

2. М. Фитцджеральд. Изучаем Ruby = Learning Ruby / пер. с англ. Н. Гаврилова. — 1-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 336 с.

3. Мэтт Зандстра. РНР: объекты, шаблоны и методики программирования = RHP Objects, Patterns and Practice, Third Edition. — 3-е издание. — М.: «Вильямс», 2010. — С. 560.

4. Потапова Н.В. Дистанционное образование, как электронный документооборот/ Н.В. Потапова// Информационные технологии в образовании и науке: материалы Междунар. науч.-практ.конф., 5-7 нояб. 2016 г., г. Казань. / КФУ — Казань, 2016. — С. 166–172.

УДК 511:004.4

М. В. Рожкова, А. В. Рожков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ) ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Рожкова Марина Валериевна

great.ros.marine@gmail.com

ЧПОУ «Краснодарский колледж управления, техники и технологий», Россия, г. Краснодар

Рожков Александр Викторович

great.ros.marine@gmail.com

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, г. Краснодар

EXPERIMENTAL (COMPUTING) THEORY OF NUMBERS

Rozhkova Marina Valeriyvna

Krasnodar College of management, equipment and technologies, Russia, Krasnodar

Rozhkov Alexander Viktorovich

Kuban state university, Russia, Krasnodar

Аннотация. Проведение численных экспериментов с функцией Эйлера. Уточнение теоремы Мертенса. Вычисления в пакете компьютерной алгебры на открытом коде в среде Linux Debian.

Abstract. Carrying out numerical experiments with Euler's function. Specification of the theorem of Mertens. Calculations in a package of computer algebra on an open code in the environment of Linux Debian.

Ключевые слова: функция Эйлера; свободное программное обеспечение; Debian Linux.

Keywords: Euler's function; free software; Debian Linux.

В современной математике много «безнадежных» задач, стоящих столетиями, которыми занимались и такие гении как Л. Эйлер и К.Ф. Гаусс и тысячи менее известных математиков. У многих из этих задач, как правило, есть вычислительный аспект, доступный для восприятия и «простым смертным», а не только профессиональным математикам [1-3].

Одна из таких «вечных» задач - среднее значение функции Эйлера [4].

Определение. *Функцией Эйлера $\varphi(n)$ называется количество натуральных чисел меньших n , и не имеющих с n неединичных общих делителей.*

Функцию Эйлера легко вычислить, если знать список всех разных простых чисел $\{p, q, \dots, r\}$, которые делят число n . В этом случае

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Из-за того, что простые числа на числовой кривой разбросаны весьма хаотично, то и значения функции Эйлера изменяются очень сильно. Вторая проблема, чисто вычислительная, это высокая ресурсоёмкость задачи разложения на простые множители.

Хорошо известно приближение для среднего значения функции Эйлера, теорема Мертенса [4]:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \cdot \ln(n)).$$

Мы слегка модифицируем это приближение, введем среднее значение функции Эйлера $\bar{\varphi}(n) = \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)}{n}$. Мы будем изучать следующее приближение, слегка уточняющее формулу Мертенса

$$\bar{\varphi}(n) \approx \frac{3}{\pi^2}(n+1), \pi = 3,141592653589793\dots$$

Именно такое приближенное значение π - до 15 знака, мы использовали в своих вычислениях. Не решенная до сих пор проблема - насколько точно это приближение, а именно как изменяется разность

$$\Phi(n) = \bar{\varphi}(n) - \frac{3}{\pi^2}(n+1).$$

Растет ли она до бесконечности, положительной или отрицательной, стремится ли к какому-то пределу или колеблется в районе нуля.

Собственно, здесь уже математика и заканчивается, и начинается информатика или, правильнее сказать, экспериментальная математика.

В пакете алгебры на открытом gap4r8p6 - официальный сайт <http://www.gap-system.org>, для вычисления функции Эйлера $\varphi(n)$ есть специальная команда Phi(n). Пакет Gap входит в бесплатный, но гораздо более обширный, пакет Sage 7.5, с внутренним языком программирования Python.

Выбор платформы и системы компьютерной алгебры

Из сотен операционных систем линейки Linux выбор был однозначно сделан в пользу Linux Debian - официальный сайт <https://www.debian.org/index.ru.html>, хотя, первоначально, использовался Linux CentOS - мощная система из индустрии суперкомпьютеров.

Операционную систему Linux Debian (Deb + Ian) создали в 1993 г. Debra Lynn и Ian Murdock. Это один из старейших дистрибутивов, поскольку сам Linux возник в 1991 г.

Debian является "отцом" популярных дистрибутивов Knoppix, Linux Mint, Maemo, MEPIS, SteamOS, TAILS, Ubuntu, его с апреля 2015 г. используют на компьютерах Международной космической станции, он является базой для популярного хакерского средства Kali Linux.

Debian Edu - Skolelinux, является дистрибутивом Linux на основе Debian и предоставляет готовое окружение полностью настроенной школьной сети.

Ubuntu Kylin — китайская операционная система, построена на основе Debian.

В дистрибутив Debian входит более 43 000 пакетов. Одних только программ для математических вычислений более 300.

В их числе Axiom, Cadabra, Cantor, Euler, GAP, KAlgebra, Mathomatic, Maxima, Octave, Open-Axiom, Pari-GP, Qalc, Relational, Sagemath, Scilab, XMaxima.

Есть сотни бесплатных проектов на открытом коде. Часть из них перечислена при описании пакетов в ОС Debian.

Но главная проблема не в платности и бесплатности, а в том, как пользоваться этими пакетами компьютерной алгебры.

Хотелось бы выбрать такой пакет компьютерной алгебры, у которого внутренний язык был бы индустриальным языком программирования. А идеально, чтобы это был не один пакет на открытом коде, а некое их семейство.

И такой проект был осуществлен в 2005 г. профессором William Stein из University of Washington (В академическом рейтинге университетов мира он занимал 15-е место в 2015 г).

Проект на открытом коде. Встроенный язык программирования Python, проект включает 90 пакетов на открытом коде, в том числе: NumPy, SciPy, matplotlib, Sympy, Maxima, GAP, FLINT, R. Проект активно развивается. Каждый квартал выходит новая версия. Текущий релиз Sage 7.5.1. Официальный сайт <http://www.sagemath.org>.

Визуализация

В процессе вычислений было получено много промежуточных данных и потребовалась программа для работы с графиками. Была выбрана бесплатная программа SciDAVis -Официальный сайт <http://scidavis.sourceforge.net>.

SciDAVis - система анализа, обработки, визуализации экспериментальных данных и аппроксимации кривых. Поддерживает значительное количество аппроксимирующих функций, скрипты, базовые статистики с графиками и визуализацией и многое другое. Один из наиболее полнофункциональных и удобных аналогов коммерческого OriginPro.

SciDAVis предназначена для построения 2D и 3D-графиков различных типов: линейных, точечных, трёхмерных гистограмм, объёмных круговых гистограмм, трёхмерных поверхностей. Исходные данные могут быть импортированы из ASCII-файлов, введены вручную или вычислены по формулам. Данные хранятся в отдельных таблицах, содержащих данные в столбцах (значения по осям X и Y для 2D-графиков) или в виде матриц (для 3D-графиков). Таблицы, графики и сопутствующие сведения организованы в проекты, хранящиеся в соответствующих директориях.

Результаты вычислений

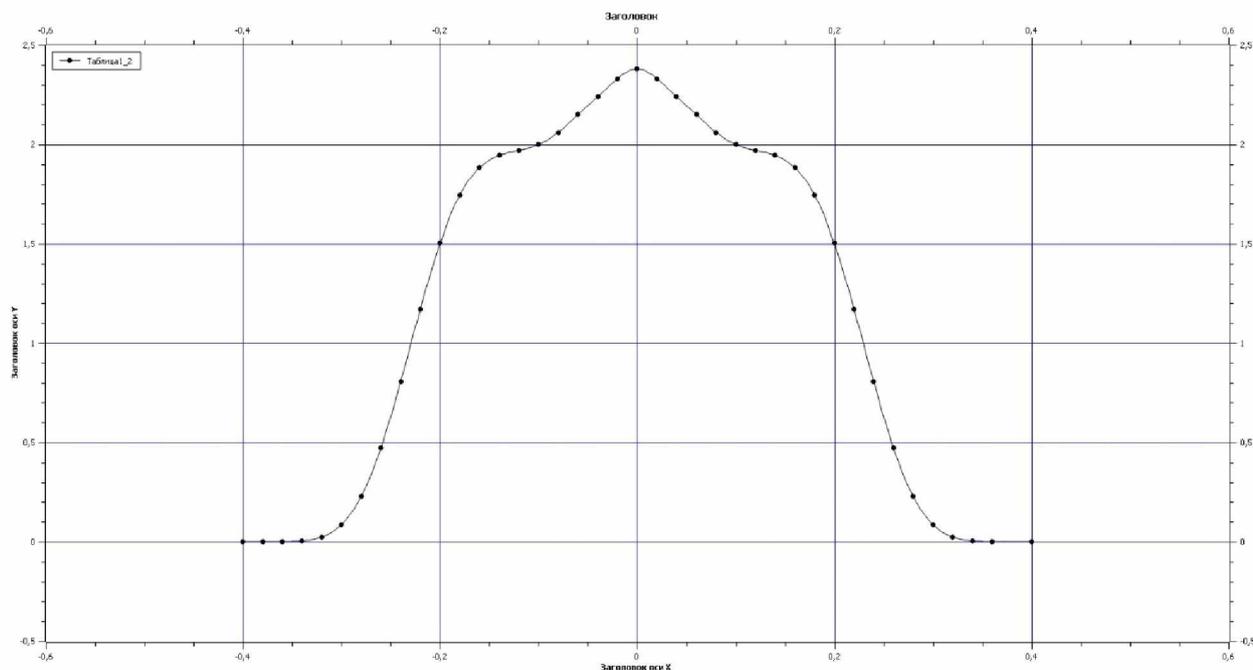
Вычисления производились на 4-х ядерном процессоре Core i5 4430, 3 Гц, 16 Гб оперативной памяти, операционная система Linux Debian 8.7, пакет компьютерной алгебры gap 4.8.6.

1. Все значения функции $\Phi(n)$ попали в интервал единичной длины $(-0,5; 0,5)$. Абсолютно неожиданный результат.

2. Среднее значение функции $\Phi(n)$, т.е. ее математическое ожидание, очень быстро стремится к 0, принимая последовательно значения $0,001 \rightarrow 0,0001 \rightarrow \dots \rightarrow 0,000001$.

3. Отклонение от среднего значения, т.е. дисперсия, начиная с 10 млн. зафиксировалась на значении 0,01986, и может быть хорошо приближена значением 0,02.

4. График распределения плотности вероятности построен по 40 точкам и имеет явно выраженный симметричный вид, что тоже никак не предсказывалось теорией.



Текст финальной программы

```

Euler:=function(m,n)
local i,j,p,s,S,S2;
  p:=3/((3.141592653589793)^2);
  j:=0;
  S:= 0;
  S2:=0.0;
for i in [m..n] do
  j:= j+ Phi(i);
  s:= j/i-p*(i+1);
  S:=S+s;
  S2:=S2+s^2;

  if s < -0.41 or s>0.41 then
    Print("i=",i," ", "j=",j, " ", "s=",s, "\n");
  fi;

  if i mod 10^6 =0 then
    Print("i=",i,"->", "j=",j, "->", "M=",S/i, "->", "D=",S2/i, "->",
      "S=",Int(S), "\n");
  fi;
od;
return(1);
end;

```

Здесь i – значение, для которого вычисляется функция Эйлера,
 j - сумма всех значений функции Эйлера до значения i включительно,
 s - значение функции $\Phi(i)$,
 S - сумма всех значений функции Φ до значения i включительно,
 $S2$ – сумма отклонений от математического ожидания функции Φ , т.е. от нуля.

Результаты получились совершенно неожиданными и математически изящными. Они не решают проблему полностью, но дают богатый материал для выдвижения уточняющих гипотез. Необходимо продолжить вычисления, имеющие несомненную ценность для экспериментальной теории чисел и прикладной информатики, по предложенным программам до 10^{12} .

Список литературы

1. Рожкова, М. В., Рожков, А. В. Студенческая наука: STEM технологии в теории чисел Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 53 / Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2016» // Материалы Пятнадцатой молодежной научной школы-конференции. Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2016. – Т. 53.г. с. 135-137.

2. Рожков, А. В., Рожкова, М. В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи. Материалы I Всероссийской научно-практической конференции. Майкоп, 2015. С. 116-121.

3. Рожкова, М. В. Применение STEM-технологий в среднем профессиональном образовании Труды V-я Междунар. Науч.-практич. Конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016) Казань: КФУ, 2016. С. 180-186.

4. Чандрасекхаран, К. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Мир, 1974. – 178 с.

УДК 511:004.4

М. В. Рожкова, А. В. Рожков

STEM-ТЕХНОЛОГИИ: МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

*Рожкова Марина Валериевна
great.ros.marine@gmail.com*

ЧПОУ «Краснодарский колледж управления, техники и технологий», Россия, г. Краснодар

*Рожков Александр Викторович
great.ros.marine@gmail.com*

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, г. Краснодар

STEM-TECHNOLOGIES: MATHEMATICS AND INFORMATICS

Rozhkova Marina Valeriyvna

Krasnodar College of management, equipment and technologies, Russia, Krasnodar

Rozhkov Alexander Viktorovich

Kuban state university, Russia, Krasnodar

Аннотация. Предложены и реализованы алгоритмы решения задач в области теории чисел в рамках реализации проекта STEM. Вычисления в пакете компьютерной алгебры на открытом коде в среде Linux Debian.

Abstract. Algorithms solutions of tasks in the field of the theory of numbers within implementation of the STEM project are proposed and realized. Calculations in a package of computer algebra on an open code in the environment of Linux Debian.

Ключевые слова: теория чисел; свободное программное обеспечение; Debian Linux, STEM-технологии.