

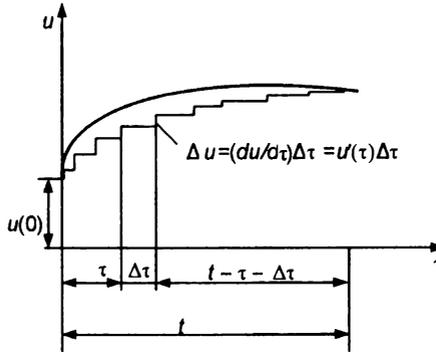


Рис. 6.1. Кривая скачка напряжения

Для того чтобы найти ток в цепи в момент времени t , заменим плавную кривую ступенчатой и просуммируем напряжения от начального напряжения $u(0)$ и от всех ступенек напряжения, вступающих в действие с запозданием во времени.

Напряжение $u(0)$ в момент времени t вызовет в цепи ток $u(0)g(0)$, где $g(0)$ – переходная проводимость. В момент времени $\tau + \Delta\tau$ (см. рис. 6.1) возникает скачок напряжения $\Delta u \approx (du/d\tau)\Delta\tau = u'(\tau)\Delta\tau$.

Для того чтобы найти составляющую тока в момент времени t , вызываемую этим скачком напряжения Δu , необходимо $u'(\tau)\Delta\tau$ умножить на значение переходной проводимости с учетом времени действия скачка до момента времени t . Из рис. 6.1 видно, что это время равно $t - \tau - \Delta\tau$. Следовательно, приращение напряжения от скачка составляет $u'(\tau)g(t - \tau - \Delta\tau)\Delta\tau$.

Полный ток в момент времени t получим, если просуммируем все частичные токи от отдельных скачков и прибавим их к току $u(0)g(0)$:

$$i(t) = u(0)g(t) + \sum u'(\tau)g(t - \tau - \Delta\tau)\Delta\tau.$$

Число членов суммы равно числу ступенек напряжения. Очевидно, что ступенчатая кривая тем лучше заменяет плавную кривую, чем больше число ступенек. С этой целью заменим конечный интервал времени Δt на бесконечно малый dt и перейдем от суммы к интегралу:

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^1 u'(\tau)g(1-\tau)d\tau. \quad (6.1)$$

Формулу (6.1) называют *интегралом Дюамеля*.

С помощью интеграла Дюамеля можно найти не только ток, но и любую другую физическую величину, например напряжение. В этом случае в формулу вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция $h(t)$, если на входе цепи действует источник ЭДС (напряжения), и переходное сопротивление $R(t)$, если на входе цепи действует источник тока.

6.1. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля

Расчет с помощью интеграла Дюамеля проводят в четыре этапа:

- 1) определение переходной проводимости $g(t)$ (переходной функции $h(t)$) для исследуемой цепи;
- 2) нахождение $g(t-\tau)$, $h(t-\tau)$. С этой целью в формуле для $g(t)$, $h(t)$ заменяют t на $(t-\tau)$;
- 3) определение $u'(\tau)$. Для этого находят производную от заданного напряжения $u(t)$ по времени t и в полученном выражении заменяют t на τ ;
- 4) подстановка найденных на этапах 1–3 функций в формулу (6.1), интегрирование по переменной τ и подстановка пределов.

6.2. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напряжения

Пусть напряжение $u(t)$ изменяется во времени по сложному закону, например в соответствии с рис. 6.2. Начальное напряжение равно $u(0)$. В интервале от $t = 0$ до $t = t_1$ напряжение плавно растёт, и закон его изменения – $u_1(t)$. В момент $t = t_1$ оно меняется скачком от u_a до u_b , а затем снова изменяется, но уже по другому закону – $u_2(t)$. При $t = t_2$ напряжение скачком уменьшается от u_c до нуля.

Требуется найти ток в каждом из трех интервалов времени. Под первым интервалом будем понимать интервал времени от $t = 0$ до $t = t_1$ (не включая

скачка напряжения от u_a до u_b); под вторым – от t_1 до t_2 , включая скачок от u_a до u_b , но не включая скачок от u_c до 0; под третьим – интервал времени от t_2 до ∞ , включая скачок от u_c до 0.

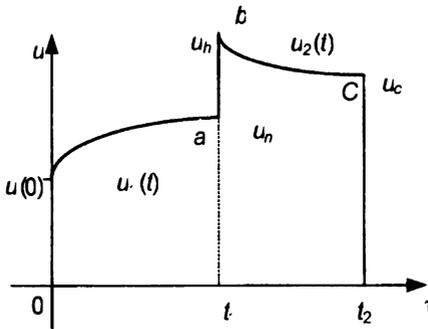


Рис. 6.2. График изменения напряжения

Интегрирование по-прежнему проводим по τ , понимая под t фиксированный момент времени, в который требуется найти ток. На основании принципа наложения ток в любой момент времени t определится как сумма токов от всех напряжений, воздействовавших на цепь до момента t .

В первый интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u_1'(\tau)g(1 - \tau)d\tau.$$

Во второй интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)g(1 - \tau)d\tau + (u_b - u_a)g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)g(1 - \tau)d\tau,$$

где слагаемое $(u_b - u_a)g(t - t_1)$ обусловлено скачком напряжения от u_a до u_b в момент времени t_1 .

В третий интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)g(1 - \tau)d\tau + (u_b - u_a)g(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)g(1 - \tau)d\tau + (0 - u_c)g(1 - \tau).$$

6.3. Сравнение различных методов расчета переходных процессов

Классический и операторный методы расчета теоретически можно применять для решения задач любой сложности. Каким из них пользоваться, во многом зависит от навыка и привычки. Однако классический метод физически более прозрачен, чем операторный, в котором решение уравнений во многом формализовано.

Если при сравнении методов исходить из объема вычислительной работы, то решение уравнений первого, второго, а иногда и третьего порядков для источников постоянной (синусоидальной) ЭДС или тока целесообразно проводить классическим методом, а решение уравнений более высоких порядков – операторным. Объясняется это тем, что, чем выше порядок характеристического уравнения, тем более громоздкой и трудоемкой оказывается операция нахождения постоянных интегрирования при использовании классического метода. Операторный метод имеет перед классическим явное преимущество при решении задач, в которых определение принужденной компоненты искомой величины оказывается затруднительным вследствие сложного характера вынуждающей силы, а также при решении уравнений в частных производных. Если воздействующее напряжение изменяется во времени, например линейно или в виде всплеска одной или нескольких экспонент, рекомендуется применять операторный метод или интеграл Дюамеля. Но основной областью применения интеграла Дюамеля являются случаи, когда напряжение изменяется по сложному закону во времени, например при наличии скачков напряжения, или когда переходная проводимость $g(t)$ и (или) воздействующее на схему напряжение заданы графически (в последнем случае интеграл Дюамеля берется путем численного интегрирования).

Классический и операторный методы, а также метод пространства состояний в аналитической форме и интеграл Дюамеля имеют общий недостаток: необходимость определения всех корней характеристического уравнения, что для уравнений высоких степеней (например, 5, 6, 7-й и т. д.) требует много времени.

Контрольные вопросы и задания

1. Охарактеризуйте расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля.
2. Поясните принцип работы интегрирующих и дифференцирующих цепей.
3. Охарактеризуйте сильные и слабые стороны известных Вам методов расчета переходных процессов.

Глава 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИЧЕСКИХ И ДРУГИХ СИСТЕМ

Разработка новых сложных механических, гидравлических и других систем связана со значительными трудностями, состоящими в том, что нет гарантии получения требуемых расчетных величин и нет возможности провести экспериментальные исследования системы, поскольку она не выполнена в натуре. Поэтому при разработке той или иной системы прибегают к созданию ее физической модели. Результаты исследования модели позволяют выявить действительные характеристики и дать рекомендации для корректировки параметров системы с целью получения оптимальных характеристик. Наиболее простыми и универсальными моделями для исследования как стационарных, так и переходных режимов механических и других систем являются электрические модели, представляющие собой электрические цепи с резистивными, емкостными и индуктивными элементами, в которых аналогами исследуемых величин являются ток, напряжение, индуктивность и емкость. Выполнение электрической модели и проведение ее исследования не связано с какими-либо техническими трудностями и не требует значительных затрат. Создание же механической модели связано со значительными трудностями и капитальными затратами.

Электрическая модель будет соответствовать реальной системе, если математическое описание модели и системы одинаковое.

Рассмотрим электрическую модель механической системы, изображенной на рис. 7.1. Механическая система состоит из тела 2 с массой m , пружины 1 и воздушного демпфера 3, состоящего из поршня, расположенного в цилиндре. Допустим, тело 2 удерживалось в неподвижном состоянии внешней силой, когда пружина 1 была ненапряженной. После удаления внешней силы под действием силы тяжести система придет в движение. Тело начнет опускаться, пружина – растягиваться, появится демпфирующая сила демпфера. Возникнет переходный процесс, который постепенно затухнет, и система снова окажется в неподвижном состоянии. Электрической моделью рассмотренной механической системы является электрическая цепь с резистивным, индуктивным и емкостным элементами, изображенная на рис. 7.2, так как дифференциальное уравнение переходного процесса этой цепи при подключении ее к источнику с постоян-

ным напряжением аналогично дифференциальному уравнению переходного процесса механической системы.

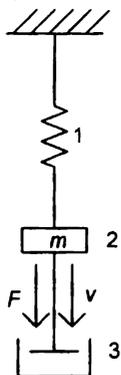


Рис. 7.1. Механическая система

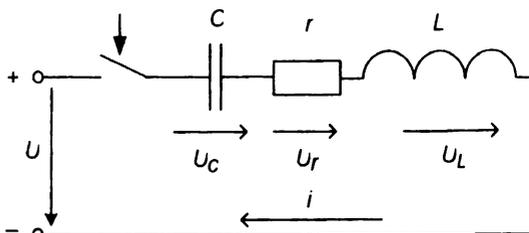


Рис. 7.2. Электрическая модель механической системы

Уравнение движения механической системы имеет вид

$$F - F_1 - F_2 = m(dv/dt),$$

где F – сила тяжести массы;

$F_1 = k_1x$ – упругая сила пружины;

$F_2 = k_2v$ – сила, развиваемая демпфером;

x – перемещение тела от начального положения;

v – скорость тела.

Таким образом, для механической системы

$$F = k_1x + k_2v + m(dv/dt). \quad (7.1)$$

Уравнение переходного процесса электрической цепи имеет вид

$$U = u_c + u_r + u_L = \frac{1}{C} \int i dt + ir + L(di/dt). \quad (7.2)$$

Из сравнения уравнений (7.1) и (7.2) следует, что напряжение U , приложенное к цепи, является аналогом силы F , приложенной к механической системе, напряжение u_c на емкости – аналогом силы, развиваемой пружиной, ток i цепи – аналогом скорости v , u_r – аналогом силы, возникающей в демпфере, индуктивность L – аналогом массы тела m .

Таким образом, благодаря единству уравнений электрической цепи и механической системы исследование явлений в механической системе может быть произведено с помощью исследования переходных процессов электрической цепи. Характер переходного процесса механической системы, так же как и ее электрической модели, может быть аperiodическим или колебательным. В механической системе он определяется соотношением массы тела, упругости пружины и демпфирующей силы демпфера, в электрической модели, как это доказано ранее, – соотношением параметров цепи r, L, C .

Результаты решения уравнения электрической цепи будут отображать характер и длительность переходного процесса механической системы, если соблюдены соответствующие соотношения между параметрами механической системы и ее моделью – электрической цепью. Соотношения устанавливаются посредством масштабных коэффициентов. Значения и размерность масштабных коэффициентов можно установить, если разделить почленно уравнение (7.1) на уравнение (7.2).

В результате получим

$$\frac{U}{F} = m_F B/H; \quad \frac{u_c}{k_1 x} = m_F B/H;$$

$$\frac{r i}{k_2 v} = m_{k2} m_v \text{ Ом} \cdot \text{м}/(\text{Н} \cdot \text{с}) \text{А} \cdot \text{с}/\text{м} = \text{В}/\text{Н};$$

$$[L(di/dt)/m dv/dt] = m_m m_{dv/dt} \text{ Гн} \cdot \text{м}/(\text{Н} \cdot \text{с}) \cdot \text{А} \cdot \text{с}^2/(\text{с} - \text{м}) = \text{В}/\text{Н}.$$

Выразив в уравнении (7.2) соответствующие величины через масштабные коэффициенты, получим уравнение электрической цепи с учетом масштабных коэффициентов

$$U/m_F = (u_c/m_F) + (r i/m_{k2} m_v) + [L(di/dt)/m_m m_{dv/dt}].$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое электрическое моделирование переходных процессов механических и других систем?

2. Какими преимуществами обладает электрическая модель перед реальным оборудованием?

Заключение

Данное пособие предназначено для изучения раздела «Переходные процессы в линейных электрических цепях» дисциплины «Теоретические основы электротехники» студентами вузов, осуществляющих подготовку педагогов и инженеров по электротехническим направлениям. Пособие может быть также использовано в целях углубленного изучения дисциплин «Электротехника и электроника» и «Электрические цепи и сигналы».

В пособии представлены основные сведения о переходных процессах, происходящих в цепях, даны определения изображения переходных процессов в виде дифференциальных уравнений, рассмотрены основные принципы классического метода расчета цепей, операторного метода расчета, типы периодических процессов в цепях, переходные процессы в цепях с одним последовательным и смешанным соединением реактивных элементов, цепях с двумя реактивными элементами.

Данное пособие служит теоретической базой при изучении специальных дисциплин электротехнического направления.

Список рекомендуемой литературы

Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учеб. для электротехн., энергет., приборостроит. спец. вузов / Л. А. Бессонов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2003. 612 с.: ил.

Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле [Текст]: учеб. для электротехн., энергет., приборостроит. спец. вузов / Л. А. Бессонов. 9-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2002. 638 с.: ил.

Демирчян К. С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей [Текст]: учеб. пособие для электромех. и электроэнергет. спец. вузов / К. С. Демирчян, П. А. Бутырин. М.: Высш. шк., 1988. 335 с.: ил.

Комплексный метод расчета электрических цепей [Текст]: метод. указания / сост. Г. Б. Голубов; Урал. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 1994. 84 с.

Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники [Текст]: учеб. для вузов: в 2 т. / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 416 с.

Расчет линейных электрических цепей при переменном токе и построение векторных диаграмм [Текст]: метод. указания / сост. Г. Б. Голубов; Свердлов. инж.-пед. ин-т. Свердловск, 1988. 104 с.

Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники [Текст]: учеб. пособие для вузов / под ред. П. А. Ионкина. М.: Энергоиздат, 1982. 786 с.: ил.

Сборник задач по теоретическим основам электротехники [Текст]: учеб. пособие для энергет. и приборостроит. спец. вузов / Л. А. Бессонов [и др.]; под ред. Л. А. Бессонова. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1988. 543 с.: ил.

Расчетно-графическая работа по теме «Переходный процесс в разветвленной цепи»

Классический метод расчета

При использовании классического метода расчета выполнение работы включает следующие этапы:

1. Цель работы. Практическое применение классического метода расчета переходных процессов в линейных электрических цепях.

2. Содержание работы. Рассчитать переходный процесс классическим методом при наличии в цепи источника постоянной ЭДС. Вычислить и построить в интервале времени $t = 0 \dots 3\tau$ графики зависимостей $u_c(t)$, $i_L(t)$, $u_L(t)$ (τ – постоянная времени цепи).

Рассчитать переходный процесс классическим методом, заменив в цепи источник постоянной ЭДС источником переменной ЭДС вида $e = E_m \sin(\omega t + \varphi)$, где E_m – амплитуда ЭДС. Найти закон изменения входного тока после коммутации.

Рекомендации:

1) Зарисовать расчетную схему замещения и записать исходные данные для расчета.

2) Составить дифференциальные уравнения, описывающие состояние цепи после коммутации (после переключения).

3. Расчет докоммутационного режима (при $t = 0$). В случае применения источника постоянной ЭДС E при известных свойствах индуктивности и емкости, когда $\omega = 0$, сопротивление индуктивности принимается равным нулю ($X_L = 0$), а сопротивление емкости – равным бесконечности ($X_C = \infty$). При расчете мысленно закорачивают индуктивность в ветви, содержащей данный элемент, и разрывают ветвь, содержащую емкость. После чего выполняют расчет по известным законам, применяемым к цепям с постоянной ЭДС ($i_c = 0$, $u_L = 0$).

4. Запись основных начальных условий для времени $t = 0$: $i_L(0_-) = i_L(0_+)$; $u_c(0_-) = u_c(0_+)$ в соответствии с законами коммутации.

5. Расчет неосновных начальных условий (при $t = 0_+$). К неосновным начальным условиям относятся значения токов и напряжений, не связанных с законом коммутации. Их величина определяется из решения дифференциальных уравнений, записанных для данного момента времени.

6. Расчет значений токов и напряжений в установившемся (принужденном) режиме (при $t = \infty$). Для постоянной ЭДС в этот период все производные по току и напряжению равны нулю.

7. Составление характеристического уравнения для свободной составляющей и определение его корней. Здесь возможны 3 варианта:

1) находят общий определитель системы и приравнивают его значение к нулю ($\Delta = 0$);

2) заменяют производную неизвестную величину на p , а вторую производную – на p^2 ;

3) определяют комплекс входного сопротивления цепи относительно зажимов источника с последующей заменой функции $j\omega$ на p .

8. Для принятия решения о выборе одного из вариантов решения в виде уравнения рассмотрение характера найденного решения. В общем виде корни характеристического уравнения записываются в виде $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, где δ^2 – коэффициент при p ; ω_0^2 – коэффициент свободного члена уравнения. Возможны три варианта нахождения корней:

1) Корни p_1 и p_2 – действительные, отрицательные и разные, если $\delta^2 > \omega_0^2$. Свободная составляющая имеет аperiodический характер изменения и описывается уравнением вида $x_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

2) Корни p_1 и p_2 – действительные, отрицательные и равные, если $\delta^2 = \omega_0^2$. Свободная составляющая имеет аperiodический характер изменения и описывается уравнением, рассмотренным в первом варианте.

3) Корни p_1 и p_2 – комплексные сопряженные. Свободная составляющая $x_{св}$ имеет периодический затухающий характер и описывается уравнением $x_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \beta)$, где A и β – постоянные интегрирования; ω' – угловая частота свободных колебаний: $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

9. Запись общего вида дифференциального уравнения и расчет постоянных интегрирования (A_1 и A_2). Например, решение относительно u_c : $u_c = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

Когда число неизвестных более одного (A_1), то для нахождения коэффициентов необходимо число уравнений, равное числу неизвестных. В этом случае составляют систему уравнений, состоящую из найденного характеристического уравнения и уравнения для производной, взятой от этого уравнения. Затем решают систему относительно коэффициентов. Значения коэффициентов определяют, используя начальные условия (принимают $t = 0_+$ и подставляют значения, например u_c , в уравнение общего вида).

10. Проверка решения для начальных и установившихся моментов времени, например определение напряжения u_c для случая $u_c(0_+)$ (момент времени $t = 0_+$ и $t = \infty$).

11. Оформление графического представления решения. Прежде всего полагаем, что переходный процесс длится $t_{перех} = (3 - 5)\tau$, т. е. времен-

ной отрезок, на котором строится график, выбирается в этих пределах; $\tau = 1/p$ для аperiodических процессов и $\tau = 1/\delta$ для затухающего периодического процесса свободной составляющей. В интервале $0 - 5\tau$ выбирают 10–15 временных точек. Для каждой точки определяется по найденному уравнению значение функции. Все функции переносятся на плоскость с декартовой системой координат $f = f(t)$.

Особенности расчета при синусоидальном источнике: расчет установившейся составляющей ведут по методике с представлением величин в комплексном виде (символический метод) и обратным переходом к действительным числам. Аналогичный подход применяют и при расчете свободной составляющей.

Особенности расчета переходных процессов при синусоидальном источнике питания

Для расчета значений токов и напряжений в режимах до коммутации и в установившемся режиме применяют символический метод (метод комплексов).

Порядок расчета:

1. Если принять источник ЭДС в виде $e = E_m \sin(\omega t + 10^\circ)$, то комплекс этой ЭДС можно представить как $E_m = E_m e^{j10^\circ}$. Аналогично переводим все элементы схемы в комплексный вид.

2. Из элементов строим эквивалентную схему.

3. Для докоммутационной цепи записываем входное сопротивление

$$Z_{вх} = (R_2 j\omega C) / (R_2 + j\omega C).$$

4. Определяем ток в неразветвленной ветви $i = i_c + i_{R_2}$ в виде комплексов: $I_L = I_c + I_{R_2} = E_m / Z_{вх}$.

5. Определяем ток через конденсатор и сопротивление:

$$I_c = E_m / j\omega C; I_{R_2} = E_m / R_2.$$

6. Выполняем обратное преобразование из комплексов в действительные значения:

$$i_c = (E_m / \omega C) \sin(\omega t - 80^\circ);$$

$$i_{R_2} = (E_m / R_2) \sin(\omega t + 10^\circ);$$

$$u_c = u_{R_2} = E_m \sin(\omega t + 10^\circ);$$

$$i_L = 0, u_L = 0.$$

7. Представляем эквивалентную схему после коммутации в виде комплексов:

$$Z_{\text{вх. пр}} = [(R_2 \cdot (1/j\omega C))/(R_2 + 1/j\omega C)] + R_1 + j\omega L.$$

8. Определяем по аналогичной методике установившиеся значения токов и напряжений:

$$I_L = I_c + I_{R_2} = E_m/Z_{\text{вх}};$$

$$U_c = I_L[(R_2 \cdot (1/j\omega C))/(R_2 + 1/j\omega C)] = U_{R_2};$$

$$U_L = I_L j\omega L;$$

$$I_c = U_c j\omega C;$$

$$I_{R_2} = U_{R_2}/R_2.$$

9. Выполняем обратный переход к действительным величинам.

10. На основании решения системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа, записываем уравнение с одним неизвестным, заменив E на $e(t)$:

$$e(t) = LC(d^2 u_c/dt^2) + [(L + R_1 R_2 C)/R_2](du_c/dt) + [(R_1 + R_2)/R_2]u_c.$$

11. Записываем характеристическое уравнение, приравняв $e(t)$ к нулю.

Далее расчет выполняется аналогично расчету при использовании классического метода с постоянной составляющей.

Операторный метод расчета переходных процессов

Для цепи операторного изображения расчетной схемы составляются дифференциальные уравнения по законам Кирхгофа либо по методу контурных токов (или любому известному методу расчета). От дифференциальных уравнений переходят к операторной форме записи с учетом основных начальных условий. Решают эти уравнения совместно. Находят изображения искомых токов и напряжений. Начальным этапом расчета является изображение схемы замещения новой эквивалентной схемой, выраженной через изображения отдельных элементов.

Из теоретического курса известно, что изображением постоянной ЭДС является функция $F(p) = E/p$; изображением индуктивного сопротивления – $X_L(p) = pL$; изображением емкостного сопротивления – $X_C(p) = 1/pC$.

При наличии ненулевых начальных условий источник, учитывающий $u_c(0_-)$, изображается как $U_c(0_-)_{t=0} = U_c(0_-)/p$.

Ток через индуктивность $i_L(0_-)$ изображается как $i_L(0_-)L$.

Производят расчет и после этого осуществляют переход от полученных изображений неизвестных величин обратно к оригиналам (по теореме разложения или с применением таблиц).

Затем приступают к графическому представлению решения по ранее рассмотренной методике.

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 3 |
| Глава 1. Общие сведения о переходных процессах | 4 |
| 1.1. Определение переходных процессов..... | 4 |
| 1.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами | 5 |
| 1.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений | 6 |
| 1.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивную катушку и скачка напряжения на конденсаторе..... | 9 |
| Контрольные вопросы и задания | 10 |
| Глава 2. Основные положения теории переходных процессов..... | 11 |
| 2.1. Первый закон (правило) коммутации..... | 11 |
| 2.2. Второй закон (правило) коммутации..... | 12 |
| 2.3. Начальные значения величин..... | 12 |
| 2.4. Независимые и зависимые (послекоммутационные) начальные значения..... | 13 |
| 2.5. Основные и неосновные зависимые начальные значения | 13 |
| 2.6. Нулевые и ненулевые начальные условия | 14 |
| 2.7. Расчетные методы. Классический метод расчета | 14 |
| Контрольные вопросы и задания | 15 |
| Глава 3. Уравнения для электрических цепей в переходном состоянии..... | 16 |
| 3.1. Составление уравнений для свободных токов и напряжений | 16 |
| 3.2. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов..... | 17 |
| 3.3. Составление характеристического уравнения системы | 18 |
| 3.4. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе | 19 |
| 3.5. Определение степени характеристического уравнения | 21 |
| 3.6. Свойства корней характеристического уравнения | 23 |
| 3.7. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений | 24 |
| 3.8. Характер свободного процесса при одном корне | 25 |
| 3.9. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях | 25 |
| 3.10. Характер свободного процесса при двух равных корнях | 26 |

| | |
|--|-----------|
| 3.11. Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях | 27 |
| 3.12. Некоторые особенности переходных процессов..... | 28 |
| 3.13. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивные катушки..... | 29 |
| 3.14. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях..... | 31 |
| Контрольные вопросы и задания | 32 |
| Глава 4. Классический метод расчета | 33 |
| 4.1. Определение классического метода расчета переходных процессов | 33 |
| 4.2. Переходные процессы в цепи с одним накопителем энергии | 33 |
| 4.2.1. Подключение источника постоянной ЭДС к неразветвленной цепи с резистивным и индуктивным элементами..... | 34 |
| 4.2.2. Короткое замыкание катушки индуктивности с током | 39 |
| 4.2.3. Размыкание цепи с катушкой индуктивности | 41 |
| 4.2.4. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним емкостным элементом | 43 |
| 4.2.4.1. Зарядка емкостного элемента от источника постоянной ЭДС через резистивный элемент | 43 |
| 4.2.4.2. Разрядка емкостного элемента через резистивный элемент..... | 45 |
| 4.2.4.3. Разрядка емкостного элемента в цепи с резистивным и индуктивным элементами..... | 47 |
| 4.3. Определение постоянных интегрирования при использовании классического метода..... | 48 |
| 4.4. Процессы зарядки и разрядки | 51 |
| 4.4.1. Аперриодический процесс разрядки..... | 51 |
| 4.4.2. Граничный процесс разрядки | 52 |
| 4.4.3. Колебательный процесс разрядки..... | 52 |
| 4.5. Подключение неразветвленной цепи с индуктивным, резистивным и емкостным элементами к источнику ЭДС..... | 54 |
| 4.6. Подключение неразветвленной цепи с индуктивным и резистивным элементами к источнику синусоидальной ЭДС..... | 56 |
| Контрольные вопросы и задания | 59 |
| Глава 5. Операторный метод расчета переходных процессов | 60 |
| 5.1. Логарифм как изображение числа | 60 |
| 5.2. Комплексные изображения синусоидальных функций..... | 60 |
| 5.3. Введение в операторный метод..... | 61 |

| | |
|--|-----------|
| 5.4. Преобразование Лапласа..... | 61 |
| 5.5. Изображение постоянной | 62 |
| 5.6. Изображение показательной функции e^{at} | 62 |
| 5.7. Изображение первой производной | 64 |
| 5.8. Изображение второй производной | 65 |
| 5.9. Изображение интеграла | 65 |
| 5.10. Изображение напряжения на индуктивном элементе | 66 |
| 5.11. Изображение напряжения на конденсаторе..... | 67 |
| 5.12. Некоторые теоремы и предельные соотношения..... | 68 |
| 5.13. Закон Ома в операторной форме..... | 70 |
| 5.14. Первый закон Кирхгофа в операторной форме..... | 72 |
| 5.15. Второй закон Кирхгофа в операторной форме..... | 72 |
| 5.16. Составление уравнений для изображений путем использова- ния методов, рассмотренных в третьей главе..... | 74 |
| 5.17. Последовательность расчета операторным методом..... | 75 |
| 5.18. Переход от изображения к функции времени | 76 |
| 5.19. Разложение сложной дроби на простые..... | 76 |
| 5.20. Изображение функции времени в виде отношения $N(x)/M(x)$ двух полиномов по степеням p | 78 |
| 5.21. Формула разложения..... | 79 |
| 5.22. Расчет переходных процессов с помощью вычислительных машин..... | 81 |
| Контрольные вопросы и задания | 82 |
| Глава 6. Интеграл Дюамеля | 83 |
| 6.1. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля | 84 |
| 6.2. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напря- жения..... | 84 |
| 6.3. Сравнение различных методов расчета переходных процессов | 86 |
| Контрольные вопросы и задания | 86 |
| Глава 7. Электрическое моделирование переходных процессов ме- ханических и других систем | 87 |
| Контрольные вопросы и задания | 89 |
| Заключение..... | 90 |
| Список рекомендуемой литературы..... | 91 |
| Приложение. Расчетно-графическая работа по теме «Переходный процесс в разветвленной цепи» | 92 |

Учебное издание

Клюшников Олег Иванович
Степанов Александр Валерьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 4

Переходные процессы в линейных электрических цепях

Учебное пособие

Редактор Е. А. Ушакова
Компьютерная верстка Е. С. Кузнецовой

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 12.04.10. Формат 60×84/16. Бумага для множ. аппаратов.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 200 экз. Заказ № 1016.
Издательство ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет». Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

Отпечатано в ООО "ТРИКС". Свердловская область, г. Верхняя Пышма, ул. Феофанова,

