

как объекты регулирования проявляют нелинейные статические и динамические свойства, поэтому применять линейный математический аппарат для их моделирования не всегда корректно. Автоматическое регулирование таких процессов с использованием традиционных законов регулирования по отклонению невозможно, так как система находится за границей устойчивости по частоте возмущающих воздействий и быстродействия. Эффект действующих неконтролируемых возмущений соизмерим по абсолютной величине с управляющими (контролируемыми) воздействиями, а по частоте превышает на порядок, следовательно, оказывает большое влияние на устойчивость САР. Проведенные и опубликованные ранее исследования показывают, что динамика неконтролируемых возмущений для условий работы доменной печи может быть описана моделью звена чистого запаздывания и апериодического звена первого порядка (или безынерционного звена). Оценка динамических характеристик требует уточнения и проведения дополнительных исследований.

Таким образом, задача управления инерционными металлургическими процессами, а, следовательно, и обеспечения устойчивости замкнутой САР включает в себя прогноз влияния контролируемых возмущений, оперативное выявление эффекта действующих возмущений и с учетом динамики процесса выбор управляющих воздействий регулированием по возмущению. Этим требованиям отвечает метод натурно-математического моделирования с использованием ЭВМ, работающей в темпе с процессом.

А. Б. Чуркин,
Б. С. Чуркин

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК

Математическую модель затвердевания отливок можно неявно записать в виде краевой задачи теплообмена в системе "отливка-форма-окружающая среда". Для тел классических конфигураций данная краевая задача сводится к следующей системе уравнений:

$$\frac{dH_1}{dn} = \frac{d^2U_1}{d\Psi^2} + \frac{K}{\Psi} \cdot \frac{dU_1}{d\Psi}, \quad 0 < \Psi < \frac{1}{2}; \quad (1)$$

$$\frac{dH_2}{dn} = \frac{d^2 U_2}{d\psi^2} + \frac{K}{\psi} \cdot \frac{dU_2}{d\psi}, \quad \frac{1}{2} < \psi < \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2R}; \quad (2)$$

$$\left(\frac{dU_1}{d\psi} \right)_{\psi=0} = 0; \quad (3)$$

$$\left(\frac{dU_1}{d\psi} \right)_{\psi=0,5} = -2R\alpha_1 \left(T \left(\psi = \frac{1}{2} \right) - T_2 \left(\psi = \frac{1}{2} \right) \right); \quad (4)$$

$$\left(\frac{dU_2}{d\psi} \right)_{\psi=\frac{1}{2}} = -2\alpha R \left(T_1 \left(\psi = \frac{1}{2} \right) - T_2 \left(\psi = 0 \right) \right); \quad (5)$$

$$\left(\frac{dU_2}{d\psi} \right)_{\psi=\frac{1}{2} + \frac{\delta\psi}{2R}} = -2\alpha R P \left(T_2 \left(\psi = \frac{1}{2} + \frac{\delta\psi}{2R} \right) - T_{BH} \right); \quad (6)$$

$$H_1 = \int_0^{T_1} C_1(T) p_1(T) dT; \quad (7)$$

$$U_1 = \int_0^{T_1} \lambda_1(T) dT; \quad (8)$$

$$H_2 = \int_0^{T_2} C_2(T) p_2(T) dT; \quad (9)$$

$$U_2 = \int_0^{T_2} \lambda_2(T) dT; \quad (10)$$

$$n = t/(4R^2); \quad \psi = r/2R; \quad (11)$$

$$T_1(n=0) = T_{10}; \quad (12)$$

$$T_2(n) = T_{20}, \quad (13)$$

где $T_1(\Psi, n)$ и $T_2(\Psi, n)$ - соответственно температуры отливки и формы;
 $C_1(T), \rho_1(T), \lambda_1(T)$ - удельная эффективная теплоемкость сплава, его плотность и теплопроводность как функция температуры;

$C_2(T), \rho_2(T), \lambda_2(T)$ - удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность материала формы;

K - коэффициент, зависящий от конфигурации отливки (для плоской плиты $K = 0$, для шара $K = 2$ и для цилиндра $K = 1$);

α_1 - коэффициент теплопередачи, на границе "отливка-форма";

α_2 - коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы;

R - половина толщины стенки, или радиус отливки;

$P = S_{\text{ФР}} / S_{\text{Ф}}$ - коэффициент, равный отношению площади $S_{\text{ФР}}$ охлаждения стенки формы с учетом ее обрешетки к площади наружной поверхности формы без учета ребер или штырей;

$T_{\text{ВН}}$ - температура окружающей среды;

T_{10} и T_{20} - температура сплава непосредственно после его заливки в форму и температура стенки формы в начале затвердевания очередной отливки.

Анализ системы (1)-(13) показывает, что ее решения являются функцией переменных Ψ и n , а также параметров $2\alpha_2 R, P, \delta_{\text{Ф}}/2R, T_{10}, T_{20}, T_{\text{ВН}}, \lambda_2(T), C_2(T), \rho_2(T), C_1(T), \rho_1(T), \lambda_1(T)$.

Система (1)-(13) определяет первый этап теплового цикла кокиля. После затвердевания и выдержки отливки в форме в течение времени t отливка извлекается из формы и полуформы разводятся. Далее происходит естественное охлаждение стенок формы на воздухе в течение времени $t_{\text{вд}}$, определяемого принятым темпом работы кокильной машины. Затем полуформы смыкаются и начинается новый цикл.

Математическая модель второго этапа описывается следующей системой уравнений:

$$d T_{20} / d n = a_2 (d^2 T_2 / d \psi^2 + \kappa / \psi \cdot d T_2 / d \psi);$$

$$(d T_2 / d \psi)_{\psi=0,5 + \delta \psi / 2 R} = - \frac{2 a_2 P R}{\lambda_2} (T_2(\psi=0,5 + \delta \psi / 2 R) - T_{ВН});$$

$$(d T_2 / d \psi)_{\psi=1/2} = \frac{2 a_5 R}{\lambda_2} (T_2(\psi=1/2) - T_{ВН});$$

$$a_5 = 1 / (\delta_{КР} / \lambda_{КР} + 1 / a_2),$$

где $\lambda_{КР}$ - коэффициент теплопроводности кокильной краски.

Начальная температура кокиля при затвердевании следующей отливки $T_{20} = T_2(n = n_{ВЫД})$, где $T_2(n = n_{ВЫД})$ - усредненная температура стенки кокиля в конце второго этапа, т.е. при $n = n_{ВЫД} = t_{ВЫД} / 4 R^2$. Очевидно, что при последовательном изготовлении в кокиле серии отливок определяющая кинетику затвердевания температура T_{20} в зависимости от тепловых и геометрических параметров, а также темпа работы кокильной машины будет в тех или иных пределах изменяться. В специальных экспериментах, выполненных в условиях литейного цеха, было установлено, что колебания T_{20} относительно рекомендованных значений могут достигать 50-200°С. Это обуславливает соответствующую нестабильность условий формирования отливки, продолжительности ее затвердевания, структуры и механических свойств.

Важнейшим из указанных выше параметров, определяющих процесс, является фактор ТК = $2 a_1 R$, где $a_1 = 1 / (\delta_{КР} / \lambda_{КР} + \delta_{ГАЗ} / \lambda_{ГАЗ})$; $\delta_{ГАЗ}$ - толщина газового зазора между отливкой и формой; $\lambda_{ГАЗ}$ - теплопроводность газа в зазоре.

Как показали выполненные эксперименты, толщина газового зазора существенно зависит от перепада давлений P , прилагаемых к расплаву при затвердевании отливок. При $P > 29$ КПа влиянием газового зазора на кинетику затвердевания можно пренебречь и принять $a_1 = \lambda_{КР} / \delta_{КР}$, а ТК = $2 \lambda_{КР} / \delta_{КР}$. Эти условия соблюдаются при всех разновидностях литья под регулируемым давлением.

Однако и в этом случае обеспечить строгую воспроизводимость коэффициента ТК невозможно, т.к. существующие методы нанесения кокильного покрытия не позволяют достаточно точно обеспечить заданную толщину слоя краски, а в процессе работы кокиля он изнашивается. Это

обусловливает случайный характер изменения $\delta_{кр}$, а следовательно, и ТК в процессе изготовления отливок.

Выполненный в условиях литейного цеха ПО "Уралтрансмаш" анализ изменения $\delta_{кр}$ на ряде отливок в процессе работы кокилей в течение смены показал, что $\delta_{кр}$ изменяется как нормально распределенная случайная величина при среднеквадратичном отклонении σ ($\delta_{кр}$) в пределах 0,02-0,1 мм.

Для интенсификации охлаждения кокилей можно использовать увеличение их поверхности с помощью ребер или штырей. Была разработана методика определения параметров ребрения, обеспечивающих заданное значение параметра R . Суммируя сказанное, можно заключить, что рассматриваемая тепловая система является детерминированной по своей природе, но характеризуется наличием случайных входных параметров, главными из которых являются T_{20} , ТК и T_{10} . В соответствии с этим и основные выходные величины, среди которых важнейшей является $n_{зятв} = \tau_{зятв} / 4R^2$, будут случайными. Решение системы (1)-(13) при заданных фиксированных значениях входных параметров может быть адекватно полученным на практике результатам лишь случайно. Этим во многом объясняется скептическое отношение производителей к расчетным методам теории затвердевания.

Сущность статистического моделирования затвердевания отливок сводится к решению краевой задачи (1)-(13) на ЭВМ, при котором значения величин T_{10} , T_{20} и $\delta_{кр}$ вводятся с помощью генератора случайных нормально распределенных чисел с заданными значениями их математических ожиданий M и среднеквадратичных отклонений σ . При каждом наборе значений входных параметров $DF = \sigma_{\phi} / \sigma_R$, P , R и характеристик $M_{T_{10}}$, $M_{T_{20}}$, $M(\delta_{кр})$, $\sigma_{T_{10}}$, $\sigma_{T_{20}}$ и $\sigma(\delta_{кр})$ выполняли $N = 10$ расчетов при разных наборах значений T_{10} , T_{20} и $\delta_{кр}$. В качестве выходной величины в расчетах определяли относительную продолжительность затвердевания $n_{зятв}$. Значения ряда параметров были зафиксированы: $P = 1$, $DF = 2$, $M_{T_{10}} = 725^{\circ}\text{C}$ и $\sigma_{(T_{10})} = 10^{\circ}\text{C}$. В расчетах варьировали: R (в пределах от 150° до 300°C), $M_{T_{20}}$ (в пределах от 50° до 100°C), $\sigma_{(T_{20})}$ (в пределах от 0,01 до 0,03 см) и $\sigma(\delta_{кр})$ (в пределах от 0,002 до 0,005 см). Расчеты были спланированы по матрице 2^{5-1} .

Целью статистического моделирования является определение конкретных регрессионных зависимостей статистических характеристик расп-

ределения величины $n_{зятв}$ от параметров R , $M_{т20}$, $M(\delta_{кр})$, $\sigma_{т20}$, $\sigma(\delta_{кр})$. В расчетах определяли следующие статистические характеристики $n_{зятв}$: $M_{n_{зятв}}$ и $\sigma(n_{зятв})$ - математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение; $D_{n_{зятв}}$ - доверительный интервал величины $n_{зятв}$ и $DO_{n_{зятв}} = D_{n_{зятв}} / M_{n_{зятв}}$ - относительный доверительный интервал.

В результате обработки данных моделирования были получены соответствующие уравнения регрессии для $M_{n_{зятв}}$, $\sigma(n_{зятв})$, $D_{n_{зятв}}$ и $DO_{n_{зятв}}$.

Наиболее важно рассмотреть зависимость относительной величины доверительного интервала от продолжительности затвердевания. Уравнение регрессии имеет вид

$$DO_{n_{зятв}} = 0,35 + 0,148X_2^1 + 0,179X_3 + 0,059X_4 + 0,035X_5 + 0,123X_2^1X_3, (14)$$

где $X_2^1 = -1,053 - 8,21 / (M_{т20} - 304)$ $X_3 = (\sigma_{т20} - 75) / 25$;
 $X_4 = (M\delta_{кр} - 0,02) / 0,01$; $X_5 = (\sigma(\delta_{кр}) - 0,0025) / 0,0015$.

Как следует из (14), с увеличением $M_{т20}$ и $M\delta_{кр}$ увеличивается $DO_{n_{зятв}}$, т.е. растет разброс значений $n_{зятв}$. Поэтому для уменьшения разброса значений $n_{зятв}$ необходимо толщину слоя краски выбирать как можно меньше. Расчеты показали, что без дополнительных мероприятий естественный дрейф входных параметров может привести к существенным (90% и более) колебаниям величины $n_{зятв}$, а следовательно, и механических свойств отливок. Из уравнения (14) следует, что наибольшее влияние на разброс значений $n_{зятв}$ оказывает начальная температура формы (фактор X_2) и ее колебания (фактор X_3). Поэтому стабилизация теплового режима формы является решающей в обеспечении устойчивости эксплуатационных свойств получаемых отливок.