

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-
педагогический университет»
Учреждение Российской академии образования «Уральское отделение»
Академия профессионального образования

О. И. Ключников
А. В. Степанов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 3

Сложные электрические сигналы

Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением
по профессионально-педагогическому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям 050501.06–Профессиональное
обучение (информатика, вычислительная техника и компьютерные
технологии), 050501.19–Профессиональное обучение
(электроэнергетика, электротехника и электротехнологии)*

Екатеринбург
2009

УДК 623.3.01 (075.8)

ББК 32я73–1

К 52

Клюшников О. И. Теоретические основы электротехники [Текст]: учеб. пособие: в 5 ч. Ч. 3: Сложные электрические сигналы / О. И. Клюшников, А. В. Степанов. Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2009. 76 с.

ISBN 978-5-8050-0352-4

Изложены основные сведения о трехфазных электрических цепях; приведены комплексные методы расчета электрических цепей с соединением элементов звездой и треугольником; рассмотрены не-синусоидальные токи в линейных электрических цепях.

Пособие предназначено для студентов вузов, осуществляющих подготовку педагогов и инженеров по электротехническим направлениям.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Г. В. Ермаков (Институт теплофизики Уральского отделения Российской академии наук); канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. Карпов (ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0352-4

© ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», 2009

© Клюшников О. И., Степанов А. В., 2009

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Трехфазные цепи	6
1.1. Трехфазные электротехнические устройства	6
1.2. Элементы трехфазных цепей. Способы изображения симметричной системы ЭДС	7
1.3. Способы соединения фаз трехфазного источника питания. Фазные и линейные напряжения	9
1.4. Соотношение между фазными и линейными напряжениями источников	13
1.5. Соединение элементов трехфазной цепи звездой	15
1.5.1. Симметричная нагрузка	17
1.5.2. Несимметричная нагрузка	19
1.6. Соединение элементов трехфазной цепи треугольником.....	22
1.6.1. Симметричная нагрузка	23
1.6.2. Несимметричная нагрузка	25
1.7. Активная, реактивная, комплексная и полная мощности трехфазной симметричной системы	26
1.8. Измерение активной мощности в трехфазной системе	28
1.9. Расчет трехфазных цепей при соединении фаз приемника четырехпроводной звездой (звездой с нейтральным проводом).....	32
1.10. Расчет трехфазных потребителей при соединении фаз приемника трехпроводной звездой без нейтрального провода.....	34
1.11. Расчет трехфазных потребителей при соединении нагрузки треугольником	37
Контрольные вопросы и задания	43
Глава 2. Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях	44
2.1. Общие сведения.....	44
2.2. Способы представления периодических несинусоидальных электрических величин	44
2.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией	48
2.4. Разложение в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм	49
2.5. Коэффициенты, характеризующие несинусоидальные величины.....	54

2.6. Основные соотношения для несинусоидальных величин	55
2.7. Мощность периодического несинусоидального тока	57
2.8. Анализ линейных электрических цепей при несинусоидальном напряжении источника питания.....	58
2.9. Влияние резистивного, индуктивного и емкостного элементов цепи на форму кривой тока	62
2.9.1. Резонансные явления.....	62
2.9.2. Величины, которые измеряют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах	62
2.9.3. Особенности работы трехфазных систем, вызываемых гармониками, кратными трем	63
2.10. Анализ и расчет линейных электрических цепей при несинусоидальном напряжении источника питания.....	64
2.10.1. Представление линейных электрических цепей при несинусоидальном напряжении источника питания.....	66
2.10.2. Расчет линейных электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях и токах	67
Контрольные вопросы и задания	73
Заключение	74
Список рекомендуемой литературы	75

Введение

В пособии рассмотрены трехфазные системы с примерами расчета трехфазных электрических цепей, типы соединения данных электрических цепей, преимущества трехфазных электрических цепей, затронуты вопросы безопасности при эксплуатации трехфазных цепей; подробно раскрыты вопросы расчета несинусоидальных токов и напряжений в линейных электрических цепях, а также способы представления несинусоидальных электрических величин.

Учебное пособие состоит из двух глав: «Трехфазные цепи» и «Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях». В каждой главе приведены необходимые теоретические сведения, примеры практических расчетов, а также контрольные вопросы и задания, позволяющие глубже усвоить изучаемый материал.

Учебное пособие предназначено для студентов электротехнических специальностей, изучающих дисциплины «Теоретические основы электротехники», «Электротехника и электроника», а также «Электрические цепи и сигналы». Пособие также может быть использовано педагогами для подготовки к лекционному и лабораторно-практическому разделам электротехнических дисциплин.

Глава 1. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

1.1. Трехфазные электротехнические устройства

К сложным электрическим сигналам относят сигналы от многофазных систем и периодические сигналы несинусоидальной формы.

Объединение в одну цепь нескольких подобных по структуре цепей синусоидального тока одной частоты с независимыми источниками энергии широко применяется в технике. Объединяемые цепи синусоидального тока принято называть *фазами*, а всю объединенную систему цепей – *многофазной системой*.

Наибольшее распространение получила трехфазная система.

Трехфазная цепь состоит из трех типов элементов: источника электрической энергии (трехфазного генератора или трансформатора), линии передачи и приемников. Источниками электрической энергии в таких цепях являются трехфазные электромеханические генераторы, состоящие как бы из трех самостоятельных генераторов, размещенных в одном корпусе. На электрических станциях трехфазная система ЭДС образуется на зажимах трехфазного синхронного генератора.

Модель трехфазного генератора схематически изображена на рис. 1.1. Обмотки генератора расположены на статоре и состоят из трех катушек, каждая из которых изображена двумя витками; оси витков катушек сдвинуты относительно друг друга на один и тот же угол $2\pi/3$, т. е. на 120° . Начала катушек обозначены буквами *A*, *B* и *C*, а концы – *X*, *Y*, *Z*. Ротор (*N–S*) представляет собой электромагнит, возбуждаемый постоянным током. Его можно выполнять явнополюсным и неявнополюсным. На рис. 1.1 изображен неявнополюсный ротор. В машинном генераторе (см. рис. 1.1) обмотки неподвижны (помещены в пазы статора); они обозначены буквами *A*, *B*, *C*. Магнитное поле в генераторе создается вращающимся сердечником с намотанной на него катушкой, по которой протекает постоянный ток.

При вращении ротора турбиной создаваемое им магнитное поле возбуждает в неподвижных обмотках статора электродвижущие силы, имеющие одинаковые амплитуды и сдвинутые по фазе относи-

тельно друг друга на угол $2\pi/3$. Такая система ЭДС называется трехфазной.

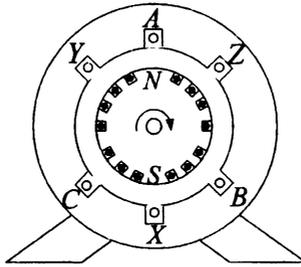


Рис. 1.1. Условное изображение модели трехфазного генератора

Под *трехфазной симметричной системой ЭДС* понимают совокупность трех синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на 120° . Графики мгновенных значений ЭДС изображены на рис. 1.2, б, а векторная диаграмма – на рис. 1.2, а.

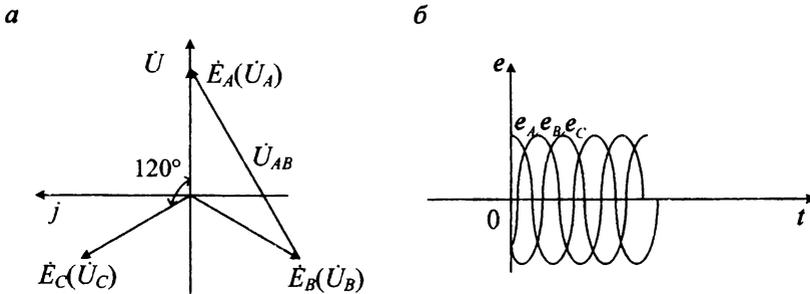


Рис. 1.2. Диаграммы ЭДС трехфазного генератора:
а – векторная; б – волновая

1.2. Элементы трехфазных цепей.

Способы изображения симметричной системы ЭДС

Под *трехфазной цепью* понимают совокупность трехфазной ЭДС, трехфазной нагрузки и соединительных проводов. Отдельная часть многофазной системы получила название *фазы* (иногда под фазой понимают участок трехфазной цепи с одинаковым током). Фазы трехфазного генератора принято обозначать первыми буквами латин-

ского алфавита: A, B, C . На схемах замещения фазы трехфазного генератора, или вторичной обмотки трехфазного трансформатора, изображают двумя способами (рис. 1.3).

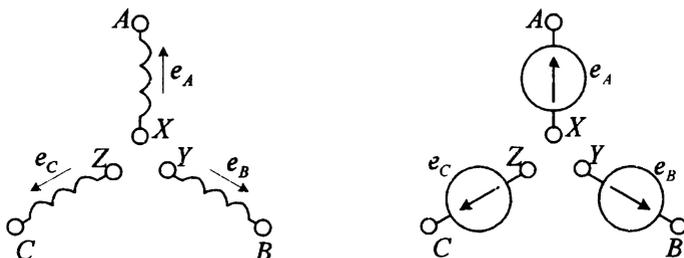


Рис. 1.3. Условные изображения обмоток статора трехфазных генераторов

Последовательность прохождения ЭДС через одинаковые значения (например, через нулевое значение) называют *последовательностью фаз*.

ЭДС трехфазного генератора обозначают следующим образом: одну из ЭДС – \dot{E}_A , отстающую от нее на 120° ЭДС – \dot{E}_B , а опережающую на 120° – \dot{E}_C . Такая последовательность чередования фаз называется *нормальной* или *прямой*. Если ЭДС одной фазы, например фазы A , принять за исходную и считать ее начальную фазу φ_A равной нулю, то выражения мгновенных значений ЭДС можно записать в виде

$$\begin{cases} e_A = E_m \sin \omega t, \\ e_B = E_m \sin(\omega t - 2\pi/3), \\ e_C = E_m \sin(\omega t - 4\pi/3) = E_m \sin(\omega t + 2\pi/3). \end{cases} \quad (1.1)$$

Комплексные действующие ЭДС можно соответственно записать следующим образом:

$$\dot{E}_A = E; \dot{E}_B = E \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \dot{E}_C = E \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (1.2)$$

Сумма трех векторов комплексных значений ЭДС равна нулю. Следовательно, алгебраическая сумма комплексных значений фазных

ЭДС и алгебраическая сумма мгновенных значений фазных ЭДС генератора равны нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0; \quad (1.3)$$

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (1.4)$$

1.3. Способы соединения фаз трехфазного источника питания. Фазные и линейные напряжения

В период зарождения трехфазных систем предпринимались попытки использовать несвязанную систему, в которой фазы обмотки генератора не были электрически соединены между собой и каждая фаза соединялась со своим приемником двумя проводами. Такие системы не получили применения вследствие их неэкономичности: для соединения генератора с приемником требовалось шесть проводов. Поэтому вполне естественным было стремление ученых и инженеров сократить число проводов трехфазной установки. Логическим путем было осуществлено объединение трех обратных проводов в один – так возникла связанная система, соединенная звездой (рис. 1.4), у которой концы фаз X, Y, Z соединяются в один общий узел N , называемый *нейтральной* или *нейтральной точкой* генератора (либо трансформатора).

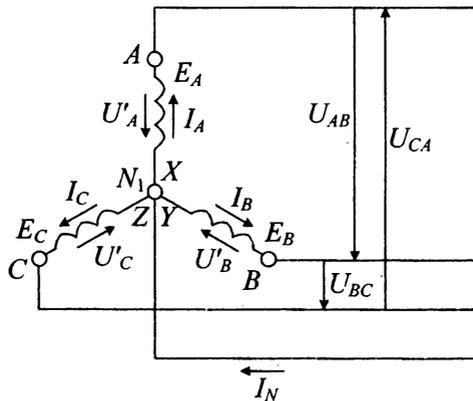


Рис. 1.4. Схема соединения фаз генератора звездой

Существуют различные способы соединения обмоток генератора: в треугольник и в звезду. На электрической схеме трехфазный генератор принято изображать в виде трех обмоток, расположенных друг к другу под углом 120° .

При соединении *звездой* (см. рис. 1.4) концы x , y и z трех фаз объединяют в одну общую точку N_1 . При соединении *треугольником* (рис. 1.5) конец x одной фазы соединяют с началом b второй фазы, конец y второй фазы – с началом c третьей фазы, конец z третьей фазы – с началом a первой фазы. Обмотки генератора обозначают буквами A, B, C ; букву A ставят у начала первой, B – у начала второй и C – у начала третьей фазы. Геометрическая сумма ЭДС в замкнутом треугольнике равна нулю. Поэтому если к зажимам A, B, C не присоединена нагрузка, то по обмоткам генератора не будет протекать ток.

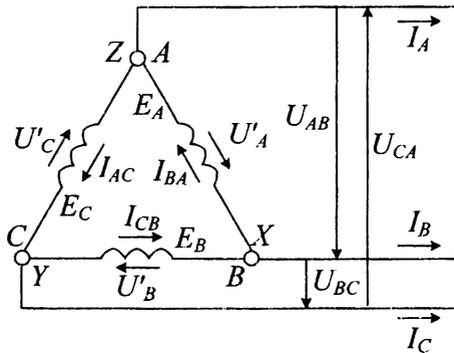


Рис. 1.5. Схема соединения фаз генератора треугольником

Важной особенностью трехфазных цепей является наличие двух напряжений – фазного и линейного. *Фазным* называют напряжение между началом и концом каждой фазы, а *линейным* – между началами двух фаз. Фазные напряжения обозначают U'_A, U'_B, U'_C . Ток, протекающий через обмотку, называют *фазным током* (на рис. 1.4 – I_A, I_B, I_C). Линейные напряжения обозначают U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} .

К важным особенностям следует отнести выбор направлений токов в обмотках генератора, фазных и линейных напряжений.

За положительное направление фазных напряжений принимают направление от начала к концу фаз обмоток.

За положительное направление тока в обмотках принято направление от конца к началу фаз обмоток.

За положительное направление линейных напряжений принимают направление от фазы к фазе согласно прямому чередованию фаз (обозначают U_{AB} , U_{BC} , U_{CA}).

На рис. 1.6 приведена векторная диаграмма фазных и линейных напряжений трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой.

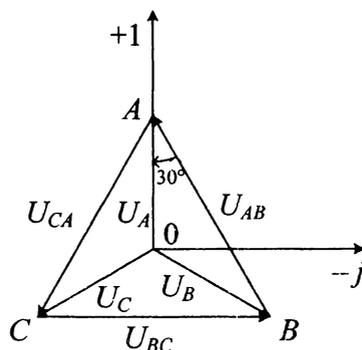


Рис. 1.6. Диаграмма напряжений трехфазного источника при соединении его фаз звездой

Заметим, что векторная диаграмма фазных и линейных напряжений генератора является входной характеристикой для нагрузки.

Рассмотрим построение диаграммы. В комплексной плоскости $(+1 \div j)$ строят в масштабе три вектора фазных напряжений (U_A , U_B , U_C). Напряжение U_A направляют по оси $+1$, остальные – под углом 120° и 240° к этому вектору. Концы векторов являются фазами, и их обозначают соответственно A , B , C . Соединяя концы фаз и соблюдая направленность, получаем треугольник векторов из линейных напряжений генератора (U_{AB} , U_{BC} , U_{CA}).

Пять простейших способов соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой изображены на рис. 1.7.

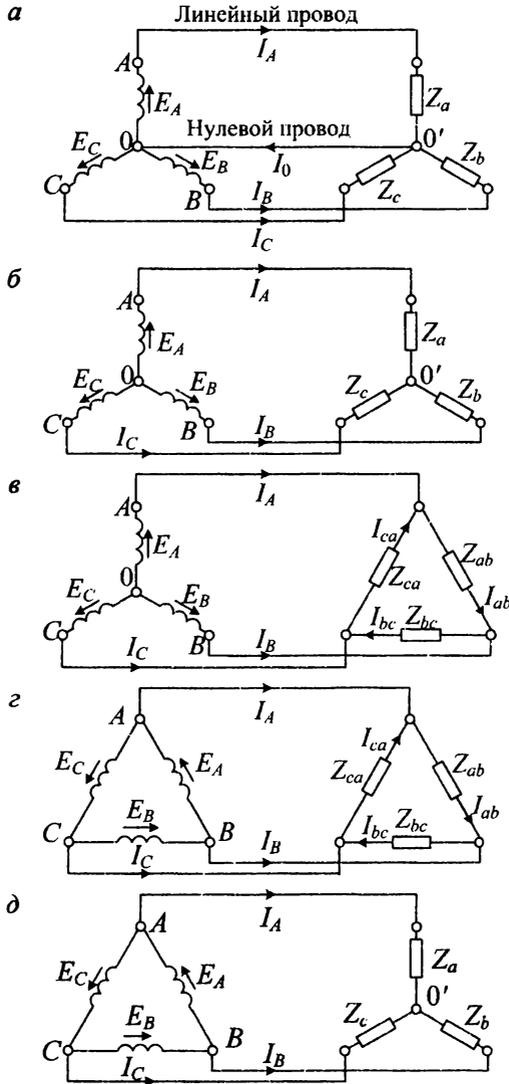


Рис. 1.7. Способы соединения фаз источников и приемников:
 а – звезда – звезда с нулевым проводом; б – звезда – звезда без нулевого
 провода; в – звезда – треугольник; г – треугольник – треугольник;
 д – треугольник – звезда

1.4. Соотношение между фазными и линейными напряжениями источников

Фазные напряжения источника отличаются от его ЭДС вследствие падений напряжения во внутренних сопротивлениях источника, а напряжения приемника отличаются от напряжений источника за счет падений напряжения в сопротивлениях проводов электрической сети, соединяющих нагрузку с генератором. Для упрощения анализа соотношений напряжения и ЭДС в трехфазных цепях будем пренебрегать указанными падениями напряжения. Применяя второй закон Кирхгофа поочередно ко всем фазам, при сделанном допущении и соединении источников звездой получим

$$U'_a = E_a; U'_b = E_b; U'_c = E_c. \quad (1.5)$$

На основании выражений (1.5) можно сделать вывод о том, что если генератор имеет симметричную систему ЭДС, то его фазные напряжения тоже симметричны, а векторная диаграмма фазных напряжений не отличается от векторной диаграммы ЭДС генератора.

Если трехфазный генератор подключить к приемнику, т. е. точки a , b и c подключить к трехфазной нагрузке (см. рис. 1.4), то на основании второго закона Кирхгофа для контуров N_1abN_1 , N_1bcN_1 , N_1caN_1 нетрудно получить следующие уравнения, связывающие линейные и фазные напряжения:

$$U_{ab} = U'_a - U'_b; U_{bc} = U'_b - U'_c; U_{ca} = U'_c - U'_a. \quad (1.6)$$

Используя (1.6) и имея известные значения векторов фазных напряжений, можно построить векторы линейных напряжений U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} .

Из векторной диаграммы (см. рис. 1.6) следует, что при соединении фаз источника звездой линейные напряжения равны и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол $2\pi/3$. Векторы линейных напряжений изображают, как правило, соединяющими векторы соответствующих фазных направлений. Кроме того, из векторной диаграммы следует, что

$$U_{ab} = 2U'_a \sin 60^\circ = \sqrt{3}U'_a. \quad (1.7)$$

Такое же соотношение существует между любыми другими линейными и фазными напряжениями. Поэтому можно написать, что при соединении обмоток источника звездой

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U'_{\text{ф}} \quad (1.8)$$

Выражения (1.5) справедливы и при соединении фаз источника треугольником. Из схемы, показанной на рис. 1.5, следует, что линейные напряжения равны соответствующим фазным напряжениям:

$$U_{ab} = U'_{a'}, U_{bc} = U'_{b'}, U_{ca} = U'_{c'} \quad (1.9)$$

Можно написать, что при соединении фаз источника треугольником вообще

$$U_{\text{л}} = U'_{\text{ф}} \quad (1.10)$$

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Независимо от способа соединения фаз источника между линейными проводами трехфазной цепи существуют три одинаковых по действующему значению линейных напряжения, сдвинутых по фазе относительно друг друга на угол $2\pi/3$. В случае соединения фаз источника звездой линейные напряжения оказываются в $\sqrt{3}$ раз больше, чем при соединении фаз того же источника треугольником.

2. В четырехпроводной цепи кроме трех линейных напряжений между линейными проводами и нейтральным проводом имеются три фазных напряжения. Последние в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных напряжений и сдвинуты по фазе относительно друг друга также на угол $2\pi/3$. Фазные и линейные напряжения не совпадают по фазе.

3. Наиболее распространенными номинальными напряжениями приемников переменного тока являются напряжения 380, 220 и 127 В. Напряжения 380 и 220 В используют преимущественно для питания промышленных приемников, а напряжения 220 и 127 В – для питания бытовых приемников. Напряжения 380, 220 и 127 В считают также номинальными напряжениями трехфазных электрических сетей. При линейном напряжении 380 В фазное напряжение четырехпроводной трехфазной сети $380/\sqrt{3} = 220$ В, а при линейном напряжении 220 В оно составляет $220/\sqrt{3} = 127$ В.

4. Наличие в четырехпроводных сетях (см. рис. 1.7, а) линейных и фазных напряжений дает возможность подключать однофазные приемники, рассчитанные на два напряжения, например на 380 и 220 В или на 220 и 127 В.

5. Точку, в которой объединены три конца трехфазной нагрузки при соединении ее звездой, называют *нулевой точкой нагрузки* и обозначают $0'$. *Нулевым проводом* называют провод, соединяющий нулевые точки генератора и нагрузки. Ток нулевого провода обозначим I_0 . За положительное направление тока примем направление от точки $0'$ к точке 0.

6. Провода, соединяющие точки A, B, C генератора с нагрузкой, называют *линейными*. Текущие по линейным проводам токи называют *линейными*, их обозначают I_A, I_B, I_C . Условимся за положительное направление токов принимать направление от генератора к нагрузке. Модули линейных токов часто обозначают I_n (не указывая никакого дополнительного индекса), особенно тогда, когда все линейные токи по модулю одинаковы. Напряжение между линейными проводами называют *линейным* и часто обозначают, используя два индекса, например U_{AB} (линейное напряжение между точками A и B); модуль линейного напряжения обозначают U_n .

1.5. Соединение элементов трехфазной цепи звездой

Как видно из схемы, изображенной на рис. 1.8, при соединении элементов нагрузки приемника звездой фазные напряжения приемника U_a, U_b, U_c не равны линейным напряжениям U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} . Применяя второй закон Кирхгофа к контурам $aNba, bNcb, cNac$, можно получить следующие соотношения между линейными и фазными напряжениями в комплексном виде:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b; \underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c; \underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a. \quad (1.11)$$

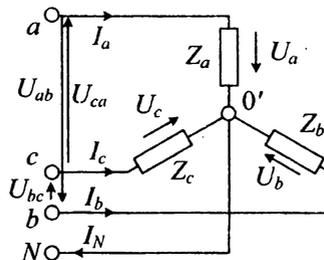


Рис. 1.8. Схема соединения фаз приемника звездой

Пользуясь соотношениями (1.9) и имея данные векторов фазных напряжений, нетрудно построить векторы линейных напряжений (рис. 1.9).

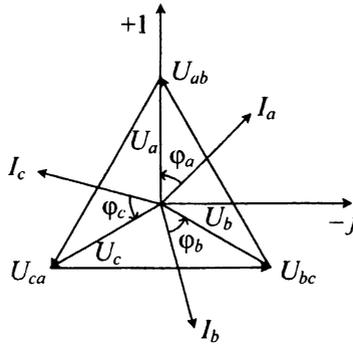


Рис. 1.9. Векторная диаграмма при соединении фаз приемника звездой в случае симметричной нагрузки

Если не учитывать сопротивлений линейных проводов и нейтрального провода, то следует считать комплексные значения линейных и фазных напряжений приемника равными соответственно комплексным значениям линейных и фазных напряжений источника. Вследствие указанного равенства векторная диаграмма напряжений приемника не отличается от векторной диаграммы источника при соединении звездой (см. рис. 1.6 и 1.9).

Линейные и фазные напряжения приемника, как и источника, образуют две симметричные системы напряжений. Очевидно, между линейными и фазными напряжениями приемника существует соотношение, подобное (1.8), т. е.

$$U_{л} = \sqrt{3}U_{\phi}. \quad (1.12)$$

Как будет показано далее, соотношение (1.12) справедливо при определенных условиях также в случае отсутствия нейтрального провода, т. е. в трехпроводной цепи.

На основании указанного соотношения можно сделать вывод о том, что соединение звездой следует применять в том случае, когда каждая фаза трехфазного приемника или однофазные приемники рассчитаны на напряжение в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем номинальное ли-

нейное напряжение сети. Из схемы показанной на рис. 1.8, видно, что при соединении звездой линейные токи равны соответствующим фазным токам приемника:

$$I_{л} = I_{\phi}. \quad (1.13)$$

Пренебрегая сопротивлениями всех проводов, легко определить мгновенные значения токов трех фаз приемника и генератора:

$$i_A = \frac{u_A}{z_A}, i_B = \frac{u_B}{z_B}, i_C = \frac{u_C}{z_C}. \quad (1.14)$$

Данные уравнения могут быть записаны в комплексном виде:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A}, \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B}, \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C}.$$

С помощью первого закона Кирхгофа получим следующее соотношение между фазными токами и током нейтрального провода:

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_N. \quad (1.15)$$

Зная графическое изображение векторов фазных токов, с помощью (1.15) нетрудно построить вектор тока нейтрального провода. Если нейтральный провод отсутствует, то

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0. \quad (1.16)$$

1.5.1. Симметричная нагрузка

Нагрузка трехфазной цепи считается симметричной, когда для сопротивлений фаз z_a, z_b, z_c равны в отдельности активные и реактивные сопротивления фаз:

$$r_a = r_b = r_c, x_a = x_b = x_c,$$

где $x_a = x_{La} - x_{Ca}$ и т. д.

Условие симметричности нагрузки может быть записано в комплексном виде:

$$\underline{z}_A = \underline{z}_B = \underline{z}_C = \underline{z}_{\phi} = \underline{z}_{\phi} e^{+j\varphi}.$$

При симметричной нагрузке токи всех фаз имеют одинаковые действующие значения I_ϕ и одинаковые сдвиги фаз ϕ относительно соответствующих фазных ЭДС. Ток в нейтральном проводе равен нулю. Поэтому в случае симметричного приемника, или, как говорят, при симметричной нагрузке генератора, нейтральный провод не нужен и не прокладывается. Примером такого приемника является трехфазный двигатель с соединением фазных обмоток звездой.

Изначально будем считать, что при симметричной нагрузке имеется нейтральный провод. Нагрузка соединена по схеме (см. рис. 1.7, а), и всю электрическую цепь можно представить как три самостоятельных однофазных цепи.

В отношении любой фазы справедливы все формулы, полученные ранее для однофазных цепей. Например, для фазы а:

$$\begin{cases} \underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}, \\ \varphi_a = \arcsin \frac{x_a}{Z_a}, \\ P_a = U_a I_a \cos \varphi_a = I_a^2 r_a, \\ Q_a = U_a I_a \sin \varphi_a = I_a^2 x'_a, \\ |S_a| = U_a I_a = P_a^2 + Q_a^2. \end{cases} \quad (1.17)$$

Так как в четырехпроводной цепи модули $U_a = U_b = U_c = U_\phi = U_n/\sqrt{3}$, то, очевидно, при симметричной нагрузке

$$\begin{aligned} \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_\phi; \quad \underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_\phi; \quad P_a = P_b, P_c = P_\phi; \\ Q_a = Q_b = Q_c = Q_\phi; \quad \underline{S}_a = \underline{S}_b = \underline{S}_c = \underline{S}_\phi. \end{aligned}$$

Векторная диаграмма при симметричной активно-индуктивной нагрузке приведена на рис. 1.10. Из приведенных выражений и векторной диаграммы следует, что при симметричной нагрузке образуется симметричная система токов, поэтому ток в нейтральном проводе $\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$.

Очевидно, что отключение нейтрального провода при $\underline{I}_N = 0$ не приведет к изменению фазных напряжений, токов, углов сдвига фаз, мощностей и векторной диаграммы. Даже при отсутствии нейтрального провода фазные напряжения оказываются равными $U_\phi = U_n/\sqrt{3}$, т. е. тому напряжению, на которое рассчитаны фазы трехфазного приемника.

Таким образом, при симметричной нагрузке в нейтральном проводе нет необходимости.

Мощности трехфазного приемника могут быть выражены так:

$$\begin{cases} P = 3P_\varphi = 3U_\varphi I_\varphi \cos\varphi_\varphi; \\ Q = 3Q_\varphi = 3U_\varphi I_\varphi \sin\varphi_\varphi; \\ S = 3S_\varphi = 3U_\varphi I_\varphi = 3\sqrt{P_a^2 + Q_a^2}. \end{cases} \quad (1.18)$$

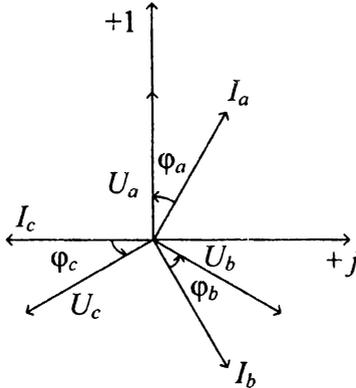


Рис. 1.10. Векторная диаграмма напряжений и токов симметричного приемника, соединенного звездой

В качестве номинальных напряжений и токов трехфазных приемников указываются обычно линейные напряжения и токи. Учитывая это, мощности трехфазных приемников целесообразно также выражать через линейные напряжения и токи. Заменяя в (1.18) фазные напряжения и ток согласно (1.12) и (1.13), получим

$$P = \sqrt{3}U_{л}I_{л}\cos\varphi_\varphi; \quad Q = \sqrt{3}U_{л}I_{л}\sin\varphi_\varphi; \quad S = \sqrt{3}U_{л}I_{л}. \quad (1.19)$$

1.5.2. Несимметричная нагрузка

Нагрузка считается несимметричной, когда сопротивление хотя бы одной из фаз не равно сопротивлениям других фаз. Например, нагрузка будет несимметричной, если $r_a = r_b = r_c$, $x_a = x_b \neq x_c$. Несимметричной нагрузкой является и полное отключение одной или двух фаз.

Несимметричная нагрузка возникает обычно при подключении к трехфазной сети однофазных приемников. Последние могут иметь различные мощности, располагаться территориально в разных местах (в различных помещениях, на разных этажах и т. д.), включаться и отключаться независимо друг от друга.

Особенностью электрической цепи при несимметричной нагрузке является то, что она обязательно должна иметь нейтральный провод. Объясняется это тем, что при его отсутствии значения фазных напряжений приемников во многом зависят от степени несимметрии нагрузки, т. е. от значений и характера сопротивлений приемников различных фаз. Поскольку последние могут изменяться в широких пределах при изменении числа включенных приемников, существенно могут изменяться и фазные напряжения. На одних приемниках напряжение может оказаться значительно больше, а на других – меньше фазного напряжения сети $U_n/\sqrt{3}$, т.е. того напряжения, на которое рассчитаны приемники, а это недопустимо.

Для иллюстрации сказанного на рис. 1.11, *а* приведена векторная диаграмма цепи с несимметричной активной нагрузкой фаз при наличии нейтрального провода, а на рис. 1.11, *б* – диаграмма той же цепи при его обрыве. При сравнении диаграмм отчетливо видны последствия обрыва нейтрального провода.

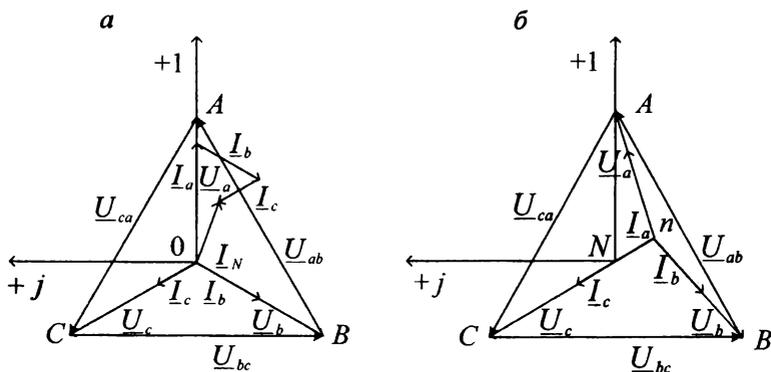


Рис. 1.11. Векторная диаграмма при соединении приемников звездой в случае несимметричной нагрузки:

а – при наличии нейтрального провода; *б* – при обрыве нейтрального провода

Фазные токи, углы сдвига фаз между фазными напряжениями и токами, а также фазные мощности при несимметричной нагрузке в цепи с нейтральным проводом будут в общем случае различными. Они могут быть определены по приведенным ранее формулам (1.17). Для определения мощностей всех фаз следует воспользоваться выражениями

$$P = P_a + P_b + P_c; Q = Q_a + Q_b + Q_c.$$

При несимметричной нагрузке ток в нулевом проводе не будет равен нулю: $I_N = I_a + I_b + I_c$. Значение и фаза тока I_N зависят не только от характера сопротивлений фаз приемника, но и от схемы их включения. Например, если конденсатор и индуктивную катушку, включенные соответственно в фазы c и b , поменять местами, то ток в нейтральном проводе изменится в несколько раз.

Если по каким-либо причинам несимметричные приемники, соединенные звездой, окажутся включенными в трехпроводную сеть, то между нейтральными точками приемника и источника электроэнергии возникнет напряжение \dot{U}_{nN} , называемое *напряжением между нейтральными*.

Цепь можно представить в виде схемы с двумя узлами n и N , поэтому для определения напряжения \dot{U}_{nN} следует воспользоваться известной формулой междуузлового напряжения:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c}, \quad (1.20)$$

где Y_a, Y_b и Y_c – комплексные проводимости фаз приемника.

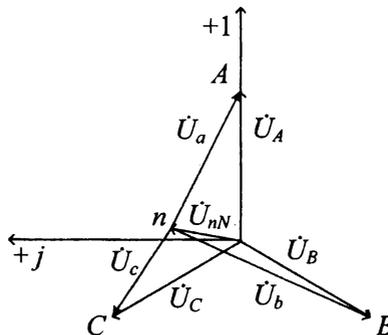


Рис. 1.12. Векторная диаграмма напряжений при учете напряжения между нейтральными

Очевидно, что теперь напряжения на фазах приемника будут отличными друг от друга. Из второго закона Кирхгофа следует, что

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}, \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}, \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN}. \quad (1.21)$$

Значит, зная \dot{U}_{nN} и фазные напряжения генератора $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, можно определить фазные напряжения приемника, а по ним – и фазные токи: $\dot{I}_a = \dot{U}_a / Z_a = Y_a \dot{U}_a$ и т. д. Векторы фазных напряжений можно определить графически, построив векторную диаграмму фазных напряжений источника питания и \dot{U}_{nN} (рис. 1.12).

1.6. Соединение элементов трехфазной цепи треугольником

В связи с тем что значительная часть приемников, включаемых в трехфазные цепи, бывают несимметричными, очень важно на практике (в частности, в схемах с осветительными приборами) обеспечить независимость режима работы отдельных фаз. Кроме четырехпроводной цепи подобными свойствами обладают и трехпроводные цепи при соединении фаз приемника треугольником.

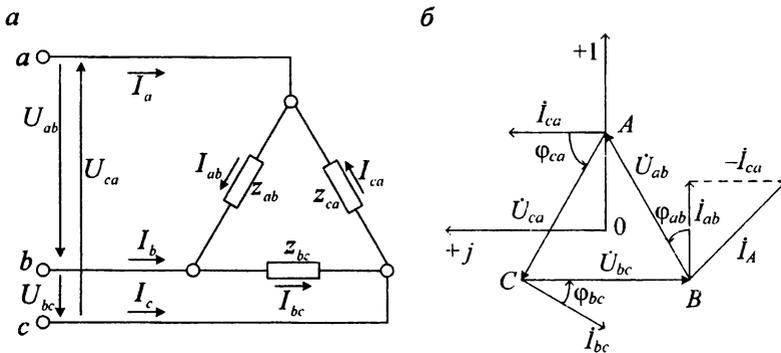


Рис. 1.13. Соединение фаз приемника треугольником:
а – общая схема; б – векторная диаграмма токов и напряжений

Как видно из схемы (рис. 1.13, а), каждая фаза приемника при соединении треугольником подключена к двум линейным проводам. Поэтому независимо от значения и характера сопротивлений прием-

ника каждое фазное напряжение нагрузки равно соответствующему линейному напряжению:

$$U_{\phi} = U_{л}. \quad (1.22)$$

Если не учитывать сопротивлений проводов сети, то напряжения приемника следует считать равными линейным напряжениям источника.

На основании схемы (см. рис. 1.13, *a*) и выражения (1.22) можно сделать вывод о том, что соединение треугольником следует применять тогда, когда каждая фаза трехфазного приемника или однофазные приемники рассчитаны на напряжение, равное номинальному линейному напряжению сети.

Фазные токи I_{ab} , I_{bc} и I_{ca} в общем случае не равны линейным токам I_a , I_b и I_c . Применяя первый закон Кирхгофа к узловым точкам a , b и c , можно получить следующие соотношения между линейными и фазными токами в комплексном виде:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (1.23)$$

Используя указанные соотношения и имея векторы фазных токов \dot{I}_{ab} , \dot{I}_{bc} , \dot{I}_{ca} , нетрудно построить векторы линейных токов (рис. 1.13, *б*).

1.6.1. Симметричная нагрузка

Если приемник симметричный ($z_{ab} = z_{ca} = z_{bc}$), то векторы фазных токов образуют симметричную систему: значения фазных токов и сдвиги фаз между токами и соответствующими фазными напряжениями будут одинаковы. В отношении любой фазы справедливы все формулы, полученные ранее для однофазных цепей, например:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{ab} = U_{ab}/z_{ca}, \\ \varphi_{ab} = \arcsin \frac{x_{ab}}{z_{ab}}, \\ P_{ab} = U_{ab} I_{ab} \cos \varphi_{ab} = I_{ab}^2 r_{ab}, \\ Q_{ab} = U_{ab} I_{ab} \sin \varphi_{ab} = I_{ab}^2 x_{ab}, \\ |S_{ab}| = U_{ab} I_{ab} = I_{ab}^2 z_{ab} = \sqrt{P_{ab}^2 + Q_{ab}^2}. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

соотношение существует между любыми другими фазными и линейными токами. Поэтому можно написать, что при симметричной нагрузке вообще

$$I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi}. \quad (1.26)$$

Для симметричных приемников достаточно определить ток в одной фазе и, пользуясь формулой (1.26), найти линейный ток. Следует обратить внимание на то, что в трехпроводной цепи независимо от характера приемников геометрическая сумма линейных токов равна нулю: $I_A + I_B + I_C = 0$.

1.6.2. Несимметричная нагрузка

Как и при соединении звездой, в случае соединения треугольником однофазные приемники делят на три примерно равные в отношении мощности группы. Каждая группа подключается к двум проводам, между которыми имеется напряжение, отличающееся по фазе. При несимметричной нагрузке фазные токи, углы сдвига фаз и фазные мощности будут в общем случае различными. Векторная диаграмма для случая, когда в фазе ab имеется активная нагрузка, в фазе bc – активно-индуктивная, а в фазе ca – активно-емкостная, приведена на рис. 1.15.

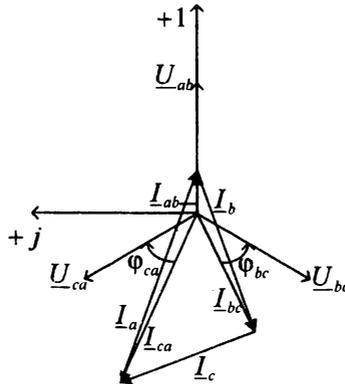


Рис. 1.15. Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений и токов при соединении приемника треугольником в случае несимметричной нагрузки

При определении фазных токов и мощностей используют формулы (1.24), но для определения мощностей всех фаз следует пользоваться формулами

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca}; Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca}. \quad (1.27)$$

Если кроме фазных токов требуется определить линейные токи, то задачу следует решать в комплексной форме. Для этой же цели можно воспользоваться векторной диаграммой. При решении задачи в комплексной форме необходимо прежде всего выразить в комплексной форме фазные напряжения, а также полные сопротивления фаз. Когда это сделано, нетрудно по закону Ома определить фазные токи. Например, комплексное выражение тока \underline{I}_{ab} будет иметь вид

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{z}_{ab}}. \quad (1.28)$$

Комплексным методом можно воспользоваться и для определения фазных мощностей. Так, мощности фазы ab будут равны

$$\underline{S}_{ab} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^*, \underline{P}_{ab} = \text{Re} \underline{S}_{ab}; \underline{Q}_{ab} = \text{Im} \underline{S}_{ab}; |\underline{S}_{ab}| = \sqrt{P_{ab}^2 + Q_{ab}^2}. \quad (1.29)$$

Рассмотрим, как будут изменяться значения различных величин в электрической цепи при изменении сопротивления приемников. Например, если при $X_{ca}/r_{ca} = \text{const}$ увеличить вдвое сопротивление Z_{ca} , то ток I_{ca} уменьшится, а угол φ_{ca} не изменится (см. рис. 1.15). Очевидно, при этом уменьшатся и токи I_a, I_c , а также мощности P_{ca}, Q_{ca}, S_{ca} . Токи I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} , углы $\varphi_{ab}, \varphi_{bc}$ и мощности $P_{ab}, Q_{ab}, S_{ab}, P_{bc}, Q_{bc}, S_{bc}$ останутся постоянными. При отключении фазы ca сопротивление $z_{ca} = \infty, I_{ca} = 0$, токи I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} , а также углы $\varphi_{ab}, \varphi_{bc}$ не изменятся, а токи I_a и I_c уменьшатся и $\underline{I}_a = \underline{I}_b, \underline{I}_c = \underline{I}_{bc}$.

1.7. Активная, реактивная, комплексная и полная мощности трехфазной симметричной системы

Активной мощностью (часто просто мощностью) трехфазной системы называется сумма активных мощностей всех фаз источника энергии, равная сумме активных мощностей всех фаз приемника.

В симметричной трехфазной системе, т. е. в системе с симметричными генератором и приемником, при любой схеме их соединения для каждой фазы мощности источника энергии и приемника одинаковы. В этом случае $P = 3P_\phi$ и для каждой из фаз справедлива формула активной мощности синусоидального тока

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos\phi, \quad (1.30)$$

где ϕ – угол сдвига фаз между фазными напряжением и током.

Заменив действующие значения фазных тока и напряжения линейными при соединении фаз источника энергии и приемника звездой и треугольником, получим одно и то же выражение для активной мощности симметричной трехфазной системы:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos\phi = \sqrt{3}U_n I_n \cos\phi. \quad (1.31)$$

В промышленных установках приемники обычно симметричные или почти симметричные, т. е. мощность может быть вычислена по (1.31).

В общем случае *реактивной мощностью* трехфазной системы называется сумма реактивных мощностей всех фаз источника энергии, равная сумме реактивных мощностей всех фаз приемника. Реактивная мощность симметричной трехфазной системы вычисляется по формуле $Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin\phi$ или после замены действующих значений фазных тока и напряжения линейными – по формуле

$$Q = \sqrt{3}U_n I_n \sin\phi. \quad (1.32)$$

Полученные величины могут быть изображены и в комплексном виде. *Комплексной мощностью* трехфазной системы называется сумма комплексных мощностей всех фаз источника энергии, равная сумме комплексных мощностей всех фаз приемника.

Полная мощность симметричной трехфазной системы находится следующим образом:

$$S = \sqrt{3}U_n I_n. \quad (1.33)$$

Для несимметричной нагрузки общие мощности цепи определяются по очевидным формулам:

$$P = P_1 + P_2 + \dots; Q = Q_1 + Q_2 + \dots \quad (1.34)$$

1.8. Измерение активной мощности в трехфазной системе

Для измерения активной мощности трехфазной несимметричной четырехпроводной системы в общем случае (неравномерная нагрузка и наличие нулевого провода) необходимо включить три ваттметра. Активная мощность системы равна сумме показаний трех ваттметров.

У симметричного трехфазного приемника мощности всех фаз одинаковы, поэтому достаточно измерить активную мощность P одной фазы. Активная мощность приемника равна $P = 3P_\phi$.

В этом случае просто измеряется мощность одной фазы P_ϕ , если фазы приемника соединены звездой с доступной нейтральной точкой. На рис. 1.16, *а* показано включение ваттметра, который измеряет мощность фазы *A* приемника. Подобное же включение ваттметра позволяет измерить мощность одной фазы, если фазы приемника соединены треугольником (рис. 1.16, *б*).

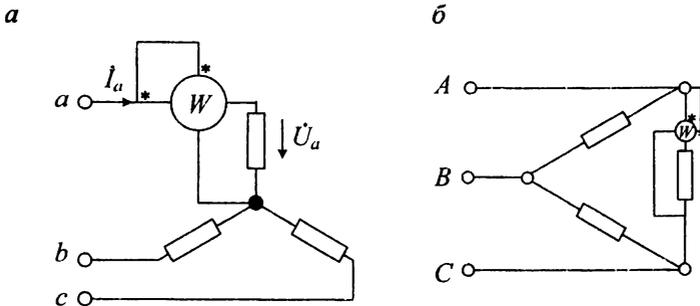


Рис. 1.16. Схема включения ваттметра для определения фазной мощности: *а* – при соединении приемников звездой; *б* – при соединении приемников треугольником

Если фазы симметричного приемника недоступны для измерений, то применяют прием с созданием искусственной нейтральной точки. Это нейтральная точка цепи с соединенными звездой фазами, которая состоит из цепи напряжения, ваттметра с сопротивлением r и двух резисторов с сопротивлениями $r_b = r_c = r$ (рис. 1.17). При таком соединении цепь напряжения ваттметра находится под фазным напряжением, ток в его цепи равен фазному (линейному) току приемника, соединенного

по схеме звезды (треугольника). Следовательно, в обоих случаях ваттметр измеряет третью часть мощности приемника. Обычно завод-изготовитель выпускает ваттметр с искусственной нейтральной точкой для измерения мощности в симметричных трехфазных системах. Такую точку создают путем подключения двух резисторов с сопротивлениями $r_b = r_c = r$ (где r равно сопротивлению ваттметра) к двум фазам, в цепи которых нет токовой катушки ваттметра.

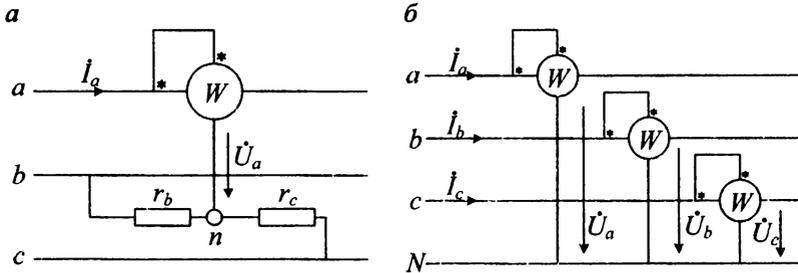


Рис. 1.17. Схема включения ваттметра:
 а – с нейтральной точкой; б – с нейтральным проводом

В трехфазных трехпроводных системах мощность при несимметричном приемнике в большинстве случаев измеряют методом двух ваттметров (рис. 1.18).

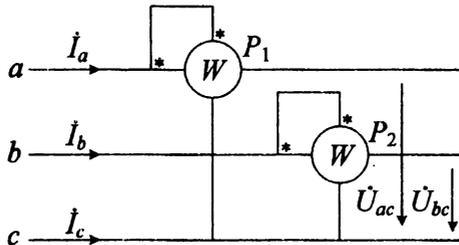


Рис. 1.18. Трехпроводная система с двумя ваттметрами

Своеобразная особенность этого метода измерения заключается в том, что даже при симметричном приемнике показания двух ваттметров в большинстве случаев не одинаковые, причем показание одного из них может быть и отрицательным. В этом случае мощность трехфазной системы равна алгебраической сумме показаний двух ваттметров.

Для доказательства возможности измерения мощности методом двух ваттметров сначала выразим мгновенную мощность системы через мгновенные значения напряжений и токов. Мгновенная мощность любой фазы равна произведению мгновенных значений фазных напряжений и тока, а мгновенная мощность трехфазной системы – сумме мгновенных мощностей фаз. В частности, при соединении фаз приемника звездой мгновенная мощность $p = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c$.

Но при соединении фаз приемника звездой без нейтрального провода $i_a + i_b + i_c = 0$ и, следовательно, $i_c = -(i_a + i_b)$.

Подставив значение тока i_c в выражение мгновенной мощности, получим $p = (u_a - u_c) i_a + (u_b - u_c) i_b$.

Так как разность фазных напряжений равна соответствующему линейному напряжению, т. е. $u_a - u_c = u_{ac}$, $u_b - u_c = u_{bc}$, то мгновенная мощность $p = u_{ac} i_a + u_{bc} i_b$.

Следовательно, мгновенная мощность трехфазной системы равна сумме двух произведений мгновенных значений линейных напряжений и токов. Сумма средних значений этих двух произведений, т. е. активная мощность системы, может быть измерена двумя ваттметрами (см. рис. 1.18).

$$P = P_1 + P_2 = U_{ca} I_a \cos(\psi_u - \psi_i) + U_{bc} I_b \cos(\psi_u - \psi_i), \quad (1.35)$$

где $\psi_u - \psi_i$ – угол сдвига фаз между соответствующими линейным напряжением и током.

При правильном включении ваттметров положительные направления линейных напряжений и токов должны совпадать с направлением от «начала» к «концу» цепи напряжения и цепи тока ваттметров. Так, у первого ваттметра нужно соединить «начало» (вывод, отмеченный звездочкой) цепи напряжения с проводом a , а «конец» этой цепи – с проводом c .

Распределение измеряемой мощности трехфазной системы между показаниями двух ваттметров зависит главным образом от углов сдвига фаз между линейными напряжениями и токами. Проследим эту зависимость в случае симметричного приемника. На рис. 1.19 показана векторная диаграмма напряжений и токов в случае симметричного приемника, фазы которого соединены звездой.

Углы сдвига фаз между соответствующими фазными напряжением и током одинаковы и равны аргументу ϕ комплексного сопро-

тивления фазы приемника. Из диаграммы следует, что при симметричном приемнике углы сдвига фаз между векторами \dot{U}_{ac} и \dot{I}_a , \dot{U}_{bc} и \dot{I}_a соответственно равны $\varphi - 30^\circ$ и $\varphi + 30^\circ$.

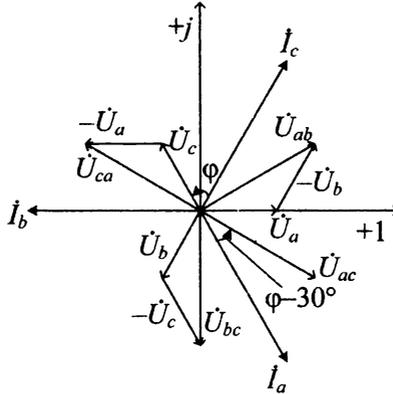


Рис. 1.19. Векторная диаграмма напряжений и токов в случае симметричного приемника с соединением звездой

Действующие значения линейных напряжений и линейных токов при симметричном приемнике одинаковы, т. е. $|U_{bc}| = |U_{ac}| = U_{л}$; $|I_a| = |I_b| = I_{л}$.

Таким образом, сумма показаний двух ваттметров, равная мощности симметричной трехфазной системы, составляет

$$P = P_1 + P_2 = U_{л} I_{л} \cos(\varphi - 30^\circ) + U_{л} I_{л} \cos(\varphi + 30^\circ).$$

Из этого выражения следует, что при симметричном приемнике показания ваттметров P_1 и P_2 будут равны только при $\varphi = 0$. Если $\varphi > 60^\circ$, то показание второго ваттметра P_2 будет отрицательным, т. е. сумма показаний алгебраическая.

Можно не доказывать возможность измерения мощности методом двух ваттметров при соединении фаз приемника треугольником, так как при заданных значениях линейных напряжений и токов мощность не зависит от схемы соединения фаз приемника.

1.9. Расчет трехфазных цепей при соединении фаз приемника четырехпроводной звездой (звездой с нейтральным проводом)

Мы будем рассматривать только приемники, подключенные к симметричному трехфазному источнику питания (генератору).

Симметричным называется такой трехфазный генератор, в котором действуют три ЭДС с одинаковыми частотами и амплитудами, сдвинутые по фазе относительно друг друга на угол 120° (соединение звездой).

Перед расчетом необходимо к исходной схеме добавить соответствующее значение ЭДС трехфазного генератора.

Порядок расчета:

1. Записать систему трех фазных симметричных напряжений.
2. Записать сопротивление фаз в комплексной форме.
3. По закону Ома определить токи в фазах.
4. По первому закону Кирхгофа вычислить ток в нейтральном (нулевом) проводе.
5. Рассчитать мощности всей цепи и каждой фазы отдельно.
6. Построить в масштабе векторные диаграммы токов и напряжений.

Пример 1

К трехфазному источнику с линейным напряжением $|U_n| = 380$ В подключен несимметричный трехфазный приемник (рис. 1.20). Активные и реактивные сопротивления фаз приемника соответственно равны: $R_a = 19$ Ом, $R_c = 8$ Ом, $R_c = 24$ Ом, $X_c = 6$ Ом, $X_c = 18$ Ом. Сопротивления проводов можно пренебречь. Определить токи в фазах приемника, ток в нейтральном проводе, мощности каждой фазы и всей цепи. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.

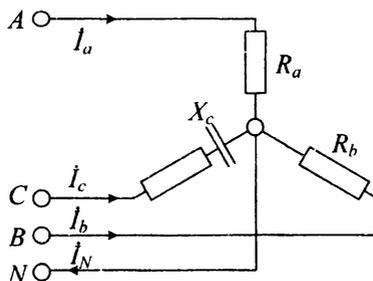


Рис. 1.20. Электрическая цепь к примеру 1

Решение

Так как потребитель соединен четырехпроводной звездой, то системы фазных и линейных напряжений источника и потребителя совпадают, $U_n = \sqrt{3}U_\phi$, следовательно, $U_\phi = \frac{U_n}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220$ В.

Пусть вектор напряжения фазы A совпадает с положительным напряжением оси действительных чисел (рис. 1.21), тогда

$$\dot{U}_a = U_\phi \cdot e^{j0^\circ} = 220 \cdot e^{j0^\circ} = 220 \text{ В} = U_{AN};$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_a \cdot e^{j120^\circ} = 220 \cdot e^{j120^\circ} \text{ В} = U_{BN};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_a \cdot e^{-j120^\circ} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 220 \cdot e^{-j240^\circ} = 220 \cdot e^{j120^\circ} \text{ В} = U_{CN}.$$

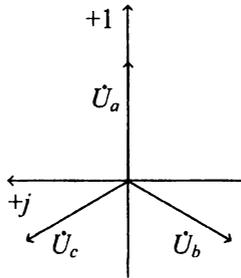


Рис. 1.21. Векторная диаграмма к примеру 1

Комплексы сопротивлений фаз можно записать в виде

$$\underline{Z}_a = R_a = 19 \text{ Ом} = 19 \cdot e^{j0^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = R_b + jX_b = 8 + j6 = 10 \cdot e^{j36,87^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = R_c - jX_c = 24 - j18 = 30 \cdot e^{-j36,87^\circ} \text{ Ом}.$$

Токи в фазах приемника определяем по закону Ома:

$$I_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{220 \cdot e^{j0^\circ}}{19 \cdot e^{j0^\circ}} = 11,58 \cdot e^{j0^\circ} = 11,58 \text{ А};$$

$$I_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{220 \cdot e^{-j120^\circ}}{10 \cdot e^{j36,87^\circ}} = 22 \cdot e^{-j156,87^\circ} = -20,23 - j8,64 \text{ А};$$

$$I_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{220 \cdot e^{j120^\circ}}{10 \cdot e^{-j36,87^\circ}} = 22 \cdot e^{j156,87^\circ} = -6,74 + j2,88 \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$\begin{aligned} \dot{I}_n &= \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 11,58 - 20,23 - j8,64 - 6,74 + j2,88 = -15,39 - j5,76 = \\ &= 10,43 \cdot e^{-j159,48^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Мощность, потребляемая нагрузкой, равна

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \cdot \underline{I}_a = 220 \cdot 11,58 = 2547,6 \text{ ВА};$$

$$\underline{S}_b = \underline{U}_b \cdot \underline{I}_b = 220 \cdot e^{-j120^\circ} \cdot 20 \cdot e^{j156,87^\circ} = 4840 \cdot e^{j36,87^\circ} = 3872 + j2904 \text{ ВА};$$

$$\underline{S}_c = \underline{U}_c \cdot \underline{I}_c = 220 \cdot e^{j120^\circ} \cdot 7,33 \cdot e^{-j156,87^\circ} = 1612,6 \cdot e^{-j36,87^\circ} = 1290 - j967,6 \text{ ВА};$$

$$S = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = 2547,6 + 3872 + j2904 + 1290 - j967,6 = 7709,6 + j1936,4 \text{ ВА.}$$

Векторные диаграммы токов и напряжений приведены на рис. 1.22.

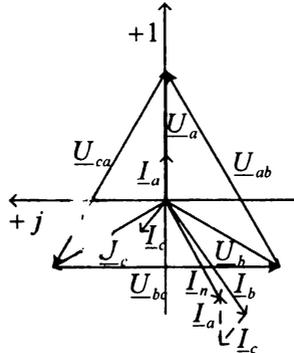


Рис. 1.22. Векторная диаграмма токов и напряжений к примеру 1

1.10. Расчет трехфазных потребителей при соединении фаз приемника трехпроводной звездой без нейтрального провода

Системы фазных и линейных напряжений источника (генератора) и нагрузки в этом случае не совпадают. Между нейтральными точками источника и потребителя возникает напряжение, которое называется *напряжением смещения нейтрали*.

Перед расчетом необходимо к исходной схеме добавить соответствующее значение ЭДС трехфазного генератора.

Порядок расчета:

1. Записать систему фазных напряжений источника.
2. Сопротивления фаз представить в комплексной форме и вычислить проводимости фаз.
3. Рассчитать напряжение смещения нейтрали.
4. Определить напряжения фаз потребителя.
5. По закону Ома найти фазные токи нагрузки.
6. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.

Пример 2

К трехпроводной трехфазной сети с линейным напряжением $U_n = 220$ В подключен приемник, фазы которого соединены звездой (рис. 1.23). Сопротивления фаз: $Z_a = 10$ Ом, $Z_c = -j10$ Ом, $Z_b = 5 + j8,66$ Ом. Определить токи в ветвях. Построить совмещенные векторные диаграммы токов и напряжений.

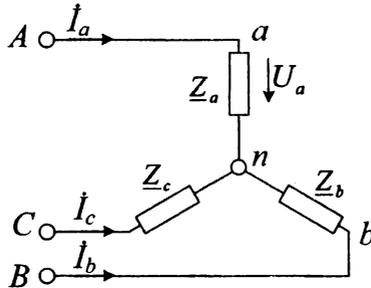


Рис. 1.23. Электрическая цепь к примеру 2

Решение

Фазные напряжения источника образуют симметричную систему с модулем $U_\phi = \frac{U_n}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127$ В:

$$U_\phi = \frac{U_n}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В};$$

$$U_a = U_\phi \cdot e^{j0^\circ} = 127 \cdot e^{j0^\circ} = 127 \text{ В};$$

$$U_b = U_\phi \cdot e^{-j120^\circ} = 127 \cdot e^{-j120^\circ} = -63,5 - j110 \text{ В};$$

$$U_c = U_\phi \cdot e^{j120^\circ} = 127 \cdot e^{j120^\circ} = -63,5 + j110 \text{ В}.$$

Комплексные проводимости фаз нагрузки:

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ см};$$

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{5 + j8,66} = \frac{1}{10 \cdot e^{j60^\circ}} \cdot 0,1 \cdot e^{-j60^\circ} = 0,05 - j0,0866 \text{ см};$$

$$\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{-j10} = j0,1 \cdot e^{j90^\circ} \text{ см}.$$

Напряжение смещения нейтрали:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{U_a \underline{Y}_a + U_e \underline{Y}_e + U_c \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_e + \underline{Y}_c} = \\ &= \frac{127e^{j0^\circ} \cdot 0,1e^{j0^\circ} + 127e^{-j120^\circ} \cdot 0,1e^{-j60^\circ} + 127e^{j120^\circ} \cdot 0,1e^{j90^\circ}}{0,1 + 0,05 - j0,0866 + j0,1} = \\ &= 84,33e^{-j155,1} - j155,1 = -76,49 - j35,51 \text{ В}. \end{aligned}$$

Фазные напряжения приемника:

$$U_a = U_A - U_N = 127 - (-76,49 - j35,51) = 203,49 + j35,51 = 206,56 \cdot e^{j9,9^\circ} \text{ В};$$

$$U_e = U_B - U_N = (-63,5 - j110) - (-76,49 - j35,51) = 12,99 - j74,49 = 75,61 \cdot e^{j80,1^\circ} \text{ В};$$

$$U_c = U_C - U_N = (-63,5 + j110) - (-76,49 - j35,51) = 12,99 + j145,51 = 146,09 \cdot e^{j84,9^\circ} \text{ В}.$$

Фазные токи и токи в линиях определяем по закону Ома:

$$\dot{I}_a = \frac{U_a}{\underline{Z}_a} = \frac{206,56 \cdot e^{j9,9^\circ}}{10} = 20,66 \cdot e^{j9,9^\circ} = 20,35 + j3,55 \text{ А};$$

$$\dot{I}_e = \frac{U_e}{\underline{Z}_e} = \frac{75,61 \cdot e^{-j80,1^\circ}}{10 \cdot e^{j60^\circ}} = 7,56 \cdot e^{-j140,1^\circ} = -5,8 - j4,85 \text{ А};$$

$$\dot{I}_c = \frac{U_c}{\underline{Z}_c} = \frac{146,09 \cdot e^{j84,9^\circ}}{10 \cdot e^{-j90^\circ}} = 14,61 \cdot e^{j174,9^\circ} = -14,55 + j1,3 \text{ А}.$$

Правильность решения проверим по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0;$$

$$20,35 + j3,55 - 5,8 - j4,85 - 14,55 + j1,3 = 0.$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 1.24.

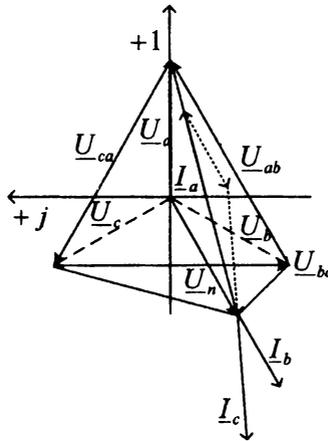


Рис. 1.24. Векторная диаграмма токов и напряжений к примеру 2

1.11. Расчет трехфазных потребителей при соединении нагрузки треугольником

Порядок расчета:

1. Записать систему фазных напряжений приемника.
2. Представить сопротивления фаз в комплексной форме.
3. По закону Ома определить фазные токи.
4. По первому закону Кирхгофа рассчитать линейные токи.
5. В масштабе построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Пример 3

К трехфазному источнику ЭДС с линейным напряжением $U_d = 380$ В подключен трехфазный приемник (рис. 1.25) с сопротивлениями фаз

$R_{ab} = 38 \text{ Ом}$, $X_{bc} = X_{ca} = 38 \text{ Ом}$. Рассчитать фазные и линейные токи. Правильность решения проверить, составив уравнение баланса активной мощности. Для определения активной мощности, вырабатываемой генератором, воспользоваться методом двух ваттметров. Построить совмещенную векторную диаграмму напряжений и токов.

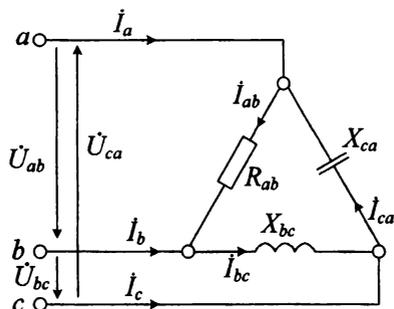


Рис. 1.25. Электрическая цепь к примеру 3

Решение

При соединении нагрузки треугольником фазные и линейные напряжения равны между собой, т. е. $U_{\phi} = U_{\pi} = 380 \text{ В}$.

Запишем симметричную систему трехфазных напряжений. Для определенности предположим, что напряжение между фазами B и C совпадает с отрицательным направлением оси мнимых чисел:

$$\dot{U}_{ec} = jU_{\phi} = -j380 = 380 \cdot e^{j90^{\circ}} \text{ В.}$$

Тогда

$$\dot{U}_{as} = \dot{U}_{ec} \cdot e^{j120^{\circ}} = 380 \cdot e^{-j90^{\circ}} \cdot e^{j120^{\circ}} = 380 \cdot e^{j30^{\circ}} = 330 + j190 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{ec} \cdot e^{-j120^{\circ}} = 380 \cdot e^{-j120^{\circ}} = 380 \cdot e^{-j210^{\circ}} = 380 \cdot e^{j150^{\circ}} = -330 + j190 \text{ В.}$$

Комплексные сопротивления фаз:

$$\underline{Z}_{as} = R_{as} = 38 \text{ Ом} = 38 \cdot e^{j0^{\circ}} \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{ec} = jX_{ec} = j38 = 38 \cdot e^{j90^{\circ}} \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{ca} = jX_{ca} = -j38 = 38 \cdot e^{-j90^{\circ}} \text{ Ом.}$$

Определяем фазные токи:

$$\dot{I}_{a\alpha} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{a\alpha}} = \frac{380 \cdot e^{j30^\circ}}{38} = 10 \cdot e^{j30^\circ} = 8,66 + j5 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{\alpha c} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{\alpha c}} = \frac{380 \cdot e^{-j90^\circ}}{38 \cdot e^{j90^\circ}} = 10 \cdot e^{-j180^\circ} = -10 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{380 \cdot e^{j150^\circ}}{38 \cdot e^{-j90^\circ}} = 10 \cdot e^{j240^\circ} = 10 \cdot e^{-j120^\circ} = -5 - j8,66 \text{ A}.$$

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{a\alpha} - \dot{I}_{ca} = 8,66 + j5 - (-5 - j8,66) = 13,66 + j13,66 = 19,32 \cdot e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{\alpha c} - \dot{I}_{a\alpha} = -10 - (8,66 + j5) = -18,66 - j5 = 19,32 \cdot e^{-j165^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{\alpha c} = -5 - j8,66 - (-10) = 5 - j8,66 = 10 \cdot e^{-60^\circ} \text{ A}.$$

Активная мощность нагрузки равна

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca}.$$

$$P_{ab} = \dot{I}_{ab}^2 \cdot R_{ab} = 10^2 \cdot 38 = 3800 \text{ Вт}.$$

$P_{bc} = P_{ca} = 0$, так как в этих фазах нет активных сопротивлений.

$$P = P_{ab} = 3800 \text{ Вт}.$$

Схема измерения активной мощности по методу двух ваттметров приведена на рис. 1.26.

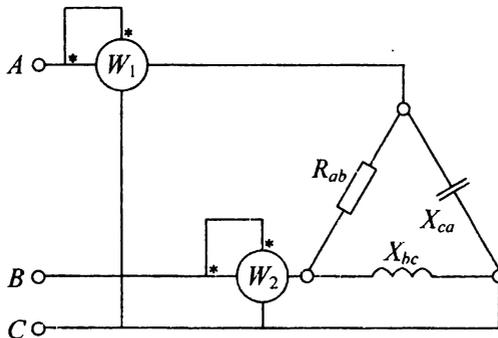


Рис. 1.26. Электрическая схема измерения активной мощности по методу двух ваттметров

Активная мощность всей цепи равна сумме показаний ваттметров:

$$P = P_1 + P_2.$$

$$P_1 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{ac} \cdot \dot{I}_A] = \operatorname{Re}[-380e^{j150^\circ} \cdot 19,32e^{-j45^\circ}] = \operatorname{Re}[-7341,6e^{j105^\circ}] = -7341,6\cos 105^\circ = 1900 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{bc} \cdot \dot{I}_B] = \operatorname{Re}[-380e^{-j90^\circ} \cdot 19,32e^{j165^\circ}] = \operatorname{Re}[-7341,6e^{j75^\circ}] = 7341,6\cos 75^\circ = 1900 \text{ Вт};$$

$$P = P_1 + P_2 = 1900 + 1900 = 3800 \text{ Вт}.$$

Задача решена верно.

Векторные диаграммы напряжений и токов изображены на рис. 1.27.

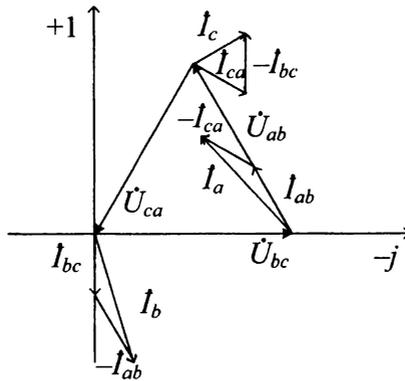


Рис. 1.27. Векторные диаграммы напряжений и токов к примеру 3

Примечание. Треугольник напряжений можно расположить на комплексной плоскости по-другому. При этом полностью изменятся все расчеты и векторная диаграмма токов и напряжений будет иметь другой вид.

Пусть вектор напряжения между фазами *A* и *B* совпадает с положительным направлением оси действительных чисел. Тогда систему фазных напряжений в нагрузке можно записать следующим образом:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_\phi \cdot e^{j90^\circ} = 380 \text{ В},$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_\phi \cdot e^{-j120^\circ} = 380 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_\phi \cdot e^{j120^\circ} \text{ В},$$

и векторная диаграмма будет соответствовать рис. 1.28.

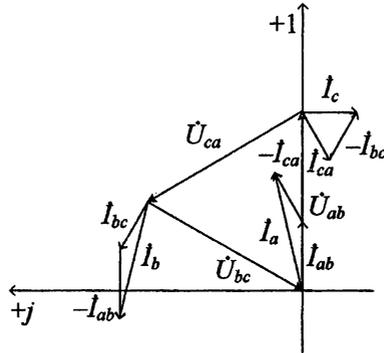


Рис. 1.28. Векторная диаграмма токов к примеру 3

Возможен и другой вариант решения.

Пример 4

Перед расчетом необходимо к исходной схеме добавить соответствующие значения ЭДС трехфазного генератора (рис. 1.29) и путем эквивалентных преобразований свести схему к соединению звездой (рис. 1.30).

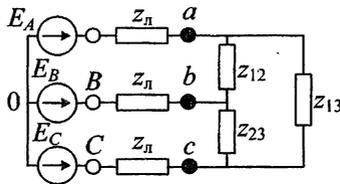


Рис. 1.29. Электрическая цепь к примеру 4

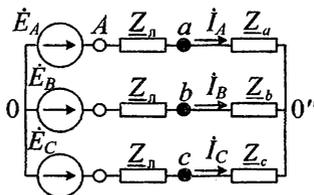


Рис. 1.30. Электрическая цепь к примеру 4 с комплексными значениями ЭДС, сопротивления и тока

Решение

Преобразуем получившийся треугольник в новую звезду:

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}, \underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}, \underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}.$$

Сложив сопротивления звезды с соответствующими сопротивлениями линий (см. рис. 1.30), получим $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ или проводимости $\underline{Y}_A = 1/\underline{Z}_A, \underline{Y}_B = 1/\underline{Z}_B, \underline{Y}_C = 1/\underline{Z}_C$.

Методика расчета несимметричной трехфазной цепи со схемой соединения «звезда» может быть сведена к следующим приемам:

1. Определяют напряжение смещения нейтрали

$$U_N = U_{O'O} = \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N},$$

где $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – фазные напряжения генератора;
 Y_a, Y_b, Y_c – проводимости фаз и нейтрального провода.

2. Вычисляют напряжения на фазах приемника:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_N; \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_N; \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_N.$$

3. Определяют токи в фазах и нейтральном проводе по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_a Y_a; \dot{I}_B = \dot{U}_b Y_b; \dot{I}_C = \dot{U}_c Y_c;$$

$$\dot{I}_N = \dot{U}_N Y_N \text{ или } \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Если приемник соединен по схеме «звезда» без нулевого провода и известны только линейные напряжения генератора $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$, то расчет фазных напряжений приемника удобнее определять по формулам

$$\dot{U}_a = \frac{\dot{U}_{AB} \cdot Y_b - \dot{U}_{CA} \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c},$$

$$\dot{U}_b = \frac{\dot{U}_{AB} \cdot Y_c - \dot{U}_{BC} \cdot Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c},$$

$$\dot{U}_c = \frac{\dot{U}_{CA} \cdot Y_c - \dot{U}_{BC} \cdot Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}.$$

В этом случае геометрическая сумма фазных токов равна $I_A + I_B + I_C = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем была вызвана необходимость разработки трехфазных цепей и почему они получили широкое практическое применение?
2. Каковы способы изображения симметричной системы ЭДС трехфазного генератора? Укажите соотношения между фазными и линейными напряжениями.
3. В чем преимущества четырехпроводной трехфазной цепи?
4. Какова роль нейтрального провода? Почему в нейтральный провод не включают предохранители?
5. Что такое напряжение между нейтральными? Как его определяют?
6. В каких случаях применяют трехпроводные цепи?
7. В чем преимущества приемников, соединенных треугольником? Как определяют фазные и линейные токи?
8. Как определяют напряжения и токи в трехфазном симметричном приемнике при обрыве и коротком замыкании одной из фаз?
9. Как выражаются мгновенная, активная, реактивная и полная мощности трехфазных приемников (симметричных и несимметричных)?
10. Как изменится активная мощность симметричного трехфазного приемника при переключении его фаз с треугольника на звезду?
11. Каковы способы повышения коэффициента мощности симметричных трехфазных приемников?
12. Какие меры безопасности исключают поражение человека электрическим током при эксплуатации трехфазных цепей?

Глава 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

2.1. Общие сведения

Синусоидальные колебания являются самой простой формой периодического процесса. Однако в цепях электросвязи, электронных и полупроводниковых устройств отклонение от синусоидальной формы часто обусловлено самим рабочим процессом устройства. Поэтому знание элементов теории несинусоидальных периодических токов необходимо для понимания принципов действия устройств автоматики, электронных приборов и самой различной аппаратуры.

Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону. Они возникают при четырех различных режимах работы электрических цепей (и при сочетаниях этих режимов):

1) когда источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а все элементы цепи – резистивные, индуктивные и емкостные – являются линейными, т. е. от тока не зависят;

2) если источник ЭДС (источник тока) дает синусоидальную ЭДС (синусоидальный ток), но один или несколько элементов цепи нелинейные;

3) когда источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а в состав электрической цепи входят один или несколько нелинейных элементов;

4) если источник ЭДС (тока) дает постоянную или синусоидальную ЭДС (ток), а один или несколько элементов цепи периодически изменяются во времени.

2.2. Способы представления периодических несинусоидальных электрических величин

Периодические несинусоидальные величины могут быть представлены временными диаграммами, тригонометрическим рядом Фурье, а также эквивалентными синусоидами.

Первым способом представления периодических несинусоидальных электрических величин является построение графиков зависимости их мгновенных значений от времени. На рис. 2.1 изображены графики напряжений, используемых в импульсной технике. График пилообразного напряжения, получаемого при зарядке и разрядке конденсатора, приведен на рис. 2.2. Графики мгновенных значений величин можно наблюдать на экране осциллографа.

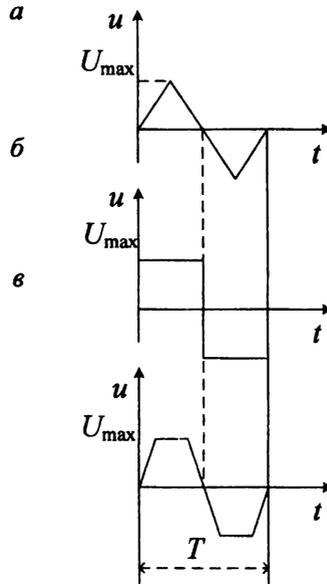


Рис. 2.1. Формы импульсов напряжений, используемых в импульсной технике: а – треугольная; б – прямоугольная; в – трапецидальная

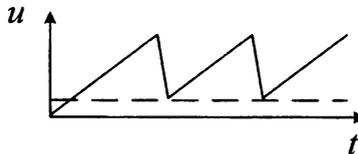


Рис. 2.2. Временная диаграмма пилообразного напряжения

Вторым способом представления периодических несинусоидальных электрических величин является аналитическое разложение периодических функций в ряд Фурье. Как известно из курса математики, любую периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в тригонометрический ряд Фурье.

Например, периодическая несинусоидальная ЭДС в общем случае может быть представлена следующим рядом:

$$e(t) = E_0 + E_{1m}\sin(2\omega t + \psi_1) + E_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + E_{km}\sin(k\omega t + \psi_k) = E_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_k, \quad (2.1)$$

где E_0 – постоянная составляющая;

$e_1 = E_{1m}\sin(2\omega t + \psi_1)$ – первая (основная) гармоническая составляющая, имеющая период $T = 2\pi/\omega$, равный периоду данной несинусоидальной ЭДС;

$e_2 = E_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2)$, ..., $e_R = E_{Rm}\sin(k\omega t + \psi_k)$ – высшие гармонические составляющие;

$E_{1m}, E_{2m}, \dots, E_{Rm}$ – амплитуды гармонических составляющих;

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_R$ – начальные фазы гармонических составляющих.

Гармонические составляющие для краткости часто называют гармониками.

Задачей гармонического анализа является определение коэффициентов ряда Фурье. Для несинусоидальных напряжений, наиболее часто встречающихся в электротехнике, разложения в ряд можно найти в справочниках по математике и электротехнике.

В зависимости от характера реальной кривой $f(\omega t)$ тригонометрический ряд может не содержать постоянной составляющей, четных или нечетных высших гармоник, а также начальных фаз. Например, тригонометрические ряды Фурье некоторых несинусоидальных напряжений имеют следующий вид:

1) напряжение на нагрузке при однополупериодном выпрямлении:

$$u(t) = \frac{U_{\max}}{\pi} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\cos\omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t + \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \dots\right);$$

2) напряжение на нагрузке при двухполупериодном выпрямлении:

$$u(t) = \frac{2U_{\max}}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \dots\right);$$

3) напряжение на нагрузке при трехфазном выпрямлении:

$$u(t) = \frac{3U_{\max}}{\pi} \left(1 + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \frac{2}{143} \cos 12\omega t + \frac{2}{323} \cos 18\omega t - \dots \right);$$

4) напряжение треугольной формы:

$$u(t) = \frac{8U_{\max}}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right);$$

5) напряжение прямоугольной формы:

$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

В практических расчетах цепей с несинусоидальными ЭДС, токами и напряжениями их мгновенные значения приближенно отображают конечным рядом Фурье (3–7 членов ряда). Число членов ряда определяется необходимой точностью расчета.

Характеристика несинусоидальных величин, представленных рядом Фурье, может быть осуществлена графически с помощью диаграмм амплитудно-частотного (рис. 2.3, а) и фазочастотного (рис. 2.3, б) спектров. Данные диаграммы характеризуют форму несинусоидальных кривых, причем первая диаграмма показывает спектральный состав по амплитудам, т. е. представляет зависимость амплитуд гармоник в относительных единицах от частоты, вторая диаграмма выражает зависимость начальных фаз гармоник от частоты.

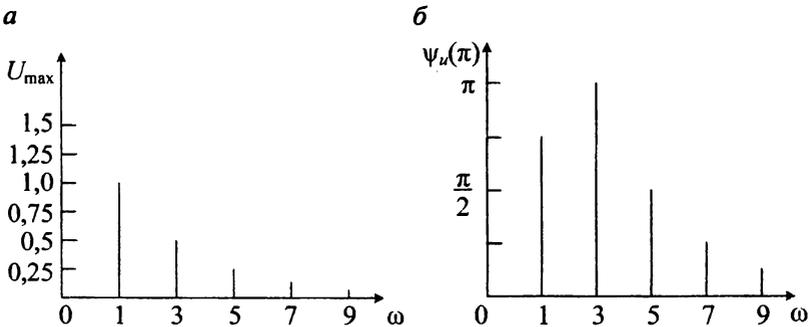


Рис. 2.3. Диаграммы:

а – амплитудно-частотного спектра; б – фазочастотного спектра

Периодические несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи могут быть представлены также эквивалентными синусоидами, и тогда ряд Фурье можно записать в другой форме:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \psi_k), \quad (2.2)$$

где A_k – амплитуда;

k – гармоники ряда Фурье. Гармоники, для которых k – нечетное число, называют нечетными; для которых k – четное число – четными.

2.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией

На рис. 2.4 изображены три кривые, обладающие некоторыми специфическими свойствами.

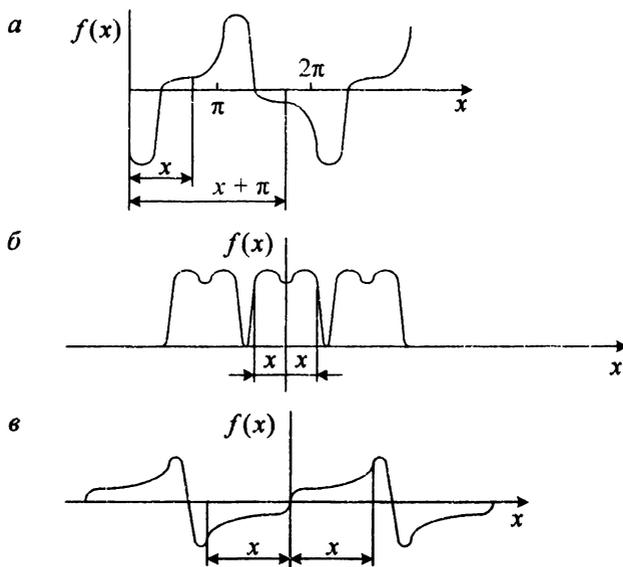


Рис. 2.4. Симметричные кривые:

a – относительно оси абсцисс; $б$ – относительно оси ординат;

$в$ – относительно начала координат

Кривая, показанная на рис. 2.4, а, удовлетворяет условию $-f(x + \pi) = f(x)$. Кривые, для которых выполнимо это условие, называют *симметричными относительно оси абсцисс*. Если данную кривую сместить по оси x на полпериода и зеркально отразить относительно оси x , то полученная кривая совпадет с кривой $f(x)$.

При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т. е. равны нулю коэффициенты

$$A_0 = A_2' = A_2'' = A_4' = A_4'' = 0.$$

Поэтому кривые типа кривой, изображенной на рис. 2.4, а, раскладывают в ряд

$$f(x) = A_1' \sin x + A_1'' \cos x + A_3'' \sin 3x + A_3'' \cos 3x + \dots$$

Каждое слагаемое этого ряда удовлетворяет условию $-f(x + \pi) = f(x)$, например: $-\sin(x + \pi) = \sin(x)$.

Кривая, подобная кривой на рис. 2.4, б, обладает *симметрией относительно оси ординат* и удовлетворяет условию $-f(-x) = f(x)$.

Если кривую, лежащую левее оси ординат, зеркально отразить относительно оси ординат, то полученная кривая совпадет с кривой, лежащей правее оси ординат. При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют синусные ($A_1' = A_2' = A_3' = \dots = 0$) составляющие, т. е. присутствуют лишь косинусные и постоянная составляющие.

Таким образом, кривые типа кривой, показанной на рис. 2.4, б, можно разложить в ряд $f(x) = A_0 + A_1'' \cos x + A_2'' \cos 2x + A_3'' \cos 3x + \dots$

Кривые типа кривой, изображенной на рис. 2.4, в, удовлетворяют условию $-f(-x) = f(x)$, их называют кривыми, *симметричными относительно начала координат*. Разложение их в ряд Фурье имеет такой вид: $f(x) = A_1' \sin x + A_2' \sin 2x + A_3' \sin 3x \dots$

2.4. Разложение в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм

Встречающиеся в электротехнике периодические кривые можно подразделить на две группы:

1) кривые геометрически правильной формы, например трапециевидальной, треугольной, прямоугольной и т. п. Разложение их в ряд Фурье дано в таблице, где вместо x записано ωt ;

2) кривые произвольной (геометрически неправильной) формы. Чаще всего они заданы в виде графика. Разложение их в ряд Фурье производят графически (графоаналитически).

Графический метод определения гармоник ряда Фурье основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых. С этой целью период функции $f(x)$, равный 2π , разбивают на n равных частей и интегралы заменяют суммами.

По определению постоянная составляющая равна

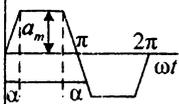
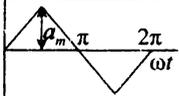
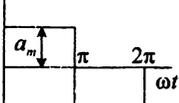
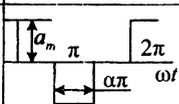
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(x) \Delta x = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \frac{2\pi}{n}, \quad (2.3)$$

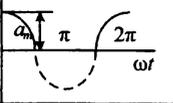
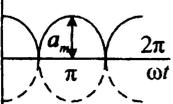
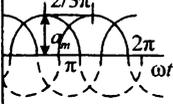
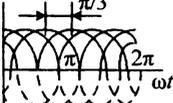
или

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x),$$

где p – текущий индекс, принимающий значения от 1 до n ;
 $f_p(x)$ – значение функции $f(x)$ при $x = (p - 0,5)\Delta x$, т. е. в середине p -го интервала.

Разложения в ряд Фурье геометрических кривых правильной формы

Форма импульса	Ряд Фурье
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\sin\alpha \sin\omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{8a_m}{\pi^2} \left(\sin\omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos\omega t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\alpha\pi}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \sin \frac{5\alpha\pi}{2} \cos 5\omega t + \dots \right)$

1	2
	$f(\omega t) = \frac{2a_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}a_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\omega t - \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{3a_m}{\pi} \left(1 + \frac{2 \cos 6\omega t}{5 \cdot 7} - \frac{2 \cos 12\omega t}{11 \cdot 13} + \frac{2 \cos 18\omega t}{17 \cdot 19} - \dots \right)$

Амплитуда синусной составляющей k -й гармоники ряда

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \approx \frac{2}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \frac{2\pi}{n} \sin_p kx,$$

или

$$A'_k = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \sin_p kx, \quad (2.4)$$

амплитуда косинусной составляющей k -й гармоники

$$A''_k = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \cos_p kx, \quad (2.5)$$

где $\sin_p kx$ и $\cos_p kx$ – соответственно значения функций $\sin kx$ и $\cos kx$ при $x = (p - 0,5)\Delta x$, т. е. в середине p -го интервала.

При расчетах по (2.3)–(2.5) обычно достаточно разделить период на $n = 24$ или $n = 18$ частей, а в некоторых случаях и на меньшее число частей. Перед тем как производить графическое разложение в ряд, не-

обходимо выяснить, не обладает ли раскладываемая функция симметрией относительно осей координат. Наличие того или иного вида симметрии позволяет до проведения сложения предсказать, какие гармоники следует ожидать. Так, если кривая $f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая A_0 и все четные гармоники отсутствуют. Значит, вычисляя A'_k и A''_k при нечетных k , следует учесть, что $\sum f_p(x) \sin_p kx$ за первый и второй полупериоды равны.

Знак углов ψ_k в формуле (2.2) зависит от знаков A'_k и A''_k . При построении гармоник на общем графике необходимо учитывать, что масштаб по оси абсцисс для k -й гармоники должен быть взят в k раз большим, чем для первой гармоники. Так, например, если некоторый отрезок на оси абсцисс для первой гармоники выражает собой угол $\pi/3$, то тот же отрезок для третьей гармоники выражает собой угол, в 3 раза больший, т. е. $3(\pi/3) = \pi$.

Пример 1

Найти первую и третью гармоники функции $f(x)$, изображенной на рис. 2.5, а. Значения ординат функции $f(x)$ за первый полупериод при разбивке периода на $n = 24$ части следующие:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_p(x)$	7	11	13,5	15,4	17,4	20,5	25,4	32,5	27,7	19,2	10	5

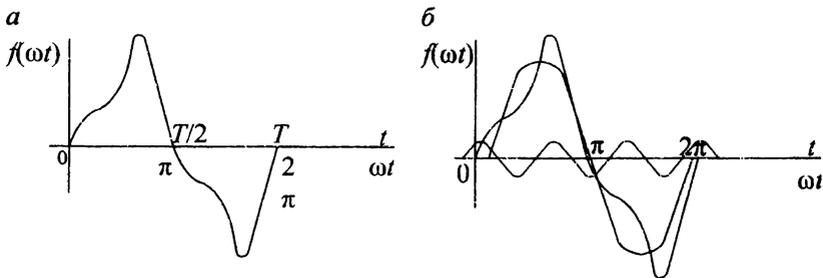


Рис. 2.5. Нелинейные функции:
а – общий вид; б – с гармоническим рядом

Решение

Так как кривая симметрична относительно оси абсцисс, то $A = 0$ и кривая будет состоять только из нечетных гармоник.

Амплитуда синусной составляющей первой гармоники

$$A_1' = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \sin_p x = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \sin_p x.$$

$$A_1 = \frac{4}{24} \left(\begin{array}{l} 7 \sin 7^\circ 30' + 11 \sin 22^\circ 30' + 13,5 \sin 37^\circ 30' + \\ + 15,4 \sin 52^\circ 30' + 17,4 \sin 67^\circ 30' + 20,5 \sin 82^\circ 30' + \\ + 25,4 \sin 97^\circ 30' + 32,5 \sin 112^\circ 30' + 27,7 \sin 127^\circ 30' + \\ + 19,2 \sin 142^\circ 30' + 10 \sin 157^\circ 30' + 5 \sin 172^\circ 30' \end{array} \right) \approx 25,3.$$

Амплитуда косинусной составляющей первой гармоники

$$A_1'' = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \cos_p x \approx -5,23.$$

Амплитуда синусной составляющей третьей гармоники

$$A_3' = \frac{4}{24} \sum_{p=1}^{12} f_p(x) \sin_p 3x \approx 3,47.$$

Амплитуда косинусной составляющей третьей гармоники

$$A_3'' = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{12} f_p(x) \cos_p 3x \approx 5,1.$$

Амплитуда первой гармоники $A_1 = \sqrt{(A_1')^2 + (A_1'')^2} = 25,9$. Тангенс угла ψ_1 , на который начало первой гармоники смещено относительно начала кривой $f(x)$, равен $\operatorname{tg} \psi_1 = A_1''/A_1' = -5,23/25,3 = -0,206$; $\psi_1 = -11^\circ 40'$.

Амплитуда третьей гармоники $A_3 = \sqrt{(A_3')^2 + (A_3'')^2} = 6$; $\operatorname{tg} \psi_3 = A_3''/A_3' = 1,47$; $\psi_3 = 11^\circ 40'$.

Следовательно, если ограничиться третьей гармоникой, то

$$f(\omega t) = 25,9 \sin(\omega t - 11^\circ 40') + 6 \sin(3\omega t + 55^\circ 50').$$

На рис. 2.5, б изображены первая и третья гармоники полученного ряда, а также результирующая (суммарная) кривая. Ее можно сопоставить с кривой, показанной на рис. 2.5, а.

2.5. Коэффициенты, характеризующие несинусоидальные величины

Для характеристики формы периодических кривых используют коэффициенты амплитуды, формы, искажения.

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения электрической величины, например напряжения U_{\max} , к действующему напряжению U_d : $k_a = U_{\max}/U_d$.

Для синусоидальных напряжений, ЭДС и токов коэффициент амплитуды равен

$$k_a = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Коэффициент формы равен отношению действующего напряжения U_d к его среднему по модулю или среднему максимальному за половину периода значению:

$$k_{\Phi} = U_d / U_{\text{ср. мод}}, k_{\Phi} = U_d / U_{\text{ср макс}}. \quad (2.6)$$

Для синусоидальных величин

$$k_{\Phi} = \pi / 2\sqrt{2} \approx 1,11.$$

Коэффициент искажения равен отношению действующего напряжения основной гармоники к действующему напряжению U_d :

$$k_n = U_1 / U_d. \quad (2.7)$$

Коэффициент гармоник $k_r = \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots} / I_1$ ($k_r = 0$).

Коэффициент среднего значения $k_{\text{ср}} = I_{\text{ср}} / I_m$ ($k_{\text{ср}} = 0$).

Коэффициент пульсаций $k_n = I_{1m} / I_0$.

Коэффициенты k_a , k_{Φ} характеризуют форму периодических кривых, т. е. их отличие от синусоиды, и используются в силовой электротехнике, радиотехнике и т. д. Коэффициенты k_r и k_n являются показателями качества электрической энергии энергосистем. В энергетической электронике при оценке результатов преобразования переменного синусоидального тока в постоянный используются коэффициенты $k_{\text{ср}}$, k_n .

2.6. Основные соотношения для несинусоидальных величин

Под *максимальными значениями* несинусоидальных ЭДС, токов или напряжений подразумевается их наибольшее мгновенное значение.

Под *действующими значениями* несинусоидальных ЭДС, токов и напряжений понимается их среднеквадратичное значение за период. Так, действующее значение несинусоидального тока равно

$$I = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} i^2(t) dt}, \quad (2.8)$$

где $i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$.

Интеграл $\int_0^T i^2 dt = \int_0^T U^2 dt$ для переменных сигналов можно также представить в виде суммы интегралов четырех типов (по числу составляющих):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_{ik}) dt = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2$$

Для постоянной составляющей этот интеграл равен квадрату действующего значения I_k гармонической составляющей тока k -го порядка, тогда $I_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} I_0 I_0 dt = I_0^2$.

Действующее значение периодического несинусоидального тока получаем как квадратный корень из суммы действующих значений всех составляющих:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2} \quad \text{или} \quad I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^n I_k^2}, \quad \text{т. е.}$$

действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и квадратов действующих значений всех гармонических составляющих.

Пусть несинусоидальное напряжение выражается рядом

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n). \quad (2.9)$$

Действующее напряжение определяется соотношением

$$U^2 = \int_0^T u^2 dt, \text{ или } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (2.10)$$

Действующее напряжение каждой гармоники

$$U_k = U_{km} / \sqrt{2}.$$

После интегрирования (2.9) выражение (2.10) приобретает вид

$$U^2 = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2, \quad (2.11)$$

и

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}. \quad (2.12)$$

Таким образом, действующее напряжение равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих напряжений всех гармонических составляющих.

Различают три средних значения электрических величин: среднее арифметическое, среднее по модулю за период и среднее максимальное за половину периода.

Среднее арифметическое значение несинусоидального напряжения равно его постоянной составляющей:

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt = U_0.$$

Среднее по модулю значение равно среднему арифметическому значению несинусоидального напряжения или больше его:

$$U_{\text{ср.мод}} = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt \geq U_{\text{ср}}.$$

Среднее максимальное за половину периода значение несинусоидального напряжения равно

$$U_{\text{ср.мах}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt.$$

Поскольку среднее значение за половину периода зависит от выбранного интервала и в частном случае может равняться нулю, интервал $t_1 \div t_1 + T/2$ выбирают так, чтобы интеграл был максимальным.

Нетрудно показать, что для синусоидального напряжения среднее максимальное за половину периода и среднее по модулю значения за период равны:

$$U_{\text{ср. макс}} = U_{\text{ср. мод}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m.$$

Аналогичные выражения могут быть записаны для средних значений ЭДС и тока.

2.7. Мощность периодического несинусоидального тока

Выражение мгновенной мощности $p = ui$ справедливо для токов и напряжений с любой формой кривой. Активная мощность любого периодического тока по определению равна среднему за период значению мгновенной мощности:

$$\frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt. \quad (2.13)$$

После подстановки в (2.13) напряжения и тока в виде рядов Фурье активная мощность будет представлена суммой интегралов:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) dt = U_k I_k \cos \varphi_k,$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k,$$

где U_k, I_k – действующие значения напряжения и тока k -й гармоники;
 φ_k – угол сдвига фаз между напряжением и током k -й гармоники;
 $\varphi_k = \psi_{ku} - \psi_{ki}$.

Следовательно, активная мощность периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей всех гармонических составляющих и мощности постоянных составляющих напряжения и тока (мощности постоянного тока):

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^n U_k I_k \cos \varphi_k.$$

Реактивной мощностью периодических несинусоидальных токов можно условно считать величину

$$Q = \sum_{k=1}^n U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Полная мощность (модуль) периодического несинусоидального тока определяется также условно:

$$S = UI > \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Отношение активной мощности к полной, так же как и в электрических цепях синусоидального тока, называется *коэффициентом мощности*: $\lambda = P/S$.

По аналогии с цепями синусоидального тока часто коэффициент мощности принимают равным $\cos \varphi_{\text{эк}}$. Угол $\varphi_{\text{эк}}$ в этом случае рассматривают как угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидальными напряжением и током. Условием эквивалентности синусоидальных и несинусоидальных токов и напряжений является неизменность коэффициента мощности и действующих напряжений и токов при переходе от несинусоидальных к эквивалентным синусоидальным величинам.

2.8. Анализ линейных электрических цепей при несинусоидальном напряжении источника питания

Известно, что к линейным электрическим цепям применим метод наложения. В соответствии с этим запись периодического несинусоидального напряжения источника энергии в виде ряда Фурье дает возможность представить его несколькими последовательно соединенными и одновременно действующими источниками ЭДС или напряжений и осуществлять анализ электрического состояния цепей на основе метода наложения.

Если на входе какой-либо цепи (рис. 2.6, а) включен источник несинусоидальной ЭДС

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin \omega t + E_{2m} \sin 2\omega t = E_0 + e_1 + e_2,$$

то режим цепи не изменится, если источник $e(t)$ заменить тремя источниками ЭДС E_0 , e_1 и e_2 , соединенными последовательно (рис. 2.6, б).

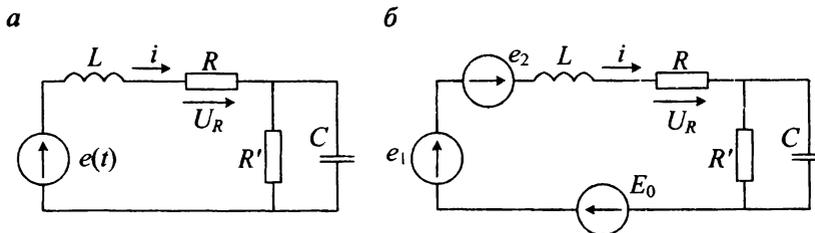


Рис. 2.6. Электрические цепи:

а – с источником несинусоидальной ЭДС, б – с последовательным соединением трех источников ЭДС

Графическое распределение гармоник ЭДС источника представлено на рис. 2.7.

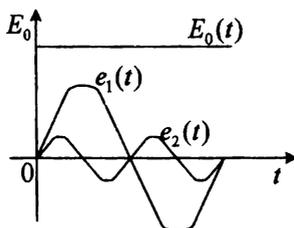


Рис. 2.7. Временная диаграмма гармоник ЭДС источников

При неизменных параметрах R , L и C можно применить принцип суперпозиции и вычислить токи и напряжения на участках цепи от независимого действия каждой из ЭДС в соответствии со схемами, приведенными на рис. 2.8. В схеме, показанной на рис. 2.8, а, напряжение и ток от действия постоянной составляющей ЭДС E_0 определяют так же, как при расчете цепей постоянного тока. В схемах, изображенных на рис. 2.8, б, в, токи и напряжения от действия каждой гармоники ЭДС определяют, как при расчете цепей синусоидального тока.

Для определения мгновенных значений токов и напряжений нужно алгебраически суммировать найденные при расчетах цепей постоянные и все гармонические составляющие. Так, для рассматриваемой

мой цепи ток i в резисторе с сопротивлением R и напряжение U_R соответственно равны:

$$i = I_0 + i_1 + i_2; \quad (2.14)$$

$$U_R = U_{0R} + U_{1R} + U_{2R}.$$

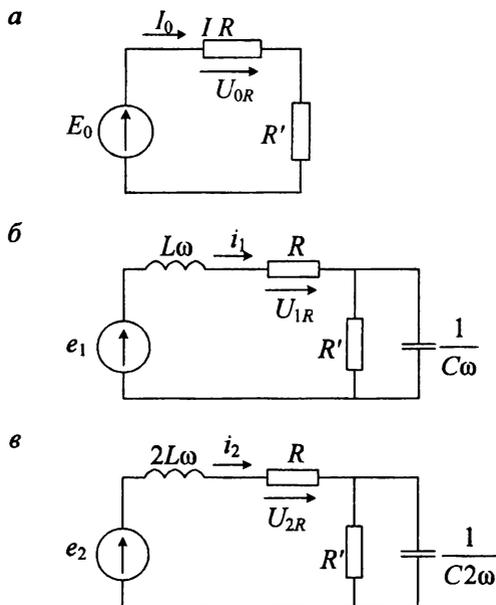


Рис. 2.8. Схемы замещения цепи, показанной на рис. 2.6:
 а – для постоянной составляющей; б – для первой гармоники ЭДС источника;
 в – для второй гармоники ЭДС источника

Постоянные составляющие тока и напряжения на указанном резисторе определяются выражениями $I_0 = E_0/(R' + R)$ и $U_{0R} = E_{0R}/(R' + R)$.

При расчете гармонических составляющих необходимо иметь в виду, что сопротивления индуктивных и емкостных элементов зависят от частоты, т. е. от порядкового номера гармоники:

$$X_{kL} = Lk\omega; \quad X_{kC} = 1/(Ck\omega).$$

Графики зависимости сопротивлений этих элементов от частоты, т. е. их частотные характеристики, приведены на рис. 2.9.

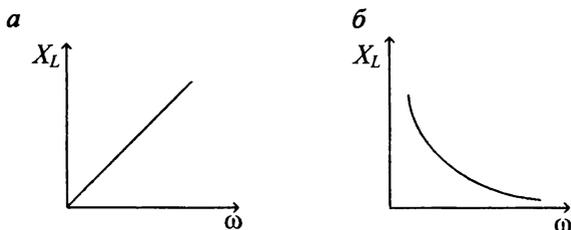


Рис. 2.9. Частотные характеристики элементов:
a – индуктивного; *б* – емкостного

Расчет гармонических составляющих токов и напряжений можно производить комплексным методом с помощью комплексных чисел.

Так, комплексные сопротивления рассматриваемой цепи записываются в виде:

- для первой гармоники:

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega + \frac{R'/jC\omega}{R' - j/C\omega} = Z_1 e^{j\varphi_1};$$

- для второй гармоники:

$$\underline{Z}_2 = R + jL2\omega + \frac{R'/jC\omega}{R' - j/C\omega} = Z_2 e^{j\varphi_2}.$$

Комплексные амплитуды первой и второй гармоник тока в резисторе R определяются выражениями:

$$\dot{I}_{1m} = \dot{E}_{1m}/\underline{Z}_1 = I_{1m} e^{-j\varphi_1};$$

$$\dot{I}_{2m} = \dot{E}_{2m}/\underline{Z}_2 = I_{2m} e^{-j\varphi_2}.$$

В соответствии с (2.14) искомый ток в резисторе R равен

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t - \varphi_2).$$

Остальные токи в рассматриваемой цепи и напряжения на ее элементах определяют аналогично.

2.9. Влияние резистивного, индуктивного и емкостного элементов цепи на форму кривой тока

2.9.1. Резонансные явления

Если в электрических цепях несинусоидальное напряжение $u(t)$ содержит основную и высшие гармонические составляющие, при резистивной нагрузке токи всех гармоник совпадают по фазе с соответствующими гармониками напряжений и форма кривой несинусоидального тока аналогична форме кривой напряжения $u(t)$.

Поскольку с ростом частоты сопротивление индуктивного элемента увеличивается, а емкостного уменьшается, в электрической цепи может возникнуть резонанс напряжений либо для первой, либо для одной из высших гармоник. Условие возникновения резонанса напряжений для некоторой k -й гармоники имеет вид $k\omega L = \frac{1}{k\omega C}$.

Тогда действующий ток этой гармоники равен

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + (LR\omega - \frac{1}{CR\omega})^2}} = \frac{U_k}{R}$$

Следовательно, в цепи имеет место резонанс напряжений для k -й гармоники, которая в зависимости от сопротивления будет более или менее резко выражена в кривой тока.

При параллельном соединении ветвей с индуктивной катушкой и конденсатором возможен резонанс токов для некоторой k -й гармоники. Это произойдет при условии $b_{1k} = b_{2k}$, т. е. при равенстве реактивных проводимостей первой и второй ветвей для k -й гармоники.

При возникновении резонансного и близкого к нему режима на какой-либо высшей гармонике токи и (или) напряжения этой гармоники могут оказаться большими, чем токи и напряжения первой гармоники на этих участках цепи, несмотря на то что амплитуда соответствующей высшей гармоники ЭДС на входе схемы может быть в несколько раз меньше амплитуды первой гармоники ЭДС.

2.9.2. Величины, которые измеряют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах

Несинусоидальные токи и напряжения измеряют приборами различных систем. Принципы действия этих приборов рассматривают

в курсе электрических измерений, поэтому здесь упомянем лишь, какие величины измеряют вольтметры и амперметры различных систем. Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующее значение, магнитоэлектрические приборы с выпрямителем – на среднее по модулю значение величины, магнитоэлектрические приборы без выпрямителя – на постоянную составляющую, амплитудные электронные вольтметры – на максимальное значение функции. На лицевой стороне измерительного прибора всегда имеется условный значок, свидетельствующий о том, к какой системе относится данный прибор (рис. 2.10).

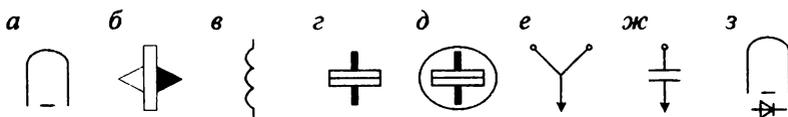


Рис. 2.10. Условные обозначения схем приборов:

- a* – магнитоэлектрическая с подвижной рамкой; *б* – магнитоэлектрическая с подвижным магнитом; *в* – электромагнитная; *г* – электродинамическая; *д* – ферродинамическая; *е* – галловая; *ж* – электростатическая; *з* – магнитоэлектрическая с выпрямителем

2.9.3. Особенности работы трехфазных систем, вызываемых гармониками, кратными трем

ЭДС каждой фазы трехфазного трансформатора или трехфазного генератора часто оказывается несинусоидальной. Каждая ЭДС (e_a, e_b, e_c) повторяет по форме остальные со сдвигом на одну треть периода ($T/3$) и может быть разложена на гармоники (рис. 2.11). Постоянная составляющая обычно отсутствует. Пусть k -я гармоника ЭДС фазы A

$$e_{ka} = E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Так как ЭДС фазы B (рис. 2.11, б) отстает от ЭДС фазы A (рис. 2.11, а) на $T/3$, а ЭДС фазы C (рис. 2.11, в) опережает ЭДС фазы A на $T/3$, то ЭДС k -й гармоники фаз B и C соответственно находится по формулам:

$$e_{kb} = E_{km} \sin(k\omega(t - \frac{T}{3}) + \varphi_k) = E_{km} \sin(k\omega t - 120^\circ k + \varphi_k);$$

$$e_{kc} = E_{km} \sin(k\omega t + 120^\circ k + \varphi_k);$$

$$k\omega T_3 = k \frac{2\pi T}{T_3} = k \frac{2\pi}{3} = 120^\circ k.$$

Если $k = 1, 4, 7, 10$, то k -я гармоника ЭДС фазы B отстает на 120° от k -й гармоники ЭДС фазы A . Следовательно, 1, 4, 7, 10-я гармоники образуют систему прямой последовательности фаз.

Если $k = 2, 5, 8, 11$, то k -я гармоника ЭДС фазы B опережает k -ю гармонику ЭДС фазы A на 120° . Следовательно, 2, 5, 8, 11-я гармоники образуют систему обратной последовательности фаз.

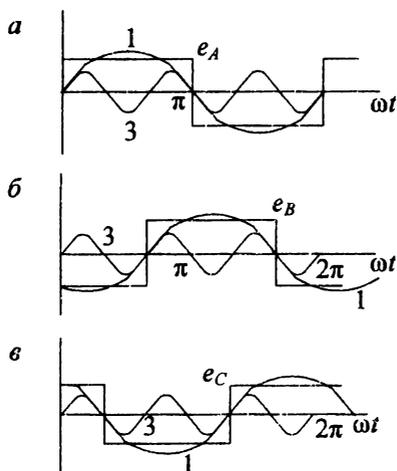


Рис. 2.11. Графическое разложение несинусоидальной ЭДС на гармоники:
 a – фаза A ; b – фаза B ; $в$ – фаза C

Гармоники, кратные трем ($k = 3, 6, 9, \dots$), образуют систему нулевой последовательности, т. е. третьи гармоники ЭДС всех трех фаз совпадают по фазе ($3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$): $e_{3A} = e_{3B} = e_{3C} = E_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3)$. Шестые гармоники ЭДС также совпадают по фазе и т. д.

2.10. Анализ и расчет линейных электрических цепей при несинусоидальном напряжении источника питания

Запись периодического несинусоидального напряжения источника энергии в виде ряда Фурье дает возможность представить его несколькими последовательно соединенными и одновременно действующими источниками ЭДС или напряжений и осуществлять анализ электрического состояния цепей на основе метода наложения.

Мгновенное значение тока в любой ветви линейной электрической цепи, согласно принципу наложения, равно сумме мгновенных значений токов в этой ветви, возникших под действием постоянных и гармонических составляющих напряжений источников электрической энергии. Постоянную и гармонические составляющие тока вычисляют по законам линейных электрических цепей соответственно постоянного и переменного тока.

При расчете токов в ветвях и падений напряжений на участках цепи, возникших от действия постоянной составляющей напряжения, необходимо иметь в виду, что постоянный ток через конденсатор C не проходит (емкостное сопротивление $1/\omega c = 1/0 \cdot c = \infty$), а падение напряжения на зажимах индуктивности L при постоянном токе равно нулю (индуктивное сопротивление $\omega L = 0, L = 0$).

При расчете токов и падений напряжений, возникших от действия гармонических составляющих напряжения, можно считать, что активное сопротивление r резистора не зависит от частоты, а индуктивное сопротивление $k\omega L$ и емкостное сопротивление $1/k\omega c$ соответственно растет и убывает пропорционально номеру k -й гармоники (рис. 2.12).

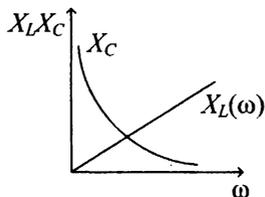


Рис. 2.12. Частотные характеристики индуктивного и емкостного элементов

При расчете высших гармоник необходимо производить перерасчет значений x_L и x_C , так как они зависят от частоты: $x_{Lk} = k\omega L$; $x_{Ck} = 1/k\omega C$.

Расчет периодических несинусоидальных токов и напряжений обычно производится комплексным методом. Однако использовать этот метод и строить векторные диаграммы можно только для каждой гармоники в отдельности, так как для различных гармоник частоты вращения векторов различны.

При определении гармонических составляющих токов и падений напряжений надо знать их амплитуды и начальные фазы. Поэтому при расчете токов вычисляют комплексные амплитуды этих составляющих, содержащие модули амплитуд и начальные фазы.

2.10.1. Представление линейных электрических цепей при несинусоидальном напряжении источника питания

В качестве примера анализа рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 2.13, а, в которой источник с несинусоидальной ЭДС можно представить в виде трех составляющих: $e(t) = E_0 + E_{m1}\sin\omega t + E_{m2}\sin 2\omega t$. К цепи подключены последовательно резистивный, индуктивный и емкостный элементы.

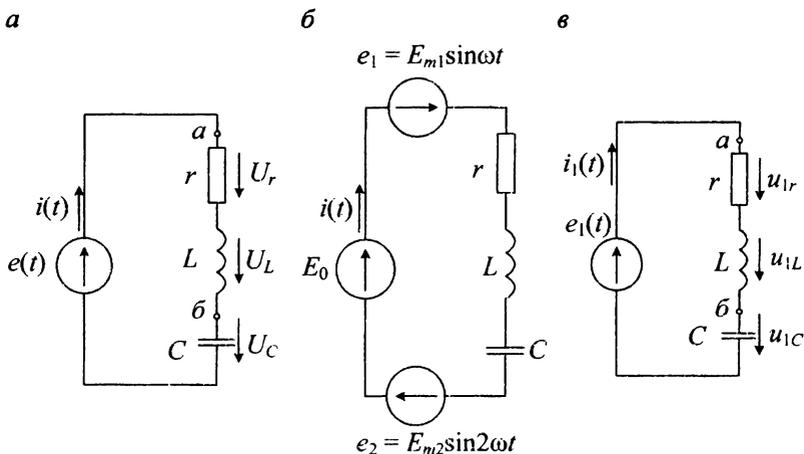


Рис. 2.13. Электрическая цепь:

а – с источником несинусоидальной ЭДС; б – схема замещения;
 в – схема замещения с одной ЭДС

С учетом вышесказанного в рассматриваемой электрической цепи ЭДС $e(t)$ может быть представлена тремя ЭДС (рис. 2.13, б). Графики $E_0(t)$, а также $e_1(t)$ и $e_2(t)$ изображены на рис. 2.7. В соответствии с методом наложения данная электрическая цепь рассчитывается как цепь, в которой действуют три независимые ЭДС. При этом определение тока и напряжений от ЭДС E_0 осуществляется так же, как при

расчете цепей постоянного тока, а от ЭДС e_1 и e_2 – как при расчете цепей синусоидального тока от одной ЭДС (рис. 2.13, в).

2.10.2. Расчет линейных электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях и токах

Пример 2

К электрической цепи (рис. 2.14) приложено напряжение $u(\omega t)$, диаграмма которого изображена на рис. 2.15, с частотой первой гармоники $f = 50$ Гц. Параметры цепи: $r = 15$ Ом, $L = 60$ мГн, $C = 80$ мкФ.

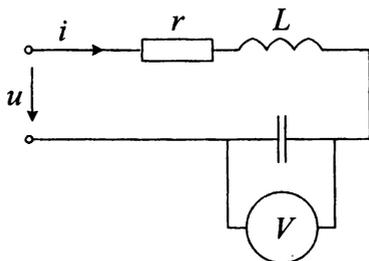


Рис. 2.14. Электрическая цепь с несинусоидальным напряжением

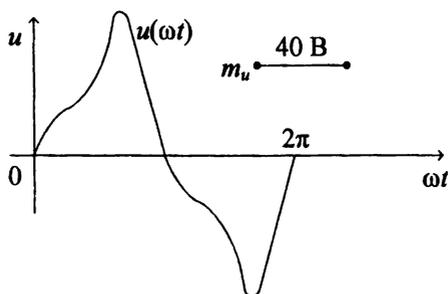


Рис. 2.15. Диаграмма несинусоидального напряжения

Определить мгновенное значение тока i в цепи; действующие значения приложенного к цепи напряжения U и тока I ; активную мощность P , потребляемую цепью, реактивную Q и полную S мощности, мощность искажения T и коэффициент мощности λ ; показание вольтметра U_V электромагнитной системы, подключенного на зажимы конденсатора.

Решение

Предварительно разложим в тригонометрический ряд Фурье заданную периодическую несинусоидальную функцию напряжения $u(\omega t)$ либо возьмем данные (с учетом рисунка) из справочника. В результате разложения получим

$$U = 31,5\sin(\omega t - 16^\circ) + 8,66\sin(3\omega t + 88^\circ) + 2,58\sin(5\omega t + 170^\circ) = \\ = U_1(t) + U_3(t) + U_5(t).$$

В анализируемой электрической цепи постоянная составляющая ЭДС E_0 отсутствует, и даже при ее наличии она не вызывает установившегося тока, так как сопротивление емкостного элемента при постоянном токе равно ∞ .

Расчет постоянной составляющей тока $I_{(0)}$

Поскольку кривая приложенного напряжения $u(\omega t)$ не содержит постоянной составляющей, то и постоянной составляющей тока $I_{(0)}$ также нет.

Расчет для первой гармоники

Определим комплексные сопротивления току первой гармоники:

$$R = 15 \text{ Ом}; X_{L(1)} = j\omega L = j2\pi fL = j314 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = j18,84 \text{ Ом};$$

$$X_{C(1)} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{314 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = -j39,8 \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{цепи}} = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 15 + j(18,84 - 39,8) = 15 - j20,96 = 25,774e^{-j54^\circ 25'} \text{ Ом};$$

$$\varphi_{(1)} = \arccos\frac{r}{|Z|}, |Z| = \sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Определим комплексную амплитуду тока первой гармоники, выразив U_1 через комплекс $U_{m(1)} = 31,5e^{-j16^\circ}$ В:

$$I_{m(1)} = \frac{U_{m(1)}}{Z_{\text{цепи}}} = \frac{31,5e^{-j16^\circ}}{25,774e^{-j54^\circ 25'}} = 1,222e^{-j38^\circ 25'} \text{ А}.$$

Проведем проверку по второму закону Кирхгофа для первой гармоники:

$$\dot{U}_{m(1)} = \dot{U}_{r m(1)} + \dot{U}_{L m(1)} + \dot{U}_{C m(1)} = r\dot{I}_{m(1)} + j\omega L\dot{I}_{m(1)} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_{m(1)}.$$

Подставив вычисленные значения комплексных сопротивлений и тока, получим

$$\dot{U}_{m(1)} = 31,438e^{-j15^\circ 38'} \approx 31,5e^{-j16^\circ} \text{ В.}$$

Расчет для третьей гармоники

Определим комплексные сопротивления току третьей гармоники:

$$r = 150 \text{ Ом}; X_{L(3)} = j3\omega L = j3 \cdot 18,84 = j56,52 \text{ Ом};$$

$$X_{C(3)} = -j\frac{1}{3\omega C} = -j\frac{39,8}{3} = -j13,267 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{цепи}(3)} &= r + j(\omega L - \frac{1}{3\omega C}) = 15 + j(56,52 - 13,267) = \\ &= 15 + j43,253 = j45,78e^{j70^\circ 52'} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Определим комплексную амплитуду тока третьей гармоники:

$$\dot{I}_{m(3)} = \frac{\dot{U}_{m(3)}}{Z_{\text{цепи}(3)}} = \frac{8,66e^{j88^\circ}}{45,78e^{j70^\circ 52'}} = 0,189e^{j17^\circ 08'} \text{ А.}$$

Проведем проверку по второму закону Кирхгофа для третьей гармоники:

$$\dot{U}_{m(3)} = \dot{U}_{r(3)} + \dot{U}_{Lm(3)} + \dot{U}_{cm(3)} = r\dot{I}_{m(3)} + j3\omega L\dot{I}_{m(3)} - j\frac{1}{3\omega C}\dot{I}_{m(3)}.$$

Подставив вычисленные значения комплексных сопротивлений и тока, получим

$$\dot{U}_{m(3)} = 8,6e^{j87^\circ 53'} \approx 8,6e^{j88^\circ} \text{ В.}$$

Расчет для пятой гармоники

Определим комплексные сопротивления току пятой гармоники:

$$R = 15 \text{ Ом}; X_{L(5)} = j5\omega L = j5 \cdot 18,84 = j94,2 \text{ Ом};$$

$$X_{C(5)} = -j\frac{1}{5\omega C} = -j\frac{39,8}{5} = -j7,96 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{цепи}(5)} &= r + j(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}) = 15 + j(94,2 - 7,96) = j15 + j86,24 = \\ &= 87,535e^{j80^\circ 08'} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Определим комплексную амплитуду тока пятой гармоники:

$$I_{m(5)} = \frac{\dot{U}_{m(5)}}{\underline{Z}_{\text{цепи}}(5)} = \frac{2,58e^{j170^\circ}}{87,535e^{j80^\circ 08'}} = 0,029e^{j89^\circ 52'} \text{ А.}$$

Проведем проверку по второму закону Кирхгофа для пятой гармоники:

$$U_{m(5)} = \dot{U}_{rm(5)} + \dot{U}_{Lm(5)} + U_{cm(5)} = rI_{m(5)} + j5\omega L I_{m(5)} - j\frac{1}{5\omega C} I_{m(5)}.$$

Подставив вычисленные значения комплексных сопротивлений и тока, получим

$$\dot{U}_{m(5)} = 2,539e^{j170^\circ} \approx 2,54e^{j170^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение тока в цепи находим как сумму мгновенных значений токов отдельных гармоник:

$$\begin{aligned} i = i_{(1)} + i_{(3)} + i_{(5)} &= I_{m(1)}\sin(\omega t + \psi_{i(1)}) + I_{m(3)}\sin(3\omega t + \psi_{i(3)}) + \\ &+ I_{m(5)}\sin(5\omega t + \psi_{i(5)}) = 1,222\sin(\omega t + 38^\circ 25') + 0,189\sin(3\omega t + 17^\circ 08') + \\ &+ 0,029\sin(5\omega t + 89^\circ 52'). \end{aligned}$$

Определим действующее значение U приложенного к цепи напряжения. Предварительно вычислим величины напряжений действующих значений отдельных гармоник:

$$U_{(1)} = U_{m(1)}/\sqrt{2} = 31,5/\sqrt{2} = 22,274 \text{ В;}$$

$$U_{(3)} = U_{m(3)}/\sqrt{2} = 8,66/\sqrt{2} = 6,124 \text{ В;}$$

$$U_{(5)} = U_{m(5)}/\sqrt{2} = 2,58/\sqrt{2} = 1,824 \text{ В.}$$

Тогда

$$U = \sqrt{22,274^2 + 6,124^2 + 1,824^2} = 23,172 \text{ В.}$$

Определим действующее значение тока в цепи, для этого предварительно найдем действующие значения токов отдельных гармоник:

$$I_{(1)} = I_{m(1)}/\sqrt{2} = 1,222/\sqrt{2} = 0,864 \text{ А};$$

$$I_{(3)} = I_{m(3)}/\sqrt{2} = 0,189/\sqrt{2} = 0,134 \text{ А};$$

$$I_{(5)} = I_{m(5)}/\sqrt{2} = 0,029/\sqrt{2} = 0,021 \text{ А}.$$

Тогда

$$I = \sqrt{0,864^2 + 0,134^2 + 0,029^2} = 0,874 \text{ А}.$$

Определим активную P , реактивную Q и полную S мощности, мощность искажения T и коэффициент мощности λ согласно формулам.

Предварительно определим углы сдвига фаз $\varphi_{(k)}$, $\cos\varphi_{(k)}$, $\sin\varphi_{(k)}$ активные $P_{(k)}$, реактивные $Q_{(k)}$ мощности отдельных гармоник.

Углы сдвига фаз $\varphi_{(1)}$, $\varphi_{(3)}$ и $\varphi_{(5)}$ известны из вычисленных комплексов сопротивлений $Z_{\text{цепи}(1)}$, $Z_{\text{цепи}(3)}$, $Z_{\text{цепи}(5)}$, а именно: $\varphi_{(1)} = -54^\circ 25'$, $\varphi_{(3)} = -70^\circ 52'$, $\varphi_{(5)} = -80^\circ 08'$. Следовательно, $\cos\varphi_{(1)} = 0,5819$, $\sin\varphi_{(1)} = -0,8133$, $\cos\varphi_{(3)} = 0,3277$, $\sin\varphi_{(3)} = 0,9447$, $\cos\varphi_{(5)} = 0,1713$ и $\sin\varphi_{(5)} = 0,9852$.

Активные и реактивные мощности отдельных гармоник составляют:

$$P_{(1)} = U_{(1)}I_{(1)}\cos\varphi_{(1)} = 22,274 \cdot 0,864 \cdot 0,5819 = 11,199 \text{ Вт};$$

$$P_{(3)} = U_{(3)}I_{(3)}\cos\varphi_{(3)} = 6,124 \cdot 0,134 \cdot 0,3277 = 0,269 \text{ Вт};$$

$$P_{(5)} = U_{(5)}I_{(5)}\cos\varphi_{(5)} = 1,824 \cdot 0,021 \cdot 0,1713 = 0,007 \text{ Вт};$$

$$Q_{(1)} = U_{(1)}I_{(1)}\sin\varphi_{(1)} = 22,274 \cdot 0,864 \cdot (-0,8133) = -15,652 \text{ вар};$$

$$Q_{(3)} = U_{(3)}I_{(3)}\sin\varphi_{(3)} = 6,124 \cdot 0,134 \cdot 0,9447 = 0,775 \text{ вар};$$

$$Q_{(5)} = U_{(5)}I_{(5)}\sin\varphi_{(5)} = 1,824 \cdot 0,021 \cdot 0,9852 = 0,038 \text{ вар}.$$

Активная мощность, потребляемая цепью, равна

$$P = P_{(1)} + P_{(3)} + P_{(5)} = 11,199 + 0,269 + 0,007 = 11,475 \approx 11,5 \text{ Вт}.$$

Проведем проверку. Мощность потерь P_r определим по закону Джоуля–Ленца:

$$P_r = P_{r(1)} + P_{r(3)} + P_{r(5)} = rI_{(1)}^2 + rI_{(3)}^2 + rI_{(5)}^2 = 15 \cdot 0,862^2 + 15 \cdot 0,134^2 + 15 \cdot 0,021^2 = 11,197 + 0,269 + 0,007 = 11,473 \approx 11,5.$$

Реактивная мощность составляет

$$Q = Q_{(1)} + Q_{(3)} + Q_{(5)} = -15,652 + 0,775 + 0,038 + (-14,839) \approx 14,8 \text{ вар.}$$

Проведем проверку:

$$Q = Q_{(1)} + Q_{(3)} + Q_{(5)} = (\omega L - 1/\omega c)I_{(1)}^2 + (3\omega L - 1/3\omega c)I_{(3)}^2 + (5\omega L - 1/5\omega c)I_{(5)}^2.$$

Подставив вычисленные значения комплексных сопротивлений и тока, получим

$$Q = -14,832 \approx -14,8 \text{ вар.}$$

Знак «минус» у реактивной мощности для первой гармоники $Q_{(1)}$ объясняется тем, что емкостное сопротивление $X_{c(1)} = 1/\omega c = 39,8 \text{ Ом}$ преобладает над индуктивным сопротивлением $X_{L(1)} = \omega L = 18,84 \text{ Ом}$.

Полная мощность равна $\underline{S} = \underline{UI} = 23,172 \cdot 0,874 = 20,252 \approx 20,3 \text{ ВА}$.

Мощность искажения составляет

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{20,252^2 - 11,457^2 - 14,839^2} = 7,634 \approx 7,6.$$

Коэффициент мощности равен

$$\lambda = P/S = 11,475 / 20,252 = 0,576.$$

Показания вольтметра, подключенного к зажимам емкости C , соответствуют действующему значению напряжения на ее зажимах:

$$U_c = \sqrt{U_{c(1)}^2 + U_{c(3)}^2 + U_{c(5)}^2};$$

$$U_{c(1)} = \frac{U_{cm(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{\omega c} I_{cm(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{39,8 \cdot 1,222}{\sqrt{2}} = 34,39 \text{ В};$$

$$U_{\alpha(3)} = \frac{U_{cm(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\omega c} \frac{I_{cm(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{13,267 \cdot 0,189}{\sqrt{2}} = 1,773 \text{ В};$$

$$U_{\alpha(5)} = \frac{U_{cm(5)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{5\omega c} \frac{I_{cm(5)}}{\sqrt{2}} = \frac{7,96 \cdot 0,029}{\sqrt{2}} = 0,163 \text{ В}.$$

Тогда

$$U_c = \sqrt{34,39^2 + 1,773^2 + 0,163^2} = 34,436 \text{ В}.$$

Следовательно, вольтметр покажет напряжение $U_V \approx 34,4 \text{ В}$.

Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях следует ожидать возникновения несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?
2. Какие виды симметрии несинусоидальных кривых Вы знаете и как они сказываются на гармоническом составе?
3. Изложите основные положения, на которых основывается методика расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.
4. Охарактеризуйте физический смысл действующего значения несинусоидального тока.
5. Всегда ли самым коротким расчетным путем при определении действующего значения несинусоидального тока является нахождение его по гармоническому составу?
6. Почему нельзя складывать действующие значения различных частот?
7. При каких ограничениях несинусоидальные токи и напряжения приближенно могут быть заменены эквивалентными синусоидальными?

Заключение

Данное пособие предназначено для изучения раздела «Сложные электрические сигналы» дисциплины «Теоретические основы электротехники» студентами вузов, осуществляющих подготовку педагогов и инженеров по электротехническим направлениям. Пособие может быть также использовано в целях углубленного изучения дисциплин «Электротехника и электроника» и «Электрические цепи и сигналы».

В пособии представлены основные сведения о сложных сигналах, наблюдаемых в трехфазных цепях и в цепях с несинусоидальными сигналами; о типах соединения элементов в цепях трехфазного тока; даны примеры расчета цепей трехфазного переменного тока и графические изображения напряжений и токов для разных схем включения; рассмотрены способы представления и комплексный метод расчета цепей при возбуждении периодическими сигналами несинусоидальной формы.

Данное пособие служит теоретической базой при изучении специальных дисциплин электротехнического направления.

Список рекомендуемой литературы

Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учеб. для электротехн., энергет., приборостроит. спец. вузов / Л. А. Бессонов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: УНЦ «Гар-дарики», 2006. 684 с.: ил.

Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле [Текст]: учеб. для электротехн., энергет., приборостроит. спец. вузов / Л. А. Бессонов. 9-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2002. 638 с.: ил.

Голубов Е. В. Расчет линейных электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях и токах [Текст]: метод. указания / Е. В. Голубов; Свердлов. инж.-пед. ин-т. Екатеринбург, 1992. 59 с.

Демирчян К. С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей [Текст]: учеб. пособие для электромех. и электроэнергет. спец. вузов / К. С. Демирчян, П. А. Бутырын. М.: Высш. шк., 1988. 335 с.: ил.

Комплексный метод расчета электрических цепей [Текст]: метод. указания / Урал. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 1994. 84 с.

Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники [Текст]: учеб. для вузов: в 2 т. / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 416 с.

Расчет линейных электрических цепей при переменном токе и построение векторных диаграмм [Текст]: метод. указания / Свердлов. инж.-пед. ин-т. Свердловск, 1988. 104 с.

Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники [Текст]: учеб. пособие для вузов / под ред. П. А. Ионкина. М.: Энергоиздат, 1982. 786 с.: ил.

Сборник задач по теоретическим основам электротехники [Текст]: учеб. пособие для энергет. и приборостроит. спец. вузов / Л. А. Бессонов [и др.]; под ред. Л. А. Бессонова. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1988. 543 с.: ил.

Учебное издание

Клюшников Олег Иванович
Степанов Александр Валерьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 3

Сложные электрические сигналы

Учебное пособие

Редактор Е. А. Ушакова
Компьютерная верстка О. Н. Казанцевой

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 25.11.09. Формат 60×84/16. Бумага для множ. аппаратов. Усл. печ. л. 3,6. Уч.-изд. л. 3,8. Тираж 200 экз. Заказ № 414.
Издательство ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет». Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

Отпечатано в ООО "ТРИКС". Свердловская область, г. Верхняя Пышма, ул. Феофанова, 4