

лов, спроектированных по профилю катода, возникает скачок площади в области катодного торца, требующий дополнительной корректировки выходного канала соплового узла и режимов работы плазмотрона.

Продемонстрировано несущественное влияние технологических изменений профиля катода (выгорание катодной тугоплавкой вставки) в процессе работы плазмотрона на его акустические характеристики.

Ю.А. Меленцова

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВСПЛЕСКОВ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА¹

В работе рассматривается приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода традиционным методом разложения ядра на вырожденное. В качестве базиса выбирается кратномасштабный базис всплесков Хаара и всплесков Мейера. Приближение строится в пространстве $L_2[0,1]$. Приближение с помощью всплесков Хаара является кусочно-постоянной функцией, а приближение с помощью всплесков Мейера — бесконечно дифференцируемая функция. В работе предлагается алгоритм численного решения поставленной задачи, приводятся примеры, позволяющие сравнить методы между собой и с точным решением.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(t) = \lambda \int_0^1 K(t,s)y(s)ds + f(t). \quad (1)$$

Пусть

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots \quad (2)$$

— ортонормированный базис пространства $L_2[0,1]$.

Приближенное решение $y_n(t)$ уравнения (1) будем искать в виде

$$y_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t) + f(t). \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-00014-а

Ядро $K(t, s)$ разложим в ряд Фурье по базисным функциям (2). Тогда

$$K(t, s) \approx \sum_{i=0}^n a_i(s) \varphi_i(t), \quad (4)$$

где $a_i(s)$ — коэффициенты Фурье:

$$a_i(s) = \int_0^1 K(t, s) \varphi_i(t) dt. \quad (5)$$

Подставим приближенное решение $y_n(t)$ и разложение ядра (4) в интегральное уравнение (1). Получим

$$\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t) + f(t) = \lambda \int_0^1 \sum_{i=0}^n a_i(s) \varphi_i(t) \left(\sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(s) + f(s) \right) ds + f(t). \quad \text{После ряда преобразо-}$$

ваний в силу независимости базисных функций получим

$$c_i = \lambda \sum_{j=0}^n c_j \int_0^1 a_i(s) \varphi_j(s) ds + \lambda \int_0^1 a_i(s) f(s) ds, \quad i = 0, \dots, n \quad —$$

систему линейных алгебраических уравнений $n+1$ порядка с неизвестными c_0, \dots, c_n вида

$$\left(G - \frac{1}{\lambda} E \right) C = F, \quad (6)$$

где G — матрица с элементами $g_{ij} = \int_0^1 a_i(s) \varphi_j(s) ds$, C — вектор-столбец с эле-

ментами c_0, \dots, c_n , F — вектор-столбец с элементами $f_i = \int_0^1 a_i(s) f(s) ds$.

Всплески Хаара

Рассмотрим всплески Хаара (см. [1], стр. 26)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Построим базис с помощью масштабирующей функции Хаара

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (\text{см. [1], стр. 269}).$$

Ортонормированным базисом пространства V_j являются функции

$$\varphi_{jn}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так как нас интересует решение уравнения (1) на отрезке $[0, 1]$, то при построении приближенного решения в пространстве V_j используются только функции

$\varphi_{jn}(t)$, $n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$. При $j=1$ — две функции:

$$\varphi_{10} = \sqrt{2}\varphi(2t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi_{11} = \sqrt{2}\varphi(2t-1) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Приближенное решение $y_j(t)$ будем искать в виде $y_j = \sum_{p=0}^{2^j-1} c_{jp} \varphi_{jp}(t) + f(t)$. Ядро

$K(t,s)$ разложим по базисным функциям $K(t,s) = \sum_{p=0}^{2^j-1} a_{jp}(s) \varphi_{jp}(t)$, где

$$a_{jp}(s) = \int_0^1 K(t,s) \varphi_{jp}(t) dt = \sqrt{2^j} \int_{\frac{p}{2^j}}^{\frac{p+1}{2^j}} K(t,s) dt, \quad p = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$$

Элементы матрицы G размерности $(2^j \times 2^j)$ вычисляются так:

$$g_{pq}^j = \int_0^1 a_{jp}(s) \varphi_{jq}(s) ds = \sqrt{2^j} \int_{\frac{q}{2^j}}^{\frac{q+1}{2^j}} a_{jp}(s) ds, \quad p = 0, 1, \dots, 2^j - 1, \quad q = 0, 1, \dots, 2^j - 1, \text{ (здесь } j \text{ не степе-}$$

пень, а просто индекс). $f_{jp} = \int_0^1 a_{jp}(s) f(s) ds, \quad p = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$

Пример 1

Пусть $K(t,s) = ts$, $f(t) = t$. Решим уравнение $y(t) = \lambda t \int_0^1 sy(s) ds + t$.

Очевидно, точное решение имеет вид $y = ct$ и $c = \frac{3}{(3-\lambda)}$.

Итак, $y(t) = \frac{3t}{(3-\lambda)}$. При $\lambda = 2$ $y(t) = 3t$.

Приближенное решение $y_1 = c_{10}\varphi_{10} + c_{11}\varphi_{11} + t$.

$$a_{10}(s) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} ts dt = \frac{\sqrt{2}}{8} s, \quad a_{11}(s) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 ts dt = \frac{3\sqrt{2}}{8} s.$$

$$g_{00}^1 = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{8} s ds = \frac{1}{32}, \quad g_{01}^1 = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{2}}{8} s ds = \frac{3}{32}, \quad g_{10}^1 = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3\sqrt{2}}{8} s ds = \frac{3}{32},$$

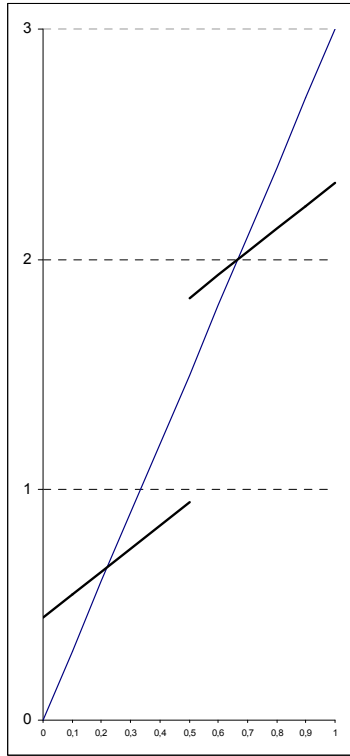
$$g_{11}^1 = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3\sqrt{2}}{8} s ds = \frac{9}{32}. \quad f_{10} = -\int_0^{\frac{1}{2}} a_{10}(s) s ds = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} s^2 ds = -\frac{\sqrt{2}}{24}, \quad f_{11} = -\int_{\frac{1}{2}}^1 a_{11}(s) s ds = -\frac{3\sqrt{2}}{24}.$$

Получилась система второго порядка
$$\begin{cases} -\frac{15}{32} c_{10} + \frac{3}{32} c_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{24} \\ \frac{3}{32} c_{10} - \frac{7}{32} c_{11} = -\frac{3\sqrt{2}}{24} \end{cases}.$$

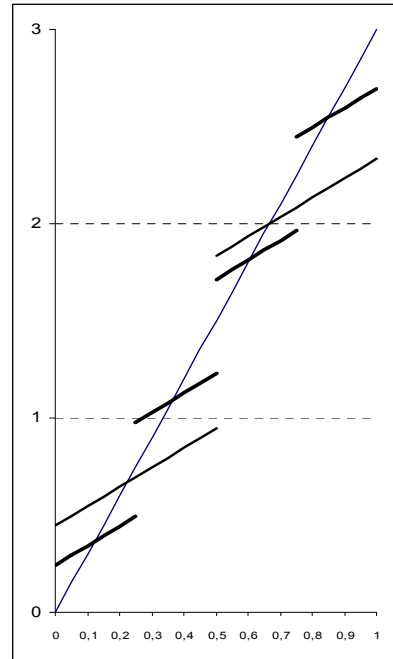
Ее решение $c_{10} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$, $c_{10} = \frac{6\sqrt{2}}{9}$.

$$y_1 = \frac{2\sqrt{2}}{9}\varphi_{10} + \frac{6\sqrt{2}}{9}\varphi_{11} + t = \begin{cases} t + \frac{4}{9}, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t + \frac{4}{3}, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}.$$

Точное решение и решение $y_1(t)$ изображены на рис.1 (а).



(а)



(б)

Рис.1. Графическая интерпретация решения уравнения

Теперь найдем $y_2 = c_{20}\varphi_{20} + c_{21}\varphi_{21} + c_{22}\varphi_{22} + c_{23}\varphi_{23} + t$.

$$a_{20}(s) = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} ts dt = \frac{1}{16}s, \quad a_{21}(s) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} ts dt = \frac{3}{16}s, \quad a_{22}(s) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} ts dt = \frac{5}{16}s, \quad a_{23}(s) = 2 \int_{\frac{3}{4}}^1 ts dt = \frac{7}{16}s$$

$$g_{00}^2 = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} s ds = \frac{1}{256}, \quad g_{01}^2 = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} s ds = \frac{3}{256}, \quad g_{02}^2 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{16} s ds = \frac{5}{256}, \quad g_{03}^2 = 2 \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{16} s ds = \frac{7}{256},$$

$$g_{10}^2 = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3}{16} s ds = \frac{3}{256}, \quad g_{11}^2 = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{16} s ds = \frac{9}{256}, \quad g_{12}^2 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{16} s ds = \frac{15}{256}, \quad g_{13}^2 = \frac{21}{256},$$

$$g_{20}^2 = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{5}{16} s ds = \frac{5}{256}, \quad g_{21}^2 = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{5}{16} s ds = \frac{15}{256}, \quad g_{22}^2 = \frac{25}{256}, \quad g_{23}^2 = \frac{35}{256},$$

$$g_{30}^2 = \frac{7}{256}, \quad g_{31}^2 = \frac{21}{256}, \quad g_{32}^2 = \frac{35}{256}, \quad g_{33}^2 = \frac{49}{256}.$$

$$f_{20} = -\int_0^1 a_{20}(s) s ds = -\frac{1}{16} \int_0^1 s^2 ds = -\frac{1}{48}, \quad f_{21} = -\int_0^1 a_{20}(s) s ds = -\frac{3}{48}, \quad f_{22} = -\frac{5}{48}, \quad f_{23} = -\frac{7}{48}.$$

Получится система

$$\begin{pmatrix} -\frac{127}{256} & \frac{3}{256} & \frac{5}{256} & \frac{7}{256} \\ \frac{3}{256} & -\frac{119}{256} & \frac{15}{256} & \frac{21}{256} \\ \frac{5}{256} & \frac{15}{256} & -\frac{103}{256} & \frac{35}{256} \\ \frac{7}{256} & \frac{21}{256} & \frac{35}{256} & -\frac{79}{256} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{20} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{48}{3} \\ -\frac{48}{5} \\ -\frac{48}{7} \\ -\frac{48}{48} \end{pmatrix}.$$

Из двух первых уравнений $c_{21} = 3c_{20}$, из двух последних — $c_{23} = \frac{7}{5}c_{22}$. Подставив

их в первое и третье уравнение, получим $c_{20} = \frac{1}{5}c_{22}$. Отсюда $c_{21} = 3c_{20}$, $c_{22} = 5c_{20}$,

$$c_{23} = 7c_{20}. \text{ Решение системы: } c_{20} = \frac{4}{33}, \quad c_{21} = \frac{12}{33}, \quad c_{22} = \frac{20}{33}, \quad c_{23} = \frac{28}{33}.$$

Отсюда $y_2 = t + \begin{cases} \frac{8}{33}, & 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ \frac{24}{33}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{40}{33}, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ \frac{56}{33}, & \frac{3}{4} \leq t < 1 \end{cases}.$ Точное решение, решения $y_1(t)$, $y_2(t)$ изображе-

ны на рис.1(б).

Об использовании всплесков Мейера

Рассмотрим всплески Мейера [1],[3] с масштабирующей функцией $\varphi(t)$.

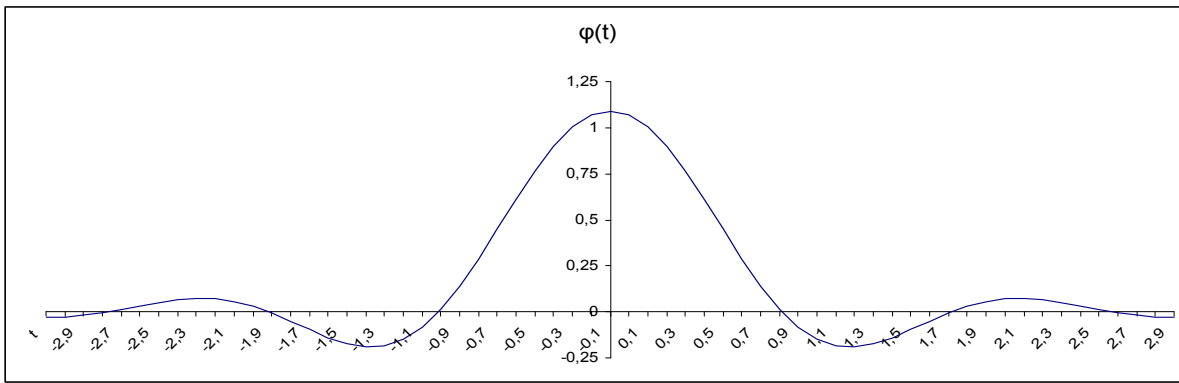
Пусть функция $z(t)$ вне отрезка $[0,1]$ равна 0. Разложим ее по функциям

$\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{0-1}, \varphi_{02}, \varphi_{0-2}, \dots$, где

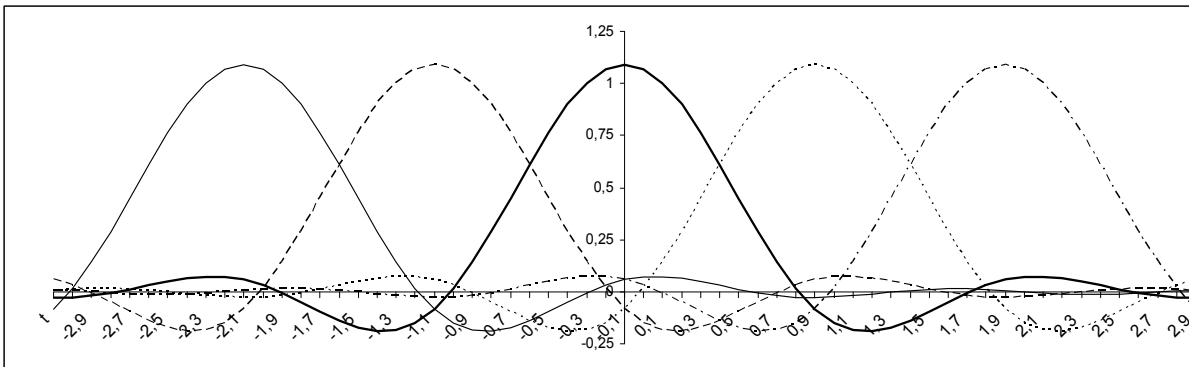
$\varphi_{00} = \varphi(t), \varphi_{01} = \varphi(t-1), \varphi_{0-1} = \varphi(t+1), \varphi_{02} = \varphi(t-2), \dots$ — базис пространства V_0 , а

$$\varphi(t) = \frac{9 \sin \frac{2\pi t}{3} + 12t \cos \frac{4\pi t}{3}}{\pi(9-16t^2)} \quad (\text{см. [2]}). \quad \varphi(0) = \frac{2\pi+4}{3\pi}.$$

Её график:



Графики функций $\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{0-1}, \varphi_{02}, \varphi_{0-2}, \dots$



Пусть $z(t) \approx c_0\varphi_{00}(t) + c_1\varphi_{01}(t) + c_{-1}\varphi_{0-1}(t) + c_2\varphi_{02}(t) + c_{-2}\varphi_{0-2}(t) + c_3\varphi_{03}(t) + \dots$, где

$$c_0 = \int_0^1 z(t)\varphi_{00}(t)dt = \int_0^1 z(t)\varphi(t)dt, \quad \dots, \quad c_k = \int_0^1 z(t)\varphi_{0k}(t)dt = \int_0^1 z(t)\varphi(t-k)dt.$$

$$|c_k| \leq \max|z(t)| \int_0^1 \left| \frac{9 \sin \frac{2\pi(t-k)}{3} + 12(t-k) \cos \frac{4\pi(t-k)}{3}}{\pi(t-k)(9-16(t-k)^2)} \right| dt = \max|z(t)| \int_{-k}^{1-k} \left| \frac{9 \sin \frac{2\pi t}{3} + 12t \cos \frac{4\pi t}{3}}{\pi(9-16t^2)} \right| dt \text{ Так}$$

как $\int_{-p-1}^{-p} |\varphi(t)|dt = \int_p^{p+1} |\varphi(t)|dt$, рассмотрим c_k только для $k \leq -1$. Пусть $p = -k$. Тогда

$$p \leq t \leq p+1 \text{ и } \int_p^{p+1} |\varphi(t)|dt < \frac{9+12(p+1)}{\pi p(16p^2-9)}.$$

$$\left\| z(t) - \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \varphi_{0k}(t) \right\| \leq \left\| z(t) - \sum_{-M}^{+M} c_k \varphi_{0k}(t) \right\| + 2 \sum_{k=M+1}^{\infty} |c_k|.$$

Для заданной функции $z(t)$ можно подобрать M так, что $2 \sum_{k=M+1}^{\infty} |c_k|$ меньше заданного ε .

Теперь рассмотрим кратно-масштабное разложение $z(t)$ по функциям

$\varphi_{j0}, \varphi_{j1}, \dots, \varphi_{j2^j}, \varphi_{j,-1}, \varphi_{j,2^j+1}, \varphi_{j,-2}, \varphi_{j,2^j+2}, \dots$ — базису пространства V_j , где

$$\varphi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k).$$

Тогда приближение функции $z(t)$ выглядит так:

$$z(t) \approx c_{-M} \varphi_{j,-M}(t) + \dots + c_0 \varphi_{j0}(t) + c_1 \varphi_{j1}(t) + \dots + c_{2^j} \varphi_{j2^j}(t) + \dots + c_{2^j+M} \varphi_{j,2^j+M} \quad (7)$$

где $c_k = \int_0^1 z(t) \varphi_{jk}(t) dt = \int_0^1 z(t) \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k) dt$.

Алгоритм численного решения интегрального уравнения с использованием всплесков Мейера

Приближенное решение интегрального уравнения свелось к следующему:

1. Для отыскания коэффициентов $c_k, k = -M, \dots, 0, \dots, 2^j, \dots, 2^j + M$ нужно решить систему линейных алгебраических уравнений порядка $2^j + 2M + 1$ вида (6).

2. Для этого нужно найти коэффициенты системы $g_{ik} = \int_0^1 a_i(s) \varphi_{jk}(s) ds$,

воспользовавшись каким-либо методом численного интегрирования. Мы воспользуемся составной формулой трапеций, разбив отрезок $[0,1]$ на 2^q

частей, $q \geq j$. Тогда $g_{ik} \approx h \left(\sum_{p=1}^{2^q-1} a_i(s_p) \varphi_{jk}(s_p) + (a_i(0) \varphi_{jk}(0) + a_i(1) \varphi_{jk}(1)) / 2 \right)$, где

$h = \frac{1}{2^q}, s_p = ph, a_i(s_p)$ — коэффициент Фурье разложения ядра по базисным функциям, вычисленный в фиксированной точке s_p :

$$a_i(s_p) = \int_0^1 K(t, s_p) \varphi_{ji}(t) dt.$$

3. Для вычисления интеграла $\int_0^1 K(t, s_p) \varphi_{ji}(t) dt$ снова воспользуемся со-

ставной формулой трапеций, разбив отрезок $[0,1]$ на 2^q частей. Тогда

$$a_i(s_p) \approx h \left(\sum_{r=1}^{2^q-1} K(t_r, s_p) \varphi_{ji}(t_r) + (K(0, s_p) \varphi_{ji}(0) + K(1, s_p) \varphi_{ji}(1)) / 2 \right).$$

4. Поскольку функция $\varphi_{ji}(t)$ получится сдвигом функции $\varphi_{j0}(t)$ на $\left| \frac{i}{2^j} \right|$

вправо при $i > 0$ или влево при $i < 0$, то для ускорения вычислительного процесса вычислим значения $\varphi_{j0}(t)$ с шагом $\frac{1}{2^q}$ на отрезке

$$\left[-\left(1 + \frac{M}{2^j}\right), 1 + \frac{M}{2^j} \right] \text{ и поместим их в массив с границами } -(2^q + M2^{q-j}),$$

$2^q + M2^{q-j}$. Для получения значений функции $\varphi_{ji}(t)$ выберем из этого массива элементы с номерами от $-2^{q-j}i$ до $2^q - 2^{q-j}i$.

5. Правые части системы $f_i = -\int_0^1 a_i(s)f(s)ds$ также вычисляем по составной формуле трапеций: $f_i \approx -h \left(\sum_{p=1}^{2^q-1} a_i(s_p)f(s_p) + (a_i(0)f(0) + a_i(1)f(1))/2 \right)$.

После того, как система (6) решена, то есть коэффициенты c_k найдены, вычисляем значения приближенного решения $y_j(t)$ на отрезке $[0,1]$ с заданным шагом, используя формулу (7):

$$y_j(t) \approx c_{-M}\varphi_{j,-M}(t) + \dots + c_0\varphi_{j0}(t) + c_1\varphi_{j1}(t) + \dots + c_{2^j}\varphi_{j2^j}(t) + \dots + c_{2^j+M}\varphi_{j,2^j+M} + f(t)$$

По описанному алгоритму была написана программа: Алгоритм численного решения интегрального уравнения с использованием всплесков Хаара.

Для приближения решения с помощью всплесков Хаара также была написана программа.

1. Для отыскания коэффициентов $c_k, k = 0, \dots, 2^j - 1$ нужно решить систему линейных алгебраических уравнений порядка 2^j вида (6).
2. Для этого нужно найти коэффициенты системы

$$g_{ik} = \int_0^1 a_i(s)\varphi_{jk}(s)ds = \sqrt{2^j} \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} a_i(s)ds, \text{ воспользовавшись составной формулой}$$

трапеций, разбив отрезок $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right]$ на 2^m частей. Тогда

$$g_{ik} \approx h\sqrt{2^j} \left(\sum_{p=1}^{2^m-1} a_i\left(\frac{k}{2^j} + ph\right) + \left(a_i\left(\frac{k}{2^j}\right) + a_i\left(\frac{k+1}{2^j}\right) \right) / 2 \right), \text{ где } h = \frac{1}{2^m}, s_p = \frac{k}{2^j} + ph,$$

$a_i(s_p)$ — коэффициент Фурье разложения ядра по базисным функциям, вычисленный в фиксированной точке s_p :

$$a_i(s_p) = \int_0^1 K(t, s_p)\varphi_{ji}(t)dt = \sqrt{2^j} \int_{\frac{i}{2^j}}^{\frac{i+1}{2^j}} K(t, s_p)dt.$$

3. Вычислим интеграл $\sqrt{2^j} \int_{\frac{i}{2^j}}^{\frac{i+1}{2^j}} K(t, s_p)dt$ составной формулой трапеций, разбив

отрезок на 2^m частей. Тогда

$$a_i(s_p) \approx h\sqrt{2^j} \left(\sum_{r=1}^{2^m-1} K\left(\frac{i}{2^j} + rh, s_p\right) + \left(K\left(\frac{i}{2^j}, s_p\right) + K\left(\frac{i+1}{2^j}, s_p\right) \right) / 2 \right).$$

4. Правые части системы $f_i = -\int_0^1 a_i(s)f(s)ds$ также вычисляем по составной

формуле трапеций: $f_i \approx -\frac{1}{2^{j+m}} \left(\sum_{p=1}^{2^{j+m}-1} a_i(s_p)f(s_p) + (a_i(0)f(0) + a_i(1)f(1))/2 \right)$.

5. После того, как система (6) решена, то есть коэффициенты c_k найдены, вычисляем значения приближенного решения $y(t)$ на отрезке $[0,1]$ с заданным шагом, используя формулу

$$y(t) \approx c_0\varphi_{j_0}(t) + c_1\varphi_{j_1}(t) + \dots + c_{2^j-1}\varphi_{j,2^j-1}(t) + f(t) = \begin{cases} f(t) + c_0, & 0 \leq t < \frac{1}{2^j} \\ \dots\dots\dots \\ f(t) + c_{2^j-1}, & \frac{2^j-1}{2^j} \leq t < 1 \end{cases}$$

Результаты, полученные для примера 1

Приведем таблицу, в которой сравним результаты приближения решения интегрального уравнения $y(t) = 2t \int_0^1 sy(s)ds + t$ с помощью всплесков Мейера и всплесками Хаара (точное решение — $y = 3t$).

Таблица 1.

t	всплески Мейера q=6						вспл. Хаара	
	j=5 m=0	j=5 m=1	j=5 m=3	j=6 m=0	j=6 m=1	j=6 m=3	j=5 m=5	j=6 m=5
0	0,00332	0,00337	0,00337	-0,00168	-0,00174	-0,00177	0,03123	0,01562
0,1	0,29452	0,29466	0,29468	0,29558	0,29558	0,29558	0,31864	0,3031
0,2	0,58849	0,58872	0,58876	0,59109	0,59109	0,59109	0,60605	0,59058
0,3	0,88247	0,88278	0,88283	0,8866	0,8866	0,88661	0,89346	0,9093
0,4	1,17643	1,17683	1,17687	1,1822	1,1822	1,18221	1,18087	1,19678
0,5	1,47056	1,47109	1,47113	1,47792	1,47793	1,47794	1,53075	1,5155
0,6	1,76522	1,76596	1,76601	1,77334	1,77334	1,77336	1,81816	1,80298
0,7	2,06111	2,06214	2,06224	2,06817	2,06817	2,06818	2,10556	2,09046
0,8	2,36044	2,36184	2,36206	2,36332	2,36332	2,36332	2,39297	2,40918
0,9	2,68896	2,69068	2,69122	2,66262	2,66267	2,66273	2,68038	2,69666
1	1,95626	1,96594	1,96838	1,9773	1,97812	1,97938	2,96779	2,98413

Пример 2

Рассмотрим еще пример $y(t) = \int_0^1 \left(ts - \frac{(ts)^3}{6} \right) y(s) ds + \sin t$. Найдем точное решение

в виде $y(t) = at + bt^3 + \sin t$. Получим систему
$$\begin{cases} a = \frac{a}{3} + \frac{b}{5} + \int_0^1 s \sin s ds \\ b = -\frac{a}{30} - \frac{b}{42} - \int_0^1 \frac{s^3}{6} \sin s ds \end{cases}$$
. Интегралы

вычислим. $\int_0^1 s \sin s ds = (-s \cos s + \sin s) \Big|_0^1 = -\cos 1 + \sin 1$,

$\int_0^1 \frac{s^3}{6} \sin s ds = \left(-\frac{s^3}{6} \cos s + \frac{s^2}{2} \sin s + s \cos s - \sin s \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6} \cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1$.

Итак,
$$\begin{cases} \frac{2}{3}a - \frac{1}{5}b = -\cos 1 + \sin 1 & a = \frac{-15 \cdot 250 \cos 1 + 15 \cdot 236 \sin 1}{2171} = 0,43881789 \\ \frac{1}{30}a + \frac{43}{42}b = -\frac{5}{6} \cos 1 + \frac{1}{2} \sin 1 & b = \frac{-5 \cdot 329 \cos 1 + 5 \cdot 189 \sin 1}{2171} = -0,043117095 \end{cases}$$

Точное решение $y(t) = 0,43881789t - 0,043117095t^3 + \sin t$.

В таблице приведены приближенные решения, найденные с помощью всплесков Мейера и всплесками Хаара и точное решение.

Таблица 2.

	всплески Мейера			всплески Хаара			точное
	j=4 q=5 m=1	j=5 q=6 m=2	j=6 q=6 m=3	j=4 m=3	j=5 m=4	j=6 m=5	
0	0,00136	0,00075	-0.00039	0,0137	0,00686	0.00343	0
0,1	0,14315	0,14347	0.14347	0,14092	0,14777	0.14435	0,143672
0,2	0,28512	0,28557	0.28567	0,29416	0,28743	0.28405	0,286088
0,3	0,42433	0,42516	0.42537	0,41792	0,42465	0.42800	0,426001
0,4	0,5605	0,56103	0.56136	0,56471	0,55824	0.56153	0,562186
0,5	0,69108	0,69202	0.69246	0,70597	0,69975	0.69661	0,693445
0,6	0,81705	0,81707	0.81743	0,81604	0,82226	0.81922	0,81862
0,7	0,93403	0,93522	0.93509	0,94346	0,93774	0.93483	0,936601
0,8	1,05085	1,04585	1.04458	1,03946	1,04518	1.04799	1,046334
0,9	1,15878	1,15321	1.14571	1,14873	1,14364	1.14630	1,146831
1	1,03552	1,03759	1.03867	1,22718	1,23226	1.23473	1,237172

Пример 3

Рассмотрим пример с разрывным ядром $K(t, s)$, $f(t) = \sin t$ при $\lambda=2$.

$$\text{Ядро } K(t,s) = \begin{cases} ts, & 0 \leq t < 0,5, 0 \leq s < 0,5 \\ 0,5, & 0,5 \leq t < 0,75, 0 \leq s < 0,5 \\ 1, & 0,75 \leq t < 1, 0 \leq s < 0,5 \\ 1, & 0 \leq t < 0,5, 0,5 \leq s < 1 \\ 2, & 0,5 \leq t < 1, 0,5 \leq s < 1 \end{cases},$$

Найдем вид точного решения.

Рассмотрим $0 \leq t < 0,5$. Тогда $y(t) = \lambda \int_0^{0,5} tsy(s)ds + \lambda \int_{0,5}^1 y(s)ds + \sin t = c1 * t + c2 + \sin t$.

Пусть $0,5 \leq t < 0,75$. Тогда $y(t) = \lambda \int_0^{0,5} \frac{1}{2} y(s)ds + \lambda \int_{0,5}^1 2y(s)ds + \sin t = k1 + \sin t$.

При $0,75 \leq t < 1$ $y(t) = \lambda \int_0^{0,5} y(s)ds + \lambda \int_{0,5}^1 2y(s)ds + \sin t = k2 + \sin t$.

Итак, точное решение имеет вид

$$y = \begin{cases} c1 * t + c2 + \sin t, & 0 \leq t < 0,5 \\ k1 + \sin t, & 0,5 \leq t < 0,75 \\ k2 + \sin t, & 0,75 \leq t < 1 \end{cases}.$$

Подставляя решение в интегральное уравнение, получим

$$c1 * t + c2 + \sin t =$$

$$= \lambda t \int_0^{0,5} s(c1 * s + c2 + \sin s)ds + \lambda \int_{0,5}^{0,75} (k1 + \sin s)ds + \lambda \int_{0,75}^1 (k2 + \sin s)ds + \sin t$$

$$k1 + \sin t = \lambda \int_0^{0,5} \frac{1}{2} (c1 * s + c2 + \sin s)ds + \lambda \int_{0,5}^{0,75} 2(k1 + \sin s)ds + \lambda \int_{0,75}^1 2(k2 + \sin s)ds + \sin t$$

$$k2 + \sin t = \lambda \int_0^{0,5} (c1 * s + c2 + \sin s)ds + \lambda \int_{0,5}^{0,75} 2(k1 + \sin s)ds + \lambda \int_{0,75}^1 2(k2 + \sin s)ds + \sin t$$

Придем к системе ($\lambda=2$)

$$\begin{cases} \frac{11}{24} c1 - \frac{1}{8} c2 = -\frac{1}{2} \cos 0,5 + \sin 0,5 \\ \frac{1}{2} c2 - \frac{1}{4} k1 - \frac{1}{4} k2 = \cos 0,5 - \cos 1 \\ -\frac{k2}{2} - \frac{1}{16} c1 - \frac{1}{4} c2 = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 0,5) + 2(\cos 0,5 - \cos 1) \\ -\frac{k1}{2} - \frac{1}{8} c1 - \frac{1}{2} c2 = (\cos 0 - \cos 0,5) + 2(\cos 0,5 - \cos 1) \end{cases}$$

Решив ее, найдем $c1 = -0,043801$, $c2 = -0,48567$, $k1 = -1,09731$, $k2 = -1,22321$.

Проведя расчеты на компьютере, сравним результаты, полученные при использовании всплесков Мейера и всплесков Хаара с точным решением.

Таблица 3

Всплески Мейера		Всплески Хаара		точное
j=4, q=5, m=2	j=6, q=6, m=3	j=4, m=4	j=6, m=5	
-0.24545	-0.24300	-0.48572	-0.48587	-0,4856988
-0.41297	-0.39135	-0.38867	-0.39015	-0,3902461
-0.31189	-0.29618	-0.29540	-0.29543	-0,2957908
-0.18868	-0.20417	-0.20133	-0.20338	-0,2033206
-0.08541	-0.11145	-0.11299	-0.11360	-0,1138032
-0.51464	-0.67915	-0.61561	-0.61760	-0,6178799
-0.56890	-0.53042	-0.53040	-0.53238	-0,5326629
-0.47226	-0.44525	-0.45477	-0.45281	-0,4530877
-0.54988	-0.49945	-0.50406	-0.50564	-0,5058571
-0.50323	-0.43781	-0.43809	-0.43967	-0,4398863
0.22326	0.23175	-0.37994	-0.38152	-0,3817422

Приближенное решение, полученное при использовании всплесков Мейера, дает менее точные результаты, но зато является бесконечно дифференцируемым.

Автор выражает глубокую благодарность Н.И. Черных за постановку задачи, за постоянное внимание и помощь в работе.

Библиографический список.

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов// «Мир», М., 2005.
2. Меленцова Ю.А. Об использовании ортогональных базисов всплесков Мейера для отыскания периодических решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами// Проблемы электроэнергетики, информатики и образования. Вып.2. Изд. РГППУ. Екатеринбург, 2010. С. 13-31.
3. Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Всплески в пространствах гармонических функций// Изд. РАН. Серия мат. 2000. Т. 64. № 1. С. 145-174.