

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Уральский государственный профессионально-педагогический университет
Уральский государственный научно-образовательный центр
Российской академии образования

Ю. В. Стенин, А. В. Песков

ЭЛЕМЕНТЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В РАСЧЕТАХ СВАРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших
и средних профессиональных учебных заведений по профессионально-
педагогическому образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Екатеринбург
2000

УДК 621.791(075)+624.014.25
ББК 30.04

Стенин Ю.В., Песков А.В. Элементы строительной механики в расчетах сварных конструкций: Учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф. пед. ун-та, 2000. – 95 с.

Учебное пособие содержит материал, который изучается в курсе “Сварные конструкции” при подготовке специалистов сварочного профиля. Пособие состоит из двух разделов. Первый раздел посвящен анализу расчетных схем сооружений, второй – расчету усилий в элементах статически определимых сооружений. Изложенный материал иллюстрирован рисунками и примерами. В конце разделов приведены контрольные вопросы, которые могут быть использованы как студентами для самопроверки, так и преподавателями.

Пособие предназначено студентам Уральского государственного профессионально-педагогического университета, обучающимся по специальности “Профессиональное обучение”, специализациям 030510 – Технология и оборудование сварочного производства, 030532 – Организация сварочного производства, и может быть использовано студентами других учебных заведений, обучающимися по соответствующей специальности.

Рецензенты: кафедра инженерной графики Уральского государственного технического университета; доцент кафедры механики Уральского государственного профессионально-педагогического университета Е.Д. Колегова.

© Уральский государственный
профессионально-педагогический
университет, 2000

Оглавление

Введение	5
1. АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ СООРУЖЕНИЙ	6
1.1. Базовые понятия и определения	6
1.2. Классификация расчетных схем сооружений	7
1.3. Опоры плоских и пространственных систем	8
1.4. Кинематический анализ расчетных схем сооружений	12
1.4.1. Назначение кинематического анализа. <i>Соотношение между степенью свободы конструкции и элементами-связями в ней</i>	12
1.4.2. Условия геометрической неизменяемости конструкции	17
1.5. Статический анализ расчетных схем сооружений (статически определимые и статически неопределимые сооружения)	22
1.6. Классификация нагрузок и методика их расчета	24
1.6.1. Классификация нагрузок	24
1.6.2. Методика расчета нагрузок	25
1.7. Контрольные вопросы	27
2. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООРУЖЕНИЙ	34
2.1. Аналитические и графические методы расчета (основные принципы, преимущества, недостатки, области применения)	34
2.2. Аналитический метод расчета сооружений на неподвижную нагрузку	35
2.2.1. <i>Общий алгоритм аналитического расчета</i>	35
2.2.2. <i>Расчет балок</i>	37
2.2.3. <i>Расчет ферм</i>	39
2.3. Аналитический метод расчета сооружений на подвижную нагрузку	45
2.3.1. <i>Особенности расчета на подвижную нагрузку. Линии влияния и их применение для расчета усилий</i>	45
2.3.2. <i>Общий алгоритм аналитического расчета на подвижную нагрузку</i>	49

2.3.3. Построение линий влияния усилий в простых балках.....	49
2.3.4. Определение невыгодного (опасного) положения подвижной нагрузки.....	57
2.3.5. Линии влияния при узловой передаче нагрузки. Определение усилий в стержнях поясов фермы при расположении нагрузки на панели между узлами.....	64
2.3.6. Построение линий влияния усилий в простых балочных фермах	65
2.4. Графический метод расчета сооружений на неподвижную нагрузку	72
2.4.1. Расчет балок (метод веревочного многоугольника)	72
2.4.2. Расчет ферм (диаграмма усилий Максвелла–Кремоны)	80
2.5. Методы расчета пространственных ферм	85
2.6. Контрольные вопросы	90
Заключение	93
Литература.....	94

Введение

Данное пособие предназначено студентам Уральского государственного профессионально-педагогического университета, обучающимся по специальности 030500 – Профессиональное обучение, специализациям 030510 – Технология и оборудование сварочного производства, 030532 – Организация сварочного производства.

Пособие содержит материал, который изучается в разделе “Элементы строительной механики в расчете сварных конструкций” рабочей программы курса “Сварные конструкции”.

В многообразии сварных конструкций выделяется группа строительных конструкций и сооружений. Расчет прочности таких конструкций и их элементов, в том числе сварных сооружений, основан на использовании методов строительной механики. Поэтому знание этих методов и умение применять их в практической деятельности являются элементами профессиональной состоятельности инженеров и инженеров-педагогов сварочной специализации.

Имеющиеся учебники по строительной механике предназначены студентам строительных специальностей. В них довольно широко и подробно излагаются методы расчета сооружений и их теоретические основы. Однако, объем информации в этих учебниках выходит за рамки программы подготовки инженеров-сварщиков. В то же время в учебниках по расчету и конструированию сварных конструкций информация о методах строительной механики представлена в ограниченном объеме, затрудняющем достаточно глубокое и эффективное освоение этих методов. Это и явилось побудительным мотивом для составления данного учебного пособия.

Учебное пособие состоит из двух разделов. Первый посвящен анализу расчетных схем сооружений. Второй – расчету усилий в элементах статически определимых сооружений.

Излагаемый материал иллюстрируется рисунками и примерами. В конце разделов приведены контрольные вопросы, которые могут быть использованы как студентами для самопроверки, так и преподавателями. В целях адаптации вопросов к рейтинговой системе оценок каждый из них характеризуется показателем уровня знаний.

Учитывая то, что студенты давно изучали сопротивление материалов и теоретическую механику, в процессе изложения курса “Сварные конструкции” напоминаются основные положения этих дисциплин, используемые в методах строительной механики.

В пособии приведен список рекомендуемой литературы, позволяющей студенту или будущему выпускнику в случае необходимости расширить и углубить свои знания в этой области.

1. АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ СООРУЖЕНИЙ

1.1. Базовые понятия и определения

Строительная механика занимается разработкой методов расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Сооружение является геометрически неизменяемой механической системой. В свою очередь механическая система – это совокупность твердых тел, в которой положение и движение каждого тела определяется положением и движением остальных.

Всякое реальное сооружение представляет собой сложную конструкцию, каждый элемент которой имеет свое назначение, не всегда связанное с обеспечением прочности сооружения. Кроме того, силовое взаимодействие отдельных элементов сооружения настолько сложно, что учесть его полностью бывает весьма затруднительно, а в ряде случаев невозможно. Создается необходимость рассматривать при расчетах не действительное сооружение, а его упрощенную расчетную схему.

Расчетной схемой сооружения называют идеализированную, упрощенную схему действительного сооружения, в которой отражаются только ее основные свойства и условия работы.

По мере накопления новых знаний о работе сооружения и взаимодействии его элементов, а также по мере совершенствования методов расчета переходят от одной расчетной схемы к другой, более точно отражающей реальные условия работы сооружения и обеспечивающей более точные расчеты.

В расчетных схемах реальные детали и части действительного сооружения заменяются совокупностью отдельных простых элементов: массивных, стержневых, пластинчатых.

Массивные элементы (параллелепипеды, тетраэдры и т. п.) характеризуются одинаковым порядком всех трех основных размеров.

Стержневые элементы (стержни) имеют большую длину по сравнению с размерами поперечного сечения.

У пластинчатых элементов (пластины в виде прямоугольников, либо треугольников) один размер (толщина) мал по сравнению с двумя другими (шириной и длиной).

Кроме вышеуказанных основных элементов в расчетную схему входят *элементы–связи* (кинематические связи). Они служат для соединения основных элементов, накладывают определенное ограничение на их взаимное положение и перемещение. Через связи передаются усилия взаимодействия соединяемых элементов, называемые *реакциями связей*. Соединение элементов в сооружении осуществляется в отдельных точках–узлах (*узловое соединение*) или с помощью жесткого стержня, сочлененного с соединяемыми элементами в узлах (*стержневое соединение*). Узловое соединение, в котором не возникает сил трения и реакции связи передаются строго через центр узла, называется *шарнирным соединением* (шарниром, идеальным шарниром). Связи, ограничивающие перемещение всего сооружения в целом, называются *опорами*.

1.2. Классификация расчетных схем сооружений

Различают пространственные, плоские сооружения и их расчетные схемы.

Пространственные сооружения имеют оси элементов, не лежащие в одной плоскости, и в ряде случаев могут быть расчленены на плоскостные.

Плоские сооружения состоят из элементов, осевые линии и действующие нагрузки которых расположены в одной плоскости.

Сооружения каждой из приведенных выше групп в свою очередь подразделяются:

- 1) по геометрическому типу элементов
 - на массивные, у которых три размера одного порядка,
 - стержневые, составленные из стержней (элементов, размеры поперечного сечения которых малы по сравнению с длиной),
 - пластинчатые, толщина элементов которых мала по сравнению с двумя другими измерениями;
- 2) по виду соединений в узлах
 - на сооружения с шарнирными узлами,
 - сооружения с жесткими соединениями элементов (стержневые сооружения, элементы которых во всех или в некоторых узлах жестко связаны между собой и которые теряют геометрическую неизменяемость, если все узлы заменены шарнирами, называются *рами* (см. п. 1.4); стержневые сооружения, остающиеся геометрически неизменяемыми, если в них все жесткие узлы заменены шарнирными, называются *фермами*);
- 3) по направлению опорных реакций
 - на безраспорные системы, в которых вертикальная нагрузка вызывает только вертикальные опорные реакции (балочные, консольные, консольно-балочные),
 - распорные системы, в которых вертикальная нагрузка вызывает наклонные опорные реакции (арочные, висячие или рамные; в арочных сооружениях система распор направлена к середине пролета, в висячих – наружу.);
- 4) по методу расчета усилий
 - на статически определимые, усилия в которых определяются только с помощью одних уравнений статики,
 - статически неопределимые, усилия в которых определяются с использованием дополнительных уравнений связности деформаций.

1.3. Опоры плоских и пространственных систем

Крепление сооружений к основанию осуществляется через опоры. Опоры плоских систем бывают четырех основных типов:

Первый тип – шарнирно-подвижная опора (рис. 1.1). Такая опора допускает вращение вокруг оси шарнира и поступательное перемещение по опорной плоскости. От действия силы P , приложенной к сооружению (балке B), возникает только одна опорная реакция R_a , нормальная к опорной плоскости.

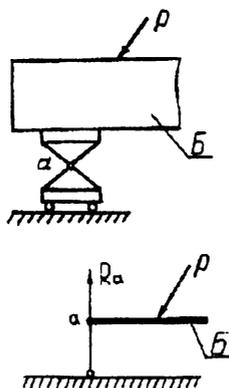


Рис 1.1

Второй тип – шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.2). Опора допускает вращение вокруг оси шарнира и не допускает линейных перемещений. От действия силы P , приложенной к сооружению, возникают две составляющие реакции: нормальная R_a и горизонтальная H_a .

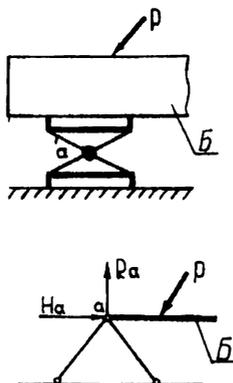


Рис 1.2

Третий тип – заземленная подвижная опора (рис. 1.3). Она допускает поступательное перемещение по опорной плоскости и препятствует повороту. От действия силы P , приложенной к сооружению, возникают нормальная реакция R_a и опорный момент M_a .

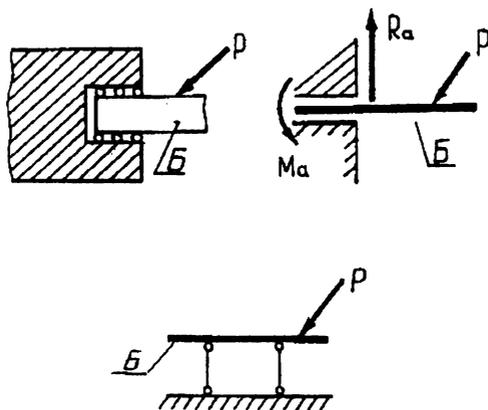


Рис 1.3

Четвертый тип – заземленная неподвижная опора (рис. 1.4). Опора не допускает никаких линейных перемещений и поворота. От действия силы P , приложенной к сооружению, возникают нормальная R_a и горизонтальная H_a реакции и опорный момент M_a .

Для пространственных систем используют опоры других типов.

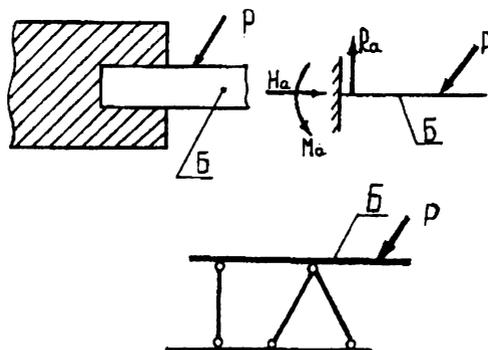


Рис 1.4

Подвижная цилиндрическая опора представляет собой опору, допускающую поворот вокруг оси цилиндра и поступательное перемещение вокруг опорной плоскости (рис. 1.5). Опорная реакция R действует в плоскости Z_0X и имеет две составляющие R_z и R_x .

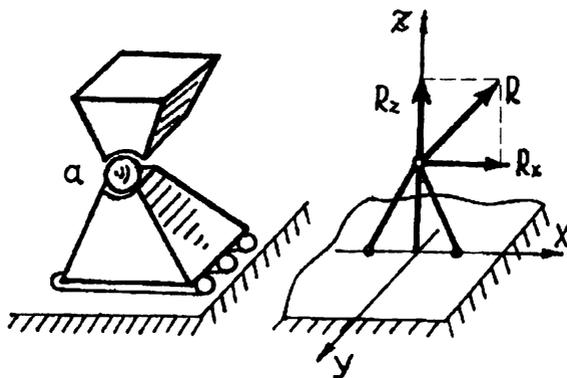


Рис 1.5

Подвижная шаровая опора допускает вращение вокруг любой оси, проходящей через центр шарового шарнира, и поступательное перемещение параллельно плоскости Y_0X (рис. 1.6). Опорная реакция R действует перпендикулярно плоскости Y_0X .

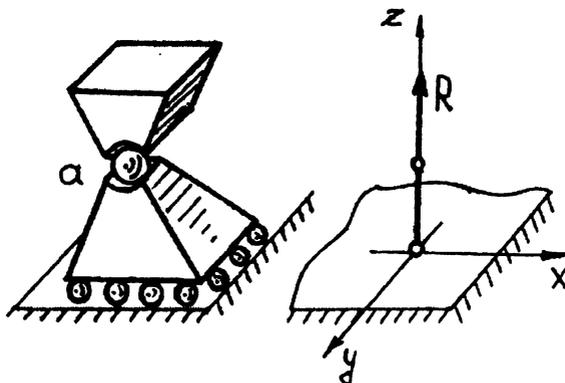


Рис 1.6

Неподвижная шаровая опора (рис. 1.7) допускает только вращение вокруг любой оси, проходящей через центр шарового шарнира. Опорная реакция R проходит через центр шарнира и имеет три составляющих: R_z , R_x и R_y .

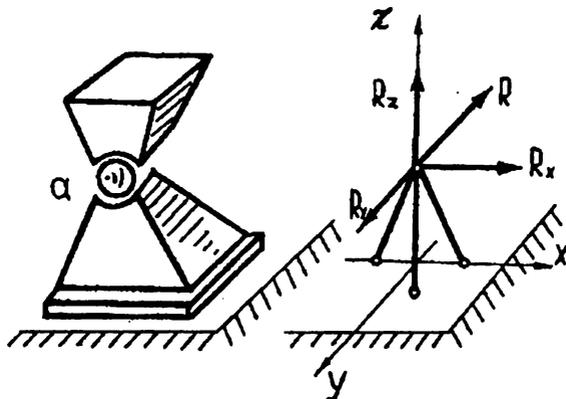


Рис 1.7

Опора с полным защемлением исключает любое перемещение (рис. 1.8). В опоре этого типа возникают три составляющие опорные реакции R_z , R_x , R_y и три опорных момента: M_z – в плоскости X_0Y , M_y – в плоскости Z_0X и M_x – в плоскости Z_0Y .

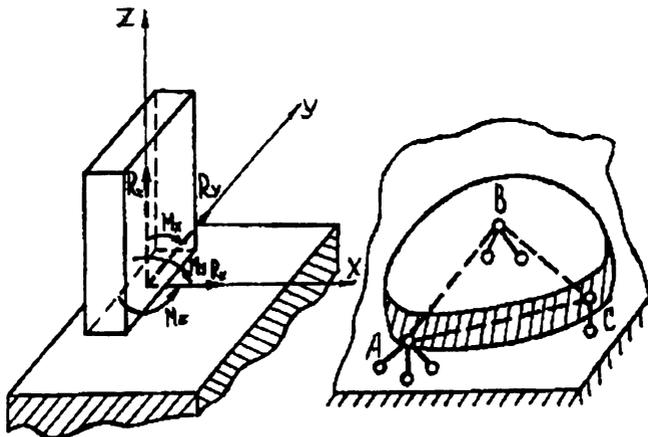


Рис 1.8

1.4. Кинематический анализ расчетных схем сооружений

1.4.1. Назначение кинематического анализа.

Соотношение между степенью свободы конструкции и элементами – связями в ней

Согласно определению, данному в п. 1.1, сооружение – это геометрически неизменяемая механическая система. С целью проверки геометрической неизменяемости и соответствующей корректировки конструкции выполняется кинематический анализ сооружения, т. е. анализ подвижности сооружения.

Система геометрически неизменяема, если взаимное перемещение ее точек может происходить только за счет деформации ее элементов. Геометрически неизменяемая система имеет нулевую степень свободы.

Под степенью свободы (числом степеней свободы) конструкции или ее элемента понимается число независимых геометрических перемещений, или число независимых координат относительно базовой системы отсчета (фундамента, стойки, станины, одного из элементов конструкции и т. п.).

Каждое твердое тело, находясь в пространстве, имеет шесть степеней свободы: координаты $X, Y, Z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, (рис. 1.9, а); а в плоскости – три степени свободы: координаты X, Y, α (рис. 1.9, б).

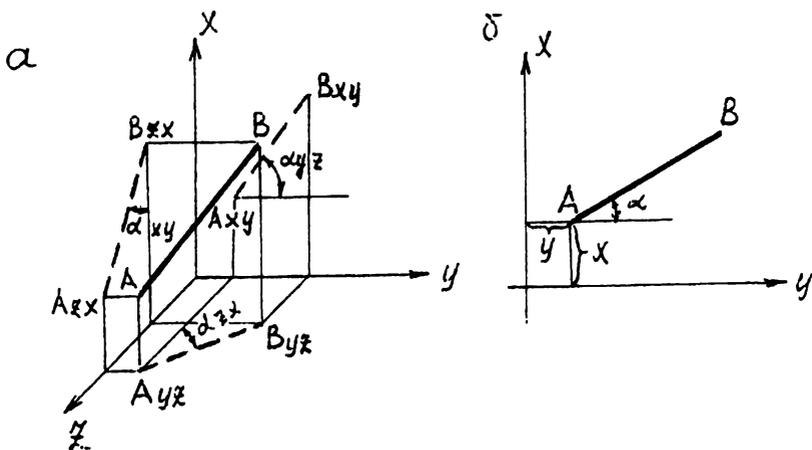


Рис 1.9

Если система состоит из k элементов, расположенных независимо друг от друга, то число степеней свободы H такой системы равно $6k$ в пространственной системе координат и $3k$ в плоской системе координат.

Рассмотрим свободно лежащий на плоскости элемент (пластину), имеющий по отношению к ней три степени свободы: X_A , Y_A , α (рис. 1.10, а).

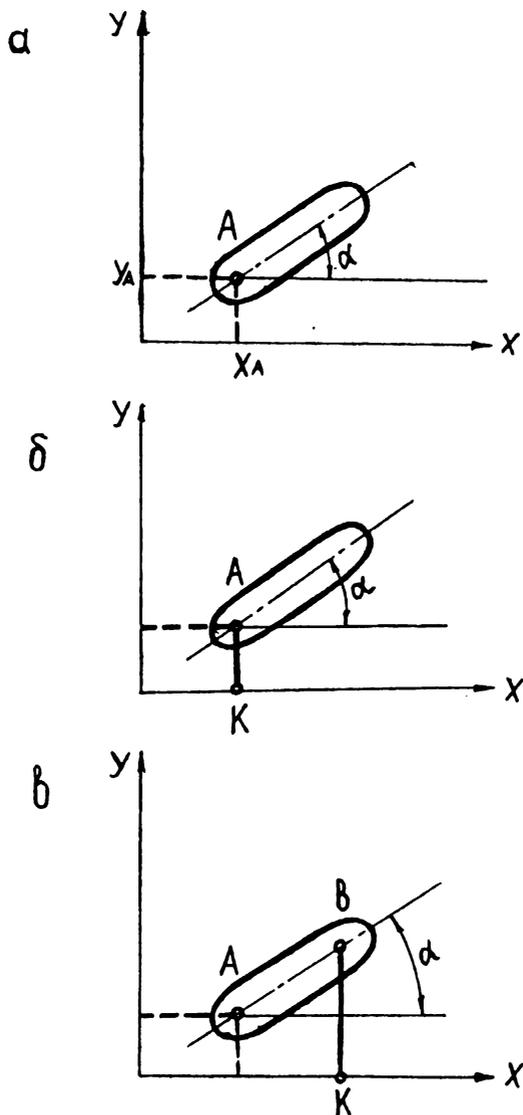


Рис 1.10

Соединим диск с плоскостью, т. е. с базовой системой координат, стержнем AK , сочлененным с диском и с плоскостью с помощью шарниров (рис. 1.10, б). В этом случае диск сможет перемещаться относительно плоскости по окружности радиусом AK и поворачиваться вокруг точки A , т. е. будут меняться координаты X_A, Y_A, α . Но из двух координат X_A и Y_A независима только одна, вторая же будет определяться первой. Значит, стержень как связь ограничивает одну степень свободы.

Если же элемент соединить с плоскостью шарниром в точке A , останется возможным лишь одно независимое перемещение – вращательное, определяемое координатой α . Следовательно, шарнир как связь ограничивает две степени свободы.

Таким образом, для того чтобы обеспечить геометрическую неизменяемость элемента относительно базовой плоскости, надо соединить элемент с ней шарниром в точке A и стержнем BK (рис. 1.10, в). В этом случае элемент лишится всех степеней свободы относительно базовой плоскости.

Из приведенных рассуждений следует, что число степеней свободы H определяется формулой вида

$$H = k - C - 2Ш, \quad (1.1)$$

где k – число простых элементов системы;

C – число опорных стержней;

$Ш$ – количество шарниров.

Шарниры, присоединяющие к базовой системе один элемент или соединяющие два отдельных элемента конструкции, называются *простыми*.

На практике встречаются шарниры, присоединяющие к базовой системе более одного элемента или соединяющие более двух отдельных элементов конструкции (рис. 1.11). Они называются *кратными*. Один кратный шарнир следует рассматривать как $i-1$ простых шарниров, где i – число элементов, соединяемых кратным шарниром, в которое включается базовая система.

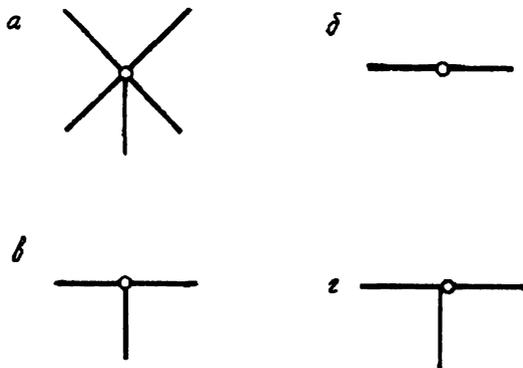


Рис 1.11

Если система состоит из III шарнирных узлов, то число простых шарниров III_0 в ней определяется так:

$$III_0 = i - III, \quad (1.2)$$

где $i = \sum_{j=1} i_j$;

i_j — это число элементов, соединяемых j -м шарниром.

Например, дана стержневая конструкция, состоящая из 9 стержней (основных элементов) и 6 шарниров (рис. 1.12).

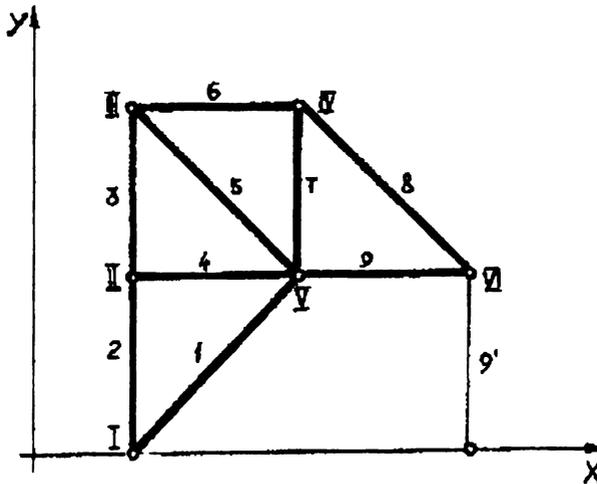


Рис 1.12

Конструкция прикреплена к базовой системе шарниром I и стержнем 9'. Все шарниры конструкции, кроме VI, кратные. Найдем количество простых шарниров, используя формулу (1.2):

$i_I = 3$ (стержень 1, 2 и базовая система);

$i_{II} = 3$ (стержни 2, 4, 3);

$i_{III} = 3$ (стержни 3, 5, 6);

$i_{IV} = 3$ (стержни 6, 7, 8);

$i_V = 5$ (стержни 9, 1, 4, 5, 7);

$i_{VI} = 2$ (стержни 8, 9; и стержень 9' здесь не является основным элементом системы, а выполняет функцию связи).

$$i = 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 2 = 19,$$

$$III_0 = i - III = 19 - 6 = 13.$$

Таким образом, в данной конструкции 13 простых шарниров.

Если стержень 9' считать основным элементом, то в рассматриваемой системе появляется еще один шарнир, соединяющий два элемента: стержень 9' и базовую систему. В шарнире VI в этом случае соединяются 3 элемента (стержни 9', 9 и 8). Тогда $Ш = 7$, $i = 22$, а число простых шарниров $Ш_0 = 22 - 7 = 15$.

Назовем базовую систему отсчета опорным элементом, а связи, ограничивающие перемещение расчетной системы (расчетной схемы конструкции) относительно опорного элемента, – *внешними связями*, связи между элементами конструкций – *внутренними*.

Конструкцию, имеющую внешние связи, будем называть *прикрепленной системой*, не имеющую внешних связей – *свободной системой*.

Следовательно, степень свободы прикрепленной системы *относительно опорного элемента* можно ограничить до нуля, а свободной – до 3, если она плоская, и до 6, если она пространственная. Тогда с учетом вышеизложенного применительно к плоским конструкциям соотношение между степенью свободы (или степенью подвижности) расчетной системы относительно опорного элемента и числом связей в ней может быть выражено следующим условием:

для прикрепленной системы

$$H = 3k - C - 2Ш_0 \geq 0, \quad (1.3)$$

для свободной системы

$$H = 3k - C - 2Ш_0 \geq 3, \quad (1.4)$$

или

$$H = 3k - C - 2Ш_0 - 3 \geq 0, \quad (1.4')$$

где H – степень свободы системы;

k – число элементов в системе (не включая опорный элемент);

C – число связей стержней в системе;

$Ш_0$ – число связей простых шарниров в системе.

1.4.2. Условия геометрической неизменяемости конструкции

Примером простейшей неизменяемости системы является шарнирный треугольник (рис. 1.13, а); простейшей изменяемой системы – шарнирный четырехугольник (рис. 1.13, б). Это системы, основными элементами которых служат стержни, а связями – шарниры.

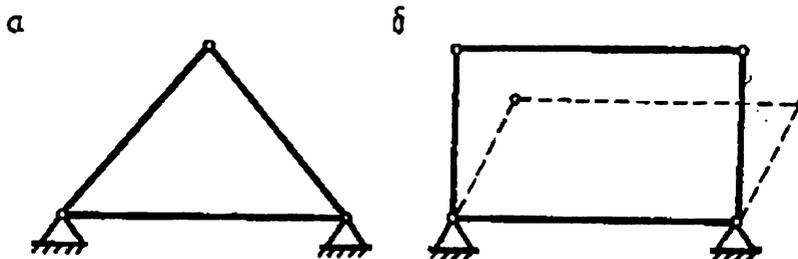


Рис 1.13

Согласно определению геометрически неизменяемые системы имеют нулевую степень свободы. Следовательно, учитывая (1.3) и (1.4), определяем, что необходимым условием геометрической неизменяемости сооружений будут соотношения:

для прикрепленной системы

$$3k - C - 2Ш_0 \leq 0, \quad (1.5)$$

для свободной системы

$$3k - C - 2Ш_0 - 3 \leq 0. \quad (1.6)$$

Если расчетная схема сооружения представляет собой стержневую систему (например, вышерассмотренные шарнирные треугольник и четырехугольник, и различные ферменные конструкции), состоящую из k основных элементов – стержней и $Ш$ элементов связей – шарнирных узлов, условие ее геометрической неизменяемости с учетом (1.1), (1.5) и (1.6) может быть представлено так:

а) применительно к прикрепленной системе

$$3k - C - 2Ш_0 \leq 0, \quad (1.7)$$

где $C = 0$, а $Ш_0 = 2k - Ш$.

Так как каждый стержень соединен с 2 шарнирами, то величина i в формуле (1.1) равна $2k$, т. е. (1.7) запишется так:

$$3k - 4k + 2Ш \leq 0,$$

или

$$-k + 2Ш \leq 0,$$

или

$$k \geq 2Ш; \quad (1.8)$$

б) применительно к свободной системе

$$-k + 2Ш_0 \leq 3,$$

или

$$k \geq 2Ш - 3. \quad (1.9)$$

Приведенные условия (1.5)–(1.9) являются необходимыми, но недостаточными для окончательного суждения о геометрической неизменяемости системы. Так конструкция, приведенная на рис. 1.14, отвечает условию (1.9), но не является геометрически неизменяемой.

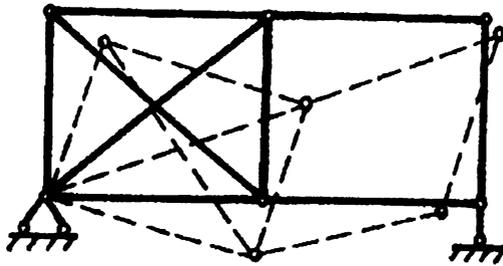


Рис 1.14

Кроме того, существуют варианты мгновенно изменяемых систем, т. е. систем, изменяемых лишь в первый момент приложения нагрузки. К ним относятся:

1. Система, состоящая из узла, прикрепленного к опорному элементу двумя стержнями, основные линии которых лежат на одной прямой (рис. 1.15, а). Узел *a* лежит на прямой, являющейся касательной в точке *a* к окружностям радиусом *va* и *sa*, поэтому может получить бесконечно малое смещение.

2. Система, состоящая из двух дисков, соединенных тремя стержнями, пересекающимися в одной точке (рис. 1.15, в). В этом случае возможно бесконечно малое смещение диска путем вращения его вокруг мгновенного центра *a*.

3. Система, состоящая из двух дисков, соединенных тремя параллельными стержнями (рис. 1.15, з). Эта система является вариантом предыдущей с точкой пересечения стержней, расположенной в бесконечности.

Если приложить нагрузку к таким системам, в них появляются достаточно большие усилия, вызывающие либо разрушения, либо значительные деформации.

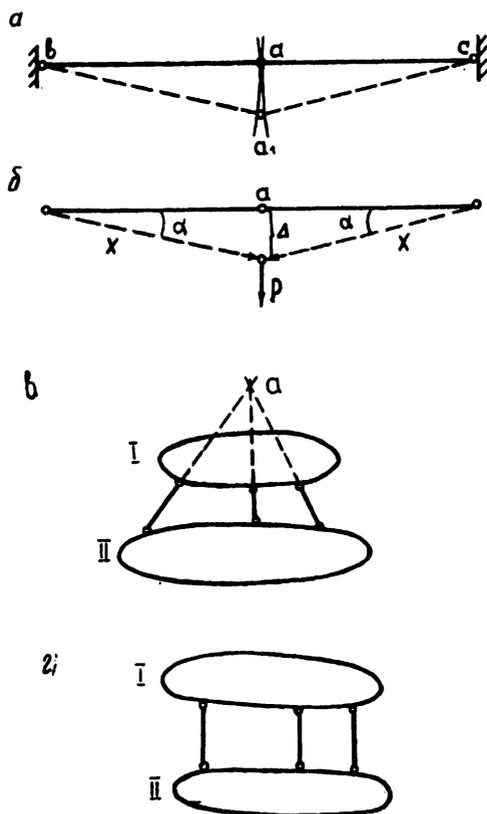


Рис 1.15

Допустим к системе, показанной на рис. 1.15, б, приложена в узле a ($ba = ac$) нагрузка P , которая вызовет мгновенное перемещение узла на бесконечно малую величину Δ , и стержни повернутся относительно точек b и c на бесконечно малый угол α . Величина P должна уравновеситься усилиями X в стержнях, т. е. $P = 2 X \sin \alpha$, откуда $X = P / (2 \sin \alpha)$.

Пока a – величина бесконечно малая, X – бесконечно большая. В результате действия силы P стержни будут удлиняться, α – увеличиваться, а X – уменьшаться до тех пор, пока в результате пластического удлинения стержней система не станет геометрически неизменяемой либо стержни не разрушатся.

Следовательно, для окончательного вывода о геометрической неизменяемости системы надо проверить возможность выполнения необходимых условий (1.5)–(1.9), затем провести анализ ее геометрической структуры, чтобы определить наличие *достаточных признаков геометрической неизменяемости*.

К последним, учитывая вышеизложенное, относятся:

1. Наличие не менее трех непараллельных связей между геометрически неизменяемыми элементами системы; направления этих связей не должны пересекаться в одной точке.

2. Отсутствие в системе трех шарниров, лежащих на одной прямой.

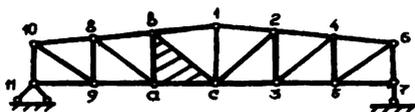
3. Присоединение каждого последующего узла стержневой системы к двум предыдущим двумя стержнями, осевые линии которых не лежат на одной прямой.

Последнему условию удовлетворяют, в частности, все простейшие фермы, составленные из шарнирных треугольников.

Так, представленная на рис. 1.16, а простейшая ферма с раскосной решеткой составлена путем присоединения к шарнирам b и c базового геометрически неизменяемого треугольника abc шарнира 1 двумя пересекающимися стержнями (образовался новый шарнирный треугольник $bc1$). Затем таким же образом к шарнирам c и 1 присоединяется шарнир 2 и т. д. до узла 11. В результате образуется геометрически неизменяемая шарнирная ферма.

На рис. 1.16, б изображена вантовая ферма (ее стержни (ванты) – нежесткие элементы, работающие только на растяжение). Узел a прикреплен к узлам b и c базовой системы двумя стержнями; к узлам a и b последовательно прикрепляются узлы 1, 2 и 3, а к узлам a и c – узлы 4, 5 и 6; к узлам 0 и 6 прикрепляется узел 7, к узлам 5 и 7 – узел 8 и т. д. до узла 14. Узел 14 прикрепляется к узлу 15 базовой системы и к узлу 13.

а



б

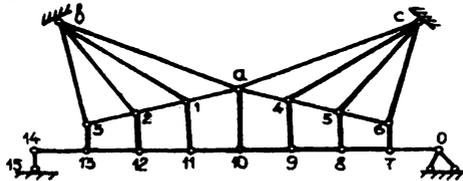


Рис 1.16

При анализе геометрической структуры сооружения часто используют способ замены связей. На рис. 1.17, а представлена геометрически неизменяемая система, состоящая из двух дисков. Очевидно, что треугольник $1a2$ можно отнести к нижнему диску II, к которому узел a крепится двумя стержнями $a1$ и $a2$. В результате получается соединение двух дисков шарниром a и стержнем ac , образующими так называемый *фиктивный* треугольник avc . При этом диск I заменен одним стержнем av , а диск $a12c$ – стержнем ac .

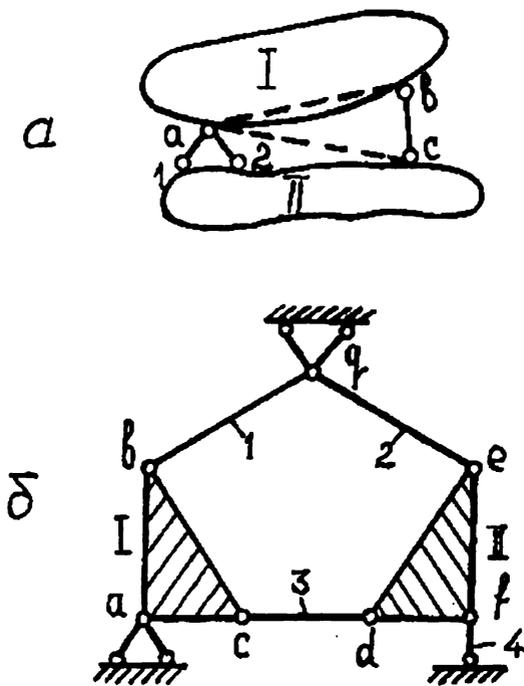


Рис 1.17

На рис. 1.17, б показана шарнирно-стержневая система. Заменяем шарнирные треугольники avc и def дисками I и II.

Диск I прикреплен к базовой системе шарниром a и стержнем 1. Или шарнир v присоединен к шарнирам a и q базовой системы стержнем 1 и диском (стержнем) I. Таким образом, выполняется третий достаточный признак геометрической неизменяемости.

Диск II к неизменяемой левой части и к базовой системе присоединен тремя стержнями 2, 3 и 4, не пересекающимися в одной точке. Здесь выполняется первый достаточный признак.

1.5. Статический анализ расчетных схем сооружений (статически определяемые и статически неопределимые сооружения)

Любой расчет сооружений связан с определением в заданных сечениях внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия приложенных к сооружению и его элементам внешних сил. Для этого необходимо знать величину и схему приложения последних.

Внешние силы, как известно, включают активные силы и реакции связей. Величина и схемы приложения первых задаются условиями эксплуатации сооружения.

Число реакций связей равно числу внешних и внутренних связей, имеющих в конструкции сооружения. А их направления противоположны направлениям возможных перемещений.

Величина реакций связей, как и внутренних усилий, рассчитывается с помощью системы независимых уравнений равновесия, содержащих неизвестные усилия и реакции связей.

Если все неизвестные усилия или реакции связей в расчетной схеме данного сооружения могут быть найдены с помощью уравнений равновесия, то сооружение называется *статически определяемым*. Если это условие не выполняется, сооружение называется *статически неопределимым*.

Для расчета усилий или реакций для статически неопределимых сооружений составляются дополнительные уравнения – *уравнения перемещений*, из условия равенства нулю перемещений по направлению усилия или реакции связи.

Следовательно, для статически определяемых и статически неопределимых сооружений используются различные методы расчета. Поэтому перед выполнением расчетов необходимо определить, к какому из двух типов относится расчетное сооружение.

Известно, что в любом сечении элемента плоской конструкции может быть не более трех неизвестных усилий (продольные, поперечные усилия и изгибающий момент). Известно также, что для плоских конструкций можно составить не более трех независимых уравнений равновесия. Следовательно, по отношению к внутренним усилиям любое сооружение является статически определяемым.

Количество связей и их реакций не ограничено и определяется конструкцией сооружения. Значит, статическая определяемость сооружения зависит от количества связей, заложенных в данной конструкции.

Если плоская конструкция состоит из одного элемента, то в ней могут быть только внешние связи и, следовательно, реакции внешней связи. Условием статической определяемости такой конструкции является неравенство

$$3 \geq C + 2Ш_0 \quad (1.10)$$

или

$$3 - C - 2Ш_0 \geq 0, \quad (1.10')$$

т.е. количество связей (следовательно, реакций связей) должно быть не более трех (количество независимых уравнений равновесия). Но если $C + 2Ш_0 < 3$, то конструкция является геометрически изменяемой. Поэтому условие статической определимости плоского сооружения, состоящего из одного элемента, имеет вид

$$3 = C + 2Ш_0. \quad (1.11)$$

Если конструкция состоит из k элементов, объединенных внутренними связями, то расчет любого из элементов выполняется путем выделения его из общей схемы и замены приложенных к нему внутренних и внешних связей усилиями, равными векторам реакции этих связей. Так как для каждого элемента можно составить три независимых уравнения равновесия, то для всей конструкции число таких уравнений будет равно $3k$.

Следовательно, общее условие статической определимости сооружения из k элементов, прикрепленного к базовой системе отсчета внешними связями, записывается так:

$$3k = C + 2Ш_0, \quad (1.12)$$

или

$$3k - C - 2Ш_0 = 0, \quad (1.13)$$

где $(C + 2Ш_0)$ – число внутренних и внешних связей сооружения.

Удалив у прикрепленной системы внешние связи, количество которых, если она статически определима, согласно (1.10) равно 3, получим свободную систему.

Количество связей полученной свободной системы равно

$$C_{св} + 2Ш_{осв} = C + 2Ш_0 - 3.$$

Исходя из этого, условие (1.13) можно записать так:

$$3k - C_{св} - 2Ш_{осв} - 3 = 0. \quad (1.14)$$

Условие (1.14) – это условие статической определимости неприкрепленного (свободного) сооружения.

Из сравнения условий (1.5)–(1.14) следует, что всякая геометрически неизменяемая система, не содержащая лишних связей, статически определима.

Количество лишних связей определяет степень статической неопределимости и количество дополнительных уравнений.

1.6. Классификация нагрузок и методика их расчета

1.6.1. Классификация нагрузок

Различают следующие *виды нагрузок*:

1) по характеру действия во времени

- статические нагрузки, т. е. не изменяющиеся во времени, передающиеся на сооружение спокойно, плавно, без толчков и вибраций. Считают, что они медленно возрастают от нуля до конечного значения;
- динамические нагрузки, т. е. быстро изменяющиеся во времени. При расчете сооружений на динамические нагрузки необходимо учитывать силы инерции и динамические эффекты действия нагрузки;

2) по способу приложения

- сосредоточенные нагрузки – нагрузки, приложенные в одной точке (на площадке со сторонами не более 10 см);
- сплошные (распределенные) нагрузки, т. е. распределенные непрерывно по данной площади (поверхностные) или по данной линии (линейные). Линейная сплошная нагрузка характеризуется интенсивностью, т. е. величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины в данной точке. Поверхностная сплошная нагрузка характеризуется величиной нагрузки, действующей на единицу поверхности в данной точке. *Если указанные характеристики имеют постоянное значение на всей длине или площади распределения сплошной нагрузки, то такая сплошная нагрузка называется равномерно распределенной;*

3) по назначению

- постоянные нагрузки, включающие в себя вес частей сооружения, в том числе вес несущих и ограждающих строительных конструкций; а также усилия от предварительного напряжения;
- временные длительные нагрузки, к которым относятся: вес временных перегородок, вес стационарного оборудования, вес складированных материалов, давление газов, жидкостей и сыпучих тел в емкостях и трубопроводах, воздействия, обусловленные деформациями оснований;
- временные кратковременные нагрузки, т. е. нагрузки от оборудования в пусконаладочном, переходном и испытательном режимах, нагрузки от подвижного подъемно-транспортного оборудования, снеговые, ветровые, гололедные нагрузки;
- временные особые нагрузки, состоящие из сейсмических воздействий, взрывных воздействий, аварийных нагрузок.

В случае совместного действия вышеуказанных нагрузок различают:

- основные сочетания из постоянных, временных длительных и одной временной кратковременной нагрузок;
- дополнительные сочетания из постоянных, временных длительных и более одной временной кратковременной нагрузок;
- особые сочетания из постоянных, временных длительных, временных кратковременных (более одной) и одной особой нагрузок.

4) по стационарности действия

- подвижные нагрузки, положение которых на сооружении изменяется со временем;
- неподвижные нагрузки (стационарные), положение которых остается постоянным в течение всего времени эксплуатации.

1.6.2. Методика расчета нагрузок

Согласно действующим строительным нормам и правилам (СниП 2.01.07–85 “Нагрузки и воздействия”) при проектировании сварных конструкций необходимо учитывать нагрузки, возникающие при возведении и эксплуатации сооружения, а также при изготовлении, хранении и перевозке конструкций.

Основными характеристиками этих нагрузок являются их нормативные значения, принимаемые или рассчитываемые согласно СниПу 2.01.07–85, или задаваемые условиями эксплуатации сварной конструкции (на основе весовых характеристик материала сооружения, расположенных на нем материалов оборудования, станков, инвентаря, а также характеристик других действующих усилий). При этом нагрузки от веса конструкции или ее частей рассматриваются как сплошные распределенные нагрузки; нагрузки от оборудования, материала, временных перегородок и т. п. рассматриваются как сплошные распределенные с нормативным значением не менее 20–30 кН/м², если они занимают площадь со сторонами более 10 см, в противном случае они считаются сосредоточенными.

В проектных расчетах используются *расчетные значения нагрузок*, которые определяются на основе нормативных с учетом коэффициента надежности по нагрузке γ_f . Величина этого коэффициента зависит от вида нагрузки.

При сочетании различных нагрузок, включающих постоянные и временные (не менее двух), расчетные значения временных нагрузок или соответствующие им усилия следует умножить на коэффициенты сочетаний:

$$\psi_1 = 0,95 \text{ для длительных временных нагрузок;}$$

$$\psi_2 = 0,9 \text{ для кратковременных нагрузок.}$$

Коэффициенты надежности по нагрузке на прочность и устойчивость принимаются:

для веса конструкций

$\gamma_f = 1,05$, если усилие от собственного веса $\leq 50\%$ общих усилий;

$\gamma_f = 1,1$, если усилие от собственного веса $> 50\%$ общих усилий;

для нагрузок от оборудования, складываемых материалов и т. п.

$\gamma_f = 1,05$ для стандартного оборудования;

$\gamma_f = 1,1$ для сыпучих тел;

$\gamma_f = 1,2$ для погрузчиков и электрокаров;

для равномерно распределенных нагрузок

$\gamma_f = 1,3$ при полном нормативном значении $< 2,0$ кПа;

$\gamma_f = 1,2$ при полном нормативном значении $\geq 2,0$ кПа;

для крановых нагрузок

$\gamma_f = 1,1$

(динамическое воздействие вертикальных нагрузок от погрузчиков и электрокаров допускается учитывать путем умножения на коэффициент динамичности K_d , равный 1,2, а от действия вертикальных нагрузок мостовых и подвесных кранов – на коэффициент динамичности, равный 1,1–1,2 при шаге колонн до 12 м и равный 1,0–1,1 при шаге колонн более 12 м);

для снеговой нагрузки

$\gamma_f = 1,6$, когда вес покрытия (включая вес стационарного оборудования) $\leq 0,8$ от веса снегового покрова;

$\gamma_f = 1,4$ в остальных случаях;

для ветровой нагрузки

$\gamma_f = 1,4$;

для гололедной нагрузки

$\gamma_f = 1,3$;

для температурной нагрузки

$\gamma_f = 1$.

Линейная нормативная нагрузка q_n , передаваемая на балку или ферму от распределенной по площади нагрузки q , определяется по формуле

$$q_n = q \times B, \quad (1.15)$$

где q – нормативная распределенная по площади нагрузка, кН/м² (кПа);

B – шаг стропильной фермы или балки, м.

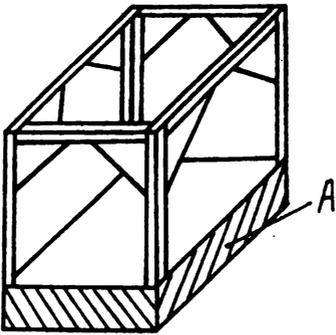
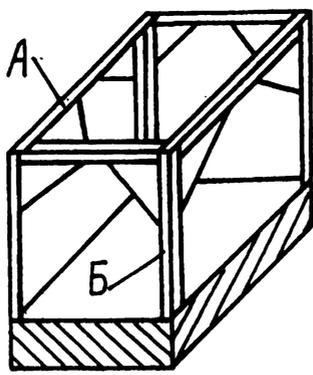
Линейная нагрузка q_n^k , передаваемая на балку или ферму от веса q_b кровли, расположенной под углом α к горизонту, определится по формуле

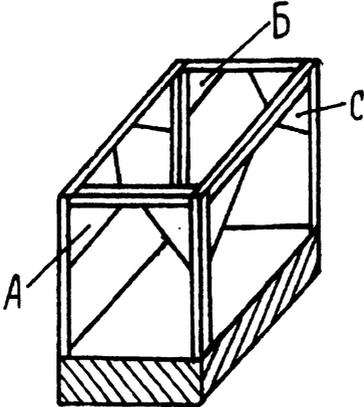
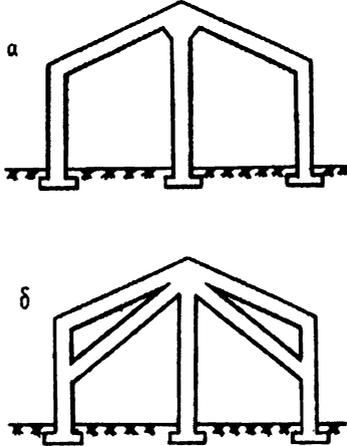
$$q_n^k = q_b \times B / \cos \alpha, \quad (1.16)$$

где q_b – вес одного м² кровли, кН/м² (кПа);

α – угол наклона кровли к горизонту, град.

1.7. Контрольные вопросы

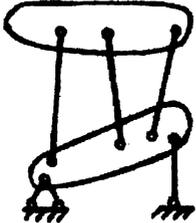
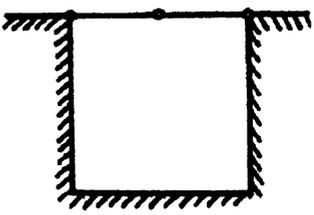
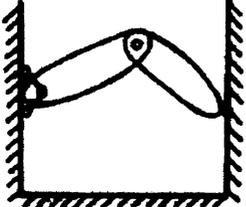
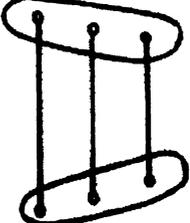
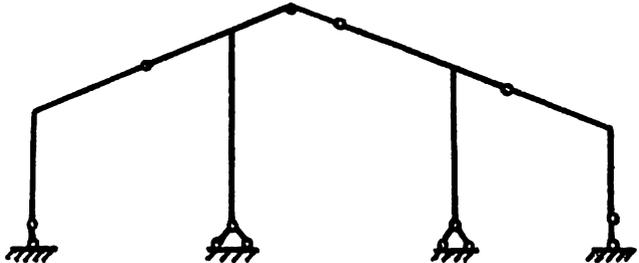
Номер п/п	Номер и название раздела, вопросы к нему	Уровень сложности вопроса
1	2	3
1.2. Классификация расчетных схем сооружений		
1	Дать определение сооружения.	2
2	Дать определение расчетной схемы сооружения.	2
3	К какому геометрическому типу относится элемент <i>A</i> сооружения и почему?	1
		
4	К какому геометрическому типу относятся элементы <i>A</i> и <i>Б</i> сооружения и почему?	1
		

1	2	3
5	<p>К какому геометрическому типу относятся элементы <i>А</i>, <i>Б</i> и <i>С</i> сооружения и почему?</p> 	1
6	<p>Какая из приведенных ниже конструкций ферменная, а какая рамная?</p> 	1
7	<p>Чем отличаются пространственные расчетные схемы от плоских расчетных схем?</p>	3
8	<p>Чем отличаются безраспорные расчетные схемы от распорных расчетных схем?</p>	3
9	<p>Какие сооружения называются фермами?</p>	2
10	<p>Какие сооружения называются рамами?</p>	2

1	2	3
	1.3. Опоры плоских и пространственных сооружений	
1	Перечислить типы опор плоских сооружений (систем).	2
2	<p>Выбрать правильный ответ.</p> <p>В шарнирно подвижной опоре плоского сооружения возникает:</p> <p>1) одна вертикальная реакция;</p> <p>2) одна вертикальная и две горизонтальные реакции;</p> <p>3) одна горизонтальная и одна вертикальная реакция.</p>	1
3	<p>Выбрать правильный ответ.</p> <p>В шарнирно неподвижной опоре плоского сооружения возникает:</p> <p>1) одна вертикальная реакция;</p> <p>2) одна вертикальная и одна горизонтальная реакции;</p> <p>3) одна вертикальная реакция и опорный момент.</p>	1
4	В какой опоре плоского сооружения возникают нормальная (вертикальная) реакция и опорный момент?	1
5	В какой опоре плоского сооружения возникают нормальная, горизонтальная реакции и опорный момент?	1
6	Перечислить типы опор пространственных сооружений.	2
7	Какие опорные реакции возникают в подвижной шаровой опоре?	2
8	Какие опорные реакции возникают в неподвижной шаровой опоре?	2
9	<p>Выбрать правильный ответ.</p> <p>Опора с полным защемлением для пространственного сооружения имеет:</p> <p>1) вертикальную опорную реакцию и две горизонтальные опорные реакции;</p> <p>2) вертикальную опорную реакцию и две горизонтальные опорные реакции и один опорный момент;</p> <p>3) вертикальную и две горизонтальные опорные реакции и три опорных момента.</p>	1
10	<p>Выбрать правильный ответ.</p> <p>Подвижная цилиндрическая опора пространственного сооружения имеет:</p> <p>1) вертикальную опорную реакцию и две горизонтальных опорных реакции;</p> <p>2) одну горизонтальную и одну вертикальную опорные реакции;</p> <p>3) вертикальную и две горизонтальные опорные реакции и три опорных момента.</p>	1

1	2	3
	1.4 и 1.5. Кинематический и статический анализ расчетных схем сооружений	
1	Дать определение кинематических связей.	2
2	Дать определение числа степеней свободы.	2
3	Сколько степеней свободы может иметь любое тело в пространстве (максимальное и минимальное значение)?	2
4	Сколько степеней свободы может иметь любое тело на плоскости (максимальное и минимальное значение)?	2
5	Какие из приведенных ниже значений верны? 1. Стержень как кинематическая связь ограничивает две степени свободы. 2. Стержень как кинематическая связь ограничивает одну степень свободы. 3. Шарнир ограничивает две степени свободы. 4. Шарнир ограничивает одну степень свободы.	1
6	Какие из приведенных ниже утверждений верны? 1. Простой шарнир соединяет два элемента системы. 2. Простой шарнир соединяет более двух элементов системы. 3. Кратный шарнир соединяет два элемента системы. 4. Кратный шарнир соединяет более двух элементов системы.	1
7	Сколько простых шарниров содержится в узле, где сходятся четыре элемента?	3
8	Какое из утверждений правильное? $H = 3k - C - 2Ш_0 \geq 3,$ где k – число элементов системы; C – число связей – стержней; $Ш_0$ – число связей – простых шарниров. 1. Это соотношение между степенью свободы и числом связей прикрепленной системы. 2. Это соотношение между степенью свободы и числом связей свободной системы.	1
9	Какое из утверждений правильное? $H = 3k - C - 2Ш_0 \geq 0,$ где k – число элементов системы; C – число связей – стержней; $Ш_0$ – число связей – простых шарниров. 1. Это соотношение между степенью свободы и числом связей прикрепленной системы. 2. Это соотношение между степенью свободы и числом связей свободной системы.	1

1	2	3
10	Какие сооружения являются геометрически неизменяемыми?	2
11	Записать необходимое условие геометрической неизменяемости прикрепленной системы.	2
12	Записать необходимое условие геометрической неизменяемости свободной системы.	2
13	<p>Какое из утверждений правильное?</p> <p>1. Шарнирный треугольник – простейшая геометрически неизменяемая система.</p> <p>2. Шарнирный четырехугольник – простейшая геометрически неизменяемая система.</p> <p>3. Шарнирный треугольник – простейшая геометрически изменяемая система.</p> <p>4. Шарнирный четырехугольник – простейшая геометрически изменяемая система.</p>	1
14	<p>К свободной или прикрепленной стержневой системе относится необходимое условие геометрической неизменяемости в виде</p> $k \geq 2Ш,$ <p>где k – число элементов системы – стержней; $Ш$ – число шарнирных узлов в системе?</p>	1
15	<p>К свободной или прикрепленной стержневой системе относится необходимое условие геометрической неизменяемости в виде:</p> $k \geq 2Ш - 3,$ <p>где k – число элементов системы – стержней; $Ш$ – число шарнирных узлов в системе?</p>	1
16	Перечислить варианты мгновенно изменяемых систем.	2
17	Перечислить достаточные признаки геометрической неизменяемости систем.	2
18	Какие формы называются простейшими.	2
19	<p>Какое из утверждений верно?</p> <p>Для нахождения неизвестных усилий или опорных реакций в статически определимых сооружениях требуются:</p> <p>1) кроме уравнений равновесия, дополнительные уравнения;</p> <p>2) только уравнения равновесия.</p>	1
20	Написать условие статической определимости прикрепленной системы.	2
21	Написать условие статической определимости свободной системы.	2

1	2	3
22	<p>Какие из нижеприведенных расчетных схем мгновенно изменяемы?</p> <div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p>1</p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p>2</p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p>3</p>  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;"> <p>4</p>  </div> </div>	3
23	<p>Оцените статическую определенность расчетной схемы сооружения.</p> 	4
24	<p>Оцените геометрическую неизменяемость данной расчетной схемы.</p> 	4

1	2	3
	<i>1.6. Классификация нагрузок и методика их расчета</i>	
1	Как различают нагрузки по характеру действия во времени?	2
2	Как различают нагрузки по способу приложения?	2
3	Как различают нагрузки по назначению?	2
4	Какие распределенные нагрузки называются поверхностными и какие линейными?	3
5	На балку опирается перегородка весом 2000 Н и длиной 5 м. Какова интенсивность действующей на балку нагрузки?	3
6	<p>Какое из утверждений правильно?</p> <p>1. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки изменяется по длине отрезка ее приложения.</p> <p>2. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки постоянна на всей длине отрезка ее приложения.</p>	3
7	На балку действуют нагрузки от стеллажа, электрокара, перегородки длиной 3 м и насыпного конуса песка. Дать полную характеристику этих нагрузок.	2
8	Чем отличаются расчетные нагрузки от нормативных нагрузок?	3

2. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООРУЖЕНИЙ

2.1. Аналитические и графические методы расчета (основные принципы, преимущества, недостатки, области применения)

При расчете усилий в элементах сооружений используют один из двух основных методов: *аналитический* или *графический*.

Аналитический, или расчетный, метод основан на использовании условий равновесия (уравнений равновесия) и правила РОЗУ. Правило РОЗУ представляет собой алгоритм, включающий следующие этапы:

1) *условное рассечение (разрезание) сооружения так, чтобы в сечение попал элемент, усилия в котором определяются;*

2) *условное отделение одной из полученных частей (левой или правой) так, чтобы в оставшуюся часть вошло меньшее число нагрузок (внешних сил);*

3) *замена отделенной части усилиями, эквивалентными ее действию на оставшуюся;*

4) *составление уравнений равновесия оставшейся части, из которых находят искомые усилия.*

Графический метод основан на использовании свойств векторов сил, свойств и метода графического построения многоугольника системы сил, находящейся в равновесии.

Каждый из рассмотренных методов обладает своими достоинствами и недостатками, которые и определяют их область применения.

Аналитический метод обеспечивает высокую точность и надежность расчетов, однако при анализе сложных сооружений, работающих в условиях большого количества и многообразия нагрузок, он является наиболее трудоемким и требует много времени.

Графический метод относительно прост, обеспечивает получение результатов при значительно меньших затратах времени, но результаты его менее точны и надежны.

Отмеченный недостаток аналитического метода устраняется сегодня благодаря широкому использованию в инженерной практике средств вычислительной техники (ПЭВМ). Однако в отдельных специфических условиях, исключающих возможность использования вычислительной техники, графический метод может оказаться эффективным средством для анализа прочности сооружения.

2.2. Аналитический метод расчета сооружений на неподвижную нагрузку

2.2.1. Общий алгоритм аналитического расчета

Алгоритм аналитического расчета включает следующие основные этапы:

- изображение в масштабе расчетной схемы сооружения с расположением на ней расчетных нагрузок в соответствии с заданными условиями;
- расчет опорных реакций;
- определение искомых усилий в заданном элементе сооружения с помощью правила РОЗУ.

Опорные реакции раскладываются на вертикальную и горизонтальную составляющие и определяются из соответствующих уравнений равновесия.

При составлении уравнений равновесия может быть использована согласно положениям теоретической механики одна из следующих систем:

$$\sum_i F_{x,i} = 0; \sum_i F_{y,i} = 0; \sum_i M_O(F_i) = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum_i F_{x,i} = 0; \sum_i M_A(F_i) = 0; \sum_i M_B(F_i) = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum_i M_A(F_i) = 0; \sum_i M_B(F_i) = 0; \sum_i M_C(F_i) = 0, \quad (2.3)$$

где $F_{x,i}$ и $F_{y,i}$ – проекции i -й силы, приложенной к сооружению (включая опорные реакции), соответственно на оси X и Y ;

$M_O(F_i)$, $M_A(F_i)$, $M_B(F_i)$ и $M_C(F_i)$ – моменты i -й силы относительно точек соответственно O , A , B , C .

При составлении уравнений (2.1)–(2.3) применяется любое правило знаков, но единое для всех сил, входящих в данное уравнение. Направление опорных реакций предварительно устанавливается тоже любое. Знак “минус” в значении опорной реакции, полученный в результате решения уравнений, означает, что на самом деле направление этой реакции противоположно первоначально принятому.

При составлении вышеприведенных систем должны соблюдаться следующие условия:

- для (2.1) точка O на плоскости выбирается произвольно;
- для (2.2) точки A и B должны лежать на линии, не перпендикулярной оси X ;
- для (2.3) точки A , B и C не должны лежать на одной прямой.

Одним из основных этапов прочностных расчетов является определение внутренних усилий в заданном сечении сооружения. К таким усилиям относятся, как известно из сопротивления материалов, продольные усилия, поперечные усилия, изгибающие и крутящие моменты. Излагаемые в данном разделе методы аналитических расчетов сооружений предназначены для определения величины и направления этих усилий.

Для успешного усвоения этих методов вспомним следующие определения и правила:

1. Продольное (нормальное) усилие в поперечном сечении балки (стержня) равно алгебраической сумме проекций на ось балки внешних сил, расположенных по одну или по другую сторону от сечения балки.

2. Поперечное (перерезывающее) усилие в поперечном сечении балки (стержня) равно алгебраической сумме вертикальных по отношению к оси балки проекций внешних сил, расположенных по одну или другую сторону от сечения.

3. Изгибающий момент относительно нейтральной оси поперечного сечения балки (стержня) равен алгебраической сумме моментов относительно этой оси всех внешних сил и пар сил, расположенных по одну или по другую сторону от сечения.

4. При составлении уравнения равновесия начало координат располагается, как правило, на левой или на правой опоре балки. Ось X направлена влево или вправо относительно оси балки. Направление оси Y вверх будет являться положительным.

5. При определении внутренних усилий вместо уравнений (2.1)–(2.3) составляют уравнения следующего вида:

$$N = \sum_i F_{n,i}, \quad (2.4)$$

$$Q = \sum_i F_{q,i}, \quad (2.5)$$

$$M = \sum_i M(F_i), \quad (2.6)$$

где N , Q и M – соответственно продольное, поперечное усилие и изгибающий момент в сечении;

$F_{n,i}$, $F_{q,i}$ и $M(F_i)$ – соответственно продольные и поперечные проекции внешней i -й силы и момент внешней i -й силы относительно нейтральной оси сечения. При этом рассматриваются внешние силы, расположенные по одну или по другую сторону сечения.

Расстановка знаков в правых частях выражений (2.4)–(2.6) выполняется по следующим правилам:

- выражению (2.4) присваивается знак “минус”, если внешняя сила $F_{n,i}$ направлена к сечению (т.е. сжимает балку); знак “плюс” – если сила направлена от сечения (т.е. растягивает балку). Если вычисленное значение продольного усилия N получилось с отрицательным знаком, значит, оно направлено к сечению, если с положительным знаком – то от сечения;

- в выражение (2.5) все силы $F_{q,i}$, совпадающие по направлению с вертикальной осью координат (осью Y), входят со знаком “плюс”, если рассматривается левая от сечения часть балки; со знаком “минус” – если рассматривается правая от сечения часть балки. Соответственно положительный вектор Q в сечении для левой части балки противоположен направлению вертикальной оси координат, а для правой – совпадает с направлением вертикальной оси;

• если в (2.6) изгибающий момент от внешней силы относительно нейтральной оси сечения $M(F_i)$ изгибает балку выпуклостью вниз, ему присваивается знак “плюс”, если выпуклостью вверх – знак “минус” (рис. 2.1).

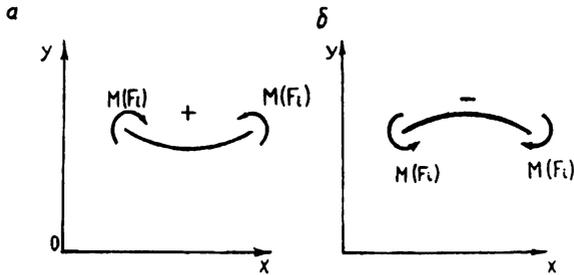


Рис. 2.1

2.2.2. Расчет балок

Пусть дана расчетная схема статически определимой балки с нагрузками $P_1 = 100\text{кН}$, $P_2 = 200\text{кН}$ и $M = 100\text{кН}\cdot\text{м}$, и $q = 50\text{кН/м}$ на длине $l = 2\text{м}$. Длина пролета $L = 6\text{м}$, длина консоли $l = 1\text{м}$. Требуется найти в сечении балки C поперечное усилие Q_c и изгибающий момент M_c .

1. Расчетная схема балки, вычерченная в масштабе 1:50 приведена на рис. 2.2.

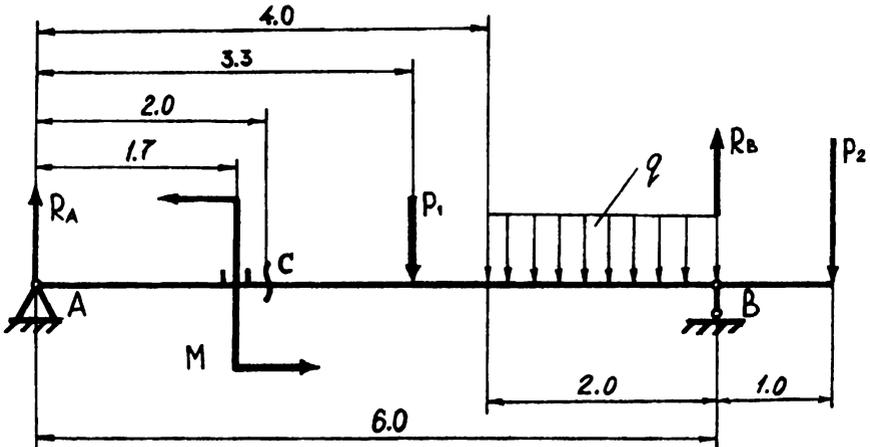


Рис. 2.2

2. Рассчитаем опорные реакции. По формуле (2.2) находим R_A и R_B :

$$R_A = \frac{P_1 \cdot 2,7 + q \cdot 2 \cdot 1 - P_2 + \mu}{6} = \frac{100 \cdot 2,7 + 50 \cdot 2 \cdot 1 - 200 \cdot 1 + 100}{6} = 45 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{-\mu + P_1 \cdot 3,3 + q \cdot 2 \cdot 5 + P_2 \cdot 7}{6} = \frac{-100 + 100 \cdot 3,3 + 50 \cdot 2 \cdot 5 + 200 \cdot 7}{6} = 355 \text{ кН}.$$

Горизонтальная составляющая опорной реакции R_A равна нулю, так как все силы приложены перпендикулярно к оси балки.

3. Определим исходные усилия в сечении C , используя правило РОЗУ. Условно рассечем балку по сечению C . Отделим правую от сечения часть балки C . В оставшейся левой части действует меньшее количество нагрузок, чем в правой. Заменяем действие правой отделенной части на левую часть эквивалентными усилиями, приложенными к сечению C . Это усилия Q_c – поперечные, и момент M_c (рис. 2.3). Они являются искомыми усилиями. Продольного усилия нет, так как все внешние силы направлены перпендикулярно к оси балки. Составим уравнение равновесия левой оставшейся части балки. Так как у нас два искомых усилия, составим два уравнения равновесия согласно (2.5) и (2.6). Тогда поперечное усилие $Q_c = R_A = 45$ кН. А изгибающий момент в сечении C (M_c) равен

$$M_c = R_A \cdot 2 - M = 45 \cdot 2 - 100 = -10 \text{ кНм}.$$

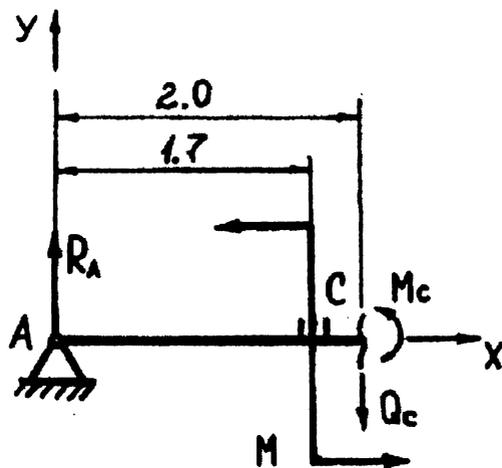


Рис. 2.3

Схема решения данного примера является общей для аналитического расчета на неподвижную нагрузку любых статически определимых балок.

2.2.3. Расчет ферм

Расчет ферм выполняется в соответствии с приведенным выше общим алгоритмом. Первые два этапа алгоритма не отличаются от расчета балок. При использовании правила РОЗУ на этапе определения усилий в элементах фермы разделение фермы выполняется одним из двух способов: *способом вырезания узлов* или *способом рассечения*.

Способ вырезания узлов применяется, если в узле сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями. Рассмотрим применение этого способа на примере фермы, расчетная схема которой приведена на рис. 2.4, а. На данной расчетной схеме имеется два узла, отвечающих условию применения способа вырезания узлов: узел 0 и узел 6. Рассмотрим узел 0 (рис. 2.4, б).

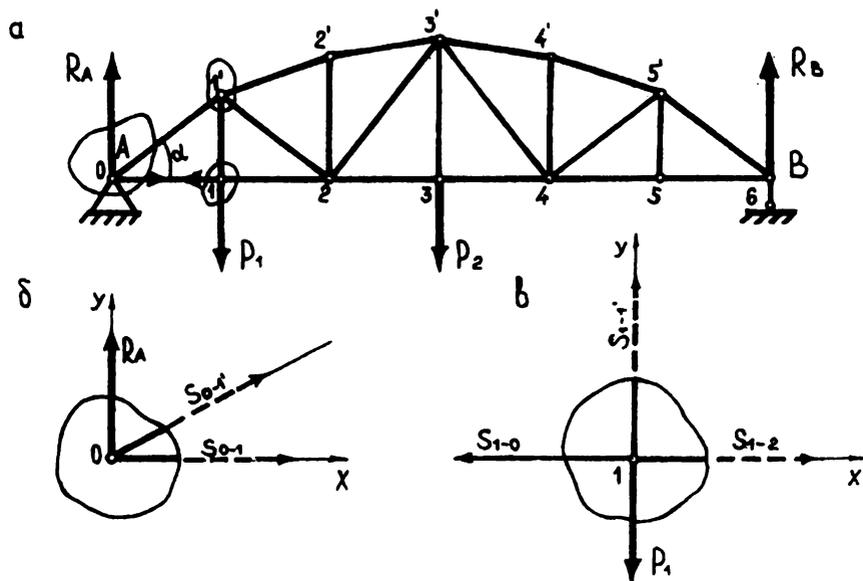


Рис. 2.4

Для составления уравнения равновесия при данном способе оси координат располагают так, чтобы хотя бы одна из осей совпадала с одним из усилий, сходящихся в рассматриваемом узле. В нашем случае ось Y совпадает с направлением опорной реакции R_A , а ось X – с направлением усилия в стержне $01-S_{0-1}$. Неизвестные усилия $S_{0-1'}$ и S_{0-1} направлены от сечения, т. е. они ратягивающие. Для расчета усилия используются два уравнения равновесия в форме суммы проекций сил на оси координат. Составим их:

$$R_A + S_{0-1'} \cdot \sin \alpha = 0$$

(проекция S_{0-1} на Y , естественно, равна нулю), откуда

$$S_{0-1}' = -R_A / \sin \alpha,$$

$$S_{0-1} + S_{0-1}' \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$S_{0-1} = -S_{0-1}' \cdot \cos \alpha.$$

Следовательно, расчетное направление S_{0-1} соответствует принятому, т. е. усилие направлено от сечения. Полученные из решения уравнений знаки усилий покажут вид деформации в стержнях: плюс – растяжение, минус – сжатие.

Таким образом, усилия в стержнях узла 0 определены. Следующим ближайшим к нему узлом, где сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями, является узел 1 (рис. 2.4, в). В узле 1 неизвестными являются усилия S_{1-1}' и S_{1-2} соответствующих стержней. Очевидно, что направление усилия S_{1-0} стержня 01 противоположно усилию S_{0-1} , т. е. направлено от узла 1.

Используя уравнения равновесия $\sum F_y = 0$ и $\sum F_x = 0$, найдем величину и направление усилий S_{1-1}' и S_{1-2} . Следующим возможным к рассмотрению является узел 2', затем 2, 3, 3' и т. д.

В конструкции фермы могут быть стержни, внутреннее усилие которых равно нулю, такие стержни называются нулевыми.

Встречаются следующие три вида узлов с нулевыми стержнями (три признака нулевых стержней):

1. Если к узлу не приложена внешняя нагрузка и в ней сходятся два стержня, то оба стержня нулевые (рис. 2.5, а).
2. Если к узлу не приложена внешняя нагрузка и в нем сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной линии, то третий стержень нулевой (рис. 2.5, б).
3. Если к узлу приложена внешняя нагрузка и в нем сходятся два стержня, из которых один направлен вдоль линии действия внешней нагрузки, то второй стержень нулевой (рис. 2.5, в).

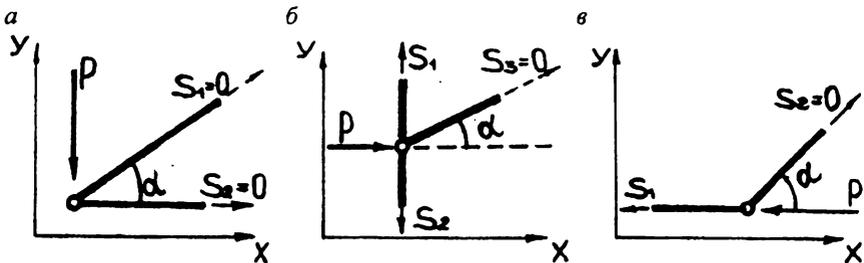


Рис. 2.5

Способ расчленения фермы в наиболее простой форме применяется к фермам, в которых можно провести сечение не более чем через три стержня.

Для нахождения усилий удобно рассматривать равновесие той части фермы, где расположено меньшее количество внешних нагрузок. Уравнения равновесия составляются либо в форме суммы моментов относительно моментной точки, либо в форме суммы проекций сил на оси координат.

Рассмотрим вариант использования уравнений равновесия в форме суммы моментов сил относительно моментной точки (способ моментных точек). При этом за моментную принимается такая точка, относительно которой моменты всех усилий в сечении, кроме искомого, были бы равны нулю (рис. 2.6).

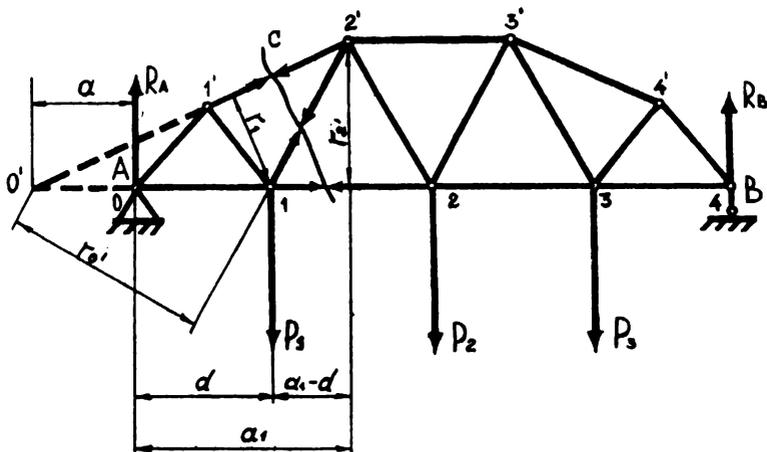


Рис. 2.6

Разделив ферму сечением C , будем искать усилия в стержнях $1'2'$, 12 и $2'3'$.

Рассмотрим равновесие левой части фермы. Для нахождения усилия S_{1-2} в соответствующем стержне за моментную точку примем узел $2'$. В нем пересекаются направления двух других неизвестных усилий в сечении C , поэтому их моменты относительно этой точки равны нулю. Уравнение равновесия будет иметь вид:

$$-R_A a_1 + P_1(a_1 - d) + S_{1-2} r_2 = 0,$$

отсюда

$$S_{1-2} = \frac{R_A a_1 - P_1(a_1 - d)}{r_2}.$$

Для определения усилия $S_{1'2'}$ за моментную точку принимаем узел 1 . Уравнение равновесия будет иметь вид:

$$-R_A d - S_{1'2'} r_1 = 0,$$

отсюда

$$S_{1'-2'} = -\frac{R_A d}{r_1}.$$

Усилие $S_{1'-2'}$ получаем равным числу с отрицательным знаком. Следовательно, направление его будет противоположно первоначально принятому на рис. 2.6.

Для определения усилия $S_{1'-2'}$ за моментную принимаем точку $0'$. Уравнение равновесия будет иметь вид:

$$-R_A a + P_1(a + d) - S_{1'-2'} r_0 = 0,$$

отсюда

$$S_{1'-2'} = \frac{P_1(a + d) - R_A a}{r_0}.$$

Можно заметить, что во всех трех выражениях для определения усилий в сечении C числитель представляет сумму моментов внешних сил, приложенных к рассматриваемой части фермы, относительно соответствующей моментной точки.

В некоторых случаях, когда в сечение попадает более трех стержней, усилия в них можно найти также с помощью способа моментных точек. Рассмотрим это на следующих примерах.

Дана полураскосная ферма (рис. 2.7). Требуется определить усилие в панели 1-2 нижнего пояса фермы. Для этого проведем сечение C , пересекающее стержни $1'2'$, $1'2''$, $2''1$ и 12 ... В узле $1'$ пересекаются направления усилий в стержнях $1'2'$, $1'2''$ и $2''1'$, поэтому примем его за моментную точку. Составим уравнение равновесия для левой части фермы:

$$-R_A d + S_{1-2} h = 0,$$

отсюда

$$S_{1-2} = \frac{R_A d}{h}.$$

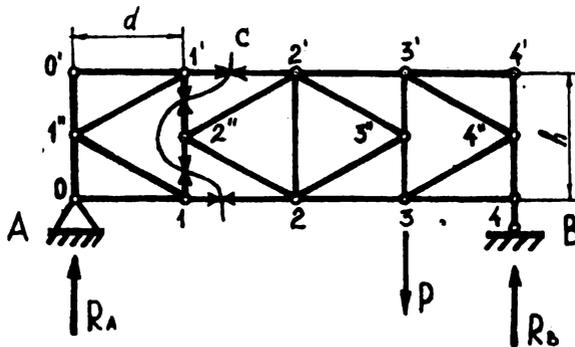


Рис. 2.7

Аналогично можно определить усилие в панели 1'2' верхнего пояса фермы.

Для определения усилий в стержнях фермы Шухова (рис 2.8) применим замкнутое сечение. Допустим, требуется определить усилие в стержне 02. Проведем замкнутое сечение C , которое пересекает стержни 02, 34 и 56 по одному разу и стержни 04 и 05 по два раза. Будем рассматривать равновесие части фермы, расположенной внутри замкнутого сечения.

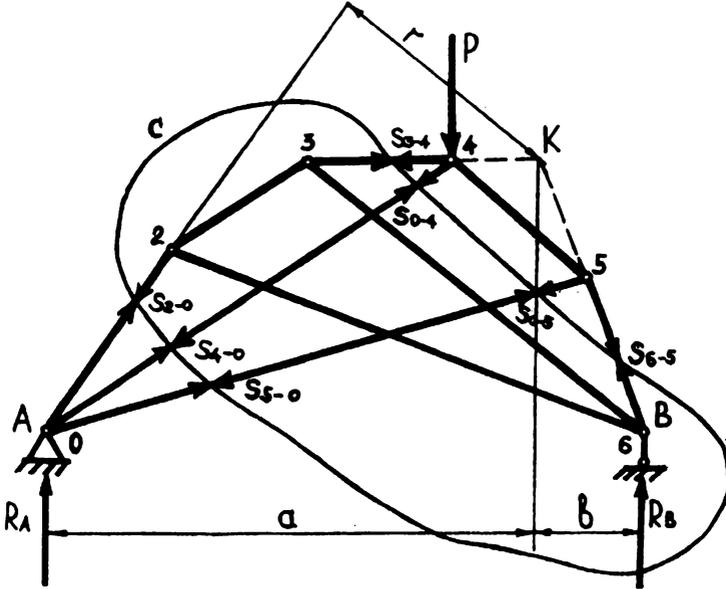


Рис. 2.8

Неизвестными усилиями для этой части будут: S_{2-0} в стержне 02, S_{3-4} в стержне 34, S_{6-5} в стержне 56, S_{4-0} и S_{0-4} в стержне 04, S_{5-0} и S_{0-5} в стержне 05. Суммы моментов усилий S_{4-0} и S_{0-4} , S_{5-0} и S_{0-5} относительно любой точки будут равны нулю, так как усилия направлены вдоль одной прямой и в противоположные стороны, а численные значения их равны, поскольку они принадлежат одному стержню.

Учитывая это, примем точку K , в которой пересекаются направления еще двух усилий S_{6-5} и S_{3-4} , за моментную и составим уравнения равновесия

$$R_B b + S_{2-0} r = 0,$$

отсюда

$$S_{0-2} = \frac{-R_B b}{r}.$$

Если из трех стержней в сечении два параллельны, то усилия в третьем находятся с помощью уравнений равновесия в форме суммы проекций сил на вертикальную ось (способ проекций). Допустим, требуется определить усилия в раскосе 2'3 (рис. 2.9, а) фермы с параллельными поясами. Проведем сечение C, пересекающее стержень 2'3 и стержни 2'3', 23. Использовать способ моментной точки невозможно, так как усилия S_{2-3} и $S_{2'-3}$ параллельно направлены и пересекаются в бесконечности. Составим для левой части фермы уравнение равновесия в форме суммы проекций сил на ось Y: $R_A - P - S_{2'-3} \sin \alpha = 0$, откуда

$$S_{2'-3} = \frac{R_A - P}{\sin \alpha}.$$

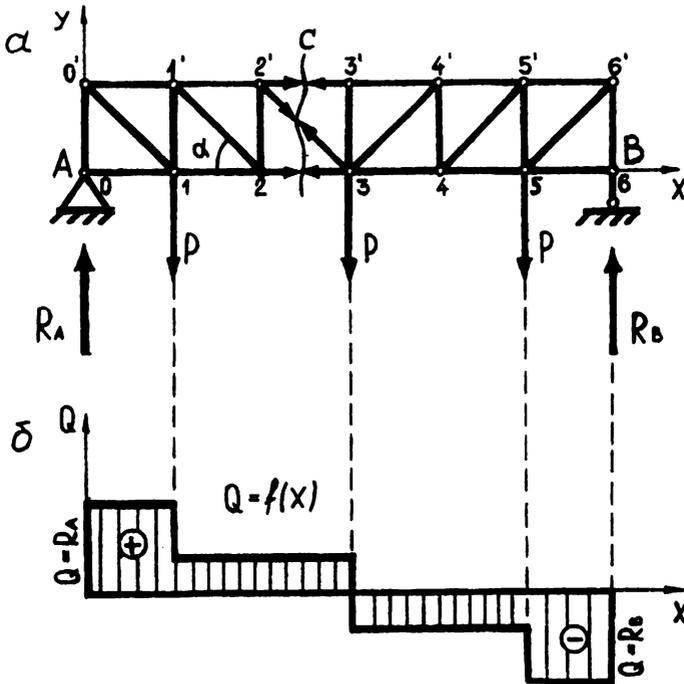


Рис. 2.9

Если ферму представить как балку, то поперечная сила в сечении C

$$Q_c = R_A - P.$$

Следовательно, раскосы ферм с параллельными поясами работают на восприятие поперечной силы и изменение усилий в раскосах можно установить по эпюре поперечных сил (рис. 2.9, б).

2.3. Аналитический метод расчета сооружений на подвижную нагрузку

2.3.1. Особенности расчета на подвижную нагрузку. Линии влияния и их применение для расчета усилий

Типичный пример подвижной нагрузки – это движущийся по мосту железнодорожный состав, который представляет собой систему постоянных вертикальных сосредоточенных сил с неизменными расстояниями между ними. Эта система перемещается по пролетному строению моста, занимая различные положения на нем. Аналогичны автомобильные и гусеничные нагрузки, нагрузки на стропильные фермы промышленных цехов от перемещающихся внутрицевых подъемно-транспортных единиц.

Решая статическую задачу, пренебрегают динамическим действием нагрузки, т. е. исключают силы инерции, которые возбуждаются при вибрации самой балки от подвижного груза, и не учитывают скорость движения груза.

При расчете на подвижную нагрузку либо определяются те или иные величины (опорные реакции, внутренние усилия, перемещения и т. п.) при заданном положении нагрузки, либо находится невыгодное (опасное) положение нагрузки, при котором искомые величины достигают наибольшего значения. Эти задачи решаются с помощью линий влияния.

Линия влияния – это графическая зависимость (диаграмма) искомого усилия от положения единичной нагрузки $p = 1$ (т. е. нагрузки, условно принятой за единицу).

Иными словами, линия влияния – это графическая зависимость функции (рис. 2.10)

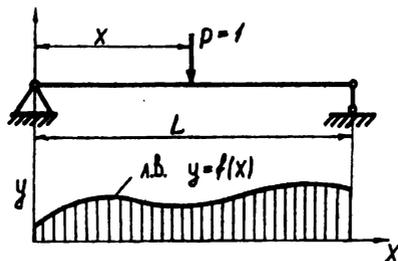


Рис. 2.10

$$Y = f(x),$$

где Y – искомая величина усилия,

X – параметр, определяющий положение единичной подвижной нагрузки p (расстояние от левой опоры до точки приложения единичной нагрузки).

При построении линии влияния меняется положение груза при неподвижном сечении, в то время как при построении эпюры меняется положение сечения при постоянном положении нагрузки.

Таким образом, с помощью линии влияния можно определить искомую величину Y при любом заданном положении единичной нагрузки.

Исходя из принципа независимости действия сил, при действии одной сосредоточенной нагрузки P , отличной от единицы, значение искомой величины определяется с помощью линии влияния так (рис. 2.11):

$$S_x = P Y_x, \quad (2.7)$$

где S_x – искомая величина от нагрузки P , расположенной на расстоянии X от левой опоры сооружения;

Y_x – ордината линии влияния искомой величины, соответствующая точке X оси абсцисс, т. е. положению нагрузки P .

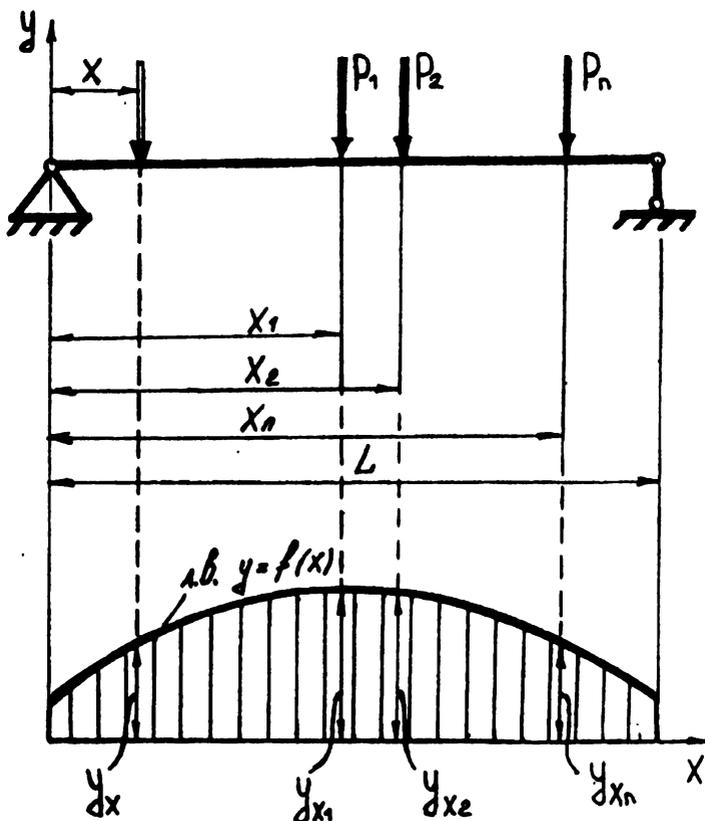


Рис. 2.11

При действии нескольких сосредоточенных нагрузок искомая величина определится так:

$$S = Y_{x_1} P_1 + Y_{x_2} P_2 + \dots + Y_{x_n} P_n \quad (2.8)$$

где $Y_{x_1}, Y_{x_2}, \dots, Y_{x_n}$ — ординаты линии в точках на оси абсцисс, соответствующих положению нагрузок P_1, P_2, \dots, P_n .

Пусть на сооружение действует сплошная неравномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q_x = f(x)$ (рис. 2.12).

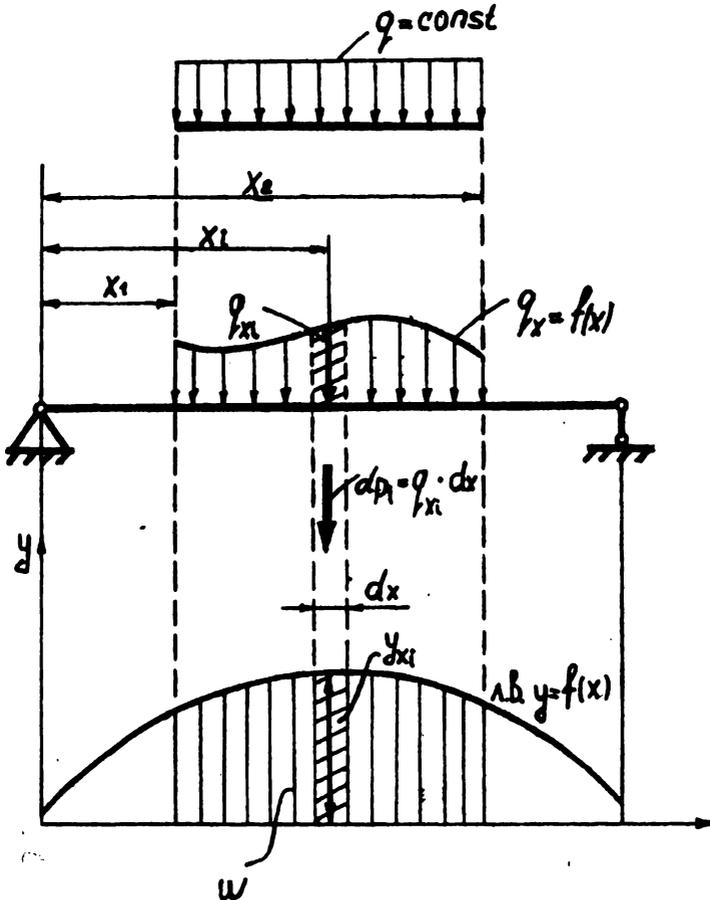


Рис. 2.12

Для определения полного значения искомой величины S заменим сплошную нагрузку системой бесконечно малых сосредоточенных сил:

$$dp_i = q_{x_i} dx,$$

тогда

$$S = \sum_{i=1}^n Y_{x_i} dp_i = \sum_{i=1}^n q_{x_i} Y_{x_i} dx = \int_{x_1}^{x_2} q_x Y_x dx.$$

То есть

$$S = \int_{x_1}^{x_2} q_x Y_x dx. \quad (2.9)$$

Если сплошная нагрузка равномерно распределенная $q_x = q = const$, то (2.9) будет иметь вид

$$S = q \int_{x_1}^{x_2} Y_x dx.$$

Но $\int_{x_1}^{x_2} Y_x dx = w$ – площадь, ограниченная линией влияния и осью абсцисс на участке действия распределенной нагрузки.

Таким образом, искомая величина от действия *равномерно распределенной* нагрузки определяется формулой

$$S = qW. \quad (2.10)$$

Если на сооружение действуют сосредоточенные и равномерно распределенные нагрузки, то искомая величина определяется так:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i Y_{x_i} + \sum_{j=1}^m q_j W_j, \quad (2.11)$$

где n – количество сосредоточенных нагрузок;

m – количество распределенных нагрузок;

q_j – интенсивность j -й распределенной нагрузки;

W_j – площадь на графике линии влияния под j -й распределенной нагрузкой.

Для расчета по формулам (2.7)–(2.11) необходимо знать размерность ординаты линии влияния. Она определяется так: размерность ординаты линии влияния = размерность искомой величины / размерность единичной нагрузки.

2.3.2. Общий алгоритм аналитического расчета на подвижную нагрузку

Расчет сооружения на подвижную нагрузку производится в следующем порядке:

1. Вычерчивается в масштабе расчетная схема сооружения.

2. Строятся линии влияния искомым усилий в сооружении.

3. Определяются невыгодные (опасные) положения подвижной нагрузки для искомым усилий.

4. С помощью линий влияния находятся искомые величины при опасном или заданном положении нагрузок на сооружении.

С учетом данного выше определения линии влияния построение ее состоит из следующих операций:

- в масштабе расстояний строится расчетная схема сооружения, на которой все внешние активные нагрузки заменяются одной единичной подвижной нагрузкой;

- составляется одно из уравнений равновесия, в которое входит искомая величина (если искомой величиной является внутреннее усилие, то используется правило РОЗУ);

- уравнение равновесия преобразуется так, чтобы в него вошел параметр X , определяющий положение подвижной нагрузки;

- из полученного уравнения выводится аналитическая зависимость $Y = f(x)$;

- задавшись масштабом изображения искомой величины, строится график зависимости $Y = f(x)$, который является линией влияния искомой величины.

Так как операции, данные в п. 1 и 4, описаны выше, в дальнейшем рассмотрим правила и методы выполнения операций, приведенные в п. 2 и 3.

2.3.3. Построение линий влияния усилий в простых балках

Используя приведенный выше алгоритм, построим для консольной балки линии влияния опорных реакций и внутренних усилий (поперечное усилие Q и изгибающий момент сечения D , C и E).

Приведенная на рис. 2.13, а расчетная схема выполняется в масштабе расстояний. Используем ее для построения всех указанных линий влияния, приложив единичную нагрузку $p = 1$. Положение этой нагрузки определяется параметром X со знаком "+", если она находится справа от опоры A , и со знаком "-", если располагается слева от опоры A .

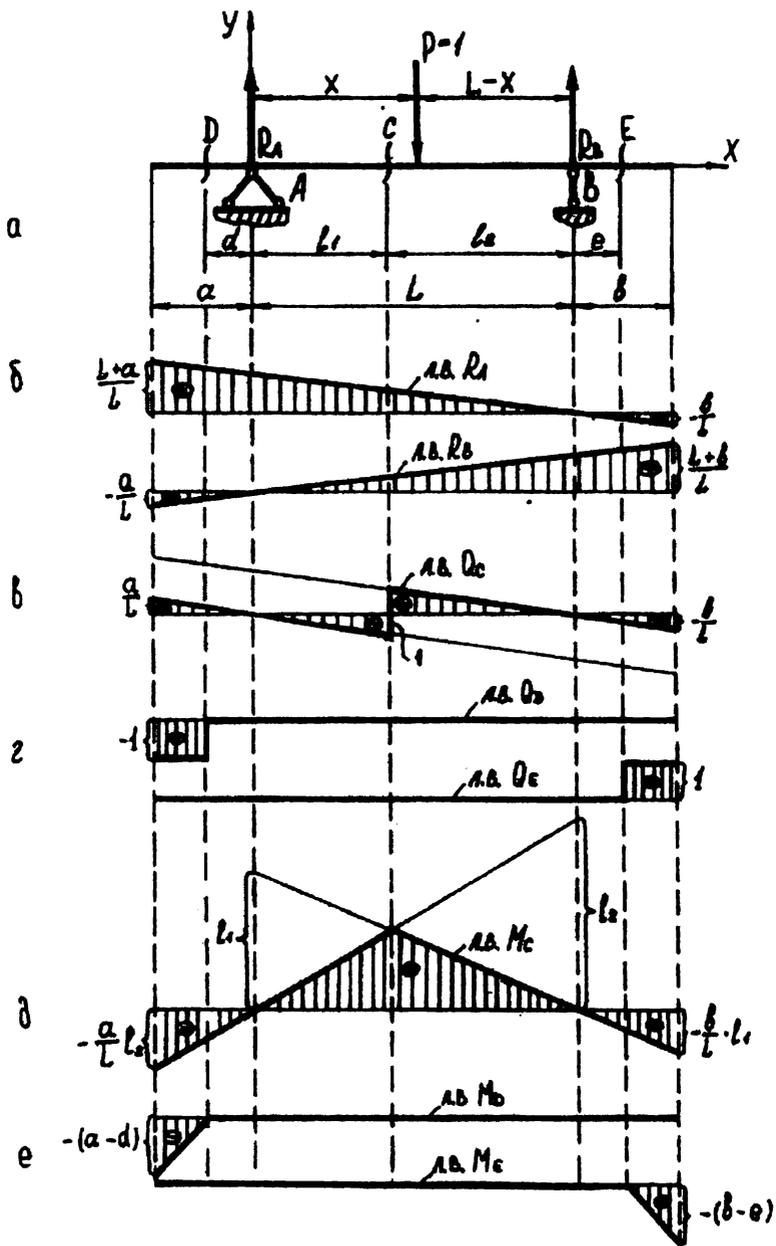


Рис. 2.13

Линия влияния опорной реакции R_A (рис. 2.13, б)

1. Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{R_A} = f(x)$, где Y_{R_A} – величина реакции опоры A от единичной нагрузки. Для этого составим уравнение равновесия балки в форме суммы моментов сил относительно опоры B :

$$\sum M_B = Y_{R_A} L - p(L - x) = 0,$$

откуда

$$Y_{R_A} = \frac{p(L - x)}{L} = \frac{L - x}{L}. \quad (2.12)$$

2. Полученная зависимость $Y_{R_A} = f(x)$ представляет собой линейную функцию, график которой имеет вид прямой линии. Поэтому для построения линии влияния опорной реакции R_A достаточно найти две точки графика функции (2.14). Найдем их:

1) примем $X = 0$, тогда $Y_{R_A} = \frac{L - 0}{L} = 1$;

2) примем $X = L$, тогда $Y_{R_A} = \frac{L - L}{L} = 0$.

Таким образом, линия влияния опорной реакции R_A представляет собой наклонную прямую, проходящую через точки ($X = 0$; $Y_{R_A} = 1$) и ($X = L$; $Y_{R_A} = 0$).

3. При расположении единичной нагрузки на конце левой консоли

$$Y_{R_A} = \frac{L - (-a)}{L} = \frac{L + a}{L}.$$

При расположении нагрузки на конце правой консоли

$$Y_{R_A} = \frac{L - (L + b)}{L} = \frac{-b}{L}.$$

При расположении единичной нагрузки над опорой A $Y_{R_A} = 1$, над опорой B $Y_{R_A} = 0$.

Линия влияния опорной реакции R_B (см. рис. 2.13, б)

1. Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{R_B} = f(x)$, используя уравнение равновесия балки в форме суммы моментов сил относительно опоры A :

$$\sum M_A = -Y_{R_B} L + pX = 0,$$

$$Y_{R_B} = \frac{pX}{L} = \frac{X}{L}. \quad (2.13)$$

2. Построим линию влияния по двум точкам:

$$1) X = 0, Y_{R_B} = \frac{0}{L} = 0;$$

$$2) X = L, Y_{R_B} = \frac{L}{L} = 1.$$

3. При расположении единичной нагрузки над опорой A $Y_{R_B} = 0$, над опорой B $Y_{R_B} = 1$.

При расположении единичной нагрузки на конце левой консоли

$$Y_{R_B} = \frac{-a}{L} = -\frac{a}{L}.$$

При расположении нагрузки на конце правой консоли $Y_{R_B} = \frac{L+b}{L}$.

. Линия влияния поперечной силы в сечении C (рис. 2.13, в)

1. Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{Q_C} = f(x)$, где Y_{Q_C} – величина поперечного усилия в сечении C от действия единичной нагрузки. Для этого, используя правило РОЗУ, составим уравнения равновесия левой и правой от сечения C частей балки в форме суммы проекций сил на ось Y . При этом, чтобы уменьшить количество слагаемых в уравнениях, будем рассматривать ту часть балки, где нет единичной нагрузки.

При рассмотрении равновесия левой части балки единичная нагрузка p располагается в правой части балки, и уравнение равновесия имеет вид

$$\sum F_{y,лев} = R_A - Y_{Q_B},$$

откуда

$$Y_{Q_B} = R_A. \quad (2.14)$$

Поскольку предполагается, что на балку действует только единичная нагрузка, то $R_A = Y_{R_A}$. И, следовательно, зависимость $Y_{Q_B} = f(x)$ с учетом (2.14) и (2.16) будет иметь вид

$$Y_{Q_C} = Y_{R_A} = \frac{L-X}{L}. \quad (2.15)$$

При получении зависимости (2.15) предполагалось, что единичная нагрузка p расположена в правой части балки. Значит, она справедлива при перемещении p справа от сечения C , т. е. при $X > l_1$.

Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{Qc} = f(x)$ при $X < l_1$, когда единичная нагрузка перемещается слева от сечения C . Для этого расположим единичную нагрузку в левую часть балки и рассмотрим равновесие правой части балки:

$$\sum F_{y, \text{прав}} = R_B + Y_{Qc} = 0, \quad (2.16)$$

откуда

$$Y_{Qc} = -R_B = -Y_{R_B} = -\frac{X}{L}. \quad (2.17)$$

2. Зависимости (2.15) и (2.17) являются линейными функциями. Следовательно, для построения их графиков достаточно найти по две точки, принадлежащие им.

При расположении единичной нагрузки в правой части балки линия влияния Q_C пройдет через точки:

$$1) X = 0, Y_{Qc} = \frac{L-0}{L} = 1;$$

$$2) X = L, Y_{Qc} = \frac{L-L}{L} = 0.$$

Линия влияния Q_C будет действительна при $X > l_1$.

При расположении единичной нагрузки в левой части балки линия влияния Q_C будет действительна при $X < l_1$ и пройдет через точки:

$$1) X = 0, Y_{Qc} = \frac{-0}{L} = 0;$$

$$2) X = L, Y_{Qc} = \frac{-L}{L} = -1.$$

3. Таким образом, линия влияния Q_C при перемещении единичной нагрузки слева от сечения C совпадает с линией влияния реакции правой опоры, взятой с обратным знаком (сравните (2.13) и (2.17) и рис. 2.13, б), а при перемещении единичной нагрузки справа от сечения C совпадает с линией влияния реакции левой опоры (сравните (2.12) и (2.15) и рис. 2.13, б).

При расположении p над левой и правой опорами $Y_{Qc} = 0$.

При прохождении единичной нагрузки p через сечение C слева направо линия влияния Q_C смещается вверх на величину Y_{Qc} , равную единице.

При расположении p на конце левой консоли

$$Y_{Qc} = -\frac{-a}{L} = \frac{a}{L}.$$

При расположении p на конце правой консоли

$$Y_{Qc} = -\frac{L-(L+b)}{L} = -\frac{b}{L}.$$

Линии влияния поперечных сил в сечениях D и E (рис. 2.13, з)

Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{Q_D} = f(x)$. Для этого составим уравнение равновесия сначала левой от сечения D части балки (единичная нагрузка в правой части):

$$\sum F_y = Y_{Q_D} = 0.$$

Таким образом, если единичная нагрузка находится справа от сечения D ($X > -d$), то функция $Y_{Q_D} = f(x)$ имеет вид

$$Y_{Q_D} = 0. \quad (2.18)$$

Для правой от сечения D части балки при единичной нагрузке, расположенной в левой части ($X < -d$), имеем

$$\sum F_y = R_A + R_B + Y_{Q_D} = 0,$$

откуда $Y_{Q_D} = -(R_A + R_B)$, или с учетом (2.12) и (2.13)

$$Y_{Q_D} = -\left(\frac{L-X}{L} + \frac{X}{L}\right) = -1. \quad (2.19)$$

Такой же результат можно получить, если рассматривать равновесие левой части балки при расположении единичной нагрузки в левой части*:

$$\sum F_y = -p - Y_{Q_D},$$

откуда

$$Y_{Q_D} = -p = -1.$$

Таким образом, линия влияния усилия Q_D (график зависимости $Y_{Q_D} = f(x)$) справа от сечения D имеет вид прямой, совпадающей с осью X , а слева от сечения D – прямой, параллельной оси X , пересекающей ось Y в точке -1 .

Для нахождения $Y_{Q_E} = f(x)$ рассмотрим правую от сечения E часть балки. При расположении p справа от сечения E уравнение равновесия правой части балки имеет вид

$$\sum F_y = Y_{Q_E} - p = 0,$$

откуда

$$Y_{Q_E} = p = 1. \quad (2.20)$$

* Расположение нагрузки в той части балки, которая является противоположной рассматриваемой, не является обязательным. Наиболее целесообразно такое расположение единичной нагрузки, при котором аналитическое выражение зависимости $Y = f(x)$ и алгоритм ее нахождения наиболее просты.

При расположении p слева от сечения E уравнение равновесия правой части балки будет таким:

$$\sum F_y = Y_{QE} = 0, \text{ т. е. } Y_{QE} = 0. \quad (2.21)$$

Таким образом, график зависимости $Y_{QE} = f(x)$ справа от сечения E имеет вид прямой, параллельной оси X и пересекающей ось Y в точке $+1$, а слева от сечения E – прямой, совпадающей с осью X .

Линии влияния изгибающего момента в сечении C (рис. 2.13, д)

Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{Mc} = f(x)$, где Y_{Mc} – изгибающий момент в сечении C от действия единичной нагрузки. Для этого используем уравнение равновесия, представляющее собой сумму моментов силы относительно сечения.

Рассмотрим левую от сечения C часть балки. Единичную нагрузку поместим в правую часть балки. Тогда согласно (2.6) и правилам, данным в подп. 2.2.1, следует, что

$$Y_{Mc} = R_A l_1 = Y_{R_A} l_1 = \frac{X - L}{L} l_1. \quad (2.22)$$

Расположим единичную нагрузку в левую от сечения C часть балки и рассмотрим равновесие правой части. Аналогично получим

$$Y_{Mc} = R_B l_2 = Y_{R_B} l_2 = \frac{X}{L} l_2. \quad (2.23)$$

Зависимости (2.22) и (2.23) представляют собой линейные функции. Следовательно, для построения линии влияния M_c при перемещении единичной нагрузки справа от сечения C (при $X > l_1$) необходимо найти две точки, лежащие

на прямой $Y_{Mc} = \frac{L - X}{L} l_1$:

$$1) X = 0, Y_{Mc} = \frac{L - 0}{L} l_1 = l_1;$$

$$2) X = L, Y_{Mc} = \frac{L - L}{L} l_1 = 0.$$

При перемещении единичной нагрузки слева от сечения C (при $X < l_1$) необходимо найти две точки, лежащие на прямой $Y_{Mc} = \frac{X}{L} l_2$:

$$1) X = 0, Y_{Mc} = \frac{0}{L} l_2 = 0;$$

$$2) X = L, Y_{Mc} = \frac{L}{L} l_2 = l_2.$$

Таким образом, линия влияния усилия M_c представляет собой ломаную линию с двумя прямолинейными ветвями и точкой перегиба, расположенной под сечением C .

При расположении единичной нагрузки p над левой и правой опорами $Y_{M_c} = 0$.

$$\text{При расположении } p \text{ над сечением } C \quad Y_{M_c} = \frac{X}{L} l_2 = \frac{l_1 \cdot l_2}{L}.$$

$$\text{Если } p \text{ расположена на конце левой консоли, то } Y_{M_c} = \frac{-a}{L} l_2 = -\frac{a}{L} l_2.$$

$$\text{Если } p \text{ находится на конце правой консоли, то } Y_{M_c} = \frac{L - (L - b)}{L} l_1 = -\frac{b}{L} l_1.$$

Линии влияния изгибающего момента в сечениях D и E (рис. 2.13, е)

Найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{M_D} = f(x)$. Из уравнения равновесия левой от сечения D части балки при единичной нагрузке, расположенной в правой части ($X > -d$), получим

$$Y_{M_D} = 0. \quad (2.24)$$

При расположении единичной нагрузки в левой части ($X < -d$) из уравнения равновесия этой части определим

$$Y_{M_D} = -p \cdot (|-x| - |-d|) = -p (|x| - d) = -(|x| - d),$$

$$\text{т. е. } Y_{M_D} = -(x - d). \quad (2.25)$$

Таким образом, линия влияния изгибающего момента в сечении D справа от сечения D представляет собой прямую, совпадающую с осью X , а слева от сечения D – наклонную прямую, проходящую через точки

$$(X = -d; Y_{M_D} = 0) \text{ и } (X = -a; Y_{M_D} = -(a - d)).$$

Для нахождения зависимости $Y_{M_E} = f(x)$ рассмотрим правую от сечения E часть балки.

При расположении p справа от сечения E из уравнения равновесия определим:

$$Y_{M_E} = -p[X - (L + e)] = -[X - (L + e)].$$

$$\text{При } X = L + e \quad Y_{M_E} = 0; \text{ при } X = L + b \quad Y_{M_E} = -(b - e).$$

При расположении p слева от сечения E из уравнения равновесия получим: $Y_{M_E} = 0$.

Таким образом, линия влияния изгибающего момента в сечении E при расположении p слева от сечения представляет собой линию, совпадающую с осью X , а при расположении p справа от сечения – линию, проходящую через две точки с координатами $(X = L + e; Y = 0)$ и $(X = L + b; Y = -(b - e))$.

Приведенное выше построение линий влияния иллюстрирует общий алгоритм построения, а результаты позволяют строить линии влияния опорных реакций, поперечных усилий и изгибающих моментов в любом сечении для простых балок по характерным точкам, приведенным на рис. 2.13.

2.3.4. Определение невыгодного (опасного) положения подвижной нагрузки

Из вышеприведенного материала следует, что линия влияния усилия может иметь вид прямой линии, параллельной или наклонной по отношению к оси X , а также ломаной или кривой линии. Следовательно, для любой линии влияния, за исключением параллельной оси X , есть такое положение подвижной нагрузки, при котором искомая величина данного усилия S будет максимальной. Такое положение нагрузки называется **невыгодным (опасным)** по данному усилию. С учетом такого положения нагрузки должна быть рассчитана прочность сооружения.

1. Если подвижная нагрузка представлена одним сосредоточенным грузом P , то ее опасное положение определяется таким значением $X = X_{on}$ (рис. 2.14, а, б), при котором

$$S = f(X_{on}) = P \cdot Y_{max} = S_{max}. \quad (2.26)$$

2. Если подвижная нагрузка представлена системой взаимосвязанных в пространстве сосредоточенных грузов P_1, P_2, \dots, P_i , (рис. 2.14, в), то ее опасное положение определится таким значением $X = X_{on}$ (здесь X – расстояние от левой опоры до крайнего левого груза), при котором

$$S = f(X_{on}) = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + \dots + P_i Y_i = S_{max}. \quad (2.27)$$

3. Если подвижная нагрузка является распределенной на отрезке, допустим, с интенсивностью $q = const$ (рис. 2.14, г), то ее опасное положение определяется таким значением $X = X_{on}$ (здесь X – расстояние от левой опоры до левой границы отрезка ab), при котором

$$S = f(X_{on}) = qW = S_{max}. \quad (2.28)$$

4. Если среди взаимосвязанных в пространстве грузов есть и распределенная нагрузка, допустим, с интенсивностью $q = const$, то ее опасное положение определяется условием

$$S = f(X_{on}) = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + \dots + P_i Y_i + q_1 W_1 + q_2 W_2 + \dots q_i W_i. \quad (2.29)$$

5. Если на сооружение действуют несколько групп взаимосвязанных в пространстве грузов, в том числе отдельных сосредоточенных и распределенных нагрузок, то определяется опасное положение для каждой из них в отдельности.

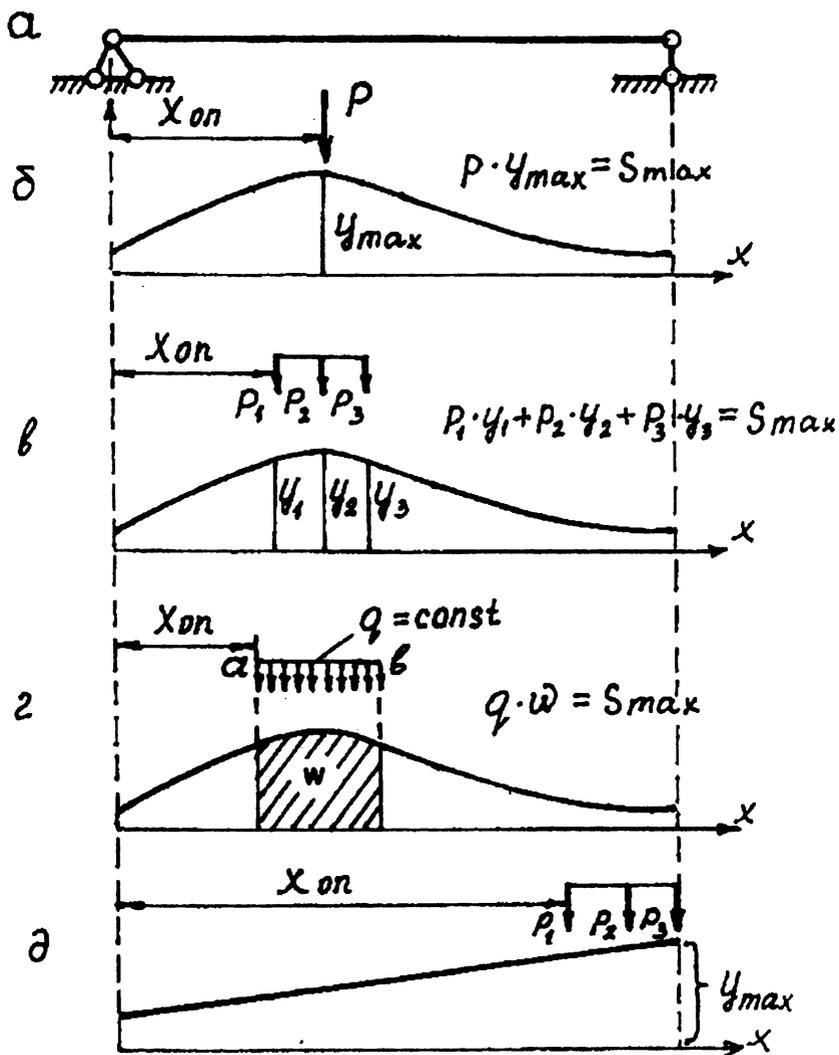


Рис. 2.14

Основными факторами, определяющими опасное по данному усилию положение нагрузки или системы взаимосвязанных нагрузок, являются форма линии влияния усилия, а также взаимное расположение нагрузок, их величина и соотношение величин между собой.

В тех случаях, когда линия влияния представляет собой наклонную прямую, опасное положение нагрузок соответствует положению одного из крайних грузов над максимальной ординатой линии влияния (рис. 2.14, б).

При ломаной полигональной форме линии влияния опасное положение системы сосредоточенных грузов не очевидно. Дадим аналитический критерий опасного положения системы грузов для такого случая.

Пусть даны система сосредоточенных грузов от движущегося поезда ($P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$) и линия влияния усилия S (например усилия в стержне мостовой фермы) в форме ломаной линии (рис. 2.15). Прямолинейные участки линии влияния составляют с осью абсцисс углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

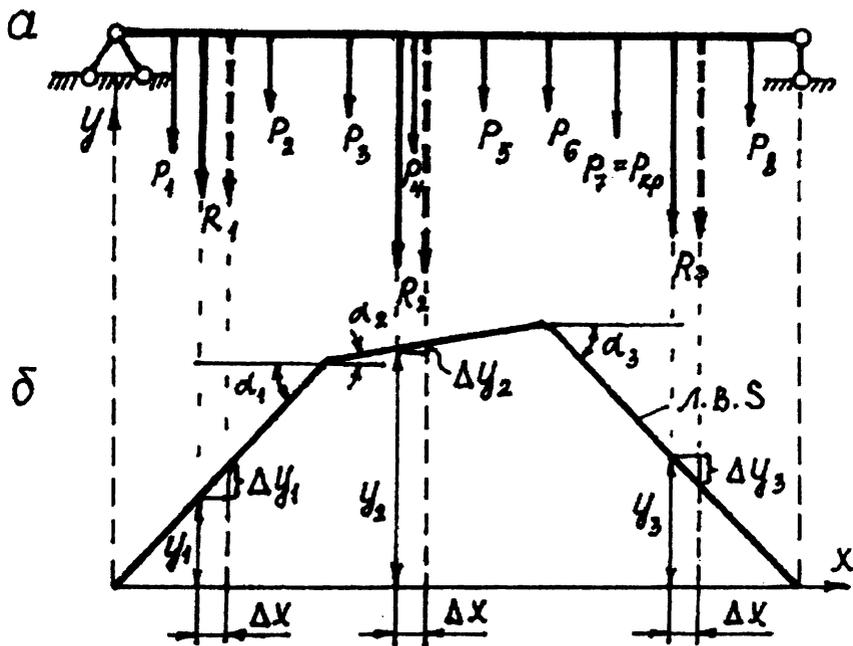


Рис. 2.15

Заменим каждую группу сил, расположенных в пределах j -го прямолинейного участка линии влияния их равнодействующей R_j . Для рассматриваемого примера имеем три равнодействующие R_1, R_2, R_3 . Тогда усилие в стержне фермы определится так:

$$S = R_1 Y_1 + R_2 Y_2 + R_3 Y_3 = \sum R_j Y_j. \quad (2.30)$$

Если система грузов находится в опасном положении, то при перемещении ее в любом направлении на величину ΔX усилие S изменится на величину $\Delta S < 0^*$.

Переместим данную систему грузов на величину ΔX вправо. Новое значение усилия в стержне составит

$$S + \Delta S = R_1(Y_1 + \Delta Y_1) + R_2(Y_2 + \Delta Y_2) + R_3(Y_3 - \Delta Y_3).$$

Отсюда с учетом (2.30) находим ΔS :

$$\Delta S = R_1 \Delta Y_1 + R_2 \Delta Y_2 - R_3 \Delta Y_3. \quad (2.31)$$

Из рисунка находим $\Delta Y_1, \Delta Y_2, \Delta Y_3$:

$$\Delta Y_1 = \Delta X \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \Delta Y_2 = \Delta X \operatorname{tg} \alpha_2; \quad \Delta Y_3 = \Delta X \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Подставив значения ΔY_j в выражение (2.31), получим:

$$\Delta S = \Delta X (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - R_3 \operatorname{tg} \alpha_3),$$

значит, если линия влияния состоит из n прямолинейных участков, то величину ΔS можно представить как алгебраическую сумму n слагаемых вида $\Delta X(R_j \operatorname{tg} \alpha_j)$:

$$\Delta S = \Delta X \sum_{i=1}^n R_j \operatorname{tg} \alpha_j.$$

Если система грузов находится в невыгодном положении, то согласно вышесказанному

$$\Delta S = \Delta X \sum_{i=1}^n R_j \operatorname{tg} \alpha_j < 0. \quad (2.32)$$

При перемещении поезда вправо (ΔX положительно) условие (2.32) будет соблюдено, если

$$\sum_n R_j \operatorname{tg} \alpha_j < 0. \quad (2.33)$$

* Поскольку $Y_j = f(X_j)$ и положение грузов взаимосвязано так, что если положение правого груза определяется координатой X_1 , то положение второго $X_1 + l_2$, и j -го $- X_1 + l_j$, где l_2, \dots, l_j – расстояние от первого груза до второго ... и j -го груза, усилие в стержне фермы можно выразить через параметр положения первого груза (X_1).

$$S = \sum_{i=1}^n R_j Y_j = \sum_{j=1}^n R_j f_j(X_1),$$

где $f_j(X_1)$ – функция величины Y_j в зависимости от координаты X_1 , которая определяет место приложения силы R_j .

Из математики известно, что некоторая действительная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, имеет максимум в той точке отрезка C , в которой выполняются условия

$$\Delta F = F(C \pm \Delta X) - F(C) < 0.$$

Следовательно, невыгодное (опасное) положение системы грузов определяется таким значением параметра X_1 , при котором

$$\Delta S = \sum R_j f_j(X_1 + \Delta X) - \sum R_j f_j(X_1) < 0,$$

При перемещении поезда влево (ΔX отрицательно) условие (2.33) будет соблюдено, если

$$\sum_n^{\leftarrow} R_j \operatorname{tg} \alpha_j > 0. \quad (2.34)$$

Значит, при переходе системы грузов через опасное положение величина $\sum R_j \operatorname{tg} \alpha_j$ должна менять свой знак на обратный.

Величина $\operatorname{tg} \alpha_j$ является постоянной и имеет знак, зависящий от положения прямолинейного участка линии влияния относительно ее вершины и от направления перемещения системы грузов, а значение R_j меняется дискретно по мере перехода нагрузки P_j из j -го в $(j+1)$ -й прямолинейный участок линии влияния. Поэтому перемена знака величины $\sum R_j \operatorname{tg} \alpha_j$ возможна только тогда, когда один из грузов поезда находится у самой вершины линии влияния. Этот груз условно называют *критическим*.

В общем случае задачу определения опасного положения системы грузов при полигональной форме линии влияния решают способом последовательных попыток. Расположив систему так, чтобы один из ее грузов находился у вершины линии влияния, проверяем выполнение условий (2.33) и (2.34). Если условия не соблюдаются, то перемещаем систему, расположив над вершиной следующий груз и т. д., пока не будут выполняться условия (2.33) и (2.34).

Величина максимального усилия определяется по формуле

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^n P_i Y_{i \max}, \quad (2.35)$$

или

$$S_{\max} = \sum_{j=1}^n P_j Y_{j \max}, \quad (2.36)$$

где $Y_{i \max}$ и $Y_{j \max}$ – ординаты линии влияния, соответствующие положению i -го груза и j -й равнодействующей при невыгодном расположении системы грузов.

Если линия влияния имеет треугольную форму (рис. 2.16), то можно записать

$$\sum_n^{\rightarrow} R_j \operatorname{tg} \alpha_j = R_n \operatorname{tg} \alpha_n - (R_n + P_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha_n < 0, \quad (2.37)$$

$$\sum_n^{\leftarrow} R_j \operatorname{tg} \alpha_j = (R_n + P_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha_n - R_n \operatorname{tg} \alpha_n > 0, \quad (2.38)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{Y_{\text{кр}}}{a}, \quad (2.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{Y_{\text{кр}}}{b}. \quad (2.40)$$

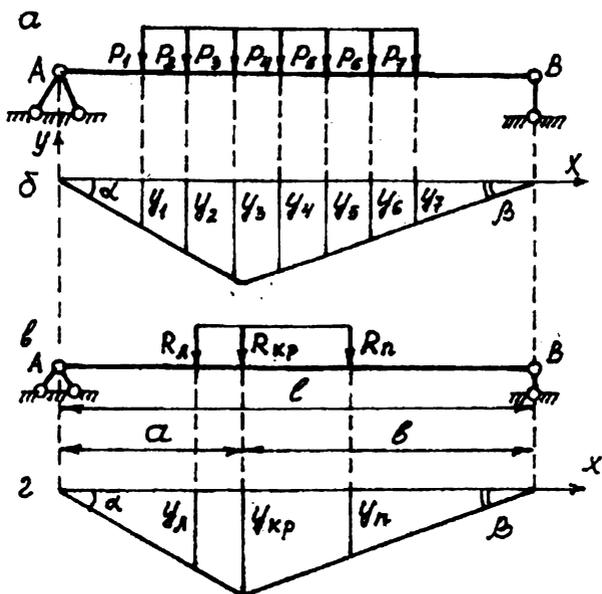


Рис. 2.16

С учетом (2.39) и (2.40) из (2.37) и (2.38) получим

$$\frac{R_n + P_{кр}}{b} > \frac{R_n}{a}, \quad (2.41)$$

$$\frac{R_n + P_{кр}}{a} > \frac{R_n}{b}. \quad (2.42)$$

Таким образом, определение опасного положения системы грузов сводится к подбору такой $P_i = P_{кр}$, при которой будут соблюдаться условия (2.41) и (2.42).

Если система грузов представлена сплошной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 2.17, б), то условия (2.41) и (2.42) с учетом того, что

$$R_n = q(c + dX/2); R_n = q(l - c - dX/2),$$

запишутся так:

$$\frac{q(l - c - dX/2) + qdX}{b} > \frac{q(c + dX/2)}{a},$$

$$\frac{q(c + dX/2) + qdX}{a} > \frac{q(l - c - dX/2)}{b}.$$

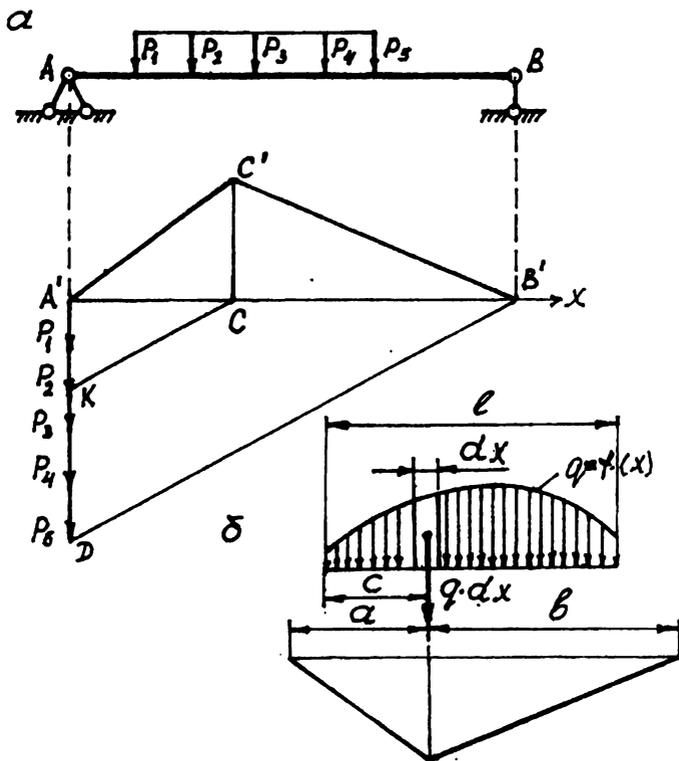


Рис. 2.17

Пренебрегая бесконечно малыми величинами $dx/2$ и qdx , получим вместо двух неравенств одно уравнение

$$\frac{qc}{a} = \frac{q(l-c)}{b}, \quad (2.43)$$

а параметр опасного положения нагрузки определится так:

$$X_{max} = a - c.$$

Критический груз, а следовательно и опасное положение системы грузов, можно определить графическим путем при помощи определенного построения (рис. 2.17, а). В конце балки A проводим перпендикуляр к ее оси и на нем в масштабе сил откладываем все грузы в том порядке, в каком они расположены от опоры A к опоре B . Конец последней силы (точка D) соединим с точкой B . Затем из точки C , проекции вершины C' линии влияния, проводим линию CK , параллельную $B'D$. Эта линия пересечет критический груз.

2.3.5. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.

Определение усилий в стержнях поясов фермы при расположении нагрузки на панели между узлами

Рассмотрим случай, когда нагрузка передается на балку через поперечные балочки (рис. 2.18). Допустим, что груз $p = 1$ располагается между узлами 2 и 3, на расстоянии X от узла 2 и $d - X$ от узла 3. Тогда составляющая груза, передаваемая на балку в узле 2, будет равна

$$p_2 = p \frac{d - X}{d} = \frac{d - X}{d},$$

а в узле 3

$$p_3 = p \frac{X}{d} = \frac{X}{d}.$$

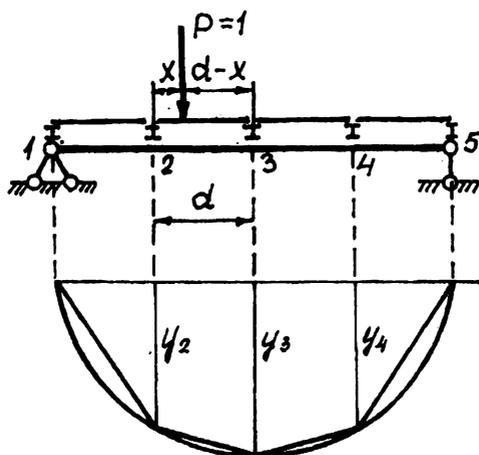


Рис. 2.18

Пусть кривая, изображенная на рисунке, есть линия влияния при непосредственной передаче нагрузки на балку. Если обозначить ординату линии влияния под узлом 2 через Y_2 , а под узлом 3 через Y_3 , то усилие, вызываемое грузом p при передаче его через узлы 1 и 2, будет таким:

$$S = p_2 Y_2 + p_3 Y_3 = \frac{d - X}{d} Y_2 + \frac{X}{d} Y_3.$$

Полученное выражение для определения усилия S представляет собой уравнение прямой, соединяющей концы ординат Y_2 и Y_3 .

Следовательно, для построения линии влияния при узловой передаче нагрузки необходимо на линию влияния, построенную для условия непосредственной передачи нагрузки, спроектировать узлы балки и соединить полученные точки прямыми.

2.3.6. Построение линий влияния усилий в простых балочных фермах

Рассмотрим построение линий влияния усилий в стержнях фермы с полигональным поясом и треугольной решеткой (рис. 2.19, а). Усилие от подвижной нагрузки передается через нижний пояс фермы.

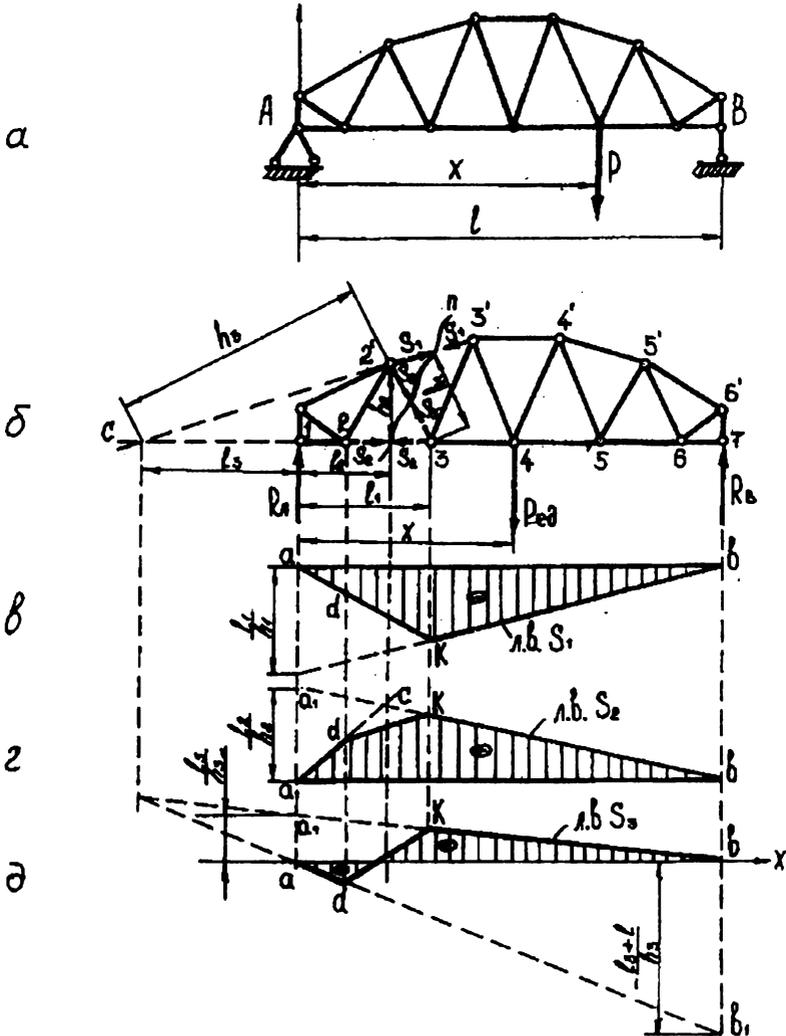


Рис. 2.19

Важно знать, как передается нагрузка на ферму, через нижний или через верхний пояс, так как от этого зависит очертание линий влияния.

Рассмотрим усилия в стержнях 2'-3' (S_1), 2-3 (S_2) и 2'-3 (S_3).

Для построения линий влияния этих усилий необходимо на расчетной схеме фермы (рис. 2.19, б) все нагрузки заменить одной единичной подвижной нагрузкой p , найти аналитическое выражение зависимостей $Y_S = f(X)$ для каждого искомого усилия и построить графики этих зависимостей.

Разделим ферму сечением n , которое пересекает в нашем случае все три интересующие нас стержня.

Построим линию влияния усилия S_1 в стержне 2'-3' (рис. 2.19, в). Для этого найдем аналитическое выражение зависимости $Y_{S_1} = f(x)$, используя способ моментных точек. За моментную точку примем узел 3. Тогда при перемещении единичной нагрузки в правой от сечения n части фермы (нагрузка передается в узлах 3, 4, 5, 6, 7) из уравнения равновесия левой части фермы $\sum M_3 = 0$ или

$$-R_A l_1 - Y_{S_1} h_1 = 0, \text{ находим } Y_{S_1} = -R_A \frac{l_1}{h_1}.$$

Учитывая (2.14),

$$Y_{S_1} = -\frac{l-X}{l} \cdot \frac{l_1}{h_1}. \quad (2.44)$$

Конструкция фермы предполагает передачу нагрузки на нее в узлах панели, на которой перемещается груз. Поэтому полученная зависимость, представляющая собой график прямой линии, действительна для X , соответствующего положению узлов 3, 4, 5, 6, 7. Но согласно выводу, сделанному в п. 2.3.5, она является линией влияния усилия S_1 при перемещении единичной нагрузки в правой части фермы от узла 3 до узла 7 и проходит через точки с координатами

$$(X=0; Y = -\frac{l-0}{l} \cdot \frac{l_1}{h_1} = -\frac{l_1}{h_1}) \text{ и } (X=l; Y = -\frac{l-l}{l} \cdot \frac{l_1}{h_1} = 0).$$

При перемещении единичной нагрузки в левой от сечения n части фермы (нагрузка передается в узлах 1 и 2) из уравнения равновесия правой части фермы $\sum M_3 = 0$ или $R_B(l-l_1) + Y_{S_1} h_1 = 0$ находим

$$Y_{S_1} = -R_B \frac{l-l_1}{h_1}.$$

Учитывая (2.13),

$$Y_{S_1} = -\frac{X}{l} \frac{l-l_1}{h_1}. \quad (2.45)$$

По аналогии с вышеприведенными рассуждениями график зависимости (2.45) будет линией влияния усилия S_1 при перемещении единичной нагрузки в левой части фермы от узла 1 до узла 2.

Она проходит через точки

$$(X=0; Y=0) \text{ и } (X=l; Y=-\frac{l-l_1}{h_1}).$$

При перемещении нагрузки между узлами 2 и 3 линия влияния усилия S_1 представляет собой прямую, соединяющую точки d и k , соответствующие значению Y_{S_1} в узлах 2 и 3. Эта прямая носит название передаточной линии.

Построим линию влияния усилия S_2 в стержне 2–3 (рис. 2.19, з). Аналитическое выражение зависимости $Y_{S_2} = f(X)$ найдем, используя способ моментных точек. За моментную точку возьмем узел 2'. При перемещении единичной нагрузки в правой от сечения n части фермы из уравнения равновесия левой части фермы $\sum M_{2'} = 0$ или $-R_A l_2 + Y_{S_2} h_2 = 0$ находим

$$Y_{S_2} = R_A \frac{l_2}{h_2}, \text{ или } Y_{S_2} = \frac{l-X}{l} \cdot \frac{l_2}{h_2}. \quad (2.46)$$

График этой зависимости будет линией влияния усилия S_2 при перемещении единичной нагрузки в правой части фермы от узла 3 до узла 7. Прямая проходит через точки $(X=0; Y=\frac{l_2}{h_2})$ и $(X=l; Y=0)$.

При перемещении единичной нагрузки в левой части фермы из уравнения равновесия правой части $\sum M_{2'} = 0$ или $R_B(l-l_2) - Y_{S_2} h_2 = 0$ находим

$$Y_{S_2} = R_B \frac{l-l_2}{h_2}, \text{ или } Y_{S_2} = \frac{X}{l} \cdot \frac{l-l_2}{h_2}. \quad (2.47)$$

График этой зависимости будет линией влияния усилия S_2 при перемещении единичной нагрузки в левой части фермы от узла 1 до узла 2. Она проходит через точки $(X=0; Y=0)$ и $(X=l; Y=\frac{l-l_2}{h_2})$.

При перемещении единичной нагрузки между узлами 2 и 3 линия влияния усилия S_2 представляет прямую, соединяющую точки d и K , соответствующие значениям Y_{S_2} в узлах 2 и 3.

Построим линию влияния для усилия S_3 в стержне 2'–3 (рис. 2.19, д). В качестве моментной точки при нахождении зависимости $Y_{S_3} = f(X)$ возьмем точку пересечения направлений стержней 2'–3' и 2–3 (точка C). При перемещении единичной нагрузки в правой от сечения n части фермы из уравнения равновесия левой части $\sum M_C = 0$, или $R_A l_3 - Y_{S_3} h_3 = 0$, находим

$$Y_{S_3} = R_A \frac{l_3}{h_3}, \text{ или } Y_{S_3} = \frac{l-X}{l} \cdot \frac{l_3}{h_3}. \quad (2.48)$$

График этой зависимости будет линией влияния усилия S_3 при перемещении единичной нагрузки в правой части фермы от узла 3 до узла 7 (рис. 2.19, д). Она проходит через точки $(X=0; Y = \frac{l_3}{h_3})$ и $(X=l; Y=0)$.

При перемещении нагрузки в левой части фермы из уравнения равновесия правой части $\sum M_C = 0$, или $R_B(l_3 + l) + Y_{S_3} h_3 = 0$, находим $Y_{S_3} = -R_B \frac{l_3 + l}{h_3}$, или

$$Y_{S_3} = -\frac{X}{l} \cdot \frac{l_3 + l}{h_3}. \quad (2.49)$$

График этой зависимости будет линией влияния при перемещении единичной нагрузки в левой части фермы от узла 1 до узла 2. Она проходит через точки $(X=0; Y=0)$ и $(X=l; Y = -\frac{l_3 + l}{h_3})$.

При перемещении единичной нагрузки между узлами 2 и 3 линия влияния усилия S_3 представляет собой прямую, соединяющую точки d и k .

Таким образом, усилие в стержне 2'–3' сжимающее (знак “минус”) при любом положении нагрузки, а в стержне 2–3 – растягивающее (знак “плюс”). Усилие в стержне 2'–3 является растягивающим (положительным) при перемещении нагрузки между узлами 3 и 7, и сжимающим (отрицательным) при перемещении ее между узлами 1 и 2. Оно меняет знак с положительного на отрицательный при перемещении нагрузки от узла 3 к узлу 2.

Построим линии влияния усилий в стержнях фермы с параллельными поясами (рис. 2.20, а). Для иллюстрации необходимости знания того, как передается нагрузка на ферму, рассмотрим два варианта передачи нагрузки:

- а) нагрузка передается на ферму через верхний пояс;
- б) нагрузка передается на ферму через нижний пояс.

Построим линии влияния усилий в стержнях: 3'–4 (раскос), 4'–4 и 5'–5 (стойки). Для нахождения зависимостей $Y_S = f(X)$ для стержней 3'–4 и 5'–5 целесообразно применять способ проекций, а для стержня 4'–4 – способ вырезания узлов.

Линия влияния усилия S_1 в стержне 3'–4

ВАРИАНТ А

При перемещении единичной нагрузки справа от сечения n_1 (нагрузка передается в узлах 4', 5', 6' и 7') из уравнения равновесия левой части фермы $\sum F_y = 0$ или $R_A - Y_{S_1} \sin \alpha = 0$ находим $Y_{S_1} = \frac{R_A}{\sin \alpha}$ или $Y_{S_1} = \frac{l - X}{l} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$.

График этой зависимости будет линией влияния усилия S_1 при перемещении единичной нагрузки в правой части фермы от узла 4' до узла 7' (рис. 2.20, б). Она проходит через точки $(X=0; Y = \frac{1}{\sin \alpha})$ и $(X=l; Y=0)$.

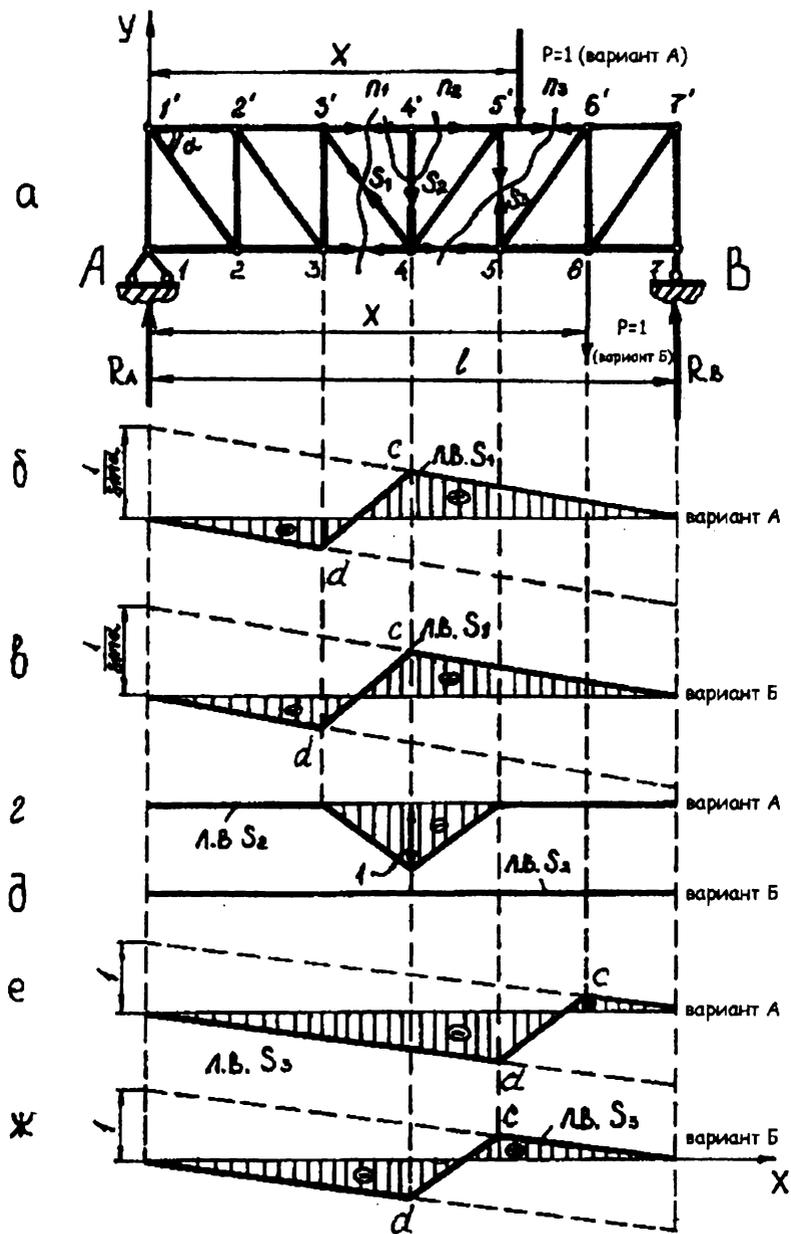


Рис. 2.20

При перемещении нагрузки слева от сечения n_1 из уравнения равновесия правой части фермы $\sum F_y = 0$ или $R_B + Y_{S_1} \sin \alpha = 0$ находим $Y_{S_1} = -\frac{R_B}{\sin \alpha}$, или

$$Y_{S_1} = -\frac{X}{l} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

График этой зависимости будет линией влияния усилия S_1 при перемещении единичной нагрузки в левой части фермы от узла 3' до узла 1'. Она проходит через точки $(X = 0; Y = 0)$ и $(X = l; Y_{S_1} = -\frac{1}{\sin \alpha})$.

При перемещении единичной нагрузки между узлами 3' и 4' линия влияния представляет собой прямую, соединяющую точки d и c , соответствующие значениям Y_{S_1} в узлах 3' и 4'.

ВАРИАНТ Б

При перемещении единичной нагрузки справа от сечения n_1 , когда нагрузка на ферму передается в узлах 4, 5, 6 и 7, аналитическое выражение функции

$$Y_{S_1} = f(X) \text{ имеет вид } Y_{S_1} = \frac{l - X}{l} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

При перемещении же единичной нагрузки слева от сечения n_1 , когда нагрузка на ферму передается в узлах 3, 2, 1, аналитическое выражение функции

$$Y_{S_1} = f(X) \text{ имеет вид } Y_{S_1} = -\frac{X}{l} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

В результате построения получаем линию влияния усилия S_1 при передаче нагрузки на ферму через нижний пояс, идентичную линии влияния этого усилия при передаче нагрузки на ферму через верхний пояс (рис. 2.20, в).

Линия влияния усилия S_2 в стержне 4'–4

ВАРИАНТ А

Вырезав узел 4' сечением n_2 , приходим к выводу, что когда единичная нагрузка перемещается на участках от узла 1' до узла 3' и от узла 5' до узла 7', т. е. когда к узлу 4' не приложена внешняя нагрузка, стержень 4'–4 будет нулевым (см. п. 2.2.3). Когда нагрузка приложена к узлу 4', усилие в стержне 4'–4 определится из уравнения равновесия $\sum F_y = 0$, или $-Y_{S_2} - p = 0$, откуда $Y_{S_2} = -p = -1$.

При перемещении нагрузки от узла 3' к узлу 4' и от узла 4' к узлу 5' линия влияния представляет собой передаточную линию.

В результате линия влияния усилия S_2 имеет очертания, приведенные на рис. 2.20, г.

ВАРИАНТ Б

При передаче нагрузки на ферму через нижний пояс при любом положении ее узел 4' будет всегда ненагруженным. Поэтому стержень 4'–4 всегда является нулевым и линия влияния усилия S_2 совпадает с осью X (рис. 2.20, д).

Линия влияния усилия S_3 в стержне 5'-5

ВАРИАНТ А

Из уравнения равновесия левой от сечения n_3 части фермы найдем аналитическое выражение линии влияния S_3 при перемещении груза в правой части фермы от узла $6'$ до узла $7'$: $\sum F_y = 0$ или $R_A - Y_{S_3} = 0$, откуда

$$Y_{S_3} = R_A = \frac{l - X}{l}.$$

Значит, линия влияния S_3 при перемещении единичной нагрузки в правой части фермы совпадает с линией влияния опорной реакции R_A на отрезке оси X от положения узла $6'$ до узла $7'$ (рис. 2.20, *e*).

Из условия равновесия правой от сечения n_3 части фермы найдем выражение $Y_{S_3} = f(X)$ при перемещении нагрузки в левой части фермы от узла $5'$ до узла $1'$: $\sum F_y = 0$ или $R_B + Y_{S_3} = 0$, откуда $Y_{S_3} = -R_B = -\frac{X}{l}$.

Значит, линия влияния S_3 при перемещении единичной нагрузки в левой части фермы соответствует линии влияния опорной реакции R_B с обратным знаком на отрезке оси X от положения узла $1'$ до узла $5'$.

При перемещении нагрузки между узлами $5'$ и $6'$ линия влияния представляет собой прямую, соединяющую точки d и c .

ВАРИАНТ Б

В этом варианте нагрузка, перемещаясь слева от сечения n_3 , передает усилие на ферму через узлы 5, 6, 7, перемещаясь справа от сечения n_3 , – через узлы 4, 3, 2 и 1.

Линия влияния усилия S_3 строится по тому же алгоритму, что и в варианте А, и имеет ту же форму (рис. 2.20, *ж*). Но смена знака усилия происходит при перемещении нагрузки между узлами 4 и 5.

Таким образом, из анализа вышеприведенных построений линий влияния усилий в стержнях фермы следует:

- для нахождения аналитической зависимости $Y_S = f(X)$ в стержнях фермы с непараллельными поясами целесообразно использовать способ моментных точек, в раскосах и стойках ферм с параллельными поясами – способ проекций, а в стойках, один из концов которых соединен с шарниром, где сходятся не более 3 стержней – способ вырезания узлов;

- линия влияния усилия в стойке, один конец которой соединен с шарниром, где сходятся не более 3 стержней, имеет форму треугольника с основанием, расположенным на отрезке оси X между абсциссами шарниров, соседних с данным, если данный шарнир находится на поясе, через который передается нагрузка на ферму, и совпадает с осью X , если данный шарнир находится на противоположном поясе;

- линии влияния усилий в поясах фермы имеют постоянный знак на всей длине фермы;

- линия влияния усилия в раскосе фермы меняет знак на участке оси X между абсциссами узлов, ограничивающих раскос.

2.4. Графический метод расчета сооружений на неподвижную нагрузку

2.4.1. Расчет балок (метод веревочного многоугольника)

Веревочный многоугольник и его основные свойства

Теория веревочного многоугольника впервые была отчетливо сформулирована и изложена голландским инженером С. Стевином в 1605 г.

Французский ученый Р. Вариньон на рубеже XVII и XVIII вв. (1687–1725) развил эту теорию, а французские инженеры и ученые Г. Ламе и Б. Клапейрон в начале XIX в. впервые использовали эту теорию в расчетах инженерных мостов. Швейцарский профессор П. Кулеман применил ее к определению опорных реакций, изгибающих моментов и других усилий.

В России популяризировал графические методы профессор В. Л. Кирпичев.

Применение веревочного многоугольника основано на аксиоме статики о том, что две равные по величине, но противоположные по направлению силы, приложенные вдоль линии, соединяющей точки их приложения, не изменяют равновесия твердого тела, на которое они действуют.

Если к телу приложена система произвольно расположенных на плоскости сил, то величину и направление их равнодействующей можно найти с помощью построения силового многоугольника.

Положение линии действия равнодействующей можно определить последовательным нахождением точек пересечения первой пары системы, а затем последующей силы и предыдущей равнодействующей и т. д. Точка пересечения последней силы и предыдущей равнодействующей определит искомое положение линии действия равнодействующей всей системы. Однако, если линии действия очередной пары сил пересекаются вне поля графических построений, то задача усложняется.

Пусть дана система, состоящая из двух сил P_1 и P_2 , точка пересечения линий действия которых находится вне поля графических построений (рис. 2.21, а). Добавим две равные, действующие вдоль одной линии и противоположно направленные силы S и $-S$ так, чтобы линия их действия пересекала линию действия силы P_1 в точке b , лежащей в поле чертежа. Новая система сил будет эквивалентна данной и будет иметь такую же равнодействующую. Найдем величину, направление и положение этой равнодействующей следующим образом. Задавшись величиной силы S , выполним векторное сложение $S + P_1$ (рис. 2.21, б).

Результирующий вектор S_1 является равнодействующей сил S и P_1 , линия действия которой проходит через точку b .

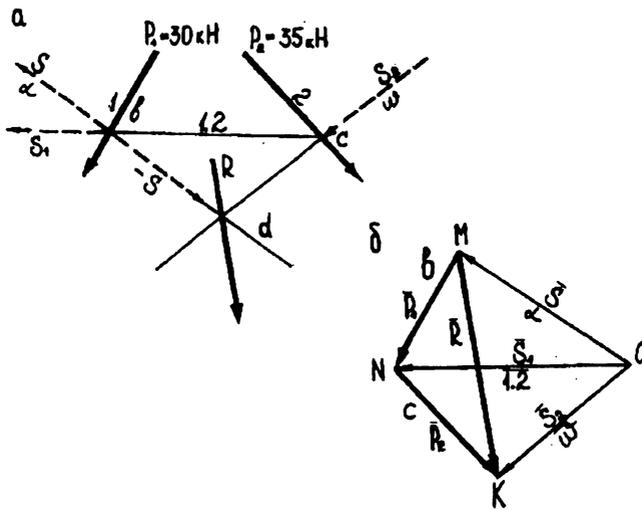


Рис. 2.21

К вектору \vec{S}_1 прибавим вектор \vec{P}_2 , получим результирующий вектор \vec{S}_2 , линия действия которого проходит через точку c . И теперь к вектору $-\vec{S}$ прибавим вектор \vec{S}_2 . Результирующий вектор \vec{R} – равнодействующая всей системы сил, линия действия которой проходит через точку d .

Полученная в результате построения линия $abcw$ на рис. 2.21, a называется *веревочным многоугольником* (или многоугольником Вариньона), а графическое построение на рис. 2.21, b – *планом сил*.

Треугольник MNK является силовым многоугольником исходной заданной системы сил P_1 и P_2 , где MN – вектор силы P_1 , NK – вектор силы P_2 и MK – вектор равнодействующей сил P_1 и P_2 . Точка O называется полюсом, а линии, соединяющие его с крайними точками векторов исходной системы оси P_1 и P_2 , – полюсными лучами.

Принято обозначать полюсные лучи двумя индексами соответственно вектору входящей и вектору выходящей силы в точке, ограничивающей луч. Этими же индексами обозначают и соответствующие стороны веревочного многоугольника.

Из построения плана следует, что положение точки O и положение лучей 1.2 и W определяется положением и величиной вектора \vec{S} . Так как вектор \vec{S} силы берется произвольно, то и положение полюса O может быть взято произвольно.

Кроме того, из плана сил видно, что $\vec{P}_1 = -\vec{\alpha} + \vec{1.2}$, $\vec{P}_2 = -\vec{1.2} + \vec{W}$, а равнодействующая сил \vec{P}_1 и \vec{P}_2 $\vec{R} = -\vec{\alpha} + \vec{W}$. При этом все три силы каждой из приведенных групп пересекаются в одной точке.

Так как $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, то

$$\vec{R} = -\vec{\alpha} + \vec{1.2} - \vec{1.2} + \vec{W} = -\vec{\alpha} + \vec{W}. \quad (2.50)$$

Значит, система сил $-\vec{\alpha}$, $\vec{1.2}$, $-\vec{1.2}$, \vec{W} эквивалентна системе $-\vec{\alpha}$, \vec{W} .

Следовательно, векторы $\vec{1.2}$, $-\vec{1.2}$ не только равны и противоположно направлены, но и лежат на одной линии, как показано на веревочном многоугольнике, приведенном на рис. 2.21, а.

Из сказанного выше следует, что для любой произвольно заданной системы сил на плоскости веревочный многоугольник может быть построен по следующему алгоритму:

1. Строится план сил:

- строится многоугольник заданной системы сил, начиная по порядку с крайней левой силы;
- произвольно принимается положение полюса;
- выстраиваются полюсные лучи, соединяющие полюс с крайними точками векторов многоугольника сил.

2. Произвольно выбирается точка на линии действия крайней слева силы системы (первой силы многоугольника); из нее влево проводится линия, параллельная полюсному лучу, идущему к началу вектора первой силы многоугольника.

3. Из этой же точки до пересечения с линией действия следующей по порядку силы проводится линия, параллельная полюсному лучу, идущему к началу вектора этой (второй) силы. Из полученной точки до пересечения с линией действия третьей силы проводится линия, параллельная полюсному лучу, идущему к началу вектора третьей силы и т. д.

4. Из точки пересечения линии действия последней силы с линией, параллельной полюсному лучу, идущему к началу вектора этой силы, проводится вправо линия, параллельная полюсному лучу, идущему к концу вектора последней силы.

Точка пересечения направлений крайних сторон полученного веревочного многоугольника определяет положение равнодействующей системы сил. А величина и направление этой равнодействующей определяются из многоугольника сил, входящего в план сил.

Веревочный многоугольник позволяет графическим методом проверить равновесие произвольной плоской системы сил.

Как известно, для равновесия произвольной системы сил необходимо, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно любой точки равнялись нулю.

Пусть даны две системы из трех соответственно равных и параллельных сил (рис. 2.22, а и рис. 2.22, б). Силовые многоугольники у них замкнуты и рав-

ны. Следовательно, веревочные многоугольники для обеих систем сил можно построить на базе одного и того же плана сил. Построим его (рис. 2.22, в).

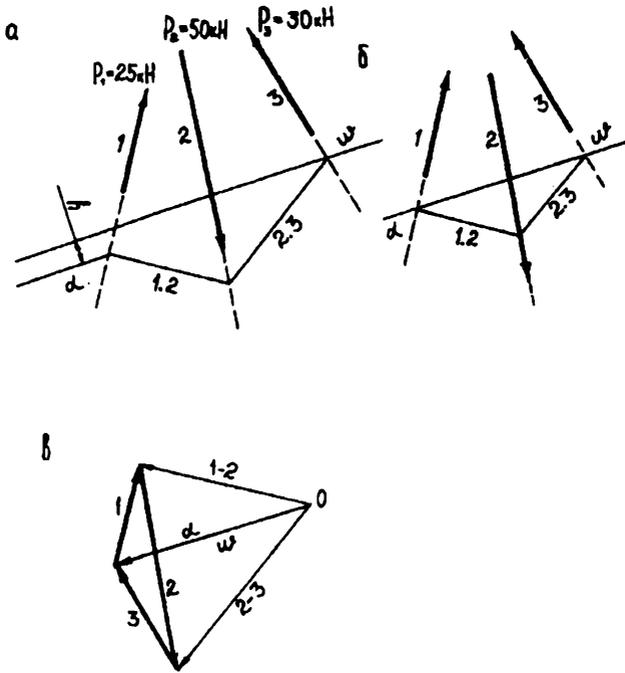


Рис. 2.22

На основе плана сил построим веревочный многоугольник для системы сил, приведенных на рис. 2.22, а.

Согласно логике выражения (2.50) и учитывая, что силовой многоугольник замкнутый, можно записать $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = -\vec{\alpha} + \vec{W} = 0$.

Следовательно, векторы сил $-\vec{\alpha}$ и \vec{W} равны по величине и противоположно направлены. Так как линии действия этих сил не совпадают и расположены друг от друга на расстоянии h , данная система образует пару сил с моментом, не равным нулю, и, следовательно, не находится в равновесии.

Теперь построим веревочный многоугольник для системы сил, данной на рис. 2.22, б. В этом случае линии действия сил $-\vec{\alpha}$ и \vec{W} совпадают. Значит, момент пары этих сил равен нулю. Следовательно, для данной системы и главный вектор, и главный момент равны нулю, т. е. она находится в равновесии. Сравнивая рисунки 2.22, а и 2.22, б, видим, что на первом веревочный многоугольник разомкнут, а на втором – замкнут. Отсюда следует, что *условием рав-*

новесия произвольной плоской системы сил является замкнутый веревочный многоугольник.

С помощью веревочного многоугольника можно найти момент всех сил системы (главный момент) относительно любой точки K .

Пусть дана система из 4 сил (рис. 2.23, а), определим главный момент системы относительно точки K .

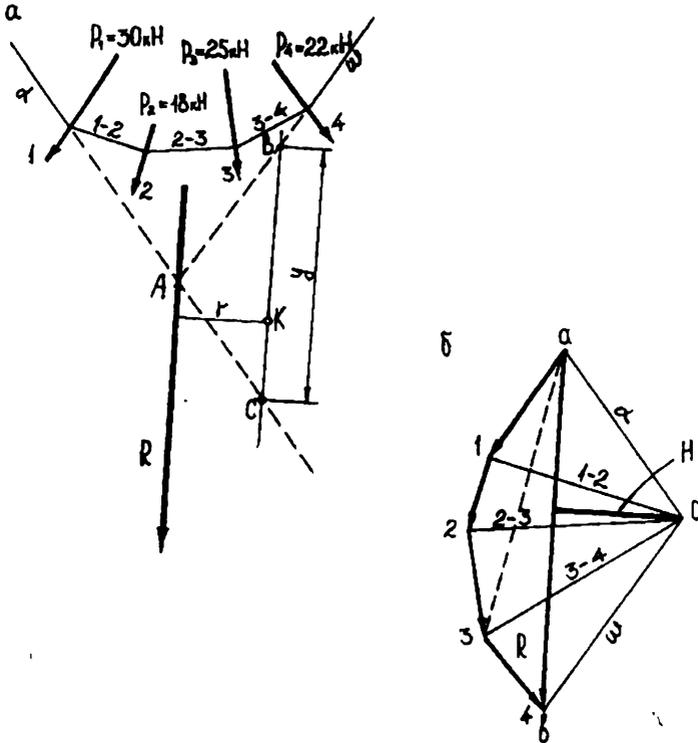


Рис. 2.23

Определим с помощью плана сил (рис. 2.23, б) и веревочного многоугольника (см. рис. 2.23, а) величину направления и положение главного вектора системы \bar{R} .

Величина главного момента системы относительно точки K определится так:

$$M_k = R \cdot r, \quad (2.51)$$

где r – плечо равнодействующей \bar{R} относительно точки K .

Проведем через точку K прямую, параллельную \vec{R} , до пересечения с крайними сторонами веревочного многоугольника $\vec{\alpha}$ и \vec{W} в точках C и B . Треугольник ABC подобен треугольнику abO (см. рис. 2.23, б). Из этого следует, что

$$\frac{R}{Y} = \frac{H}{r}, \quad (2.52)$$

где $Y = BC$ (измеряется на графике);

H – величина перпендикуляра, проведенного из полюса плана сил на замыкающую силового многоугольника (на равнодействующую) на плане сил. Она называется полюсным расстоянием (измеряется на графике).

Из (2.52) следует, что $R \cdot r = H \cdot Y$, поэтому

$$M_K = H \cdot Y. \quad (2.53)$$

Поскольку все построения ведутся в строгом соответствии с масштабom сил и расстояний, то для получения истинного главного момента системы необходимо в формуле (2.51) величину R разделить на масштаб сил M_C , а величину r – на масштаб расстояний M_P . Тогда формула (2.51) будет иметь вид

$$M_K = R \cdot r \cdot \frac{1}{M_C} \cdot \frac{1}{M_P}, \quad (2.54)$$

где R и r измеряются на графике, а формула (2.53) принимает вид

$$M_k = H \cdot Y \cdot \frac{1}{M_C} \cdot \frac{1}{M_P}. \quad (2.55)$$

Например, масштаб расстояний $M_P = 1:200$, масштаб сил $M_C = 1\text{см}:10\text{кН}$, величина H , измеренная на графике, равна 5 см, а $Y = 15$ см, тогда

$$M_k = H \cdot Y \cdot \frac{1}{M_C} \cdot \frac{1}{M_P} = 5 \cdot 15 \cdot \frac{200}{1} \cdot \frac{10}{1} = 150000 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Если требуется определить момент части действующих сил, например первых трех, то необходимо:

- 1) крайними сторонами веревочного многоугольника считать стороны α и 3–4;
- 2) прямую, на которой определяется отрезок Y , провести через точку K параллельно равнодействующей сил $\vec{1}$, $\vec{2}$, $\vec{3}$ (пунктир на рис. 2.23, б);
- 3) за величину H принять расстояние полюса от этой равнодействующей.

Определение момента сил упрощается в случае действия системы параллельных сил, так как в этом случае H остается постоянной.

Определение опорных реакций

Рассмотрим простую балку, на которую действуют только вертикальные силы (рис. 2.24, а). В данном случае обе опорные реакции вертикальны.

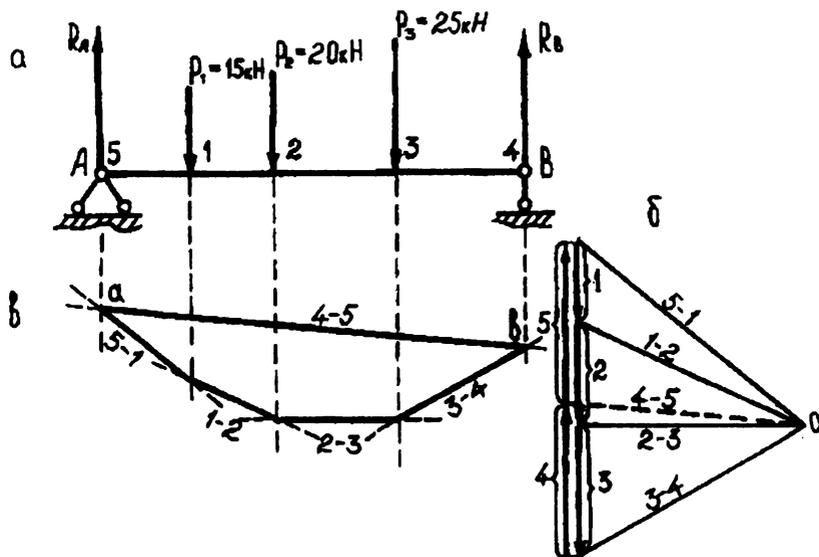


Рис. 2.24

Обозначим заданные силы цифрами 1, 2 и 3, а реакции опор – цифрами 4 и 5. Построим план сил (рис. 2.24, б), с помощью которого затем получим вервочный многоугольник (рис. 2.24, в). Балка находится в равновесии, значит, силы $\bar{1}$, $\bar{2}$ и $\bar{3}$ должны быть уравновешены реакциями опор $\bar{4}$ и $\bar{5}$, а многоугольник всех внешних сил должен быть замкнутым, т. е. конец реакции $\bar{5}$ должен совпасть с началом силы $\bar{1}$, а начало реакции $\bar{4}$ – с концом силы $\bar{3}$.

Найдя положение конца реакции $\bar{4}$ (или начала реакции $\bar{5}$), сможем определить величину опорных реакций.

Поскольку балка находится в равновесии, вервочный многоугольник должен быть замкнутым. Следовательно, полюсный луч, проведенный к точке, где сходятся конец вектора реакции 4 и начало реакции 5, параллелен замыкающей стороне 4–5 вервочного многоугольника, проведенной через точки а и б.

Таким образом, чтобы найти положение точки, отделяющей вектор реакции $\bar{4}$ от реакции $\bar{5}$, надо замкнуть вервочный многоугольник линией, проведенной через точки а и б. Затем из полюса сил нужно провести полюсный луч, параллельный линии ab. Точка пересечения этого луча с вектором суммы реакций является концом реакции 4 и началом реакции 5.

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Дана балка, на которую действует система параллельных сил $\bar{1}$, $\bar{2}$ и $\bar{3}$ (рис. 2.25, а). Построив план сил (рис. 2.25, б) и веревочный многоугольник (рис. 2.25, в), определим опорные реакции $\bar{5}$ и $\bar{4}$.

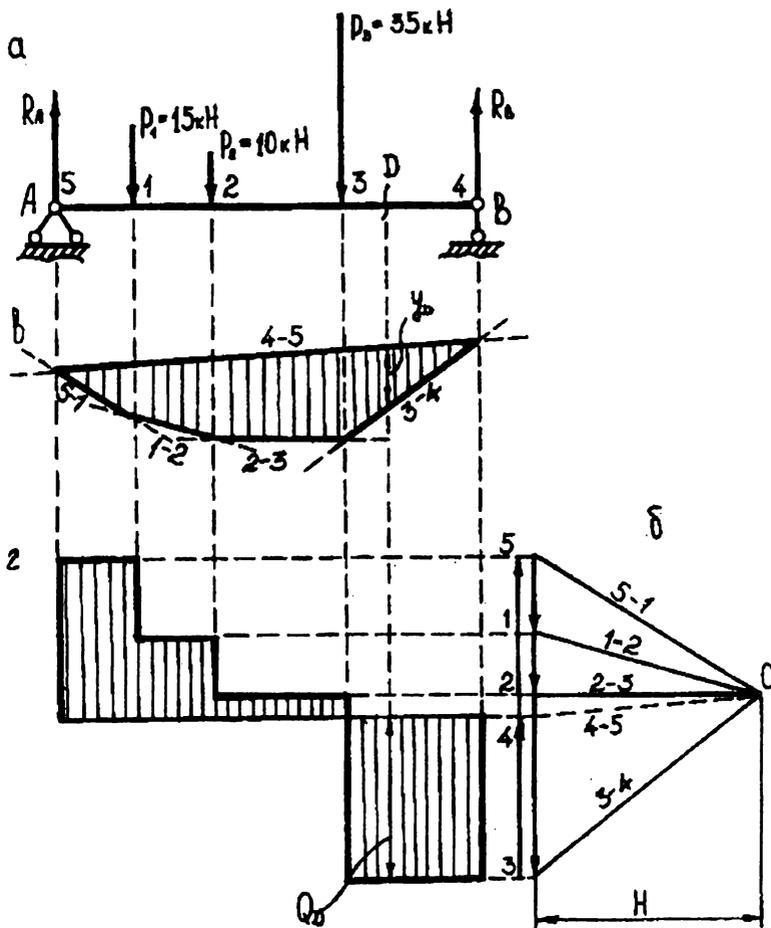


Рис. 2.25

Изгибающий момент в произвольном сечении D (рис. 2.25, в) представляет собой момент относительно этого сечения системы сил из опорной реакции $\bar{5}$, а также сил $\bar{1}$, $\bar{2}$ и $\bar{3}$. Согласно вышеизложенному он равен произведению по-

люсного расстояния H (см. рис. 2.25, б), отрезка Y_D (см.рис. 2.25, в), отсекаемого сторонами 4–5 и 3–4 на вертикали, проведенной через сечение D , и величин $\frac{1}{M_C}$ и $\frac{1}{M_P}$:

$$M_D^H = y_D H \frac{1}{M_C} \cdot \frac{1}{M_P}.$$

Так как для системы параллельных сил $H = const$, можно записать

$$M_D^H = y_D k,$$

где $k = H \frac{1}{M_C} \cdot \frac{1}{M_P}$.

Следовательно, ординаты внутри веревочного многоугольника представляют собой ординаты эпюры изгибающих моментов в масштабе $1:k$.

Пользуясь планом сил, можно построить эпюру поперечных сил. Проведем прямые, параллельные оси балки, через точки раздела всех сил и через точку раздела опорных реакций $\bar{4}$ и $\bar{5}$ (см. рис. 2.25, з). Последнюю принимаем за ось абсцисс. Полученная ступенчатая линия представляет собой эпюру поперечных сил в масштабе, равном принятому масштабу сил.

2.4.2. Расчет ферм (диаграмма усилий Максвелла–Кремоны)

В основе графического метода расчета ферм на неподвижную нагрузку лежат способ вырезания узлов и условие равновесия в геометрической форме (построение силового многоугольника для системы сил, находящейся в равновесии).

Расчет выполняется в следующем порядке:

- в строгом соответствии с принятым масштабом расстояний вычерчивается расчетная схема фермы;
- определяются опорные реакции, при этом используются уравнения равновесия для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело;
- вырезается узел, в котором сходится не более двух стержней с неизвестными внутренними усилиями, и в принятом масштабе сил вычерчивается силовой многоугольник из системы внешних активных сил и реакций, в том числе реакций разрезанных стержней; так как узел находится в равновесии, то силовой многоугольник должен быть замкнутым, в процессе его построения определяются векторы неизвестных внутренних усилий в разрезанных стержнях;
- после выполнения предыдущей операции появляется новый узел, в котором сходится не более двух неизвестных стержней; вырезав его и построив силовой многоугольник, определяют неизвестные усилия и т. д., пока не будут определены усилия во всех стержнях фермы.

Проиллюстрируем это на примере. Пусть дана треугольная ферма с треугольной решеткой (рис. 2.26, а). Определим усилия в стержнях фермы. В ферме содержится два узла, содержащих не более 2 стержней, это опорные узлы 1 и 5. Начнем с узла 1. Вырезав узел, будем строить силовой многоугольник, начиная с известной силы, расположенной по ходу часовой стрелки после пары неизвестных усилий в разрезанных стержнях. Для узла 1 это опорная реакция R_A . За ней по ходу часовой стрелки идут неизвестные усилия S_1 и S_2 . Неизвестны ни величина, ни направление этих усилий. Но известно, что вектор $\overline{S_1}$ направлен вдоль оси стержня 1–2, а $\overline{S_2}$ – вдоль оси стержня 1–7, а также то, что в соответствии с правилом построения силового многоугольника начало $\overline{S_1}$ должно совпадать с концом вектора последнего известного усилия, а конец $\overline{S_2}$ – с началом вектора первого известного усилия (в данном случае известное усилие только одно, поэтому первое и последнее известное усилия совпадают – это усилие R_A). Учитывая это, через конец вектора $\overline{R_A}$ проведем линию, параллельную стержню 1–2, а через начало $\overline{R_A}$ – линию, параллельную стержню 1–7 (рис. 2.26, б). Так как конец $\overline{S_1}$ по логике построения совпадает с началом $\overline{S_2}$, то точка пересечения проведенных линий и является концом вектора $\overline{S_1}$, а также началом вектора $\overline{S_2}$. Так мы нашли величину и направление неизвестных усилий в узле 1.

Теперь в узле 2 стало не более 2 стержней с неизвестными усилиями. Величина усилия в стержне 2–1 равна S_1 , а направление противоположно тому, что найдено при рассмотрении узла 1, как у реакции связи с противоположной стороны сечения. Построив многоугольник сил по приведенной выше схеме, получим, что точка пересечения двух линий совпадает с началом вектора первого известного усилия. Следовательно, начало и конец вектора усилия S_4 находятся в одной точке. Значит, величина усилия S_4 равна нулю и стержень 2–7 является нулевым, что соответствует второму признаку нулевых стержней (см. п.2.2.3.). По той же схеме строим многоугольники сил последовательно в узлах 7 и 3. Ввиду полной симметрии фермы и приложенной в узлах нагрузки усилия в соответствующих стержнях левой и правой половины фермы равны. Поэтому ограничиваемся построением многоугольников сил только в приведенных выше узлах.

Сняв в построенных многоугольниках размеры векторов искомых усилий и разделив их на масштаб сил, получим искомые значения усилий в стержнях фермы: $S_1 = S_9 = S_3 = S_6 = 42\text{кН}$; $S_7 = S_5 = 23\text{кН}$; $S_2 = S_{10} = 38\text{кН}$; $S_{11} = 25\text{кН}$.

Приведенный порядок расчета имеет такие недостатки:

- повторное построение усилий в стержнях, которые один раз проводят в одном направлении, а другой раз – в противоположном;
- построение силовых многоугольников для каждого узла в отдельности не дает общей картины распределения усилий в стержнях фермы.

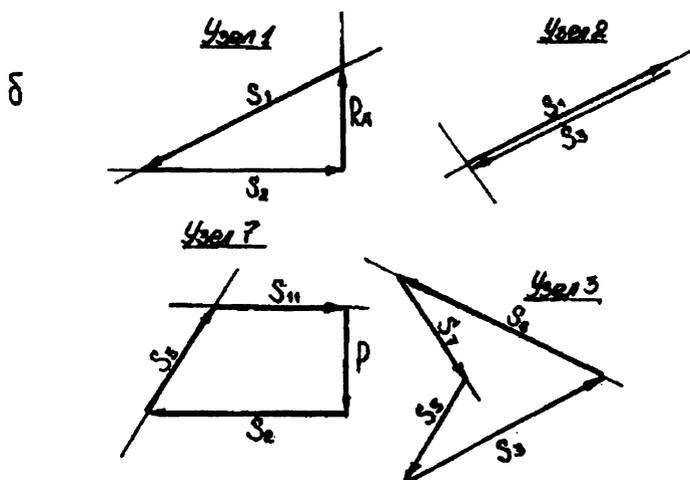
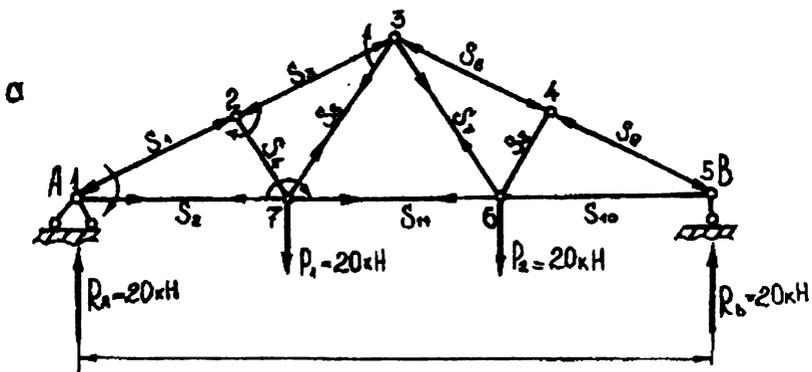


Рис. 2.26

Эти недостатки исключаются при расчете методом построения диаграммы Максвелла–Кремоны*.

Построение диаграммы Максвелла–Кремоны заключается в соединении силовых многоугольников для всех узлов фермы в один чертеж так, чтобы ни одно из усилий не повторялось дважды. Алгоритм построения включает следующие операции:

* Этот графический способ расчета усилий в стержнях фермы был разработан почти одновременно и независимо друг от друга английским физиком Дж. К. Максвеллом (1831–1879) в 1864г. и итальянским математиком Л. Кремоной (1830–1930) в 1872 г.

1. В принятом масштабе расстояний вычерчивается расчетная схема фермы с расположением на ней внешних сил и включением опорных реакций.

2. Определяются опорные реакции.

3. Части плоскости вне фермы, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, обозначаются индексами определенного типа (например, буквами различного алфавита, заглавными или прописными; цифрами, арабскими или римскими); части плоскости внутри фермы, ограниченные стержнями, обозначаются индексами другого типа и узлы фермы – индексами третьего типа.

При этом, общепринятый порядок индексов располагается в направлении обхода фермы (по часовой или против часовой стрелки).

4. Строится замкнутый многоугольник внешних сил (ферма находится в равновесии), при этом складываются векторы сил в порядке, соответствующем принятому порядку обхода фермы.

При этом векторы сил обозначаются индексами разграничиваемых ими частей плоскости, расположенных в порядке обхода фермы. Первый индекс обозначает начало вектора, второй – конец вектора.

5. Находятся нулевые стержни фермы.

6. На базе многоугольника внешних сил строятся замкнутые силовые многоугольники для каждого узла фермы, используются предыдущие построения. При этом узлы выбираются в таком порядке, чтобы в каждом очередном узле было не более двух неизвестных усилий и не менее одного известного. Порядок обхода узлов при сложении векторов усилий соответствует порядку обхода фермы. Векторы усилий в узлах обозначаются по правилу, принятому для внешних сил.

7. После построения многоугольника сил для очередного узла найденное направление усилия переносится на соответствующий стержень фермы. Если при этом усилие будет направлено к узлу, стержень работает на сжатие, если от узла – на растяжение.

8. После построения диаграммы на ней измеряются отрезки, изображающие искомые усилия в стержнях фермы, и с учетом принятого масштаба сил находятся величины этих усилий.

Рассмотрим этот алгоритм на примере. Пусть дана треугольная ферма, расчетная схема которой приведена на рис. 2.27, а. Выполнив операции 1, 2, 3 (обход фермы принят в направлении часовой стрелки), приступим к непосредственному построению диаграммы Максвелла – Кремоны (рис. 2.27, б). Строим многоугольник внешних сил. Складываем векторы по ходу часовой стрелки, начиная с вектора опорной реакции $R_e - \bar{6}\bar{7}$:

$$\bar{6}\bar{7} (\text{опорная реакция } R_e) + \bar{7}\bar{1} (R_a) + \bar{1}\bar{2} (P_1) + \bar{2}\bar{3} (P_2) + \bar{3}\bar{4} (P_3) + \bar{4}\bar{5} (P_4) + \bar{5}\bar{6} (P_5).$$

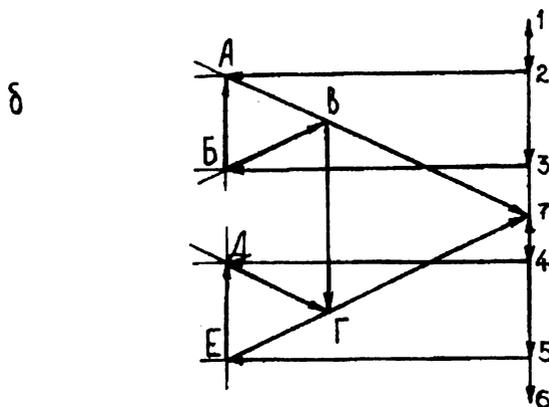
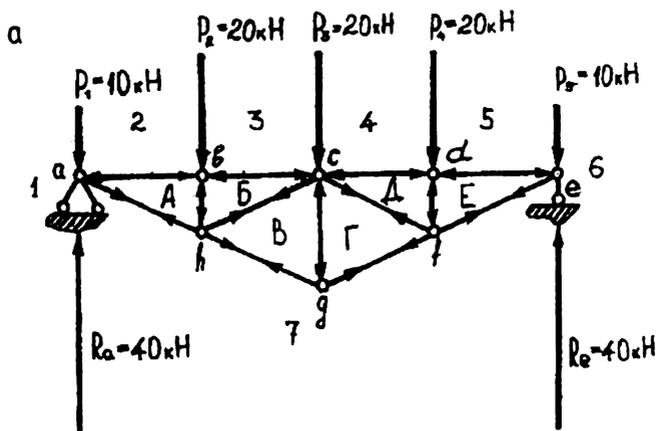


Рис. 2.27

Так как векторы внешних сил параллельны, многоугольник сил получится в виде прямой линии.

Переходим к п. 5 алгоритма. Стержней с признаками нулевых на данной расчетной схеме нет.

В соответствии с п. 6 на базе вычерченного многоугольника внешних сил строим силовой многоугольник сначала для узла a . В этом узле два известных усилия R_a ($\overline{71}$), внешняя нагрузка P_1 ($\overline{12}$) и два неизвестных усилия: в стержне ab — $\overline{2A}$ и в стержне ah — $\overline{A7}$. Пересечение линий, параллельных осям стержней

ab и ah , проведенных соответственно через точки 2 и 7, дает точку A , являющуюся концом вектора $\overline{2A}$ и началом вектора $\overline{A7}$. Найденное направление усилий переносим на расчетную схему фермы.

Переходим к следующему узлу. Это узел b . В нем два известных усилия – усилие в стержне ab (вектор $\overline{A2}$) и внешняя нагрузка P_2 (вектор $\overline{23}$) – и два неизвестных – в стержне bc ($\overline{3B}$) и в стержне bh (\overline{BA}). Через точку 3, являющуюся концом вектора $\overline{23}$, проводим линию, параллельную оси стержня bc , а через точку A , – являющуюся началом вектора $\overline{A2}$, – линию, параллельную оси стержня bh . Пересечение этих линий дает точку B , являющуюся концом вектора $\overline{3B}$ и началом вектора \overline{BA} . Найденное направление усилий переносим на расчетную схему фермы.

Переходим к узлу h . В нем два известных усилия – первое по ходу часовой стрелки усилие в стержне ah ($\overline{7A}$), второе – в стержне bh (\overline{AB}) – и два неизвестных усилия в стержне hc (\overline{BB}) и в стержне hg ($\overline{B7}$). Через точку B , являющуюся концом вектора \overline{AB} , проводим прямую линию, параллельную оси стержня hc , а через точку 7, являющуюся началом вектора $\overline{7A}$, – линию, параллельную оси стержня hg . Пересечение этих линий дает точку B , являющуюся концом вектора \overline{BB} и началом вектора $\overline{B7}$. Найденное направление усилий переносим на расчетную схему фермы.

Далее подобные операции выполняем со всеми оставшимися узлами в последовательности, обеспечивающей наличие в каждом рассматриваемом узле не более двух неизвестных усилий: узел g , узел c , узел l , и узел e , либо узел f . Построив диаграмму до конца, определяем, что согласно п.7 стержни ab , bc , cd , de , bh , cg и df работают на сжатие, а стержни ah , hg , hc , cf , gf и fe – на растяжение.

По п. 8, измерив отрезки построенной на рис. 2.27, б диаграммы Максвелла–Кремоны и разделив полученные значения на масштаб сил, получим величины соответствующих искомым усилий в стержнях фермы.

Значения этих величин составляют:

для сжатых стержней

ab (вектор $\overline{2A}$) – 64кН, bc ($\overline{3B}$) – 64 кН, cd ($\overline{4D}$) – 64 кН, de ($\overline{5E}$) – 64кН, bh ($\overline{5A}$) – 20кН, cg ($\overline{BГ}$) – 40кН, df ($\overline{EД}$) – 20кН;

для растянутых стержней

ah ($\overline{4Г}$) – 71кН, hg ($\overline{B7}$) – 48кН, hc (\overline{BB}) – 24кН, cf ($\overline{ДГ}$) – 24кН, gf ($\overline{Г7}$) – 48 кН, fe ($\overline{E7}$) – 71кН.

2.5. Методы расчета пространственных ферм

Вышеизложенные методы расчета ферм относятся к плоским расчетным схемам. Однако, все сооружения являются пространственными, и многие из них можно расчленить на отдельные плоские системы, работающие независимо. Но существуют и такие сооружения, которые невозможно разложить на отдельные плоские системы.

Расчет ферм, относящихся к первому типу сооружений, осуществляется путем разложения их на отдельные плоские фермы, причем нагрузка произвольного направления разлагается на составляющие, действующие в плоскостях отдельных плоских ферм.

Рассмотрим, например, пространственную сетчатую ферму, представляющую собой неизменяемую систему (рис. 2.28). Определим усилия в стержнях этой фермы, если на нее действуют горизонтальные силы по диагонали шестиугольного поперечного сечения фермы ($ag, algI$). Каждую из сил разлагаем на две горизонтальные составляющие, например, силу P — на H_{ac} и H_{ab} , расположенные в плоскостях граней фермы $acfe$ и $abde$ (рис. 2.29). Следовательно, усилия возникают только в элементах этих плоских ферм. Очевидно, что $H_{ac} = H_{ab} = H_{a_1c_1} = H_{a_1b_1} = P^*$.

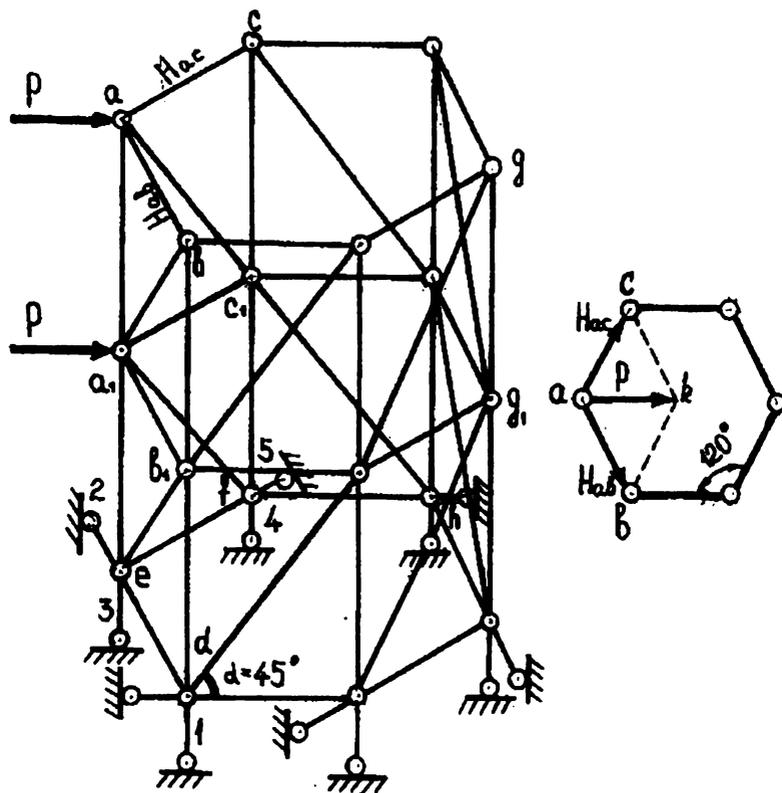


Рис. 2.28

* Треугольники ack и abk равносторонние.

Рассмотрим теперь плоские фермы $acfe$ и $abde$ отдельно и определим усилия в их элементах (например методом вырезания узлов). Значения этих усилий указаны на рис. 2.29.

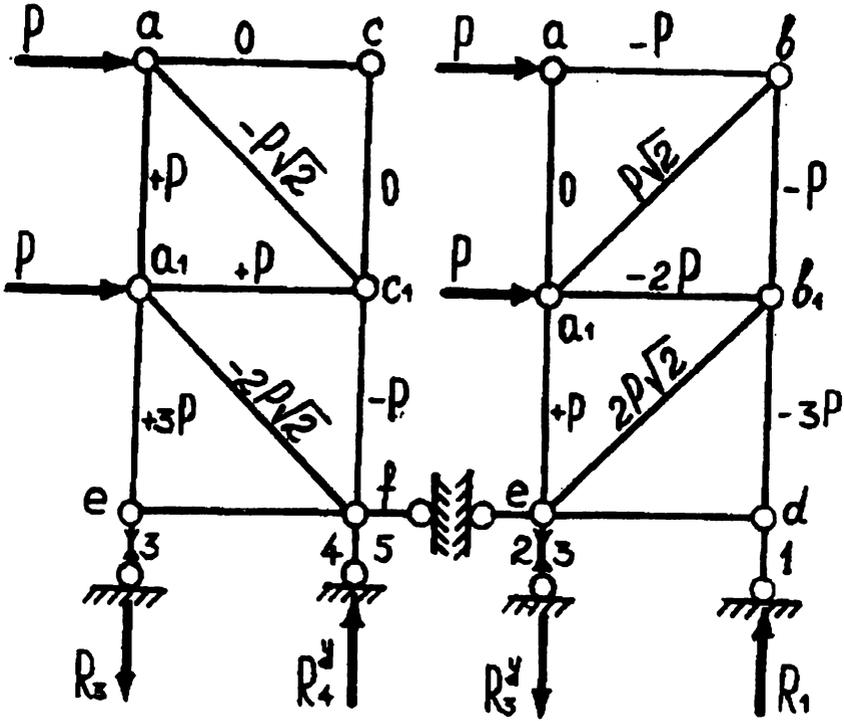


Рис. 2.29

Суммарные усилия стержней aa_1 , a_1e и 3 пространственной фермы будут равны: $S_{aa_1} = +P + 0 = P$; $S_{a_1e} = +3P + P = 4P$; $S_3 = -3P + (-3P) = -6P$.

Расчет пространственных ферм, расчленение которых на плоские невозможно, выполняется либо способом проекций, либо способом моментов (моментных осей).

* acc_1a_1 ; a_1c_1ef ; aba_1b_1 ; a_1b_1ed – прямоугольники. Теперь $\sum M_4 = -R_3 \cdot 1 + P \cdot 1 + P \cdot 2 = 0$, и $R_3 = 3P$; $\sum M_4 = -R_3^y \cdot 1 + P \cdot 1 + P \cdot 2 = 0$; и $R_3^y = 3P$. Отсюда методом вырезания углов находим, что стержень 3 работает на сжатие и $S_3 = -3P + (-3P) = -6P$.

По способу проекций, вырезая узел O , где сходятся три стержня, проецируем все силы P , S_1 , S_2 и S_3 на направление, перпендикулярное плоскости, которая совмещает два других усилия, например S_2 и S_3 (рис. 2.30). Пусть нормалью к плоскости $S_2 - S_3$ будет ось On . Тогда уравнение проекций всех сил на ось On будет иметь вид $S_1 \cdot \cos \alpha - P \cdot \cos \beta = 0$, откуда $S_1 = \frac{P \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}$.

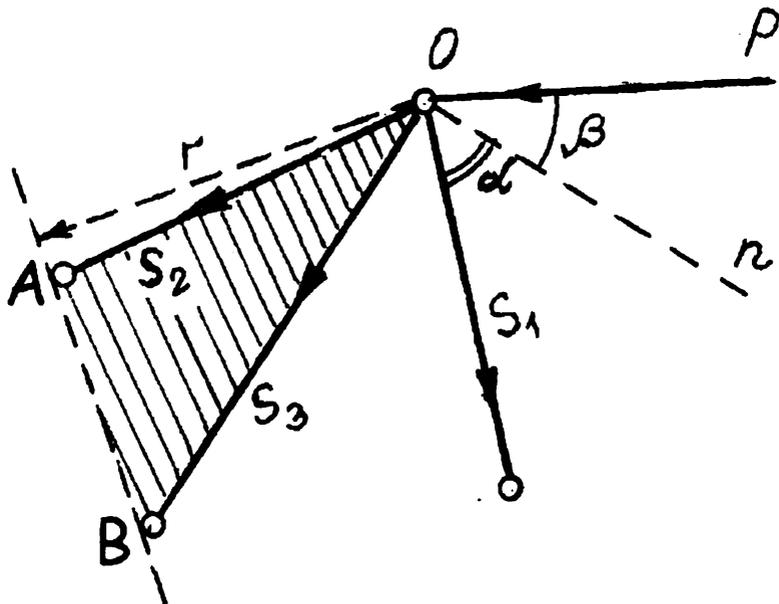


Рис. 2.30

По способу моментов для определения усилия S_1 составляем сумму моментов относительно оси AB , пересекающей направление S_2 и S_3 . Тогда условие равновесия в виде суммы моментов относительно оси AB будет таким:

$$S_1 \cdot r \cdot \cos \alpha - P \cdot r \cdot \cos \beta = 0,$$

где $S_1 \cdot \cos \alpha$ и $P \cdot \cos \beta$ – проекции сил S_1 и P на направление нормали On к плоскости OAB ;

r – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на ось AB .

Пусть, например, требуется определить усилия S_1 и $S_2 = S_3$ в стержнях простейшей трехстержневой фермы при действии на узел O вертикальной силы P (рис. 2.31).

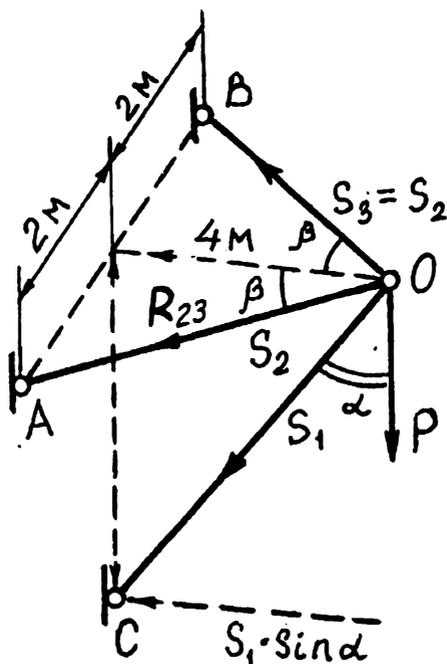


Рис. 2.31

Проектируя все силы, действующие на узел O , на вертикальную ось, перпендикулярно плоскости стержней S_2 и S_3 , получаем:

$$P + S_1 \cdot \cos \alpha = 0, \quad S_1 = -P / \cos \alpha.$$

Проецируя силы, действующие на узел O , на горизонталь и вводя равнодействующую сил S_2 и S_3 , которую обозначим R_{23} , получаем:

$$S_1 \cdot \sin \alpha + R_{23} = 0,$$

откуда

$$R_{23} = -S_1 \cdot \sin \alpha = P \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

По равнодействующей R_{23} , принимая во внимание, что $S_2 = S_3$, находим составляющую:

$$R_{23} = 2S_2 \cdot \cos \beta,$$

откуда

$$S_2 = R_{23} / 2 \cos \beta = P \cdot \operatorname{tg} \alpha / 2 \cos \beta.$$

2.6. Контрольные вопросы

Но- мер п/п	Номер и название раздела, вопросы к нему	Уровень сложности вопроса
1	2	3
	2.2. Аналитический метод расчета сооружений на неподвижную нагрузку	
1	Дайте расшифровку метода РОЗУ.	1
2	Из каких уравнений составляется система уравнений равновесия?	2
3	Приведите формулу определения вертикальных составляющих реакций опор.	2
4	Как определяются горизонтальные составляющие реакций опор?	2
5	Какие способы разделения используются при расчете ферм?	1
6	Сформулируйте условия применения метода вырезания узлов.	2
7	Сформулируйте условия применения метода рассечения фермы.	2
8	Какие уравнения равновесия используются при применении метода вырезания узлов?	2
9	Какие уравнения равновесия используются при применении метода рассечения фермы?	2
10	Каким требованиям должна отвечать моментная точка?	3
11	Какой стержень называется нулевым?	1
12	Перечислите условия существования нулевых стержней.	2
13	Какое расположение координатных осей будет наиболее рациональным для составления уравнений равновесия при применении метода вырезания узлов?	2
	2.3. Аналитический метод расчета сооружений на подвижную нагрузку	
1	Дайте определение линии влияния.	2
2	Для чего строится линия влияния?	3
3	Чем отличается линия влияния от эпюры?	3
4	Напишите формулу определения искомого усилия в заданном сечении от системы подвижных сосредоточенных нагрузок с помощью линии влияния.	2

1	2	3
5	Напишите формулу определения искомого усилия в заданном сечении от распределенной подвижной нагрузки с помощью линии влияния.	2
6	Изложите алгоритм построения линии влияния.	2
7	Изобразите линии влияния опорных реакций простой (неконсольной) балки.	2
8	Изобразите линию влияния изгибающего момента в сечении <i>C</i> простой (неконсольной) балки.	2
9	Как строится линия влияния при узловой передаче нагрузки?	2
10	Какое положение подвижной нагрузки называется опасным?	2
11	Как определяется опасное положение системы грузов при полигональной форме линии влияния?	2
12	Сформулируйте условия опасного положения системы сосредоточенных грузов при треугольной форме линии влияния.	2
13	Найдите ошибки в нижеприведенных определениях: <ul style="list-style-type: none"> • линия влияния – это зависимость усилия от нагрузки; • линия влияния – это графическая зависимость усилия элементе сооружения от подвижной нагрузки; • линия влияния – это зависимость усилия в элементе сооружения от места положения на нем нагрузки; • линия влияния – это зависимость усилия от места положения единичной нагрузки. 	3
14	Какие исходные данные требуются, чтобы найти опасное положение нагрузки?	3
	2.4. Графический метод расчета на неподвижную нагрузку	
1	Изложите порядок построения веревочного многоугольника.	2
2	Как определяется положение равнодействующей системы сил с помощью веревочного многоугольника?	3
3	Сформулируйте графическое условие равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.	3
4	Что такое полюсное расстояние?	2
5	Какое свойство веревочного многоугольника лежит в основе метода графического определения опорных реакций?	3
6	Какие два способа лежат в основе графического метода расчета ферм.	2
7	Изложите порядок выполнения графического расчета ферм.	2

1	2	3
	<i>2.5. Методы расчета пространственных ферм</i>	
1	Как рассчитываются пространственные фермы, которые можно расчленить на отдельные плоские системы?	2
2	Как рассчитываются пространственные фермы, которые нельзя расчленить на отдельные плоские системы?	2

Заключение

Материал, изложенный в пособии, представляет собой тот минимум, который необходим специалистам сварочного профиля в области строительной механики. Неправильно спроектированная сварная конструкция может просто разрушиться по причине геометрической изменяемости, неверно определенные усилия в элементах сварной конструкции приведут к ошибочно выбранным параметрам сварного шва, который в свою очередь определяет прочность соединения и величину расходных материалов.

В пособие не вошел обзор матричных методов, используемых в строительной механике, ввиду ограниченности объема пособия.

Литература

1. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
2. Снитко М.К. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1980. – 431 с.
3. Николаев Г.А., Винокуров В.А. Сварные конструкции. Расчет и проектирование. – М.: Высш. шк., 1990. – 446 с.
4. Дыховичный А.И. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1966. – 328 с.

Стенин Юрий Владимирович

Песков Александр Владимирович

ЭЛЕМЕНТЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В РАСЧЕТАХ СВАРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Редактор Т. В. Шептунова

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета Уральского государственного
профессионально-педагогического университета

Лицензия ЛР № 040328 от 10.04.97

Подписано в печать 2.10.00. Формат 60x84/16. Бумага писчая № 1.
Усл. печ. л. 7,1. Уч.- изд.л. 7,3. Тираж 200 экз. Заказ 76
Издательство Уральского государственного профессионально-педагогического
университета. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

Ризограф УГППУ. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

