Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет»

Е. А. Перминов

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ В АСПЕКТЕ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Монография

2-е издание, переработанное и дополненное

Екатеринбург
РГППУ
2019

УДК 378.016:51+519.1:37
ББК Ч448.902.58+В176р30-2
П 27

Перминов, Евгений Александрович.

П 27 Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования: монография / Е. А. Перминов. 2-е изд., перераб. и доп. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2019. 280 с.
ISBN 978-5-8050-0673-0

Охарактеризованы предмет, функции и интеграционный потенциал современной дискретной математики. Исходя из этого исследованы методологические, теоретические основы, основные методические аспекты обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки и элективного обучения дискретной математике в школе.

Монография адресована преподавателям вузов, колледжей (техникумов), учителям математики и информатики, магистрам, а также всем интересующимся обучением дискретной математике.

УДК 378.016:51+519.1:37
ББК Ч448.902.58+В176р30-2

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Е. М. Вечтомов (ГОУ ВО «Вятский государственный гуманитарный университет»); д-р пед. наук, проф. В. Б. Полуянов (ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0673-0

Оглавление

Введение

Принятие Концепции модернизации российского образования на период до 2010 г., государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (1994, 2000, 2005–2008, 2010–2012); Закона РФ «Об образовании» (2012 г.), включение России с 2003 г. в Болонский процесс на фоне интеграции в мировое образовательное пространство привело к реальному внедрению новой структуры двухуровневого образования в высшей школе.

Состояние реформирования, естественно, свойственно и современному высшему педагогическому образованию. Новые государственные стандарты подготовки бакалавров и магистров требуют изменения системы подготовки студентов педагогических специальностей, что влечет за собой изменение программ учебных дисциплин, изучаемых будущими учителями-предметниками и преподавателями колледжей (техникумов), учебников, методического обеспечения учебного процесса и др.

Однако в достижении целей, обозначенных в приведенных документах, имеется ряд трудностей и принципиальных проблем. Исследования в области высшей педагогической школы свидетельствуют о том, что в рамках модернизации не решены многие кардинальные задачи развития образования. Учеными констатируется факт падения уровня образования и качества подготовки специалистов для общеобразовательных и специальных средних учебных заведений и училищ. Их подготовка далеко не в полной мере соответствует новым тенденциям совершенствования и развития современного образования в условиях перехода на новую компетентностную модель, в процессе реализации которой студенты смогут овладеть ключевыми компетенциями творчески работающего педагога-профессионала. Это проявляется, например, в неспособности многих специалистов продуктивно работать в условиях уровневой и профильной дифференциации, вариативности программ и учебников, освоения новых информационно-образовательных технологий.

В наступившую эпоху математизации наук особенно актуальной становится проблема повышения уровня математической подготовки педагогов направлений и профилей, напрямую связанных с математикой или ее приложениями, – будущих учителей математики и информатики и педагогов профессионального обучения (инженеров-педагогов) – в высокотехнологичных, автоматизированных отраслях производства, какими являются отрасли машиностроения, электротехники, электроэнергетики и некоторые другие. Инженеры-педагоги, учителя математики и информатики несут наибольшую ответственность за подготовку современного квалифицированного рабочего, играющего главную роль в названных отраслях производства. Инженер-педагог с высоким уровнем математических знаний и умений особенно востребован в новых условиях модернизации высшего образования. В этой связи важно учесть, что «совершенствование содержания математического образования должно обеспечиваться в первую очередь за счет опережающей подготовки и дополнительного профессионального образования педагогов», особенно этих профилей подготовки [95, с. 25].

Анализ состояния математической подготовки педагогов – выпускников математических, инженерно-педагогических факультетов и факультетов информатики – свидетельствует об их невысокой общей и математической культуре, о недостаточном развитии у них математического мышления, об отсутствии должного опыта математической деятельности. У них часто наблюдается отсутствие потребности в осмыслении новых математических фактов, критичности при выборе методов и подходов, используемых в решении математических задач, в том числе математического моделирования с использованием компьютера. Отмечаются также «рецептурность» методических знаний будущих учителей математики и их слабые методические умения, а у будущих учителей информатики – формализм математических знаний и слабые умения применять их в своей профессиональной области. Наблюдается неумение использовать идеи и методы математики в интеграции обучения дисциплинам математического, естественнонаучного и профессионального цикла на основе реализации межпредметных связей математики в школах, колледжах (техникумах), при внедрении инновационных технологий при подготовке современного рабочего.

Следует отметить, что в разные годы состояние и способы совершенствования математической подготовки студентов математических, инженерно-педагогических факультетов и факультетов информатики педагогических вузов исследовались многими авторами, в том числе С. Г. Григорьевым, В. А. Гусевым, С. Д. Каракозовым, А. А. Кузнецовым, Э. И. Кузнецовым, В. В. Лаптевым, М. П. Лапчиком, В. Л. Матросовым, В. М. Монаховым, А. Г. Мордковичем, Н. И. Рыжовой, И. М. Смирновой, В. А. Тестовым, Е. В. Ткаченко, В. А. Федоровым, М. В. Швецким, А. В. Ястребовым и др. Работы названных ученых вносят немалый вклад в дело математической подготовки студентов. Однако до настоящего времени не проводилось систематических исследований, основанных на идеях интеграции образования, играющих важную роль в решении обозначенной проблемы повышения уровня математической подготовки студентов перечисленных факультетов.

Развитие образования возможно на основе интеграции имеющихся и перспективных ресурсов общества (социальных, экономических, управленческих и др.). Поэтому в концепции развития образования важное место отводится развитию «интегрированных инновационных программ, решающих кадровые и исследовательские задачи развития инновационной экономики на основе интеграции образовательной, научной и производственной деятельности» [95, с. 44]. В ходе интеграционных процессов в образовании в настоящее время выделились содержательное, глобальное, организационно-технологическое, институциональное, личностно-деятельностное, социально-педагогическое направления интеграции.

В математической подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов главную роль играет содержательное направление интеграции образования. Действительно, *анализ содержания* подготовки будущих педагогов этих специальностей показывает, что в ней недостаточно используется интеграционный потенциал современной дискретной математики (ДМ), т. е. математики дискретных структур – «структур финитного (конечного) характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений» [128, стб. 207]. Не случайно в свое время один из основоположников информатики В. М. Глушков указывал, что математика в начале XXI в. «будет в большей мере математика дискретных, а не непрерывных величин» [39, с. 122]. Отметим, что ввиду обширности предметного поля дискретной математики в качестве ее синонима используются также термины «конечная математика», «дискретный анализ», «конкретная математика», в которых отражены ее связи с классической («непрерывной») математикой.

В последние десятилетия благодаря уникальным возможностям компьютеров в математике значительно возросла роль работ по дискретизации непрерывных объектов, наблюдается бурный рост самой дискретной математики и ее приложений. Как отмечал выдающийся российский математик А. Н. Колмогоров, «по существу все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного… Мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще» [91, с. 15]. Именно поэтому математические модели были в основном непрерывными. Эту же мысль хорошо сформулировал известный американский специалист по дискретной математике Д. Зайлбергер: «Непрерывный анализ и геометрия являются только вырожденными аппроксимациями дискретного мира… Хотя дискретный анализ концептуально проще непрерывного, технически он, как правило, значительно сложнее. Поэтому в отсутствие компьютеров непрерывная геометрия и анализ были необходимыми упрощениями, позволявшими исследователям добиваться успехов в естественных науках и математике» [Цит. по: 235, с. 109].

Все более углубляется взаимодействие между классической («непрерывной») и дискретной математикой, поскольку во многих науках все чаще встречаются задачи, при решении которых одновременно используются как непрерывные, так и дискретные модели. Это привело к возникновению новой точки зрения на природу математики, ее характер, изменились взгляды на соотношение дискретного и непрерывного в жизни и в науке. Дискретная математика стала играть фундаментальную роль в формировании современной методологии математического моделирования с применением компьютера, усилившей процесс интеграции математики и других наук. Тем самым дискретная математика приобрела важное значение в повышении уровня математической культуры студентов и уровня их математической подготовки. В результате предмет «Дискретная математика» («Основы дискретной математики») с 1995 г. стал постепенно включаться в государственные стандарты высшего профессионального образования по многим специальностям из подавляющего большинства направлений подготовки, а в 2000 г. он был введен в государственные стандарты подготовки учителей математики и информатики.

Как показывает анализ государственных стандартов, *традиционные* для классических, технических, экономических и других университетов разделы дискретной математики, обычно изучаемые в рамках единого курса, проходятся будущими учителями математики, информатики и инженерами-педагогами в рамках *отдельных* дисциплин («Математическая логика», «Дискретная математика», «Теория алгоритмов» и т. д.) либо входят в качестве разделов в другие дисциплины, что в настоящее время уже не соответствует фундаментальной роли современной дискретной математики в подготовке специалистов. Поэтому проблема использования интеграционного потенциала ДМ и, в частности, его применения при реализации межпредметных связей и оптимизации содержания подготовки студентов названных специальностей должна быть предметом особого внимания заведующих кафедрами и преподавателей. Сейчас решением этой проблемы в условиях большой свободы (предоставляемой новыми стандартами подготовки педагогов) в значительной мере занимаются сами вузы, и поэтому эта крайне сложная и трудоемкая проблема должна решаться наиболее оптимальным образом. При этом, несомненно, должно учитываться то обстоятельство, что профессиональная компетентность учителя включает в себя фундаментальные знания в области соответствующей науки, основы которой он преподает в школе, основательную психолого-педагогическую и методическую подготовку, высокую общую культуру.

Дискретная математика играет значительную роль и в решении актуальной проблемы *сотрудничества* учителей математики, информатики и инженеров-педагогов при совместном отборе содержания вариативной математической и профессиональной подготовки студентов колледжей (техникумов). Решение этой проблемы имеет важное значение в углублении интеграции «психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогическая направленность)» рабочих для высокотехнологичных автоматизированных отраслей производства [267, с. 130].

Принимая во внимание изложенное выше, следует подчеркнуть, что в математической подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов обнаруживаются противоречия:

- между предметоцентрированностью обучения, основанного на недостаточном использовании связей математических, естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, и потребностью в использовании идей содержательного направления интеграции образования в углублении связей этих дисциплин;
- фундаментальной ролью дискретной математики в реализации идей содержательного направления интеграции, широким распространением идей и методов дискретной математики в различных областях науки и производства и отсутствием разработанной методической системы обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки;
- сохраняющейся ориентацией образовательных стандартов и учебных программ математической подготовки будущих педагогов этих специальностей на информационно-знаниевую модель обучения и требованием перехода к компетентностной модели, в которой систематическая научно-исследовательская работа студентов выступает важнейшим средством ее реализации;
- увеличением объема содержания необходимой математической подготовки студентов вследствие объективного расширения предмета математики и реальным сокращением числа учебных часов, отводимых на его освоение в условиях действующих образовательных стандартов;
- рассогласованием содержания обучения дискретной математике в школах, колледжах (техникумах) и в вузах на педагогических

направлениях подготовки, что свидетельствует об отсутствии разработанных положений отбора содержания обучения ДМ;

- между узким пониманием профессионально-педагогической направленности математической подготовки студентов, нацеливающим только на обстоятельное овладение ими курсом математики, и потребностью в выработке умений использовать в своей работе идеи и методы современной дискретной и «непрерывной» математики, которые будут обеспечивать широкий, компетентный взгляд на курс математики и информатики в школах, колледжах (техникумах) и возможность творческой организации профильного обучения на основе этих предметов.

Важность разрешения данных противоречий делает актуальным *направление* предпринимаемого исследования, которое характеризуется разработкой эффективной методической системы математической подготовки к профессиональной деятельности будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов в аспекте интеграции образования.

Приведенные противоречия определяют проблему исследования, заключающуюся в необходимости разработки методической системы обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов в аспекте идей содержательного направления интеграции образования.

Разработка методической системы требует проведения целостного педагогического исследования, посвященного изучению влияния идей содержательного направления интеграции образования на разработку методологических и теоретических основ обучения студентов дискретной математике на базе этих идей, выявлению роли дискретной математики в углублении связей математических дисциплин и дисциплин профессионального цикла, в вариативном обучении и организации систематической научно-исследовательской работы студентов.

При выявлении подходов в решении проблемы исследования были сформулированы следующие конкретные задачи:

1) анализ содержательного направления интеграции образования;

2) методологический анализ предметного содержания дискретной математики и ее роли в реализации идей содержательного направления интеграции в математической подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, в реализации межпредметных связей математики и информатики и смежных с ними дисциплин;

3) разработка теоретически обоснованной и экспериментально проверенной методической системы обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов;

4) разработка моделей методической системы обучения дискретной математике, способствующих переходу к компетентностной модели обучения, в которой систематическая научно-исследовательская работа студентов выступает важнейшим средством ее реализации;

5) разработка концепции отбора конкретного содержания обучения дискретной математике на основе разработанных моделей обучения, способствующей преодолению рассогласованности содержания обучения ДМ в вузах на педагогических направлениях подготовки и в колледжах (техникумах);

6) исследование методических аспектов обучения дискретной математике, способствующих обстоятельному овладению студентами математических факультетов, факультетов информатики и факультетов, готовящих инженеров-педагогов, курсами математики и информатики, выработке у них умений использовать в своей работе идеи и методы современной дискретной математики, которые будут обеспечивать широкий, компетентный взгляд на курс математики и информатики в школах, колледжах (техникумах) и возможность творческой организации профильного обучения на основе этих предметов.

Комплексная методика исследования включала группы взаимодополняющих друг друга методов:

- анализа научно-педагогической, психологической, философской литературы и диссертационных исследований;
- теоретического анализа математической и методической литературы по теме исследования;
- теоретического анализа монографий, обзоров и журналов по дискретной математике и дискретному анализу, абстрактной алгебре, ма-

тематической логике, теории алгоритмов, системам компьютерной математики (СКМ) и компьютерным технологиям (КТ) и смежным математическим дисциплинам;

- анализа вузовских и школьных программ, учебников и учебных пособий по дискретной математике для студентов вузов (включая более сорока отечественных и зарубежных пособий);
- анализа организации процесса преподавания математики для будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов;
- выборочных исследований педагогической деятельности преподавателей педагогических вузов, профессионально-педагогических вузов и учителей общеобразовательных и средних специальных учебных заведений и выборочных наблюдений за учебно-познавательной деятельностью учащихся;
- широкого педагогического эксперимента по проверке основных теоретических положений исследования и эффективности методологических и теоретических основ обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов со статистической обработкой результатов эксперимента.

Разработанная научно-методическая концепция обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки в аспекте интеграции образования позволила:

1) создать методическую систему обучения дискретной математике в аспекте интеграции образования, реализующую математическую подготовку будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов к профессиональной деятельности, ориентированную на требования новых государственных образовательных стандартов их подготовки и к содержанию математического образования, и к уровню его усвоения, и к условиям его реализации;

2) охарактеризовать уровни представления содержания обучения дискретной математике студентов вышеуказанных факультетов (уровни общего теоретического представления, учебного предмета, учебного материала);

3) разработать доступный и рациональный подход в изучении дискретной математики в вариативной части дисциплин профессиональ-

ного цикла обучения будущих учителей математики и информатики на уровне бакалавриата, основанный на систематическом применении основных классических комбинаторных конфигураций и их свойств, производящих функций и асимптотических оценок и приближений в решении перечислительных задач дискретной математики и анализе эффективности алгоритмов решения задач математического моделирования;

4) предложить направления методической специализации учителей математики и информатики на уровне магистратуры в зависимости от направлений обучения дискретной математике, существующих в системе высшего образования;

5) исследовать подходы в реализации дискретной линии в интеграции психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогической направленности) инженеров-педагогов на уровне бакалавриата в зависимости от специализации;

6) разработать концепцию отбора содержания дисциплины «Математическое моделирование в профессиональном образовании», предусмотренной еще в базовой части общенаучного цикла Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) подготовки магистров профессионального обучения [265], эта дисциплина по-прежнему играет важную роль в вариативной подготовке (в зависимости от профиля обучения).

Предложенная методическая система обучения студентов педагогических направлений подготовки может быть внедрена в педагогическую практику различных высших педагогических учебных заведений. Она также может оказаться полезной преподавателям колледжей (техникумов) и училищ, занимающимся подготовкой высококвалифицированных специалистов среднего звена и рабочих для высокотехнологичных автоматизированных областей промышленного производства (машиностроения, энергетики и др.).

Данная работа написана на основе многолетнего опыта автора в преподавании математики в высших учебных заведениях (Российском государственном профессионально-педагогическом университете, Уральском государственном педагогическом университете) и в средних общеобразовательных учреждениях г. Екатеринбурга. Различные аспекты и результаты исследований, освещенные в книге, неоднократно докладывались автором и обсуждались более чем на пятидесяти научных конференциях и семинарах разного уровня. Выдвинутые в работе положения, методические рекомендации внедрены в учебный процесс высших учебных заведений, колледжей (техникумов) и школ Екатеринбурга, Кирова, Самары, Вологды и других городов.

Глава 1

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ В АСПЕКТЕ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

В главе анализируются основные подходы в содержательном направлении интеграции высшего педагогического образования, предмет и функции современной дискретной математики и ее роль в современной математической культуре и модельной методологии. Исходя из этого характеризуется интеграционный потенциал ДМ в обучении математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

1.1. Понятие интеграции, ее уровни и направления в педагогическом образовании

Как известно, в результате интеграционных процессов в образовании в настоящее время выделились содержательное, глобальное, организационно-технологическое, институциональное, личностно-деятельностное, социально-педагогическое направления интеграции, ставшие основой развития теории интеграции образования [9, 54, 84, 211, 275], но в педагогической литературе до сих пор не сформировалось однозначной трактовки понятия интеграции образования, о чем свидетельствует использование однокоренных терминов «интегрированные» и «интегративные» (например, «интегрированные курсы» и «интегративные курсы», «интегрированный урок» и «интегративный урок» и т. д.). Это порождает определенное противоречие между органически цельной природой процесса образования и наличием в настоящее время мощной системы дезинтегрированного образования. Как отмечает Н. К. Чапаев, в трактовках понятия интеграции часто наблюдаются редукции этого понятия к одной из его частей – дидактической, а нередко – методической [275]. В то же время для значительного числа работ характерен переход с общих философских положений, касающихся интеграции, на педагогическую область.

Любое научное понятие диктует способ мысленного воспроизведения какого-либо объекта, явления или процесса, которое оно определяет. Природа понятия интеграции такова, что оно является понятием об образовании как таковом. Поэтому интеграция может быть выражена не столько в терминах дидактики, методики обучения, философии, сколько через понятие современной культуры, отражением которой является образование. По мнению А. Я. Данилюка, интеграция есть понятие, в котором представлен фундаментальный организационный принцип образования как целостного феномена культуры [54]. Поэтому он рассматривает интеграцию как сложный вид коммуникации, в нашем случае – это организация в образовательном процессе многосторонних связей различных предметов, изучаемых или не изучаемых будущими педагогами. В результате в образовании возникли различного рода интегрированные (междисциплинарные) программы, курсы, занятия (уроки), экзамены, модульное обучение, метод проектов и др.

Интеграция в педагогическом образовании исследовалась на трех основных уровнях ее функционирования – методологическом, теоретическом и практическом. В отечественной педагогической практике рассматривались проблемы методологии и методики объединительных процессов в педагогике, в том числе межпредметных связей (Г. И. Батурина, В. С. Безрукова, Н. М. Берулава, В. И. Загвязинский и др.); аспекты интеграции производства и образования, научно-технической революции и образования (В. Б. Миронов, В. Г. Осипов, В. Н. Турченко и др.); интеграции педагогики и психологии (Э. Ф. Зеер, К. А. Зимняя, В. П. Зинченко и др.); педагогики и социологии (Р. Г. Гурова, Г. Е. Зборовский и др.). Зарубежными исследователями чаще всего анализировались интеграционные процессы в области содержания образования (А. Блюм, Г. Винтроп и др.), психофизиологические основы учебно-познавательной деятельности (Дж. Брунер, Ж. Пиаже и др.), природа интеллекта (Г. Гарднер, Дж. Кэролл, Дж. Томпсон и др.) и т. д.

В результате интеграции образования расширились его функции, возникли интегрированное обучение и интегрированные технологии, появились новые средства осуществления интеграции, а образовательная среда стала базой интеграции знаний и развития гуманистических отношений.

В нашем исследовании важную роль играет то, что во всех интеграционных процессах в образовании основными принципами интеграции являются следующие [54]:

1) диалектическое единство интеграции и дифференциации;

2) антропоцентризм;

3) культуросообразность.

Действительно, во-первых, в ходе своего исторического развития образование, отвечая на вызовы современного общества, с неизбежностью «пульсирует»: периоды усиленной дифференциации сменяются периодами преимущественной интеграции.

Во-вторых, «антропоцентризм – это особое, исторически складывающееся отношение педагога к образовательному процессу, в котором центральное место и активная роль отводится ученику» [54, с. 265]. В отличие от этого, в традиционной дидактике педагог занимает центральное место в процессе обучения, его главная задача – передать обучаемому определенную «сумму» научных знаний.

В-третьих, важность принципа культуросообразности в интеграции образования объясняется следующим положением. Фундаментализация, интеграция, дифференциация, гуманитаризация, компетентностный подход, внедрение информационно-коммуникационных технологий являются широко известными тенденциями модернизации современного образования, в том числе и математического; главной ее целью является гармоничное развитие личности и творческих способностей человека, повышение его интеллектуального и культурного потенциала. Однако анализ разного рода диспропорций между указанными тенденциями дает основание утверждать, что в модернизации образования и, в частности, в устранении этих диспропорций важную роль начинает играть культурологический подход, в основе которого и лежит принцип культуросообразности как «один из важнейших принципов современного образования» [53, с. 3].

Таким образом, еще раз заметим, в результате интеграционных процессов в настоящее время выделились содержательное, организационно-технологическое, институциональное, личностно-деятельностное, социально-педагогическое и глобальное направления интеграции образования [84].

1.2. Анализ содержательного направления интеграции образования

Из всех сформировавшихся направлений интеграции образования проанализируем методологию содержательного направления интеграции образования, играющего ведущую роль в настоящем исследовании.

Как показывает анализ литературы, посвященной интеграции образования [9, 54, 84, 211, 275 и др.], содержательное направление является наиболее известным и разработанным направлением, основными подходами которого являются:

- интеграция на основе актуализации межпредметных и внутрипредметных связей через внедрение различного рода интегрированных программ, интегрированных курсов, модульного обучения, метода проектов и пр.;
- интеграция на основе фундаментализации образования;
- интеграция на основе компетентностного подхода.

Охарактеризуем основные особенности этих подходов, значимые для настоящего исследования.

1.2.1. Интеграция на основе актуализации межпредметных и внутрипредметных связей

Русский мыслитель Д. И. Писарев в работе «Наша университетская наука» в 1863 г. писал о системе образования того времени: «…различные предметы не связываются в общий цикл знаний, не поддерживают друг друга, а стоят каждый сам по себе, стараясь вытеснить своего соседа… Каждый предмет бывает то победителем, то побежденным; история их бесконечных раздоров составляет историю умственной жизни каждого гимназиста; мозг ученика – вечное поле сражения, а пора экзаменов – время самых истребительных войн между отдельными предметами» [191, с. 131].

Прошло уже полтора века, но обрисованная Д. И. Писаревым ситуация кардинально не изменилась, несмотря на определенные успехи в реализации межпредметных связей в процессе подготовки в средней и высшей школе.

Термин «межпредметные связи», по-видимому, впервые был введен в науку в 1962 г. Ю. А. Самариным [212]. Однако признание и распространение он получил не сразу. Данное понятие отсутствует в «Педагогической энциклопедии» (1964–1968), нет его и в учебных пособиях по педагогике, изданных до конца 1960-х гг.

Впервые межпредметные связи как подход были рассмотрены в 60-е гг. XX в. в научно-исследовательском институте педагогики Академии педагогических наук РСФСР под руководством Б. Г. Ананьева и Ш. Н. Ганелина. Это понятие было изучено с позиции его роли в формировании системы знаний и основ научного мировоззрения. В результате, принимая во внимание принцип преемственности, были раскрыты пути последовательного осуществления взаимосвязей между ведущими идеями и понятиями смежных курсов.

В 1970-х гг. большинство исследователей характеризовали межпредметные связи как принцип дидактики: «Межпредметные связи, отражая в учебном процессе связи реальной действительности, являются выражением закономерности объективного мира и в силу своего философского и дидактического значения определяют содержание, методы и формы обучения… Поэтому есть все основания считать межпредметные связи одним из принципов советской педагогики (дидактики)» [118, с. 36]. Но стоит отметить, что межпредметные связи устанавливаются между предметами и полностью от них зависят, поэтому межпредметность является средством развития предметности как стремление качественно усовершенствовать процесс подготовки специалистов и при этом не потерять ничего из изучаемой ими сути предметов. Поэтому, как отмечает А. Я. Данилюк, межпредметность нельзя считать принципом дидактики в противовес высокому дидактическому статусу предметности [54].

В 1970–80-х гг. проблема межпредметных связей становится одной из центральных проблем дидактики. Такое внимание к ней вызвала дискуссия, связанная с проведенным под руководством В. Н. Федоровой теоретико-экспериментальным исследованием и появлением первой монографии, посвященной данной проблеме [268]. В результате данного исследования было выявлено содержание взаимосвязей, разработаны классификации межпредметных и внутрипредметных связей на уровне знаний (язык, теория, приложения) [139], на уровне видов деятельности (методы обучения, организационные формы мыслительной, речевой и других видов деятельности обучающихся) [15], на уровне методов научного исследования и научного мышления, с позиции целостности процесса обучения (содержательно-информационные, операционно-деятельностные, организационно-методические, межпредметные связи) [122]. Важным итогом исследований стало признание того факта, что реализация межпредметных связей представляет собой средство интеграции, порождающее обобщенные системы как междисциплинарных, так и внутрипредметных знаний.

В нашем исследовании важно, в каких аспектах проявляется действие межпредметных связей и каково их назначение. А. И. Еремкин выделяет диалектические, логические, психологические и дидактические функции связей [65]. Основой их типизации, по его мнению, могут служить *содержание наук, учебные знания и деятельность по их усвоению*. При этом «под путями осуществления межпредметных связей следует понимать способы и средства, с помощью которых преподаватель создает условия для реализации взаимосвязанного межпредметного обучения и соответствующим образом организует мыслительную деятельность студентов. По своему значению понятие “пути осуществления связей” приближается к понятию “методы”, поскольку и методы, и пути осуществления связей предназначены для достижения определенных учебно-воспитательных целей. И те, и другие предполагают понимание цели, осознание ее достижения, а также выбор средств» [65, с. 103]. В соответствии с этим А. И. Еремкин выделяет информационно-рецептивный, репродуктивный, исследовательский и проблемный пути формирования межпредметной структуры учебных знаний.

Интерес к межпредметным связям повышается; в настоящее время данный термин уже широко используется в педагогических исследованиях. Вместе с тем педагоги так и не пришли к единству во взглядах на него. Одним из главных результатов исследования межпредметных связей стал вывод о том, что реализация межпредметных (и внутрипредметных) связей должна основываться на единстве содержательной и процессуальной сторон обучения, лежащем в основе протекания *объединительных процессов* по всем элементам учебно-воспитательного процесса (содержание, формы, методы, средства и др.). В свою очередь, эти объединительные процессы играют фундаментальную роль в системе подготовки будущих специалистов, в том числе и педагогов, что является главным аспектом настоящего исследования.

Другим не менее важным результатом является теоретическое обоснование интегративной природы деятельности по внедрению в обучение межпредметных и внутрипредметных связей. Для данного исследования важно то, что межпредметные связи стали рассматриваться как подход, на его основе создаются *обобщенные системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний*, имеющих большое значение в подготовке будущих учителей. Основной целью интегрированного междисциплинарного содержания профессионально-педагогической подготовки стало развитие их способностей решать педагогические проблемы различной сложности на основе обобщенных систем междисциплинарных знаний.

Интеграция на основе актуализации межпредметных и внутрипредметных связей стала первой «интеграционной идеей», появившейся в образовании. В дальнейшем идеи интеграции стали развиваться в рамках фундаментализации образования, затем – развивающего и личностно ориентированного подходов. В настоящее время осуществляется переход к компетентностному подходу, наиболее выпукло отражающему характерные особенности современного образования.

1.2.2. Интеграция на основе фундаментализации образования

Ректор Московского государственного университета (МГУ) В. А. Садовничий называет *эталонным* лишь *фундаментальное научное образование*, главной целью которого является распространение научного знания как части мировой культуры [210]. Различные трактовки феномена фундаментализации «группируются» вокруг следующих направлений или тенденций [62, 63]:

1) **интеграция (сближение) науки и образования**, которая предполагает установление связей между ними;

2) универсализация знаний, умений, навыков, которая обусловливает **выделение структурных единиц научного знания**, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений;

3) **формирование общекультурных основ** в процессе обучения, при этом термин «общекультурные» понимается широко – в соответствии с объемным спектром трактовок понятия «культура».

Еще раз заметим, что в универсализации знаний важную роль играют межпредметные связи как подход, на основе которого создаются обобщенные системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний. В свою очередь, при формировании общекультурных основ в процессе обучения важную роль в последние десятилетия начинает играть культурологический подход, в основе которого – принцип культуросообразности как один из важнейших принципов интеграции современного образования.

В работах В. А. Тестова [237, 238], которые «вписываются» в рамки содержательного направления интеграции образования, проблема фундаментальности современного образования обсуждается с позиций характеристики концепций содержания образования. Автор подчеркивает, что в педагогике отсутствует единое понимание термина «фундаментальность образования», к тому же он толкуется весьма противоречиво. Отмечаются, в частности, следующие направления трактовки понятия:

1) фундаментальность образования предусматривает более углубленную подготовку по заданному (в нашем случае педагогическому)

направлению, изучение сложного круга вопросов по соответствующим областям науки;

2) фундаментальность образования предстает как сочетание разностороннего гуманитарного и естественнонаучного знания, возникающее вследствие изучения определенных вопросов по основополагающим областям знаний как соответствующего направления науки, так и общеобразовательных дисциплин (в нашем случае еще и инженерного знания в подготовке инженеров-педагогов);

3) фундаментальность высшего образования являет собой соединение научного знания и образовательного процесса, в том числе и *объединительного процесса* по всем элементам учебно-воспитательной работы, что уже отмечалось в подп. 1.2.1.

Последняя трактовка соответствует ранее отмечавшейся позиции В. А. Садовничего в отношении этого важнейшего понятия. В связи со вторым направлением трактовки рассматриваемого понятия показательно мнение авторов учебного пособия, высказанное, правда, в отношении общего образования: «Преодолеть дегуманизацию общего образования позволяет принцип *фундаментализации его содержания*. Он требует интеграции гуманитарного и естественнонаучного знания, установления преемственности и междисциплинарных связей, опоры на осознание учащимися сущности методологии познавательной и практической преобразующей деятельности. Обучение в этой связи предстает не только как способ получения знания и формирования умений и навыков, но и как средство вооружения школьников методами добывания новых знаний, самостоятельного приобретения умений и навыков» [221, с. 224].

В. А. Тестов обосновывает особенно важное в данном исследовании положение о том, что «фундаментальность образования означает направленность содержания образования на методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала обучаемого, обеспечивающие качественно новый уровень его интеллектуальной и эмоционально-нравственной культуры, создающие внутреннюю потребность в саморазвитии и самообразовании на протяжении всей жизни человека, способствующие адаптации личности в быстроизменяющихся социально-экономических и технологических условиях» [238, с. 8].

«Методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры» характеризуются в работе Н. В. Садовникова как цельное, обобщающее знание, которое стало бы «ядром и основой всех полученных студентом знаний, которое объединяло бы получаемые в процессе обучения знания в единую мировоззренческую систему» [208, с. 12].

В быстро меняющихся социально-экономических и технологических условиях современного образования, характеризующегося лавинообразным распространением информационно-коммуникационных технологий, довольно часто порождающих много бесполезной, искаженной и даже ложной информации («информационных шумов»), «резкий крен от фундаментальности и научности в подготовке студентов в сторону прагматизма грозит серьезными последствиями» [129, с. 89].

1.2.3. Интеграция на основе компетентностного подхода

При рассмотрении принципа интеграции на основе компетентностного подхода будем исходить из классификации, примененной в проекте TUNING, в котором приняли участие более 100 университетов из 16 стран, подписавших Болонскую декларацию. В соответствии с этой классификацией были выделены две основные группы компетенций – общие и специальные (профессиональные). К общим компетенциям относят прежде всего когнитивные и методологические способности, в частности способность принятия решений и разрешения проблем.

В подготовке выпускников высших профессиональных образовательных организаций особенно важны профессиональные компетенции специалиста. Содержание этого понятия известными учеными раскрывается различным образом, например [64, с. 19]:

- как уровень образованности и общей культуры личности, характеризующейся овладением теоретическими средствами познавательной и практической деятельности (Б. С. Гершунский);

- психическое состояние, позволяющее действовать самостоятельно и ответственно; обладание человеком способностью и умением выполнять определенные трудовые функции (В. М. Монахов);
- как система знаний, умений и навыков, профессионально значимых качеств личности, обеспечивающих возможность выполнения профессиональных обязанностей определенного уровня (Н. И. Запрудский).

В настоящее время достаточно трудная и неоднозначная проблема определения содержания понятия профессиональных компетенций, в том числе и оснований их разграничения, классификации, не находит своего окончательного решения. Несмотря на все методологические и другие трудности в реализации компетентностного подхода, в ФГОС ВПО по каждой специальности все же был выработан общий подход в разделении ключевых компетенций на общекультурные и профессиональные.

Важность интеграции на основе компетентностного подхода, особенно значимой в развитии профессиональных качеств личности будущего педагога, отражена как в прежнем ФГОС ВПО, так и в новом ФГОС высшего образования (ВО) подготовки педагогов-бакалавров. Соответственно, общекультурная компетенция рассматривается как владение «культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения» (ОК-1) [262, с. 5], как способность «к самоорганизации и самообразованию» (ОК-6) [253, с. 6]. Для формирования общекультурных компетенций каждому специалисту в эпоху математизации наук необходимы уже отмечавшиеся в подп. 1.2.2 «методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры» [238].

В свою очередь, для формирования профессиональных компетенций, таких как способность «проектировать образовательные программы» (ПК-8), «проектировать индивидуальные образовательные маршруты обучающихся» (ПК-9) [253, с. 7], наряду с «долгоживущими и инвариантными элементами человеческой культуры» необходимо упоминавшееся ранее умение сочетать разносторонние гуманитарные и естественнонаучные знания и обобщенные системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний в соответствующей предметной области (см. подп. 1.2.1), что особенно важно в образовательной сфере (организация и управление) [192, 193].

Значимость интеграции на основе компетентностного подхода отражена как в ФГОС ВПО, так и в ФГОС ВО подготовки педагогов-бакалавров профессионального обучения в формулировке общекультурных компетенций: осознание «культурных ценностей, понимание роли [математической] культуры в жизнедеятельности человека» (ОК-1), способность «выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессионально-педагогической деятельности» (ОК-16) [264, с. 7]; в ФГОС ВО – аналогичное определение (ОПК-2) [257 с. 8], а также упоминается готовность «к участию в исследованиях проблем, возникающих в подготовке рабочих и специалистов среднего звена» (ПК-12) [257, с. 9] и др.

Отметим, что анализ ФГОС ВПО подготовки педагогов-магистров и педагогов-магистров профессионального обучения также свидетельствует о важности интеграции их подготовки на основе компетентностного подхода. Например, в структуре основной образовательной программы ФГОС подготовки педагогов-магистров профессионального обучения были предусмотрены дисциплины «История и методология научного исследования» и «Математическое моделирование в профессиональном образовании», в процессе изучения которых необходим ряд ранее уже сформированных у студентов общекультурных и профессиональных компетенций (среди них и некоторые уже упоминавшиеся) [265].

Дальнейший системный анализ общекультурных и профессиональных компетенций педагогов показывает их «интегральный» характер: «Педагогическая компетенция – интегральное качество личности учителя, проявляющееся в общей способности и готовности ее к самостоятельной и успешной деятельности в условиях реальной ситуации, основанное на знаниях, умениях, навыках, опыте, ценностях и склонностях; совершенствующееся в процессе непрерывного образования и саморазвития» [121, с. 59].

В настоящее время в педагогическом сообществе идут дискуссии по поводу относительно новых понятий «профессионально-педагогическая компетенция» и «компетентность», возникших, по-видимому, в связи с широко известным принципом профессионально-педагогической направленности подготовки педагогов [134]. Ряд исследователей (В. А. Адольф, Н. В. Кузьмина, А. К. Маркова, Е. Л. Пупышева, Г. С. Саволайнен, Л. В. Шкерина и др.) справедливо выделяют в профессионально-педагогической компетентности различные ее виды: методологическую, предметную, психолого-педагогическую, социокультурную, методическую и др. [241, с. 65].

Как известно, существуют различные подходы к исследованию понятия методической компетентности будущего учителя. Многие исследователи понимают под этим понятием развернутую систему знаний по вопросам конкретного построения обучения той или иной дисциплине, способность распознавать и решать различные методические задачи, возникающие в ходе педагогической деятельности, и др.

В настоящее время представляется наиболее важным аксиологический подход в определении понятия «методическая компетентность», отражающий его ценность в повышении профессионального уровня учителей математики и в подготовке будущих учителей математики в условиях вариативности современного образования: «Компетентным следует называть такого учителя, который хорошо *владеет методикой обучения* и к тому же четко определил свое отношение к различным *методическим системам* и обладает *индивидуальным стилем деятельности*» (курсив мой. – *Е. П.*) [133, с. 10–11].

В исследовании методологии обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки необходим системный анализ истоков формирования ДМ как области науки, рассмотрение ее *предмета, функций и роли в содержательном направлении интеграции образования.*

1.3. Предмет и функции современной дискретной математики

1.3.1. Системный анализ истоков формирования современной дискретной математики

Математика и совершаемая на ее основе компьютерная «революция» в последние три десятилетия стали объектами многочисленных исследований философов, психологов, педагогов и других ученых [135, 137, 204, 205, 209, 228]. Исследование объекта и предмета современной математики служит основой для выявления разнообразных аспектов процесса математизации наук, под которым понимают процесс проникновения разнообразных математических методов в конкретные науки.

Для исследования гносеологических истоков формирования дискретной математики как области науки необходимо выявить те объективные основы в историческом и логическом развитии математики, которые привели к ее формированию. Объективные основы формирования ДМ выявляются в процессе краткого исторического и логического анализа *математического моделирования* в рамках всей современной модельной методологии как «связующего звена между научным знанием высокого уровня общности и конкретными задачами, требующими для своего решения приложения этого знания» [137, с. 4].

Ключевым в математическом моделировании является понятие «модель», происходящее от латинского *modulus*, что значит «образец». Оно возникло в античные времена в связи с обработкой металлов литьем. В ходе развития науки и техники это понятие постоянно трансформировалось. В современном понимании термин «модель» обозначает необозримое множество материальных и идеальных объектов, начиная с образцов одежды и обуви и заканчивая информационными моделями. Любая модель несет информацию о свойствах или характеристиках изучаемого объекта (оригинала), существенную для решаемой субъектом задачи.

Модели различаются в зависимости от классов решаемых на их основе задач, классов изучаемых на их основе объектов и формы представления информации для решения задач [137]. Так, по форме представления информации выделяют материальные и идеальные модели. К идеальным относятся модели, существующие в сознании человека, описываемые, как правило, на языке математики в виде тех или иных научных законов. Они подразделяются на неформализованные, частично формализованные и вполне формализованные. Вполне формализованными являются *математические* и информационные модели. С философской точки зрения математические модели представляют собой «описания объектов с помощью математических символов» [204, с. 66]. В математике модель определяется как множество с заданным набором операций и отношений [85, 123]. При этом *тип* операции и отношения (т. е. способ определения или задания, арность, свойства и т. д.) имеет такое же важное значение в классификации математических моделей, как и атомный вес элемента в периодической системе элементов Менделеева. Например, математики, изучающие алгебраические операции и их свойства, называют себя *групповиками, полугрупповиками, кольцевиками, решеточниками* и т. д. в зависимости от конкретного типа алгебраических операций и их свойств, лежащих в основе их исследований. Отметим, что понятие отображения и его разновидности (гомоморфизм, изоморфизм и т. д.) играют важнейшую роль при классификации или описании всех моделей из изучаемого класса.

Появление первых нетривиальных математических моделей было обусловлено развитием классической механики. Благодаря этим моделям, описываемым на языке математического анализа, были получены впечатляющие результаты – открытие И. Ньютоном законов небесной механики и, как следствие, новых планет Солнечной системы.

Исследования явлений живой природы (в частности, дарвиновская теория естественного отбора) привели позднее к появлению моделей теории вероятностей в биологии. Вероятностные математические модели проникли и в физику. Благодаря им созданы молекулярно-кинетическая теория газов, а затем статистическая и квантовая механика. Квантовая теория вызвала качественное изменение естественнонаучных представлений о причинных связях и закономерностях объективно существующего мира.

На этом этапе развития математики возникает особый *стиль* мышления, характерный для начавшегося исторического периода высокой эффективности математического моделирования в изучении явлений природы и общества. Математическое моделирование становится инструментом открытия новых закономерностей, которые нельзя установить экспериментально. Открытие «на кончике пера» П. Дираком частицы позитрона и Х. Юкавой частицы мезона является ярким тому подтверждением. Наступил этап опережающего развития математики по отношению к потребностям других наук и техники. Причем важным является то, что формализованный язык математики был *расширен* формализованным на его основе содержанием отличных от него областей знания: квантовой и статистической механики и биологии. В результате этого возникла следующая цепочка математического моделирования: реальная задача – перевод задачи на адекватный математический язык – разработка математической модели решения задачи.

Следующий этап в математическом моделировании связан со становлением математической логики, первоначальное предназначение которой состояло в исследовании основ самой математики. Благодаря трудам целой плеяды выдающихся математиков (П. Бернайса, Г. Вейля, К. Геделя, Д. Гильберта, А. Н. Колмогорова, А. Черча и др.) были достигнуты основополагающие результаты: логика стала строиться в виде аксиоматической теории, на основе формализованного языка логики (что принципиально важно) возникла тенденция к дальнейшей *логической формализации всей науки* (образно говоря, математической «стандартизации» любого научного исследования). На основе интеграции идей математической логики и абстрактной алгебры в 1930–40-е гг. в трудах выдающихся математиков А. И. Мальцева, Э. Поста, А. Робинсона, А. М. Тьюринга и других ученых были заложены основы теории математических моделей и алгоритмов, что ознаменовало *начало* эпохи всеобщей компьютеризации.

Созданные воображением их создателей на бумаге машины Э. Поста и А. М. Тьюринга и разработанные на этой теоретической основе в 1940–50-х гг. первые электронно-вычислительные машины (ЭВМ) дали мощнейший толчок развитию математического моделирования. Оказалось, что предназначенные для автоматизации счета, они могут быть универсальными преобразователями информации и выполнять не только вычислительные, но и логические операции, следовательно, обрабатывать самую разнообразную научную информацию (экономическую, социологическую и др.). Благодаря ЭВМ стало возможно управлять технологическими процессами, осуществлять планирование и управление, моделировать процессы живой природы. Проверка гипотез путем проведения реального эксперимента с изучаемым объектом или явлением (натурный эксперимент), которая зачастую была невозможна, стала все чаще проводиться с помощью математической модели и дальнейших расчетов на ЭВМ. Постепенно в обиход вошло понятие *полной цепочки (этапов)* использования компьютера в решении задач [103]: реальная задача – перевод задачи на адекватный математический язык – разработка математической модели решения задачи – составление алгоритма решения и соответствующей ему программы для ЭВМ – симуляция решения – анализ результатов. Впервые стал возможен так называемый машинный, или вычислительный, эксперимент, который и стал *гносеологической причиной* появления и формирования дискретной математики.

В дальнейшем основы предмета ДМ углублялись как в процессе развития самой математики, так и в процессе совершенствования математического моделирования. В результате этого в 60-е гг. XX в. произошла повсеместная замена натурного эксперимента на математический. Для осуществления такого эксперимента нет необходимости изготовлять натурную экспериментальную установку. В процессе математического эксперимента на основе анализа промежуточных результатов первоначальная математическая модель изучаемого объекта заменяется последующей, более точно описывающей объект. Серия заменяющих друг друга моделей позволяет найти модель, наилучшим образом отображающую исследуемый объект. Поэтому очевидное преимущество математического эксперимента перед натурным заключается в его большей точности, дешевизне и доступности.

Распространившийся во всех областях производства математический эксперимент послужил основной причиной совершенствования ЭВМ, их программного обеспечения, в результате чего расширялись возможности их использования в математическом моделировании. Еще большую роль в исследованиях стало играть построение полной цепочки использования компьютера. Концептуально-образующими терминами ДМ стали «математический язык», «математическая модель», «алгоритм». Процесс вычисления на ЭВМ является дискретным, поэтому слово «дискретный» в названии «дискретная математика» подчеркивает ее фундаментальную роль в математическом моделировании с использованием компьютеров.

Наряду с понятиями «математический язык», «модель», «алгоритм» такие ключевые понятия ДМ, как «отображение», «изоморфизм», «алгебраическая операция», «высказывание», «предикат», «частичный порядок», являются *фундаментальными* для всей математики, играют объединяющую роль внутри самой математики и лежат в основе *обобщенной системы междисциплинарных (и внутрипредметных) знаний*, имеющих важное значение при интеграции обучения на основе реализации межпредметных связей в подготовке будущих учителей (см. подп. 1.2.1). При этом важно, что благодаря понятию математической модели динамические, стохастические, топологические, порядковые, алгебраические модели (структуры) стали синонимами соответствующих областей *единого* математического «пространства». Отображение одной модели на другую является эффективным средством решения внутриматематических задач – от доказательства справедливости той или иной теоремы или формулы до проверки непротиворечивости аксиоматики вновь разрабатываемой математической теории. Примеры фундаментальности понятий дискретной математики трудно перечислить.

В настоящее время происходит процесс математизации наук, выражающийся в применении математических методов для поиска новых закономерностей в науках, построения более глубоких теорий и в особенностях создания специальных формализованных языков наук [23]. При этом моделирование определяет суть и направления современной математизации наук, а дискретная математика наряду с классической «непрерывной» математикой является основой математического моделирования с использованием компьютера во многих областях исследований и поэтому важнейшим звеном математического образования. Таковы гносеологические истоки формирования современной ДМ.

1.3.2. Предмет современной дискретной математики

1.3.2.1. Об онтологии дискретной математики

О предмете дискретной математики можно говорить как о модели или об особой стороне реального объекта этой науки, «замещающей» исследуемый объект. Так же, как и предмет методики обучения математике [215, с. 26], предмет дискретной математики является самостоятельной научной областью со своими методологией, теорией, приложениями и концепциями. При этом любой предмет, в том числе и предмет ДМ, как сторона объекта, всегда онтологичен, т. е. может быть выражен в общих категориях и закономерностях бытия. Поэтому под предметом науки понимают зафиксированные в опыте и включенные в процесс практической деятельности стороны, свойства и отношения исследуемого объекта данной отрасли знания [142].

Как уже установлено ранее, главным элементом онтологии дискретной математики является понятие полной цепочки использования компьютера в математическом моделировании, которая и стала *объективной основой* появления и формирования рассматриваемой науки. Понятия математического языка, модели, алгоритма и др., являющиеся терминологической основой указанной цепочки, существовали и ранее. Но они стали ключевыми понятиями дискретной математики только после того, как появились первые ЭВМ, была реализована полная цепочка использования компьютера.

Формирование предмета ДМ неразрывно связано со становлением «кибернетики как науки об общих закономерностях управления в технических системах и живой природе» [204, с. 43]. В результате развития кибернетики современная дискретная математика стала математической основой информатизации и, в частности, моделирования с использованием компьютеров. При изучении (моделировании) сложных промышленных, социальных и других систем, разработке методов управления ими «роль дискретного чрезвычайно велика» [90, с. 4].

В процессе становления предмета ДМ существенно различались его трактовки, что нашло отражение в появлении новых терминов: «конечная математика» [86], «дискретный анализ» (по аналогии с функциональным анализом) [128], «компьютерная математика» [109].

Для дальнейшего выявления специфики и содержания предмета дискретной математики кратко охарактеризуем данные термины.

1.3.2.2. Конечная математика

Редактор русского издания книги Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» И. М. Яглом в предисловии к ней пишет: «Возникшие в последние два десятилетия (1945–1965 гг. – *Е. П.*) новые пути приложения математики, связанные с комплексом идей и методов, ныне объединяемых собирательным термином «кибернетика», повлекли глубокие изменения в самой математической науке. Они не только вызвали к жизни новые большие направления теоретической математики… но и способствовали изменению установившихся взглядов на ранее сложившиеся разделы. При этом наиболее существенным здесь является, по-видимому, то, что разделы математики, не связанные с представлением о бесконечных множествах, пределах и непрерывности, представляются нам теперь гораздо более содержательными и важными, чем это думали математики XIX в. или первой половины XX в. Если, начиная с XVII в., главенствующее положение в математике занимало изучение гладких функций непрерывно меняющегося аргумента, являющееся основой всех приложений математики к физике и к технике, то сегодня (в 60-е гг. – *Е. П.*) можно говорить о возрождении интереса к так сказать “доньютоновской” или “конечной” математике, оперирующей лишь с конечными множествами; при этом возникли новые подходы к этой ветви математики, идущие в основном от математической логики.

Этот поворот в науке связан в первую очередь с появлением универсальных электронных цифровых вычислительных машин… Прилагательное “цифровая” в названии этих машин подчеркивает принципиально дискретный, “конечный” их характер, связанный со специфическими особенностями используемых в них электронных устройств» [86, с. 5].

Основное содержание книги формировалось под влиянием бихевиоризма, поэтому в него вошли следующие темы (главы): «Составные высказывания», «Множества и подмножества», «Разбиения и сочетания», «Теория вероятностей», «Векторы и матрицы», «Линейное программирование» и «Теория игр», а также тема, посвященная бихевиористским проблемам. Напомним, что сторонники бихевиоризма ставят во главу угла те факты поведения человека и животных, которые поддаются непосредственному наблюдению. При этом считается, что действующие в человеческом обществе законы могут быть выведены из наблюдений над поведением людей в различных ситуациях. Наряду с отмеченной «бихевиористской» тематикой содержание книги в значительной мере определялось особенностями математического моделирования в социологии, генетике, психологии, антропологии, экономике.

Таким образом, дискретная математика отождествлялась с той конечной математикой, которая необходима для развития кибернетики и математического моделирования (в гуманитарной области) на ЭВМ.

1.3.2.3. Дискретный анализ

В «Математической энциклопедии» дискретный анализ определяется как «область математики, занимающаяся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений» [128, т. 2, стб. 207]. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, например, конечные группы, конечные графы, а также некоторые математические модели преобразователей дискретной информации, конечные автоматы, машины Тьюринга и др.

В математике допускается расширение предмета дискретного анализа до произвольных дискретных структур, в результате чего приходят к дискретной математике, отождествляемой с дискретным анализом. К числу таких структур могут быть отнесены некоторые алгебраические системы, бесконечные графы, некоторые виды вычислительных сред (например, однородные структуры и т. п.). Отмечается, что «в качестве синонима понятий дискретного анализа и дискретной математики иногда употребляется термин “конечная математика”» [128, т. 2, стб. 208].

Во избежание двусмысленности подчеркнем, что в данной работе, как и в энциклопедии, дискретный анализ понимается в широком смысле, включающем дискретную математику.

«В отличие от дискретного анализа, классическая математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь и, в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает – дискретную или непрерывную. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой – часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих одновременно как дискретными, так и непрерывными свойствами» [128, т. 2, стб. 208]. Необходимость исследования таких моделей привела к появлению понятия конкретной математики [49]. Слово «*concrete*» здесь используется не в своем обычном значении (это не только «конкретный», но и «бетонный»), а как комбинация слов «*contunious*» и «*discrete*», что символизирует единство и гармонию методов непрерывного и дискретного анализа [202]. Это особенно важно в стохастическом и численном моделировании. К. К. Рыбников считает, что наряду с изучением обычных курсов высшей математики необходимо формировать культуру численного дискретного моделирования, основанного на связях непрерывного и дискретного начал математических исследований [206].

«Дискретный анализ представляет собой важное направление в математике, имеющее характерные для него предмет исследования, методы и задачи, специфика которых обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа в дискретном анализе от основополагающих понятий классической математики – предела и непрерывности – и (в связи с этим) тем, что для многих задач дискретного анализа сильные средства классической математики оказываются, как правило, мало приемлемыми» [128, т. 2, стб. 208]. Поэтому с помощью термина «дискретность» (как антипода термина «непрерывность») впервые стали выделять дискретный анализ как некую объективно существующую область математики, необходимую в физических и технических исследованиях.

К разделам дискретного анализа в первую очередь отнесены комбинаторный анализ, теория графов, теория кодирования и декодирования, теория функциональных систем и некоторые другие. «Часто под термином “дискретный анализ” (в предположении, что его предмет исчерпывается конечными структурами) понимается именно совокупность перечисленных дисциплин. За счет расширения понимания его круга вопросов возможно и более широкое толкование дискретного анализа. С этой точки зрения к дискретному анализу могут быть *отнесены* также как целые разделы математики, например, математическая логика, так и части таких разделов, как теория чисел, алгебра, вычислительная математика, теория вероятностей и некоторые другие, в которых изучаемый объект носит дискретный характер» [128, т. 2, стб. 208]. Важную роль в зарождении дискретного анализа сыграли элементы комбинаторного анализа («комбинаторных вычислений») и дискретной теории вероятностей [45, с. 4]. Важнейшие термины алгебры («группа», «поле», «кольцо» и др.) имеют по существу дискретную природу.

«Наибольшего расцвета дискретный анализ достиг… с появлением кибернетики и ее теоретической части – математической кибернетики» [128, т. 2, стб. 208], которая способствовала появлению новых идей и задач для дискретного анализа, созданию новых направлений в исследованиях. Так, в процессе решения разнообразных прикладных вопросов анализа понятий вычислимости и алгоритма возник важнейший раздел математической логики – теория алгоритмов. В то же время в математической кибернетике (и «взаимосвязанной» с ней информатике) используются результаты дискретного анализа.

Итак, в рамках предмета дискретной математики допускается использование бесконечных структур [128], что необходимо для разработки новых поколений ЭВМ, программного обеспечения (в вычислительной математике, стохастическом моделировании и др.). При этом методологическим содержанием предмета ДМ фактически объявляется совокупность идей, методов «кибернетического» характера, исключающего использование тем или иным образом бесконечности в достижении результата математических исследований (в частности, использование бесконечности в операциях и операции той или иной формы предельного перехода).

1.3.2.4. Компьютерная математика

Книга «Компьютерная математика» Д. Кука и Г. Гейза «содержит материал из тех областей современной математики, которые имеют отношения к вычислениям и, как следствие, обеспечивает читателя средством для сжатого и точного описания многих проблем компьютерной науки (теоретической информатики. – *Е. П.*)» [109, с. 7]. При этом особое внимание обращается на определение понятий математики «конструктивным» образом, т. е., иными словами, в рамках конструктивной математики [128, т. 2, стб. 1042]. Авторы книги «Компьютерная математика» ставили перед собой цель – изложить важные разделы современной математики, представляющие общий, а не только прикладной интерес. В частности, они стремились отразить в содержании влияние компьютерной науки на внутриматематические исследования. Поэтому, по-видимому, впервые в книгу включена глава «Языки и грамматики», которая имеет большое значение в компьютерной компиляции, системах моделирования, теории вычислений, компьютерной графике, вычислительной геометрии и автоматическом проектировании. Кроме того, в работе Д. Кука и Г. Гейза изложены основные теоретико-множественные понятия и факты, отношения и функции, конечные арифметики, основные алгебраические структуры, элементы теории графов, конечные автоматы, компьютерная геометрия, а также матрицы на конечных множествах и матрицы некоторого другого вида.

1.3.3. Дискретная математика – математическая основа информатики

Важное значение в описании дискретных процессов и явлений имеют методы конструктивной математики и особенно конструктивной логики. Следует отметить, что в книге Б. Б. Самсонова, Е. М. Плохова, А. И. Филоненкова «Компьютерная математика (Основание информатики)» [213] особое внимание уделено конструктивной алгебре, которая необходима для изучения теоретических основ цифровой информатики и эффективных алгоритмов обработки кодов и цифровых сигналов. Интересно отметить, что в содержание этой книги впервые вошел раздел современной алгебры «Теория характеров конечных алгебраических структур (и некоторых преобразований на них)».

Таким образом, именно в этих работах [109, 213] излагаются теоретические основы создания программного обеспечения.

В книгах по дискретной математике наряду с теоретическими основами моделирования и программного обеспечения излагаются теоретические основы разработки новой вычислительной техники, например, элементы теории автоматов, необходимые для проектирования цифровых устройств [108], анализ и синтез основных элементов вычислительных устройств (контактных схем, мультиплексоров и др.) [45, 231].

Более чем в двух десятках книг, вышедших после работы Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» [86], утвердилось окончательное название предмета – «Дискретная математика». Концептуальная роль ДМ как учебного предмета в профессиональном обучении выявляется при изучении государственных стандартов высшего профессионального образования. В 1994–2005 гг. раздел «Дискретная математика» был постепенно включен в содержание дисциплины «Математика» для многих специальностей (большинство направлений профессиональной подготовки). Аналогичная ситуация наблюдается и в системе среднего профессионального образования. В свое время В. М. Глушков указывал, что «расширение области математизации знания… потребует и будет опираться на развитие новых разделов математики, прежде всего – новых разделов дискретной математики» [39, с. 122].

Итак, на основании проанализированной литературы предмет дискретной математики можно охарактеризовать следующим образом. Поскольку процесс вычисления на компьютере дискретный, основной особенностью многих исследований ДМ «является отсутствие предельного перехода и непрерывности, характерных для классической математики» [45, с. 3]. Поэтому с помощью термина «дискретность» как антипода термина «непрерывность» можно выделить предмет дискретной математики как объективно существующей области математики, являющейся математической основой моделирования с использованием компьютера в самых разных областях науки. При этом совокупность идей, методов ДМ исключает использование тем или иным образом бесконечности в достижении результата научных исследований, проводимых с помощью компьютеров (в частности использование бесконечности в операциях и операции той или иной формы предельного перехода). Вследствие этого дискретная математика является математической основой информатики, в частности создания программного обеспечения, разработки вычислительной техники (в том числе и появившихся биовычислительных устройств (ДНК-компьютеров) с уникальными вычислительными возможностями [152]). Так, в разработке и совершенствовании программирования определяющую роль играет раздел прикладной дискретной математики с названием «*Математические основы информатики и программирования*», основным содержанием которого являются формальные языки и грамматики, алгоритмические системы, языки программирования, структуры и алгоритмы обработки данных, теория вычислительной сложности.

Дискретная математика постепенно становится фундаментальной основой внутриматематических исследований, олицетворяющей единство методов современной и классической математики. В ДМ появляются новые разделы, вызывающие не только прикладной, но и общематематический интерес.

1.3.4. Функции современной дискретной математики

1.3.4.1. Функции дискретной математики в математическом моделировании

Возрастание роли доминирующих в дискретной математике алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем (как средств, методов математического познания) в естественнонаучных исследованиях (физика, генетика, молекулярная биология, кристаллография и др.) обусловлено тем, что современный компьютер является не столько вычислительным средством, сколько весьма совершенным инструментом для моделирования самых разнообразных явлений и процессов. Как известно, с середины прошлого века «методы математизации наук, основанные на использовании абстрактных структур современной математики, начали постепенно проникать не только в конкретные науки, но и в технику» [135, с. 118]. Естественно, с возрастанием роли этих структур и схем в математическом моделировании (в частности, в «машинном» эксперименте) они начинают доминировать в ДМ. И это является главной причиной того, что дискретная математика становится основой гармоничного сочетания формального языка математики, неформального языка науки, в области которой проводится исследование, и уникальных возможностей современных компьютеров (например, исследования в области экономики и управления). «Методы так называемой дискретной математики широко используются в современной практике моделирования в управлении, во всех случаях качественного анализа сложных проблем управления, в ситуациях, с которыми сталкиваешься каждый раз, когда испытываешь острую потребность в какой-либо систематизации того, что известно по интересующей проблеме, в ее *структуризации* (курсив мой. – *Е. П.*), представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа как “вручную”, так и с использованием современных средств компьютерной техники» [136, с. 4–5].

В качественном анализе сложных проблем математического моделирования (в том числе и в решении проблем различных систем управления) в последние десятилетия особо важную роль стали играть комбинаторные схемы, поскольку они являются фундаментальной основой методов вероятностно-статистического (в общенаучной терминологии – стохастического) моделирования [137, 196].

1.3.4.2. Функции дискретной математики в дальнейшем совершенствовании систем компьютерной математики

Системы компьютерной математики «интегрируют в себе современный интерфейс пользователя, решатели математических задач – как численных, так и аналитических (символьных) – и мощные средства графики… Они вторглись в наиболее интеллектуальную сферу деятельности математиков-аналитиков и ученых-теоретиков, традиционно относящихся к элите научных работников, занятой решением особенно сложных и каверзных математических и научно-технических задач – таких, например, как задачи теории поля, аэродинамики, космонавтики, математического моделирования систем и т. д.» [61, с. 15]. К настоящему времени по СКМ, в частности по наиболее распространенной системе Mathematica, выпущены сотни книг. Следует отметить, что важнейшим приложением системы Mathematica (3.0–3.5) является ее использование в обучении математике. Т. В. Капустина исследовала методологические аспекты этого приложения [83].

Совершенствование систем компьютерной математики происходит на основе разработки теории формальных языков. По мнению А. И. Белоусова и С. Б. Ткачева, «разумно считать, что ядро дискретной математики образует именно математическая теория языков, точнее, область этой теории, называемая теорией формальных языков. Слово “формальный” подчеркивает, что в этой теории изучаются в основном искусственные языки, специально созданные для каких-то целей: языки программирования, языки математики и т. п.» [10, с. 5]. При этом доминирующим в современной теории формальных языков является алгебраический подход, т. е. подход, основанный на алгебраических структурах (в частности, полукольцах). Теория формальных языков также опирается на теорию полугрупп, т. е. класса моделей, определяемых с помощью одной бинарной алгебраической операции, обладающей ассоциативным свойством [112]. Кроме того, важную роль в разработке этой теории играют логические, алгоритмические и комбинаторные схемы (методы), теория графов.

В связи с изложенным следует отметить, что в тематике журнала «Прикладная дискретная математика» имеется раздел с названием «Математические основы информатики и программирования», основным содержанием которого являются формальные языки и грамматики, алгоритмические системы, языки программирования, структуры и алгоритмы обработки данных, теория вычислительной сложности.

1.3.4.3. Функции дискретной математики в развитии компьютерных технологий

По мнению Б. Н. Иванова, «сегодня наиболее значимой областью применения методов дискретной математики является область компьютерных технологий. Это объясняется необходимостью создания и эксплуатации электронных вычислительных машин, средств передачи и обработки информации, автоматизированных систем управления и проектирования» [70, с. 6].

Фундаментальной основой совершенствования компьютерных технологий служит такой раздел дискретной математики, как «Теория автоматов». Автомат определяется как многоосновная модель (в общенаучной терминологии – алгебраическая структура), заданная на трех конечных множествах с определенными на них двумя бинарными алгебраическими операциями. Классификация автоматов осуществляется с помощью отображений многоосновных моделей, являющихся гомо- и изоморфизмами. Доминирующим в компьютерных технологиях по-прежнему является подход, основанный на алгебраических структурах, в частности на группах и булевых алгебрах. Кроме того, важную роль в разработке КТ играют алгоритмические схемы (методы) и теория графов [13, 70, 112].

В журнале «Дискретный анализ и исследование операций» имеются разделы с названиями «Теория автоматов», «Теория функциональных систем», «Синтез и сложность управляющих систем», что играет определяющую роль в разработке и совершенствовании КТ (более узко – вычислительной техники).

Как показывает анализ литературы, системы компьютерной математики и компьтерные технологии являются теоретической основой разработки искусственного интеллекта [48, 197, 233], тесно связанного с формализацией мыслительных процессов [40].

1.3.4.4. Функции дискретной математики во внутриматематических исследованиях

Возрастание роли дискретной математики во внутриматематических исследованиях основано на «математическом эксперименте, занимающем промежуточное место между классическим дедуктивным и классическим экспериментальным методами исследования» [135, с. 141]. Вследствие этого довольно часто при установлении истинности тех или иных утверждений, касающихся исследуемых математических структур, сначала проверяют их справедливость на «малых» структурах, т. е. структурах с небольшим числом элементов. Для этого в последние годы созданы самые разнообразные пакеты прикладных программ (например, для исследований алгебраических структур).

1.3.4.5. Функции дискретной математики в стохастическом моделировании

В последние десятилетия вследствие всеобщей компьютеризации важнейшую роль стало играть так называемое стохастическое моделирование, поскольку эксперимент на компьютере заменил натурный эксперимент.

В сложившейся сегодня научной терминологии понятию «жестко детерминированный» (т. е. закономерный, причинно обусловленный) противостоит ряд альтернативных понятий: «случайный», «стохастический», «вероятностный», «статистический», «вероятно-статистический». Все они являются синонимами, констатирующими существование процессов или явлений, в которых состояние объекта исследования или явления нельзя *точно* предсказать по данным его прошлых состояний, как нельзя и *точно* описать свойства этого объекта.

Именно по этой причине в 40-х гг. прошлого столетия в связи с развитием средств связи, радиотехники, систем автоматического управления фундаментальную математику охватил «вероятностно-статистический бум» (исследования Н. Винера, А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина и др.). Более того, на базе математической статистики возникли общая статистика и «частные» статистики (в психологии, социологии, медицине и других научных областях).

В настоящее время изучение математической статистики (или ее элементов) предусмотрено в рамках многих специальностей всех направлений подготовки высшего профессионального образования. Заметим, что статистическая линия в последние десятилетия активно внедряется и в содержание школьного математического образования.

Анализ роли языка доминирующих в дискретной математике математических структур и схем свидетельствует об особой важности в стохастическом моделировании современной комбинаторики (комбинаторных схем).

Действительно, хорошо известна связь между комбинаторными и вероятностными задачами, сыгравшая значительную роль при становлении теории вероятности как науки. Эта связь находит в настоящее время особенно наглядное выражение на начальном этапе изучения теории вероятностей. По этому поводу достаточно упомянуть задачи, которые решаются на основе классического определения вероятности, схемы Бернулли и биномиального распределения. Однако подлинное значение комбинаторных схем в стохастическом моделировании особенно ярко раскрывается на языке комбинаторного анализа [113, 198], демонстрирующего множество примеров совместного использования языков математического анализа и ДМ. Эта интенсивно развивающаяся область современной математики дает, например, возможность приближенного асимптотического описания с любой степенью точности характеристик трудно прогнозируемых процессов или явлений (в развитии средств связи, радиотехнике, химических технологиях и т. д.), что невозможно сделать без объединения указанных языков. В подтверждение важности методов комбинаторного анализа отметим, что основные его методы, такие, например, как методы рекуррентных соотношений и производящих функций, постепенно начинают входить в программы обучения математике высших учебных заведений (они были включены в новые Федеральные государственные образовательные стандарты обучения дискретной математике в педагогических вузах по специальности «Информатика»).

Важное значение в стохастическом моделировании имеют порядковые структуры и алгоритмические схемы ДМ, позволяющие так или иначе упорядочить и алгоритмизировать исследование трудно прогнозируемых процессов или явлений. Например, теория графов, бинарные отношения и определяемые на этой основе отношения частичного порядка и решетки играют существенную роль в генетических исследованиях в биологии и медицине. Решение подобного рода прикладных системных задач (генетических, социально-экологических, экономических, производственных, оборонных и т. д.) возможно только на основе нестрогих эвристико-комбинаторных, алгоритмических, порядковых «человеко-машинных моделей» [137].

По мере совершенствования методов стохастического моделирования, основанных на комбинаторных, алгоритмических схемах и порядковых структурах, их начинают постепенно включать в программную и учебную литературу для студентов и даже для школьников (в рамках классов и школ с углубленным изучением математики). В этой связи интересно отметить, что изучение начальных элементов комбинаторики и математической статистики предусмотрено в комплекте учебников по математике для 5–10-го классов под ред. Г. В. Дорофеева (для 5–6-го классов – под ред. Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина), изучение логических и комбинаторных схем – в учебнике для 10-го класса из этого же комплекта [59, 60 и др.], изучение комбинаторных схем и элементов теории вероятностей – в учебном пособии для 11-го класса [24]. В последние годы появилось много научных трудов, в которых отражена роль доминирующих в ДМ математических структур и схем в стохастическом моделировании. Например, в статьях Е. А. Бунимовича и В. Н. Федосеева приведены вероятностные задачи для школьников, которые решаются на языке комбинаторных понятий с использованием графов [21, 269].

1.3.5. Роль дискретной математики в реализации принципа культуросообразности

Как уже отмечалось, анализ разного рода диспропорций между различными тенденциями современного образования дает основание утверждать, что в модернизации образования и, в частности, в устранении этих диспропорций важную роль начинает играть современный культурологический подход, в основе которого лежит принцип культуросообразности, являющийся одним из трех принципов интеграции образования (см. п. 1.1).

Как известно, «математика – это всечеловеческая наука… Математический язык (в отличие от национального языка) всечеловечен, и математическая истина не имеет национальных границ» [240, с. 3]. Поэтому анализ сути принципа культуросообразности применительно к математической сфере знаний показывает, что ступень «всечеловеческой» математической культуры современного общества предъявляет определенные требования, которым следует соответствовать, чтобы добиться положительных результатов математического образования.

Возникает закономерный вопрос: «Каким должно быть современное (математическое. – *Е. П.*) образование, чтобы соответствовать духу современной культуры с ее мозаичностью, объемностью, тенденцией к непрерывному обновлению?» [53, с. 7].

Поиск ответа на этот вопрос предполагает анализ историко-философских проблем развития математики, которые затрагивают и содержательную концептуальную основу модернизации системы математического образования в контексте современной культуры, и организационно-управленческую, что обусловливает формирование базисных оснований различных моделей систем на всех уровнях математического образования (профессиональное математическое образование, общее математическое образование и математическое просвещение). Как отмечает В. А. Садовничий, все реформы математического образования связаны с попытками навести мосты между этими составляющими [209]. Сразу отметим, что культурологический анализ сложных организационно-управленческих проблем модернизации математического образования лежит вне рамок данного исследования.

Историко-философский анализ проблем развития математики показывает, что в методологии реализации культурологического подхода в математическом образовании определяющую роль играет анализ характерных особенностей процесса математизации наук [204], отражающего формирование на рубеже веков современной культуры приложений математики в самых разнообразных областях исследований. Наиболее яркими проявлениями этой новой ступени «всечеловеческой» культуры, оказывающими наибольшее воздействие на математическое образование, являются *математическое моделирование, дискретная математика* и *вычислительные процессы* [39, 209]. Их роль особенно велика в «наведении мостов» между всеми уровнями образования.

Наблюдающийся в последние десятилетия расцвет дискретной математики стал одной из главных причин распространения математического моделирования и вычислительных процессов в самых разных областях науки и производства. Поэтому знания в области ДМ следует отнести к знаниям, имеющим важное общекультурное значение, их включение в содержание образования обеспечивает его направленность на «методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры» [238, с. 8], что, в свою очередь, способствует интеграции образования на основе его фундаментализации (см. подп. 1.2.2).

Фундаментальная роль дискретной математики в математическом моделировании уже охарактеризована в подп. 1.3.4.1. В свою очередь, фундаментальная роль вычислительных процессов в различных областях науки и производства объясняется следующими обстоятельствами.

Функционирование сложных систем управления технологическими процессами, энергетическими и другими важными системами обеспечивается вычислительным процессом, реализуемым специализированным или универсальным компьютером, который все чаще становится наиболее значимой частью данных систем. Реализация эффективного вычислительного процесса обеспечивается не только аппаратными возможностями компьютера или локальной сети компьютеров. Существенное значение имеют такие показатели эффективности, как точность вычислений, эффективность используемых алгоритмов, помехозащищенность и т. д. Таким образом, корректное осуществление вычислительного процесса требует от исследователя не только универсальных познаний в какой-то специальной области, где осуществляется данный вычислительный процесс, но и знаний теории современной дискретной математики (алгоритмов, автоматов, кодирования, асимптотических оценок и приближений и др.).

Культурологическое значение языка ДМ в процессе реализации вычислительных процессов можно проиллюстрировать на примере комбинаторики.

В последние десятилетия наблюдается бурное развитие комбинаторики, что обусловлено ее фундаментальной ролью в сфере информатики и смежных областей. На практике часто возникают задачи, требующие больших вычислений на компьютере (эффект «комбинаторного взрыва»). Увеличение быстродействия систем компьютера не упрощает ситуацию, поэтому в новой формирующейся культуре вычислений имеют большое значение методы комбинаторики и других алгоритмических разделов современной дискретной математики, при помощи которых решаются подобные задачи. Не случайно в прошлом веке ДМ стала составной частью магистрального направления современной математики, что особенно необходимо отразить в математическом просвещении.

Таким образом, важное методологическое значение имеет закономерно вытекающее из культурологического анализа *основное положение* о том, что владение идеями и методами дискретной математики стало неотъемлемой частью содержания подготовки специалиста, умело использующего в своей профессиональной деятельности достижения современной математической и информационной культуры. Поэтому, как отмечалось ранее, предмет «Дискретная математика» («Основы дискретной математики») с 1995 г. стал постепенно включаться в государственные стандарты высшего профессионального образования по многим специальностям из подавляющего большинства направлений подготовки. На этом основании в содержании математической подготовки студентов возникли направления обучения ДМ, которые можно условно разделить на четыре группы:

1) обучение математиков, программистов и специалистов в области прикладной математики;

2) обучение на инженерно-технических специальностях (электротехнических, машиностроительных и т. д.);

3) обучение на экономических и управленческих специальностях;

4) обучение на гуманитарных (психология, филология и др.) специальностях с фрагментарным изучением тех или иных элементов дискретной математики.

Реализация дискретной линии необходима и в математическом просвещении для устранения бытующих среди некоторых специалистов ложных представлений, согласно которым вся математика сводится к тем методам арифметики, элементарной алгебры и геометрии, с которыми знакомится каждый школьник.

Обучение дискретной математике играет важную роль в устранении существующих диспропорций между фундаментализацией образования и чрезмерным увлечением информационно-коммуникационными технологиями, довольно часто порождающими много бесполезной искаженной и даже ложной информации в содержании обучения («информационных шумов»), что не способствует формированию умений корректной обработки и анализа информации.

1.4. Роль современной дискретной математики в содержательном направлении интеграции образования

1.4.1. Интеграционный потенциал современной дискретной математики в модельной методологии

1.4.1.1. О модельной методологии

По мнению Я. Г. Неуймина, повышенный интерес к методологии моделирования обусловлен ролью, которую методы моделирования, особенно математического, приобрели в современных научных исследованиях, прогрессирующей сложностью задач общественной практики, возникающих в условиях научно-технической революции, и большими успехами в развитии прикладной математики и информатики [137].

Мнения о месте моделей и модельных методов в исторически сложившейся системе научных представлений «настолько расходятся, что говорить о сколько-нибудь общепринятой системе теоретических взглядов на моделирование, к сожалению, нет оснований» [137, с. 8]. И это естественно, поскольку в эпоху математизации наук и всеобщей компьютеризации появилось большое количество работ, касающихся частных аспектов моделирования. Стоит отметить, что в этих монографиях заложены основы классификации видов моделирования [135, 137], исследуются основные классы объектов моделирования [137], инженерно-математический стиль моделирования [205], методы построения моделей [137], логические основы моделирования [245], различные аспекты процесса математизации наук на основе математического моделирования [8, 125, 200].

В рамках модельной методологии осуществляются следующие операции: постановка возникающих задач, их перевод на адекватный научный язык, рациональная разработка моделей исследуемых объектов или явлений, а также эффективных алгоритмов и компьютерных программ для решения задач на основе созданных моделей. Таким образом, в основе модельной методологии – *обобщенные системы междисциплинарных знаний различных наук*, поэтому она служит основой решения конкретных задач на новом, качественно более высоком *интеграционном идейном и содержательном уровне* по сравнению с докомпьютерной эпохой.

Модельная методология в эпоху всеобщей компьютеризации может быть охарактеризована на основе единства двух ее аспектов. Первый аспект связан с внешними по отношению к моделированию детерминантами. Эти детерминанты являются *социокультурными*, т. е. выполняют функцию корректировки развития и совершенствования моделирования в соответствии с общественной культурой и потребностями социума. Второй аспект можно назвать внутренним, он отражает логику развития математики и кибернетики (информатики) и тем самым определяет методологию моделирования в эпоху компьютеризации. Оба аспекта диалектически связаны, взаимно дополняют друг друга. Только при условии единства социокультурных и математико-кибернетических аспектов моделирования открывается путь к постижению сущности модельной методологии в эпоху информатизации, а на этой основе – к совершенному моделированию в избранной области.

Анализ философской литературы показывает, что в решении ряда важнейших в социальном отношении системных задач (экономических, экологических, социологических, производственных, оборонных и т. п.) наиболее эффективным оказывается сочетание (синтез) творческого потенциала неформального человеческого мышления и практически неограниченных возможностей современных компьютеров в так называемых диалоговых, интегрированных человеко-компьютерных системах. «Можно говорить о зарождении в последние годы нового класса частично формализованных моделей весьма сложных объектов, которые можно назвать имитационными, эвристико-алгоритмическими, причем практика работ в этой области пока значительно опережает теоретические разработки» [137, с. 34].

Модельную методологию как *социокультурный феномен* следует рассматривать в контексте идейной и содержательной интеграции математики, естественных, технических, общественных и других наук. При этом абстрактные структуры и схемы современной математики являются более широкими по своей сущности и сфере применения, чем какие-либо категории из других наук.

1.4.1.2. Роль дискретной математики в интеграции формализованного и неформализованного языков моделирования

Для выявления роли дискретной математики в гармоничном сочетании (интеграции) формализованного и неформализованного языков моделирования важно представлять значение этого процесса. «В полной мере сила неформализованного и формализованного символического языков, – пишет Б. В. Гнеденко, – проявляется при их совместном использовании. При этом удается подмечать далеко идущие аналогии между явлениями, закономерностями» [41, с. 23].

Гармоничное сочетание формализованного языка математики с неформализованными языками других наук обеспечивается таким универсальным инструментом, как компьютер. Дело в том, что любую информацию, любую идеальную модель, создаваемую воображением (объект исследования), можно перекодировать на язык компьютера и ввести в его память. Чтобы идеальная модель была действующей, необходимо заложить в память компьютера правила преобразования информации. Однако любые правила можно разложить на простейшие термы («атомы») и создать таким образом универсальный логико-алгебраический язык для выполняемых компьютером операций. «Таким образом, – пишет В. М. Глушков, – в настоящее время факт принципиальной возможности программирования на современных электронных цифровых машинах любых информационных моделей установлен не менее твердо, чем факт возможности разложения любого материального объекта на элементарные частицы. Важно еще раз подчеркнуть, что здесь идет речь именно о моделях любой (а не только математической) природы» [38, с. 15].

Можно возразить, что память машины не бесконечна, она не может реализовать бесконечный алгоритм (и соответствующую ему программу). Однако В. М. Глушков считает, что «бесконечную память нельзя реализовать ни в каком техническом устройстве, принято называть машину универсальной, если организация ее управления и набор операций таковы, что обеспечили бы возможность реализации любого алгоритма при условии неограниченного объема памяти» [37, с. 235].

Уникальные возможности практически неограниченного объема (для типичного пользователя) оперативной и периферийной памяти современных компьютеров дают возможность реализовать достаточное для практических целей количество операций любого алгоритма, а также осуществить полную цепочку их использования в различных научных исследованиях. Поэтому хорошее знание СКМ и КТ (например, правил преобразования информации в работе с идеальной моделью) необходимо многим специалистам в любой области исследования.

Дискретная математика является математической основой информатизации, а также базой для разработки и совершенствования систем компьютерной математики и компьютерных технологий. В компьютерном моделировании необходимо владение методами как классической («непрерывной»), так и дискретной математики. Поэтому ДМ также является *математической основой* гармоничного использования формализованного языка математики, неформализованного языка той науки, в области которой проводится исследование, и уникальных возможностей современных компьютеров.

Как уже отмечалось, несмотря на обилие исследований и публикаций, в настоящее время нет общепринятой системы подобных представлений о дискретной математике, что приводит к появлению внешне эффективных научных исследований, особенно в социально-экономических и гуманитарных областях знания, где модельные представления размыты и плохо поддаются формализации. Необходимый в исследовании (многократно повторяющийся) компьютерный эксперимент на основе адекватного знания ДМ является противоположностью уже упоминавшемуся псевдомоделированию на основе «четырех арифметических действий», ассоциируемому с поиском или составлением «кухонных рецептов».

1.4.1.3. Роль интеграционного потенциала дискретной математики в формировании математического стиля мышления

Понятие «стиль научного мышления» введено М. Борном и В. Паули в физику в 50-х гг. XX в. [17]. С тех пор оно все шире используется исследователями не только в физике, но и в математике, биологии, химии и других науках для характеристики формы научного мышления в определенный исторический период. В эпоху математизации наук на основе всеобщей компьютеризации фундаментальную роль в научном стиле мышления стало играть математическое мышление. «Успех науки, – пишет Б. В. Гнеденко, – теперь в значительной степени зависит от того, насколько удачно исследователи научатся пользоваться “математическим стилем мышления”, строить качественные модели процессов, ставить математически осмысленные задачи и использовать уже накопленные математические средства исследования» [42, с. 102].

Возрастающая роль математического мышления, основанного на методах математики, объясняется тем, что все увеличивающийся объем поступающей информации делает невозможным ее полное восприятие в силу ограниченных функциональных (физиологических и др.) возможностей человеческого мозга. По расчетам В. М. Глушкова, «для решения задач управления экономикой страны (более 10^{16} операций в год) не хватило бы всего взрослого населения страны, так как производительность человеческого мозга в процессах переработки экономической информации составляет 106 операций в год» [36, с. 13].

Поскольку адекватное знание СКМ, КТ и, в частности, баз данных является основой работы с компьютером, без обучения дискретной математике невозможно научиться точно воспринимать и перерабатывать весь объем имеющейся информации по изучаемой проблеме.

Интеграционный потенциал ДМ в формировании математического стиля мышления реализуется на основе интеграции изучения алгебраических, порядковых структур, а также логических, алгоритмических, комбинаторных схем, благодаря чему в мышлении обучаемых формируются когнитивные (познавательные) *структуры* и *схемы*, являющиеся их отражением. Слово «когнитивный», происходящее от латинского слова «*cognitio*», т. е. «знание», подчеркивает, что речь идет о психических процессах в голове человека, а не просто о стимулах и реакциях. Эти когнитивные структуры, или схемы, обеспечивают хранение, упорядочение и преобразование наличной и поступающей информации и отвечают за воспроизведение в психике познающего субъекта устойчивых закономерных аспектов его окружения [273]. Поэтому изучение этих структур и схем, воздействие указанным образом на развитие мышления обучающихся способствуют выработке умения *структурировать* и тем самым систематизировать информацию. Формирование когнитивных структур и схем необходимо начинать уже с 11–12-летнего возраста [236, 277].

Довольно часто специалисты (особенно в гуманитарной сфере) пользуются возможностями компьютера, не обладая при этом соответствующими знаниями по ДМ (используют только «модные» узкоспециальные статистические познания, в частности формулы, забывая при этом, что такое «логарифм», причем иногда в буквальном смысле слова!). Как следует из вышеизложенного, отсутствие адекватной подготовки по дискретной математике не позволяет обучающемуся освоить математический стиль мышления, необходимый для качественного моделирования, осуществляемого с помощью компьютеров.

1.4.1.4. Границы возможностей использования интеграционного потенциала дискретной математики в модельной методологии

Несмотря на универсальность современных компьютеров и их уникальные возможности, следует помнить о нежелательности всеобщей «панматематизации», в том числе «пандискретизации», т. е. чрезмерного преувеличения роли математики, в частности дискретной математики. Знаменитые теоремы Геделя о неполноте формальной теории, содержащей арифметику, и неосуществимости установления непротиворечивости такой теории [226] свидетельствуют о невозможности полной формализации достаточно содержательных математических теорий.

Действительно, в процессе формализации всегда остается неформализуемый «остаток», который и обнаруживает противоречие между формализацией и формализуемым содержанием объекта исследования. Считается, что именно по этой причине А. Эйнштейн однажды сказал, что «математика – это наилучший способ водить себя за нос», а С. П. Королев, не доверяя аналитическим докладам космонавтов, вернувшихся на Землю, однажды посетовал: «Если бы я мог послать в космос Лермонтова!» [43, с. 4]. В связи с этим в философской литературе введен специальный термин «структурализм», являющийся синонимом абсолютизации математического стиля мышления, основанного на структурах и схемах современной математики.

Выдающийся французский психолог, основоположник теории операционального мышления Ж. Пиаже пришел к выводу, что структурный метод, т. е. математическое моделирование, основанное на структурах и схемах современной математики, не может быть единственным методом исследования, особенно в гуманитарных науках [283]. Например, структурный метод в языкознании является частнонаучным методом исследования. Критикуя методику структурного лингвистического анализа, В. И. Кодухов пишет, что «структуралисты ошибаются… тогда, когда… единицы лингвистического анализа и отношения между ними объявляют имманентной сущностью языка» [89, с. 222].

Структурный метод успешно используется только при отображении формализованных сторон сложных систем (экономических, социальных и т. д.), что, стоит отметить, достаточно хорошо характеризует эти системы.

Таким образом, возведение в абсолют математического и, в частности, «дискретного» стиля мышления превращает науку в ее противоположность, что на философском языке являет собой эклектику и идеализм. Для преодоления этого необходимо гармонично использовать в исследованиях методы дискретной и непрерывной математики, а также частные методы других наук.

«Если каждый новый шаг исследования связан с привлечением к рассмотрению качественно новых сторон явления, то математический метод отступает на задний план; в этом случае диалектический анализ всей конкретности явления может быть лишь затемнен математической схематизацией. Если, наоборот, сравнительно простые и устойчивые формы изучаемых явлений охватывают эти явления с большой точностью и полнотой, но зато уже в пределах этих зафиксированных форм возникают достаточно трудные и сложные проблемы, требующие специального математического исследования… то мы попадаем в сферу господства математического метода» [16, с. 464].

Расширение границ возможностей дискретной математики происходит в процессе развития теории информационных систем (баз данных) [69].

Идеи и методы ДМ играют определяющую роль в концепциях «нечеткой» математики [101], в рамках которой возможно решение практических задач, недоступных формализму «обычной» математики (в частности, формализму теории вероятностей и случайных процессов).

На основе изложенного можно сделать вывод о том, что границы возможностей дискретной математики в решении какой-либо проблемы ограничены возможностями применения компьютера. Если для ее решения достаточно использовать компьютер как пишущую машинку, то тогда знание ДМ совсем не обязательно. Однако круг таких «некомпьютерных» проблем в процессе всеобщей информатизации неуклоннно снижается.

1.4.2. Анализ роли дискретной математики в реализации основных подходов содержательного направления интеграции образования

На основе роли дискретной математики в методологии математического моделирования и теории вычислительных процессов охарактеризуем основные особенности реализации основных подходов содержательного направления интеграции обучения математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

Как уже отмечалось, межпредметные связи стали рассматриваться в качестве средств интеграции, на основе которых создаются обобщенные системы как междисциплинарных, так и внутрипредметных знаний. Поэтому *в интеграции на базе актуализации межпредметных (а также внутрипредметных) связей* содержания дисциплин подготовки учителей математики, информатики и инженеров-педагогов важное значение имеет продолжающееся расширение межпредметных связей ДМ с различными областями математики и информатики, такими как математический анализ, исследование операций, математическая логика, абстрактная алгебра, математическая кибернетика, компьютерное моделирование, что отражено в тематике журналов «Дискретный анализ и исследование операций», «Прикладная дискретная математика».

Анализ этих журналов и научной литературы свидетельствует о фундаментальном значении современной прикладной дискретной математики в разработке и совершенствовании современных систем компьютерной математики и компьютерных технологий. Таким образом, в содержании обучения математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла на базе актуализации межпредметных (а также внутрипредметных) связей необходимо отразить базовые понятия и методы ДМ, которые играют фундаментальную роль в изучаемых студентами областях математики и информатики и обеспечивают обучение математическому моделированию и теории вычислительных процессов на основе корректного использования СКМ и КТ.

О. И. Мельников отмечает важность интегрирующей функции дискретной математики, которая «состоит в установлении связей между знаниями, полученными в различных учебных дисциплинах, и комплексном их применении» [131, с. 77]. Но возможности интеграционного потенциала ДМ гораздо шире, поскольку он реализуется не только посредством установления межпредметных связей дискретной математики и других дисциплин.

Как ранее отмечалось, *интеграция на основе фундаментализации образования* предполагает направленность образования на создание цельного, обобщающего знания, которое является ядром (основой) всех полученных студентом знаний [238], что подразумевает изучение языка доминирующих в дискретной математике алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем. Фундаментальное значение языка этих структур и схем в интеграции содержания обучения математическим дисциплинам будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов будет раскрыто далее, в гл. 2.

При интеграции содержания обучения в рамках компетентностного подхода следует исходить из того, что обучение дискретной математике необходимо для развития у студентов способности критического отслеживания и осмысления развития теории и практики математического моделирования и вычислительных процессов с использованием

СКМ и КТ. Поэтому обучение ДМ играет важную роль в выработке у будущих учителей информатики общих (полифункциональных, надпредметных, междисциплинарных и др.) компетенций, подразумевающих наличие умения гармонично сочетать в моделировании формальный язык математики, неформальный язык науки, в области которой проводится исследование, и возможностей компьютера.

Роль дискретной математики в формировании специальных компетенций проявляется в следующем. Обучение ДМ в значительной мере способствует овладению студентами методами математического моделирования на основе дискретных и непрерывных моделей и выработке умений объяснять результаты этих исследований с помощью понятий, имеющих общеобразовательное и общекультурное значение. Следовательно, элементы дискретной математики должны быть адекватно отражены в курсе методики обучения информатике.

Таким образом, справедливо положение о том, что дискретная математика наряду с непрерывной математикой лежит в основе методологии реализации существующих подходов в содержательном направлении интеграции математической, естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. Тем самым интеграция обучения этим дисциплинам на базе ДМ, математического моделирования и теории вычислительных процессов углубляет возможности органического сочетания трех основных составляющих подготовки педагогов – подготовки в избранной предметной области, психолого-педагогической и методической подготовки.

1.5. Дискретная математика как стержневая основа реализации межпредметных связей математики, информатики и смежных с ними дисциплин

1.5.1. Основные особенности дисциплин, смежных с математикой

Дискретная математика является стержневой основой реализации межпредметных связей математики, информатики и смежных с ними дисциплин. Чтобы обосновать данное положение, необходимо предварительно выявить, какие дисциплины следует считать дисциплинами, смежными с математикой.

Широко известно, что каждая конкретная наука разрабатывает свой категориальный аппарат, обеспечивающий конкретно-научное мышление в данной специальной области знания. Учитывая значение слова «смежный» как «тесно соприкасающийся, близкий» [145, с. 734], смежной с математикой следует прежде всего считать науку, категориальный аппарат которой «тесно соприкасается», близок к категориальному аппарату математики.

Как отмечает крупный философ и педагог В. И. Купцов, «математизация затронула буквально все области современной науки» [110, с. 6]. Чтобы выявить, насколько категориальный аппарат той или иной науки является близким к категориальному аппарату математики, следует проанализировать этапы и основные особенности процесса математизации наук [110, 125, 204].

На первом этапе математика выступала как средство описания на математическом языке того, что выявлено нематематическими методами, т. е. как средство обработки эмпирического материала. На втором этапе стало осуществляться построение математических моделей для групп явлений, которое регулировалось уже теоретическими построениями. Таковы законы Кеплера, которые суть математическая модель для обработки результатов, полученных Т. Браге. Третий этап можно назвать этапом «объединения частных построений в фундаментальную теоретическую схему, переход от модели к теории» [125, с. 42].

Главные проблемы, связанные с математизацией той или иной науки, относятся уже к теоретическим построениям. При этом математический аппарат в какой-либо конкретной науке (например, в математической физике или математической экономике) дает новое видение действительности, способствует появлению новых специальных законов этой конкретной науки. В этом случае наблюдается прямое воздействие математики на данную науку, причем следует отметить, что математика относительно этой науки является ведущей в силу своего статуса «всечеловеческой» науки (см. подп. 1.3.5.), обладает правом диктовать нормативы и идеалы для этой конкретной науки.

В результате такого прямого воздействия математики *постепенно возникли математические физика, химия, биология, экономика, психология, география, экология, психология, история, лингвистика. Кроме того, методы математики, особенно методы математического моделирования и теории вычислительных процессов, стали интенсивно применяться в зоологии, ботанике, физиологии, юриспруденции, лингвистике, физической культуре и даже в искусстве.* Фактически здесь перечислены науки, которые нашли отражение в *перечне соответствующих учебных предметов* федерального базисного учебного плана для образовательных учреждений [250].

Как следует из изложенного, математизация той или иной науки – это включение в нее наиболее эффективных и универсальных математических идей и методов познания. В результате такого воздействия происходит обогащение конкретной науки, которую в этом случае естественно назвать *наукой, смежной с математикой*.

Проведенный анализ литературы по математике и информатике (см. подп. 1.3.2 и 1.3.3) еще раз подтвердил уже ставшее общеизвестным положение о том, что математика и информатика, бесспорно, являются смежными науками, неразрывно связанными («переплетающимися») между собой своими идеями и методами. Причем не только математика оказала решающее воздействие на становление современной информатики. Благодаря компьютеризации математических исследований, в том числе через дискретную математику, можно наблюдать резонансное влияние информатики (особенно ее программного, компьютерного и аппаратного обеспечения) на внутриматематические исследования современной математики.

Как следует уже из самого названия науки, смежными с математикой являются вышеперечисленные *математические физика, химия, биология, экономика, психология, география, экология, психология, история, лингвистика.* Но смежной с математикой может быть и наука, в названии которой не обязательно есть слово «математическая» (например, *информатика* и *механика*). В частности, как обосновано в подп. 1.3.3, дискретная математика является математической основой информатики. Это, с одной стороны, свидетельствует о том, что математика и информатика действительно являются смежными науками и, стало быть, смежными дисциплинами подготовки студентов; с другой стороны, еще раз подчеркивается лидирующая роль дискретной математики как основы интеграции математики и информатики, что также подтверждает анализ функций ДМ (см. подп. 1.3.4). Как подчеркивал выдающийся математик Н. Н. Красовский, без математики не может быть информатики [103].

Важным для последующего исследования является положение о том, что смежной с математикой следует также считать теорию и методику обучения математике. Действительно, категориальный аппарат этой науки является «тесно соприкасающимся», близким к категориальному аппарату математики. Об этом могут свидетельствовать следующие моменты. Во-первых, обучение бакалавров дисциплине «Естественнонаучная картина мира» должно осуществляться на основе синтеза категориального аппарата математики и методики ее преподавания, в чем важную роль играют современная математическая культура и соответствующие специальные методические компетенции. В противном случае у студентов не сформируются умения методически грамотно вырабатывать у школьников важные представления о естественнонаучной картине мира.

Во-вторых, синтез категориального аппарата рассматриваемых наук необходим при обучении бакалавров дисциплине «Основы математической обработки информации», предназначенной для формирования методического умения давать школьникам необходимые сведения, составляющие основу математической обработки информации в изучаемом ими предмете.

В-третьих, синтез категориального аппарата этих наук необходим в вариативной методической подготовке и обучении некоторым дисциплинам профессионального цикла, например в обучении инженеров-педагогов методике структурно-логического анализа. В результате выявляются основные особенности *методики редукции (трансформации)* математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания учащихся.

Отметим, что в подп. 2.5.1 будут приведены другие убедительные доводы в пользу того, что теорию и методику обучения математике действительно следует считать наукой, смежной с математикой, особенно «важной составляющей в обновлении профессиональной подготовки учителя математики, овладения им не свойственными ранее в педагогической деятельности функциями в условиях информатизации образования» [1, с. 17].

1.5.2. О дискретной математике как стержневой основе реализации межпредметных связей математики, информатики и смежных с ними дисциплин

Как уже было обосновано, наука закономерно становится наукой, смежной с математикой, в результате включения в нее наиболее эффективных и универсальных математических идей и методов познания, каковыми становятся идеи и методы математического моделирования дискретной математики и вычислительных процессов (см. подп. 1.3.4). При этом наблюдающийся в последние десятилетия расцвет ДМ стал одной из главных причин распространения математического моделирования и вычислительных процессов в самых разных областях науки и производства. Поэтому, как уже упоминалось, знания в области дискретной математики следует отнести к знаниям, имеющим важное общекультурное значение, их включение в содержание образования обеспечивает его направленность на «методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры» [238, с. 8]. Это положение является первым основанием, позволяющим сделать вывод о том, что ДМ является основой реализации межпредметных связей математики и информатики.

Дискретная математика стала основой гармоничного сочетания формального языка математики, неформального языка науки, в области которой проводится исследование, и уникальных возможностей современных компьютеров (см. подп. 1.4.1.2). Это является вторым основанием для указанного вывода.

ДМ также является основой для разработки и совершенствования систем компьютерной математики и компьютерных технологий, играющих фундаментальную роль в современной информатике, благодаря которым и стало возможным математическое моделирование с использованием компьютера и реализация вычислительных процессов (см. подп. 1.3.4.2 и 1.3.4.3). Созданные благодаря современным СКМ и КТ уникальные возможности современных компьютеров позволяют реализовать достаточное для практических целей количество операций любого алгоритма. Это является третьим основанием для нашего вывода.

Предметные особенности дискретной математики как самостоятельной области знания предоставляют уникальные возможности для приложений математики в самых разных областях науки и производства (см. подп. 1.4.1.2). Благодаря реализации межпредметных связей математики и информатики на основе ДМ происходит заимствование, перенесение образцов из уже математизированной области знания в еще не математизированную область. Это способствует формированию новой науки (например, математической психологии, лингвистики и др.).

Однако имеется еще одно важное (четвертое) основание для вывода о том, что дискретная математика является основой реализации межпредметных связей математики и информатики: доминирующие в ДМ алгебраические, порядковые структуры, а также логические, алгоритмические, комбинаторные схемы играют фундаментальную роль в формировании математического стиля мышления (подп. 1.4.1.3). Напомним, что изучение этих структур и схем способствует формированию в мышлении обучаемых когнитивных (познавательных) *структур* и *схем*, являющихся их отражением, развивает умения *структурировать* и тем самым систематизировать информацию с помощью компьютера. Незнание языка этих структур и схем ДМ порождает самые «живучие» ошибки моделирования в той или иной профессиональной области.

Будущий учитель математики и информатики, а также инженер-педагог *должны не только знать математический аппарат своей предметной области, но и уметь использовать его в процессе обучения. Поэтому дискретная математика играет важную роль не только в реализации межпредметных связей математики и информатики, но и в основах самого обучения (дидактике, психологии и методике обучения)*, особенно на уровне магистратуры.

Глава 2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

В главе охарактеризованы доминирующие математические структуры, психологические и дидактические основы обучения дискретной математике, которые имеют фундаментальное значение в разработке методики реализации содержательного направления интеграции подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. На этой основе разработана концепция обучения ДМ, на базе которой создана соответствующая методическая система, предложены различные модели обучения.

2.1. Математические структуры как основа стратегии отбора содержания обучения дискретной математике

Как было установлено, интеграция на базе фундаментализации образования предполагает универсализацию знаний, умений, навыков, что обусловливает выделение структурных единиц научного знания, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений. Такими структурными единицами в дискретной математике являются доминирующие в ней алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (средства, методы математического познания). Эти структуры лежат в основе отбора содержания обучения ДМ студентов педагогических направлений подготовки. Для обоснования этого положения проанализируем понятие математической структуры.

2.1.1. Понятие математической структуры и ее роль в обучении моделированию

Математические структуры и схемы являются основой стратегии отбора содержания обучения математике. Такой подход в обучении математике называется *системно-структурным* подходом. Он позволяет раскрыть характер соответствия между структурами реальных процессов, операционными структурами мышления и структурами математики [236]. Поэтому не случайно именно математические структуры играют фундаментальную роль в формировании «ядра математического курса» [200] в техническом вузе, поскольку являются «ядром (основой) всех полученных студентом знаний» [208, с. 12].

Благодаря своей значимости в различных видах моделирования с использованием компьютера дискретная математика является тем методологическим и методическим «механизмом», который обеспечивает действенность обучения моделированию и тем самым позволяет раскрыть *конкретный* характер этого важного соответствия для каждого профиля обучения. Эти выводы и будут концептуальным ориентиром в нашем анализе.

Прежде чем определить роль математических структур в стратегии выбора целей и отбора содержания обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки, кратко охарактеризуем суть самого понятия математической структуры.

Как отмечалось многими крупными учеными (Н. Бурбаки, А. Н. Колмогоров, Л. Д. Кудрявцев и др.), математика – это наука о специальных структурах, называемых математическими. «Под **математической структурой** можно понимать совокупность устойчивых связей, обеспечивающих целостность математического объекта (математической системы, математической модели). Эта совокупность устойчивых связей математического объекта может быть задана различными способами (аксиоматически, конструктивно, описательно, в виде наглядных образов)» [236, с. 25].

«Целью моделирования является выделение не отдельных связей, а целого их *комплекса* для данного объекта или явления, хотя второстепенные связи или составляющие элементы при моделировании чаще всего исключаются» [236, с. 27]. Важное значение в *умении выделять комплекс* основных связей и исключать второстепенные связи или составляющие элементы имеют математические структуры и схемы. И это не случайно, поскольку наряду с «аналитическими» методами решения задач, основанными на математическом анализе и его приложениях, возникли и быстро развиваются «численные» методы, основанные на структурах и схемах современной алгебры и математической логики.

Стратегическую роль *системно-структурного подхода* в моделировании с использованием компьютера, в обучении умению выделять комплекс основных связей исследуемого объекта и исключать второстепенные связи раскрывает описание доминирующих в дискретной математике математических структур и схем.

2.1.2. Описание доминирующих в дискретной математике математических структур и схем

Доминирующими в дискретной математике являются (в общенаучной терминологии) алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (как средства, методы математического исследования) [183]. Для анализа роли этих структур и схем в обучении ДМ дадим их краткую характеристику.

Представления об *алгебраических* и *порядковых* структурах сложились в процессе исторического развития. Вначале люди научились совершать операции сложения и вычитания с наборами конкретных обыденных предметов, вещей и сравнивать различные количества этих предметов между собой. Позднее алгебраические операции стали производиться над более отвлеченными объектами (многочленами, векторами преобразованиями и т. д.). Со временем стали сравниваться отвлеченные «неименованные» числа, сначала натуральные, а затем целые, рациональные и действительные числа, что потребовало введения десятичной записи чисел. В результате развития представлений об упорядоченности и хаосе стали использоваться различные отношения порядка («больше», «меньше», «предшествования», «старшинства» и т. п.). Люди постоянно упорядочивают предметы или явления по какому-либо признаку. Изучение общих свойств различных упорядоченных множеств привело к возникновению понятия частичного (неполного) порядка на множестве, а затем к созданию абстрактных порядковых структур (решеток булевых алгебр и т. д.).

Логические схемы стали зарождаться еще во времена Аристотеля, сформулировавшего основные законы логически правильных рассуждений. Идея построения универсального логического языка (доказательств для всей математики) была выдвинута в XVII в. Г. Лейбницем. В результате чего в XIX в. появился язык логики предикатов, предметные переменные и кванторы, сыгравшие определяющую роль в анализе полноты и непротиворечивости математических рассуждений (доказательств). На этой основе позднее стал возможен переход к логически точному анализу других областей знания. Возникла математическая логика, ставшая основой логической формализации всей науки (образно говоря, математической «стандартизации» любого научного исследования).

Как уже отмечалось выше, на основе интеграции алгебраических и логических идей и методов возникла теория *алгоритмов*, что ознаменовало начало эпохи всеобщей компьютеризации. Общеизвестно, что понятие алгоритма и его основные свойства играют ключевую роль в создании программного обеспечения.

Комбинаторные схемы – это схемы, на основе которых изучаются задачи выбора, расположения и пересчета элементов данного конечного множества в соответствии с заданными правилами. Объекты, конструируемые по этим правилам из элементов данного множества, называются комбинаторными конфигурациями (например, упорядоченные или неупорядоченные подмножества этого множества, совокупности повторяющихся элементов и т. п.).

Значительную часть комбинаторики составляют перечислительные задачи, в которых требуется либо осуществить перебор всех конфигураций заданного вида, либо только подсчитать их, либо выполнить то и другое. Числа, которые получаются при пересчете комбинаторных конфигураций, называются комбинаторными числами. Простейшими комбинаторными числами являются число перестановок элементов данного конечного множества, число выборок заданного объема, составленных из его элементов, и т. п.

Становление комбинаторики как математической дисциплины происходило в XVII в. одновременно с теорией вероятностей: при решении вероятностных задач постоянно приходилось сталкиваться с подсчетом числа выборок, подчиненных определенным условиям.

Комбинаторные методы и результаты получили широкое применение не только в теории вероятностей. Они играют фундаментальную роль в изучении различных областей конечной математики, теории кодирования, криптографии, исследовании операций. Комбинаторный анализ находит отражение в виде самых разнообразных приложений в физике, химии, биологии, экономике, лингвистике и т. д. Считается почти общепризнанным, что сегодня хорошее знание комбинаторного анализа требуется не только математикам (имеющим дело с математическими моделями реальных явлений и процессов) и практикующим программистам, но и их потенциальным заказчикам.

Из приведенной характеристики следует, что доминирующие в ДМ математические структуры и схемы имеют важное значение в качественном анализе сложных проблем математического моделирования (в том числе и в решении проблем различных систем управления). Напомним, что эти структуры и схемы играют *ключевую* роль «в систематизации того, что известно по интересующей проблеме, в ее *структуризации* (курсив мой. – *Е. П.*), представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа как “вручную”, так и с использованием современных средств компьютерной техники» [136, с. 4–5].

2.1.3. Роль структур и схем дискретной математики в интеграции обучения различным дисциплинам будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов

Фундаментальное значение языка структур и схем дискретной математики в интеграции обучения дисциплинам математической, естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов заключается в следующем.

Во-первых, в обучении языку этих структур и схем следует исходить из того, что они играют ключевую роль в качественном анализе проблем математического моделирования, в систематизации информации по интересующей проблеме, ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего решения проблем с использованием СКМ и КТ. Действительно, язык этих структур и схем имеет важное значение при реализации всех этапов математического (информационного) моделирования, особенно при оптимальном выборе языка и метода моделирования, разработке алгоритма, программы вычислений и в итоговом анализе всех возникающих погрешностей. Незнание языка этих структур и схем порождает ошибки моделирования, которые остаются незамеченными в процессе итогового анализа и тестирования полученных результатов и доходят до этапа их внедрения (например, ошибки пропущенной логики рассуждений).

В подтверждение важности изучения языка доминирующих в ДМ структур схем достаточно упомянуть понятия рекуррентного соотношения, асимптотической оценки и приближения и их роль в анализе эффективности алгоритмов вычислений в самых разных областях исследований. Асимптотические оценки позволяют, например, приближенно оценить значение функции, когда воспользоваться определением функции для вычисления точного ее значениях с использованием СКМ при очень больших (или очень малых) значениях аргумента слишком трудно. Более того, определение функции может оказаться столь сложным, что для обычных значений переменной легче получить асимптотическую информацию о величине значения функции, чем любую другую.

Во-вторых, обязательное включение в содержание образования тех или иных математических структур и схем дискретной математики обеспечивает своеобразный стандарт подготовки, свидетельствующий о фундаментальном, опережающем практику обучении, позволяющем адекватно реагировать на изменения, постоянно происходящие в сфере информатики.

Как отмечает В. А. Тестов, «преодолеть разобщенность различных математических дисциплин, изолированность отдельных тем и разделов, обеспечить целостность и единство в обучении математике возможно лишь на основе выделения в ней *истоков, основных стержней.* Такими *стержнями в математике* являются *математи-*

ческие структуры» [236, с. 7]. Отсюда следует, что, в-третьих, язык структур и схем ДМ играет фундаментальную роль в формировании у студентов представлений о математике как единой науке, о ее внутренней логике.

Язык структур и схем дискретной математики имеет важное значение в устранении диспропорций между фундаментализацией подготовки студентов и чрезмерным увлечением информационно-коммуникационными технологиями, которые, как уже отмечалось, довольно часто порождают много бесполезной, искаженной и даже ложной информации в содержании обучения. Не случайно А. П. Ершов подчеркивал базовую роль дискретной математики в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [66, с. 294]. К сожалению, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии ПО (программного обеспечения. – *Е. П.*). Большая часть усовершенствований средств и методов приводит к увеличению производительности и качества примерно на 5–35 %. Но многие из этих усовершенствований были заявлены как дающие преимущества на “порядок”» [35, с. 23]. Поэтому очень важно «ознакомление педагогов с положительными и отрицательными аспектами использования информационных и телекоммуникационных технологий» [47, с. 15].

2.1.4. О базовых понятиях языка доминирующих в дискретной математике структур и схем

В изучении языка доминирующих структур и схем дискретной математики ключевую роль играют следующие *базовые понятия:*

1) бинарное и *n*-арное отношения;

2) отношения эквивалентности и частичного порядка;

3) группа и кольцо;

4) логическая операция;

5) предикат и квантор;

6) алгебраическая операция;

7) отображение, гомоморфизм и изоморфизм;

8) алгоритм;

9) конечный автомат;

10) формализованный язык;

11) проблема разрешимости;

12) эквивалентные и эффективные алгоритмы.

Конечно, можно спорить, что предложенный список базовых понятий ДМ следует считать полным или его необходимо уточнить, расширить и т. д. (в том числе и в зависимости от профиля обучения студентов). Но здесь важно то, что понятия из этого или подобного ему списка являются своеобразными *маяками* при отборе содержания профильного обучения дискретной математике студентов различных специальностей, особенно педагогических.

Обязательное включение в содержание обучения ДМ рассматриваемых видов математических структур и схем обеспечивает своеобразный «стандарт» профильного обучения, свидетельствующий об использовании *интеграционного потенциала* этих структур и схем, позволяющем научить выделять *комплекс* основных связей исследуемого объекта или явления. Тем самым будет обеспечена направленность содержания образования на «методологически важные долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры», которые играют важную роль *в интеграции образования на основе его фундаментализации* (что отмечалось в подп. 1.2.2).

Итак, системно-структурный подход в стратегии отбора содержания обучения дискретной математике обеспечивает единство и целостность образовательного процесса, в котором занимают свое «крепежное» место базовые понятия ДМ. В результате образуются естественные, устойчивые межпредметные связи, обеспечивающие целостность («объекта») математики и поэтому имеющие важное значение в реализации принципа диалектического единства интеграции и дифференциации в математической подготовке студентов.

Рассматриваемый подход в стратегии отбора содержания обучения ДМ необходим также для составления и согласования учебных программ всех уровней, включая школьное образование, для достижения прикладной направленности обучения математике. В частности, понятия языка математических структур представляют собой единую идейную и содержательную основу различных программ обучения дискретной математике. Стоит отметить, что сейчас наблюдается «разнобой» в содержании преподавания ДМ в рамках даже одной и той же специальности в различных вузах, главной причиной такой несогласованности является отсутствие системно-структурного подхода в обучении дискретной математике.

Наконец, системно-структурный подход в стратегии отбора содержания обучения ДМ оправдан и с исторической точки зрения. Математическое моделирование стало основой формирования и становления дискретной математики как предмета. Поскольку в основе математического моделирования (в том числе и классификации его видов) лежит понятие математической модели, изучение базовых понятий, раскрывающих суть понятия модели, должно быть основой стратегии отбора содержания обучения ДМ.

Из вышеизложенного следует, что необходим *анализ дидактических принципов* для уточнения содержания обучения дискретной математике на основе базовых понятий *для каждого профиля* обучения студентов педагогических специальностей.

В связи с профильным обучением ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов подчеркнем важную роль языка доминирующих математических структур и схем в подготовке математиков и специалистов по системам компьютерной математики и компьютерным технологиям, что отмечается в учебных изданиях [10, 70]. В частности, доминирующим в обучении математиков и специалистов по СКМ и КТ является алгебраический подход, т. е. подход, основанный на алгебраических структурах (в изучении СКМ – на полукольцах, в изучении КТ – на группах и булевых алгебрах) [10]. Кроме того, важную роль в подготовке специалистов этого профиля играют базовые понятия математической логики, теории алгоритмов, комбинаторики и теории графов. Определяющее значение структур и схем ДМ в обучении специалистов-математиков связано с возникновением математического эксперимента [137]. Для реализации такого эксперимента во внутриматематических исследованиях в последние годы созданы многочисленные пакеты прикладных программ СКМ.

Итак, язык охарактеризованных *доминирующих* в ДМ математических структур и схем есть с методологической точки зрения то, что должно быть отражено в концепции обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки. Изучение данных математических структур и схем обеспечивает интеграцию содержания на основе фундаментализации образования. В силу этого указанные математические структуры являются основой стратегии отбора содержания обучения учебному предмету «Дискретная математика».

2.2. Психологические аспекты обучения дискретной математике

Понятия и факты дискретной математики и особенно язык доминирующих в ней структур и схем являются весьма трудными и непривычными для восприятия ввиду их абстрактности, а также вследствие нарушения преемственности обучения между школой и вузом. Поэтому важную роль в использовании интеграционного потенциала ДМ играют психологические аспекты профильного обучения, необходимые для реализации в подготовке *принципа антропоцентризма*, в соответствии с которым во главу угла поставлена личность студента, в том числе особенности его познавательной деятельности.

Поскольку дискретная математика наряду с классической («непрерывной») математикой является основой математического моделирования с использованием компьютера во многих областях науки и производства, для выявления психологических аспектов использования совместного *интеграционного потенциала ДМ и классической математики* необходимо сначала обсудить следующие важные аспекты.

2.2.1. Психологические истоки и основы моделирования

В последнее время в психологии возникло понятие профессионального образа мира, его формирование является одной из задач обучения специальности. Вообще процесс обучения можно охарактеризовать «как процесс формирования инвариантного образа мира, социально и когнитивно адекватного реальностям этого мира и способного служить ориентировочной основой для эффективной деятельности в нем» [115, с. 272–273].

В гносеологическом и психологическом плане у истоков моделирования стоит, по-видимому, *аналогия*, т. е. выявление сходства между объектами по некоторым признакам, свойствам. При аналогии на основе найденного сходства объектов по некоторым признакам и свойствам выдвигаются предположения об их сходстве по другим признакам и свойствам. Наряду с аналогией психофизиологическим механизмом моделирования может быть *ассоциация*, т. е. образование связей между психическими явлениями, при которых актуализация одного из них влечет за собой появление другого.

Генезис механизмов моделирования можно увидеть также в становлении и развитии *символической функции* в мышлении, отражающей с помощью символов всеобщность (сущность) некоторых реальных предметов. «Символы … служат основанием для создания человеком различных моделей предметов (эти модели могут иметь вещественную, графическую и словесную форму)… Модели – это форма абстракции особого рода, в которой существенные отношения предметов выражены в наглядно воспринимаемых и представляемых связях и отношениях знаковых элементов. Это своеобразное единство единичного и общего (т. е. чувственного и абстрактного), при котором на первый план выдвинуто общее, существенное» [51, с. 128].

Создание моделей как форм абстракций особого рода предполагает наличие способности действовать «в уме» при решении творческих задач. Я. А. Пономарев вводит понятие *психологического механизма* решения творческих задач, представляющего собой своего рода психологический инвариант содержания накопленного человеком *опыта*. Наличие этого механизма у человека генетически зафиксировано, а возможности его развития предопределены наследственностью. Однако механизм не развивается спонтанно: этот процесс связан с фактическим содержанием приобретаемого опыта, со способами получения того или иного содержания и ограничен возрастным пределом. «Психологический механизм решения творческих задач достаточно отчетливо представлен способностью действовать в уме, хотя способность эта не охватывает его полностью: она представляет ту его часть, которая наиболее доступна изучению» [194, с. 287–288].

Анализ Я. А. Пономаревым решения творческих задач испытуемыми со способностью действовать «в уме» показал, что этапы развития не исчезают и у развитой способности; при образовании новых этапов предшествующие преобразуются, но сохраняют свои отчетливые следы – они трансформируются в *структурные уровни* организации данной способности. Важность анализа особенностей *внутриструктурной* организации познавательной способности обоснована Л. М. Веккером [22].

Я. А. Пономарев пишет: «При нетворческой задаче испытуемый с развитой способностью действовать “в уме” реализует уже готовые логические программы, готовые знания, при этом высший структурный уровень его способности однозначно подчиняет себе функционирование всех нижележащих, так что это функционирование оказывается незаметным. Однако при творческой задаче (той, которая не может быть решена при опоре лишь на наличные знания) картина резко меняется: провал избранной логической программы отбрасывает решающего на нижние структурные уровни организации способности, и дальнейший ход решения оказывается постепенным подъемом по этим уровням, представляющим собой преобразованные, трансформированные этапы развития. Решающий как бы карабкается по ним. Они же при успешном решении задачи выступают как функциональные *ступени* развивающих (творческих) взаимодействий» [194, с. 271–272].

Итак, обратим особое внимание на выявленный Я. А. Пономаревым *психологический механизм* решения творческих задач, являющийся своеобразным психологическим инвариантом содержания накопленного человеком *опыта*. В основе функционирования этого механизма лежат различные *структурные уровни* организации способности действовать «в уме» и готовые логические программы правильных рассуждений.

2.2.2. Когнитивные структуры и схемы

Структурные уровни организации способности действовать «в уме» и готовые логические программы рассуждений в современной психологии называются когнитивными структурами и схемами, они обеспечивают «хранение, упорядочение и преобразование наличной и поступающей информации и отвечают за воспроизведение в психике познающего субъекта устойчивых закономерных аспектов его окружения» [273, с. 244]. Как уже отмечалось, когнитивные структуры и схемы формируются на основе изучения математических структур и схем.

В. А. Тестов прослеживает аналогию когнитивных структур (схем) с таким понятием искусственного интеллекта, как «рамка»: «Адекватное распознавание и описание ситуаций реальных сцен невозможно на основе одних только полученных в данный момент входных сигналов. Для каждой новой ситуации у человека, как и у ЭВМ, должна быть рамка или иерархия рамок, предвосхищающих основные моменты того, что должно появиться» [236, с. 59]. Действительно, каждый учитель знает, что «подготовленный ученик в буквальном смысле видит материал иначе – более глубоко и адекватно, чем плохо подготовленный. Это происходит по причине того, что имеющиеся у подготовленных учеников обобщенные схемы “накладываются” на воспринимаемый материал, позволяют им осуществлять значительно более глубокий и широкий анализ, что и приводит к закономерно лучшему пониманию и сохранению в памяти нового материала» [236, с. 59]. Формирование хорошо организованных и упорядоченных когнитивных структур должно быть признано самой главной задачей школьного обучения [277, с. 24].

В процессе обучения когнитивные структуры и схемы претерпевают изменения. В зависимости от характера этих изменений Д. Норманом были выделены следующие *формы научения* [141].

Наращивание структур – добавление нового знания к уже существующим схемам памяти.

Создание структур – образование новых понятийных структур, новое, качественное обновление системы знаний, когда существующие схемы становятся недостаточными. По мнению Д. Нормана, «вероятно, это самый важный способ научения» [141, с. 103].

Настройка структур – тонкое приспособление знания к задаче. Необходимые схемы уже существуют, в них заключено нужное знание. Но для какой-либо цели они непригодны потому, что они слишком общие или плохо приспособлены для данного конкретного использования. Поэтому знание нужно «настраивать», постоянно приспосабливать к задаче. «Настройка – это, вероятно, самый медленный способ научения, но это то, что превращает простое знание предмета в совершенное владение им» [141, с. 105].

К этим формам научения следует добавить еще одну, рассмотренную Л. Б. Ительсоном [80], – *перестройку* структур. Эта форма научения состоит из преобразований структур трех типов:

1) переход на новую, более высокую ступень организации, когда сформированная ранее структура становится подструктурой новой, более широкой структуры;

2) изменение принципа организации структуры, когда координация (сочетание) частей внутри структуры заменяется их субординацией (подчинением) или наоборот;

3) перецентровка структуры, т. е. выдвижение в качестве существенных тех элементов, которые были второстепенными, и наоборот.

На основе современных представлений о когнитивных структурах и схемах математические когнитивные структуры В. А. Тестовым поделены на два основных типа (при всей условности такого разделения) [236]. К первому типу относятся алгебраические, порядковые и топологические когнитивные структуры, выступающие как прототипы, *упрощенные модели математических объектов*, как комплексы, средства хранения математических знаний (тип структур, образованных по «горизонтальному» принципу). Ко второму типу относятся логические, алгоритмические, комбинаторные, образно-геометрические когнитивные схемы, выступающие в первую очередь как средства, *методы математического* познания. Этот тип структур складывается на основе связей, которые являются общими для совершенно различных объектов, поэтому они образуются по «вертикальному» принципу.

Два типа когнитивных структур, формирующихся по «горизонтальному» и «вертикальному» принципу, выделяет и М. А. Холодная [273, с. 93]. Когнитивными структурами второго типа являются «понятийные психические структуры», занимавшие центральное место в трудах Л. С. Выготского.

Фундаментальная роль алгебраических, порядковых и топологических когнитивных структур в мышлении человека обоснована в трудах Ж. Пиаже. Он фактически исследовал путь обретения человеком знаний о мире, основанный на «универсальной логической необходимости» – математике. В трудах Л. С. Выготского рассмотрен принципиально другой путь обретения знаний – *посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств* на основе когнитивных схем как средств, методов познания. Отсюда следует, что для обучения полноценному моделированию процессов и явлений необходим синтез этих двух путей обретения знания, что, несомненно, будет являться *стратегически* важным источником развития «моделирующего» и, следовательно, «*дискретного»* мышления [20, с. 10].

Идеи формирования и развития когнитивных структур и схем получили воплощение в системах развивающего обучения Л. В. Занкова и В. В. Давыдова. «При всем различии многих методических аспектов этих систем их исходные теоретические основы не противоречат друг другу и в равной мере отвечают общим универсальным законам формирования и развития структур» [236, с. 77].

Рассмотрим возрастные особенности формирования математических когнитивных структур, имеющие важное значение в *методической* подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. Ж. Пиаже выделяет следующие стадии интеллектуального развития человека [189].

С рождения до 2 лет наблюдается стадия сенсорно-моторного мышления, которое характеризуется варьированием действий, направленных на объект.

С 2 до 6–7 лет происходит развитие наглядного мышления (дооперационный период). Главное на этой стадии – усвоение вербальных знаков родного языка и переход к простейшим мыслительным действиям, ребенок научается обозначать явления внешнего мира с помощью символов. В этот возрастной период отсутствует такое свойство мыслительных операций, как обратимость, т. е. понимание того, что можно произвести обратное действие. Оно является отражением свойств такой алгебраической структуры, какой является группа. В мышлении впервые появляются причинные связи в логике очевидных наглядных впечатлений.

«С 7–8 до 11–12 лет формируются конкретные операции», т. е. операции, которые ребенок может выполнять только с элементами множеств «предметов» (бусинок, кубиков и т. п.) в конкретной предметной ситуации [190, с. 179]. На этой стадии умственные действия ребенка приобретают свойство обратимости, и у него возникают внутренние когнитивные структуры, с помощью которых осуществляются операции.

С 11–12 до 14–15 лет наблюдается стадия формальных операций, выполняемых без необходимой связи с действительностью. На их основе фомируются умение проводить гипотетико-дедуктивные рассуждения, исследовательская познавательская позиция, способность проверять ход как собственной, так и чужой мысли. Происходит синтез структур, соответствующих обращению и взаимности.

Согласно Ж. Пиаже, базовое интеллектуальное развитие, в частности математическое, заканчивается к 15 годам. К этому времени все *специфические* когнитивные структуры, являющиеся отражением объективно существующих математических структур, в сознании ребенка уже сформированы.

С 16 до 25 лет, согласно экспериментальным исследованиям Б. Г. Ананьева, Е. И. Степановой [3] и И. Я. Каплуновича [82], образуется система влияний высших уровней познавательного отражения на низшие и низших на высшие, т. е. система когнитивных синтезов «сверху» и «снизу» на основе разнообразных связей и отношений между уже сформировавшимися к 16 годам специфическими когнитивными структурами и схемами.

2.2.3. О роли закона дифференциации и интеграции когнитивных структур в теоретических основах развивающего обучения

В методике построения профильных курсов обучения дискретной математике в школах и колледжах (техникумах) важное значение имеет соответствие исходных теоретических основ развивающего обучения общим универсальным законам формирования и развития когнитивных структур. При всем различии многих методических аспектов двух систем развивающего обучения их психолого-педагогические принципы основаны на «законах развития [когнитивных] структур и являются составной частью социокультурного системного подхода» [236, с. 78]. Чтобы обучение было развивающим, необходимо, чтобы оно строилось с учетом закона дифференциации структур (закона развития от общего к частному) и закона интеграции структур (закона развития от простого к сложному). Таким образом, в развивающем обучении ведущую роль играет первый основной принцип интеграции образования, каким является принцип *диалектического единства интеграции и дифференциации* (см. п. 1.1).

Обе системы развивающего обучения широко внедрены как в школе, так и в вузе. Естественно, на первом этапе обучения дискретной математике в школе должна преобладать постепенная интеграция структур – развитие от простого к сложному. При этом необходима максимальная мотивационная вовлеченность ученика в работу с занимательным или практическим *сюжетным* текстом разнообразных задач.

Действительно, системы развивающего обучения имеют в своей основе идеи Л. С. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств. Для такой реконструкции обстоятельств «жизни» и необходимы задачи с занимательным или практическим *сюжетным* текстом. При правильном подборе таких задач (в частности, задач на графы) можно уже с 8-го класса демонстрировать первые серьезные образцы математического моделирования.

Таким образом, системы *развивающего обучения* ДМ способствуют формированию на основе когнитивных структур дискретной компоненты математического стиля мышления, содействуют постепенному осознанному выбору специальности у учащихся, а у студентов – выбору профиля обучения в вузе путем реконструкции обстоятельств «жизни».

В обучении дискретной математике на математических факультетах университетов и педагогических институтов должна преобладать дифференциация структур – развитие от общего к частному. При построении профильного курса по специальности должен быть найден точный *баланс* в использовании диалектического единства дифференциации и интеграции.

Итак, в соответствии с теоретическими основами развивающего обучения построение профильного курса ДМ должно осуществляться на основе дифференциации и интеграции структур с использованием различных видов задач (в особенности с сюжетным текстом).

2.2.4. Другие психологические аспекты обучения дискретной математике

Сформированность специфических когнитивных структур, складывающихся в процессе обучения математике, «не является единственным показателем интеллектуальной зрелости» взрослого человека [273, с. 46]. Поэтому следует дополнительно учесть некоторые психологические основы обучения ДМ *на социокультурном опыте* (установление связи со всеми сторонами культуры социума), в частности некоторые критерии развития интеллекта [273].

М. А. Холодная при описании феноменологического критерия (со ссылкой на некоторых исследователей) отмечает, что «дефициты в организации базы знаний являются одним из источников умственной отсталости» [273, с. 39]. Действительно, только на основе системно-структурного подхода в обучении математике и формируются в мышлении обучаемого когнитивные специфические структуры, «отвечающие» за правильную организацию хранения и использования всей базы запоминаемых знаний. «Ибо умен не тот, кто знает, а тот, у кого сформированы механизмы приобретения, организации и применения знаний» [273, с. 41], т. е. когнитивные структуры и схемы. В связи с этим интересно отметить, что понятия «базы знаний» и «базы данных» являются одними из важнейших в СКМ. Поэтому обучение дискретной математике выступает необходимым условием уяснения точного смысла этих понятий, весьма важных в подготовке, например, будущих специалистов-психологов.

Итак, анализ психологических аспектов обучения показывает, что *полноценное обучение* дискретной математике (и на этой основе математическому моделированию) возможно только в рамках современного *системно-структурного подхода* в методике преподавания на основе формирования и развития математических когнитивных структур и схем. К сожалению, опираясь на отдельные результаты исследований выдающегося французского психолога Ж. Пиаже, во Франции и некоторых других странах Европы педагоги ограничиваются попытками внедрения в курс математики школы и вуза только алгебраических, порядковых и топологических структур и не уделяют должного внимания комбинаторным, алгоритмическим, образно-геометрическим схемам, играющим особую роль в исследовательской активности, в образовании новых понятийных структур и, тем самым, в выборе траектории вариативной подготовки, во главу угла которой поставлена личность школьника и студента.

В использовании интеграционного потенциала дискретной математики в различных видах подготовки студентов педагогических специальностей (в том числе в разработке концепции обучения ДМ) наряду с *системно-структурным* подходом и психологическими аспектами его реализации фундаментальную роль играют дидактические принципы обучения.

2.3. Дидактические принципы обучения дискретной математике

Вопрос о принципах обучения является наиболее спорным в дидактике, что в значительной мере обусловлено наличием различных трактовок самого термина «принцип». В отечественной дидактике наиболее разносторонне принципы обучения рассматривались в работах Ю. К. Бабанского, М. Н. Скаткина, С. И. Архангельского, в зарубежной – в работах Дж. Брунера, В. Оконя и др. В систему классических принципов, признаваемых большинством ученых и являющихся важнейшими ориентирами в образовании, включены уже обсуждавшиеся принципы интеграции, фундаментализации, культуросообразности. Но наряду с указанными принципами в теоретических основах обучения дискретной математике значимую роль играют принципы научности, генерализации знаний, преемственности и профессионально-педагогической направленности подготовки. Рассмотрим специфику реализации этих принципов, нашедших отражение в рамках содержательного направления интеграции в различных видах подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

2.3.1. Принцип научности

Как следует из изложенного в п. 1.3, базовые понятия дискретной математики необходимы для реализации важной методической цели обучения в школе и колледже (техникуме): подготовки «многоборца», удачно «выступающего» на всех этапах построения полной цепочки использования компьютера. Поэтому одним из условий соблюдения принципа научности в интеграции обучения ДМ и другим дисциплинам различных видов подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов является формирование содержания профильного обучения дискретной математике на основе ее базовых понятий. Тем не менее соблюдение только этого условия недостаточно для реализации указанного принципа. Поэтому рассмотрим другие условия соблюдения принципа научности в профильном обучении дискретной математике.

1. *«…Нельзя обучить приложениям математики, не научив самой математике»* [106, с. 75]. В частности, «обучение математическому моделированию должно входить как часть в специальное образование, а не проводиться за счет общего математического образования. Изучение математики нельзя подменять обучением составлению математических моделей» [106, с. 160]. Поэтому, например, методика

построения элективного курса дискретной математики в вузе должна учитывать особенности курса математики, изучаемого в школе и колледже, и специфику организации учебного процесса. В свою очередь, профильный курс обучения инженеров-педагогов должен разрабатываться на базе общего курса высшей математики, предусмотренного в профиле подготовки.

2. «*Математика едина*» [106]. «…Как никогда ранее математическое знание сильно дифференцировалось. Возникла масса отдельных математических дисциплин… И все-таки следует провозгласить тезис о *единстве математики*… Можно сказать, что фундаментальная математика и прикладная математика, *переливаясь* (курсив мой. – *Е. П.*) друг в друга, снова представляют единую, но дифферецированную математику» [23, с. 92–93]. Высказанный тезис нацеливает на такое построение профильного курса обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, при котором будет обеспечено гармоничное изучение всей системы методов математического моделирования, основанных как на классической («непрерывной»), так и на дискретной математике. В результате реализации этой *цели* и будут реально созданы необходимые предпосылки для полноценного обучения моделированию, присущему данной области исследований.

3. *«Содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики»* [106, с. 110]. Образно говоря, при построении профильного курса не надо действовать по принципу «чего изволите?» (в частности, при учете мнения выпускающей кафедры, отвечающей за подготовку инженеров-педагогов).

Учет внутренней логики самой математики (наряду с системно-структурным подходом в образовании) также свидетельствует о необходимости включения в основы профильного курса дискретной математики для студентов указанных профилей обучения базовых понятий ДМ. Эти понятия обеспечивают единство и целостность обучения математике. Так, например, понятия логической операции, предиката и квантора являются основой строгих, точных математических формулировок, рассуждений во всех областях математики. Понятие отображения и классификация его видов при обучении дискретной математике обеспечивают выработку общенаучной культуры использования различных отображений, в том числе и функций, как в самой математике, так и в математическом моделировании. Следовательно, нельзя обойтись без базовых понятий при отборе содержания *любого* профильного курса ДМ.

Таким образом, важной целью изучения учебного предмета «Дискретная математика» является обеспечение *взаимосвязи фундаментальных и профессиональных начал* в подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. При этом, например, в качестве ориентира профильного обучения ДМ инженеров-педагогов целесообразно использовать следующую четырехуровневую классификацию профессиональных задач для обучения курсу математики технического вуза [200]:

1) профессионально аналогичный класс задач и формулировок;

2) учебные профессиональные задачи с элементами математического моделирования;

3) учебно-исследовательские профессиональные задачи;

4) научно-исследовательские профессиональные задачи.

При обучении инженеров-педагогов следует предусмотреть и решение задач из теории вычислительных процессов, играющих важную роль при подготовке специалистов указанного профиля к работе в высокотехнологичных автоматизированных отраслях производства.

Принцип научности в значительной мере определяет систематичность, последовательность и на этой основе доступность обучения.

При изучении курса математики, весьма растянутом по времени, необходимо соблюдать еще несколько принципов [144]. В свете современного социокультурного подхода к «дополнительным принципам построения содержания, являющимся необходимыми условиями реализации научности, доступности, систематичности и последовательности обучения, относят генерализацию знаний или выделение стержней курса» [236, с. 94].

2.3.2. Принцип генерализации знаний

Принцип генерализации знаний не был выделен В. А. Оганесяном в качестве основного [144], но под разными формулировками он используется во многих других педагогических исследованиях. Этот принцип задает важное направление реализации принципа научности, ориентирующее на выделение научных основ, истоков курса, поскольку он означает, что «начинать построение курса надо с истоков, с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизаций в систему математических знаний» [236, с. 98]. Например, при изучении алгебраических структур в качестве таких истоков следует принять понятия кольца остатков (от деления на 4) и пятиэлементного поля, рассмотреть таблицы Кэли операций и свойства этих алгебр. Затем перейти к изучению свойств операций и вычислениям значений и тождественным преобразованиям выражений в этих алгебрах. На основе этого и будет осуществлен «уход от довлеющих рекомендаций с установившимся инструктивным материалом» [103, с. 13], в частности, «довлеющих» свойств действий и степеней, тождественных преобразований привычных алгебраических выражений.

Очевидно, в порядке логического развертывания математических структур следует учесть понятия частично упорядоченного множества и решетки, тем более что понятие решетки является одновременно ярким примером бинарного отношения и алгебры, позволяющим наглядно представить таблицы Кэли алгебраических операций (пересечения и объединения элементов).

В обучении ДМ, как и всей математике, наряду с принципом научности и дополняющим его принципом генерализации знаний фундаментальную роль играет принцип преемственности в обучении.

2.3.3. Принцип преемственности в обучении дискретной математике между школой и вузом

В дидактике преемственность обучения обычно трактуется как принцип, требующий формирования знаний, умений, навыков в определенном порядке, согласно которому каждый элемент учебного материала логически связывается с другими: последующее опирается на предыдущее и готовит, в свою очередь, к усвоению нового. Проблема преемственности исследовалась многими учеными. Например, преемственности между школой и вузом посвящены работы Г. П. Мещерякова, Ю. В. Сидорова, Г. Г. Хамова, Б. П. Эрдниева и др. Решением проблем профильной и уровневой дифференциации занимались В. Г. Болтянский, В. А. Гусев, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, И. М. Смирнова, М. В. Ткачева, Р. А. Утеева, В. В. Фирсов и др. Вопросы повторения, пропедевтики и «переучивания» рассматривали М. И. Зайкин, К. И. Нешков и др. Исследованию теоретических оснований преемственности посвящена монография Г. А. Клековкина [88], в которой имеется обзор работ, так или иначе связанных с указанной проблемой. По его мнению, осмысление новых подходов к обучению (в частности, различных концепций развивающего обучения) и назревшие проблемы практической перестройки традиционной системы образования требуют новых трактовок и самого принципа преемственности: современные представления о целостности развития человеческой личности и основные положения о соотношении обучения и развития в рамках социокультурного подхода позволяют рассматривать категорию «преемственность» в более широком, философском смысле как объективной и необходимой связи этапов развития, когда новое, меняя старое, сохраняет в себе его определенные качественные элементы. Поэтому вначале объектами исследования категории «преемственность» становятся ее специфические проявления в процессах физиологического, психического, личностного и деятельностного *развития* ребенка. Не менее важно систематизировать знания о возрастных возможностях ребенка, в том числе и в обучении дискретной математике (см. подп. 2.2.2).

Анализ различных трактовок понятия «развитие» позволил Г. А. Клековкину сделать вывод о том, что *преемственность – закономерность развития, а принцип преемственности – педагогическое требование, основанное на этой закономерности* [88]. Исследователь отмечает, что такая трактовка рассматриваемого принципа дает возможность по-новому взглянуть на другие принципы дидактики: принцип преемственности обеспечивает соблюдение принципов научности, систематичности, последовательности и доступности, а также принцип учета возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся. При этом любой из названных принципов можно рассматривать как конкретный критерий принципа преемственности.

Новая трактовка принципа преемственности, данная Г. А. Клековкиным, подтверждается и выводом о том, что более широкое понимание преемственности обучения требует рассмотрения *динамики изменения взаимосвязей всех основных компонентов методической системы* (целей, содержания, форм, методов, средств), логической связи теоретического и практического материала, упорядоченности в изучении различных учебных предметов, оправданности межпредметных связей [203]. Таким образом, «принцип преемственности детерминирует генеральную “скелетную” линию *проектирования и реализации* процесса обучения» [88, с. 7].

Итак, для осуществления преемственности обучения дискретной математике стратегически важно сначала учесть *главное в проектировании и реализации* процесса обучения, а затем выявить *главное в динамике* изменения взаимосвязей всех основных компонентов методической системы обучения.

Важную роль в проектировании процесса обучения ДМ и, следовательно, в теоретических основах преемственности играют *возрастные особенности формирования и развития математических когнитивных структур* (структурный фактор). В подп. 2.2.2 были выделены четыре различные формы преобразования структур: наращивание, создание, настройка и перестройка структур. «Сущность принципа преемственности состоит в том, что его реализация позволяет свести к минимуму в количественном отношении создание новых структур, что требует больших усилий как от учащихся, так и от преподавателей, и обеспечить преимущественность более легких процессов наращивания, настройки и перестройки структур» [236, с. 134].

Важную роль в преемственности в обучении дискретной математике играет «преемственный» выбор изучаемых базовых понятий и уровня формальности, строгости их изучения.

Проиллюстрируем этот вывод достаточно характерным примером методики изучения понятия бинарного отношения в подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. Бесспорно, понятие бинарного отношения, необходимое для изучения понятия модели, должно быть в обязательном перечне *базовых* понятий дискретной математики, изучаемых студентами этих профилей подготовки. Практика показывает, что с учетом типичных исходных знаний обучаемых при изучении бинарного отношения не следует использовать строгое определение декартового произведения множеств [242]. Для преемственности обучения необходимо сначала пояснить значение приставки «би-» и привести примеры бинарных отношений из школьного курса математики (отношение порядка, параллельности, перпендикулярности, отношения «делиться нацело» на множестве целых чисел). Затем целесообразно изучить основные свойства бинарных отношений. После этого можно рассмотреть функцию и геометрическое отображение как важный частный случай бинарного отношения и проиллюстрировать изучаемое понятие на примерах конечных графов. Далее – привести примеры комбинаторных задач на правило произведения (множеств). И лишь после этого дать строгое определение декартова квадрата множества и бинарного отношения на этом множестве.

Таким образом, преемственность изучения понятия бинарного отношения осуществляется на основе межпредметных связей вузовской дисциплины «Дискретная математика» со школьным курсом алгебры и геометрии, реализации принципа преемственности в выборе предварительно изучаемых понятий графа, декартова квадрата и функции за счет «погружения» обучаемых в систему привычных представлений (о прямых и числах).

2.4. Реализация принципа профессионально-педагогической направленности в обучении дискретной математике

Как подчеркивает А. Г. Мордкович, качество работы педагогических вузов определяется прежде всего тем, насколько их выпускники соответствуют идеальной модели мастера-педагога, в какой степени они владеют профессиональным мастерством. Немаловажную роль при этом играет принцип профессионально-педагогической направленности специальной подготовки [134].

Реализация данного принципа основана на принципах фундаментальности, бинарности, ведущей идеи и непрерывности. При этом принцип фундаментальности трактуется как необходимость солидной и в то же время не оторванной от нужд приобретаемой профессии математической подготовки будущего учителя. Принцип бинарности выражает обязательность объединения в каждом математическом курсе педагогического вуза научной и методической линий. Принцип ведущей идеи проявляется в выдвижении на первый план связи конкретной математической вузовской дисциплины с соответствующим школьным предметом. Принцип непрерывности выражает необходимость выявления и оптимального использования всех возможностей каждого математического предмета, чтобы студент с первого и до последнего дня своего пребывания в стенах института непрерывно приобщался к будущей педагогической деятельности.

Гармоничное сочетание всех этих принципов лежит в основе формирования психолого-педагогического, методического и специального компонентов подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, в профессиональной подготовке которых фундаментальное значение имеет именно курс математики.

Рассмотрим конкретные особенности реализации всех четырех принципов профессионально-педагогической направленности в разработке концепции и создании методической системы обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей в рамках содержательного направления интеграции образования на основе принципов фундаментальности, научности, генерализации знаний и преемственности обучения. При этом будем исходить из того, что «предложенная система принципов полна в тем смысле, что каждый компонент методической системы (кроме лидирующего, определяющего компонента – целей обучения) имеет под собой в качестве доминирующей основы один из четырех принципов: принцип бинарности является доминирующим при выборе методов обучения, принципы фундаментальности и ведущей идеи – при выборе содержания обучения, принцип непрерывности – при выборе форм и средств обучения» [134, с. 268].

2.4.1. Принцип фундаментальности

Для реализации принципа фундаментальности как необходимого условия математической подготовки будущего учителя в первую очередь необходима «направленность содержания образования на методологически важные долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала обучаемого (будущего педагога. – *Е. П.*), обеспечивающие качественно новый уровень его интеллектуальной и эмоционально-нравственной культуры, создающие внутреннюю потребность в саморазвитии и самообразовании на протяжении всей жизни человека, способствующие адаптации личности в быстроизменяющихся социально-экономических и технологических условиях» [238, с. 8] (что уже цитировалось в подп. 1.2.2). Поэтому, как указывает А. Г. Мордкович, принцип фундаментальности доминирует при выборе содержания обучения математике [134], в нашем случае – ДМ.

Поскольку «методологически важными, долгоживущими и инвариантными элементами современной человеческой математической культуры» являются идеи и методы современной дискретной математики, эти идеи и методы в соответствии с рассматриваемой трактовкой принципа фундаментальности и являются неотъемлемой частью содержания *солидной и в то же время не оторванной от нужд приобретаемой профессии математической подготовки будущего педагога. Как установлено при анализе предмета и функций ДМ* (см. п. 1.3), владение ее идеями и методами стало неотъемлемой частью общей культуры любого специалиста, а тем более будущего педагога, умело использующего в своей профессиональной деятельности методы современной математики и современные информационные технологии.

Как следует из изложенного в подп. 2.1.3, «методологически важным, долгоживущим и инвариантным элементом математической культуры» наряду с идеями и методами современной дискретной математики является язык доминирующих в ней алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем.

2.4.2. Принцип бинарности

Как уже было установлено, в результате междисциплинарной интеграции естественных, технических и гуманитарных наук возникли математические физика, химия, биология, география, экология, экономика, психология, история. Кроме того, методы математики, особенно методы математического моделирования, стали интенсивно применяться в зоологии, ботанике, физиологии, юриспруденции, лингвистике, физической культуре и даже в искусстве (см. подп. 1.5.1).

Таким образом, необходимо расширить предметную область применения принципа бинарности, предложив в соответствии с общенаучным принципом научности объединение в каждом математическом курсе, изучаемом будущими учителями-предметниками (а не только будущими учителями математики), научной и методической линий. Анализ принципа культуросообразности применительно к математическому образованию (см. подп. 1.3.5) *показал, что в этом процессе главным ориентиром может служить современная математическая культура, наиболее яркими проявлениями которой являются* математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы.

Рассмотрение математического аппарата исследований с использованием СКМ и КТ показывает, что в формировании основ этого аппарата наряду с классической («непрерывной») математикой фундаментальную роль играет дискретная математика. Например, метод конечных разностей решения дифференциальных уравнений имеет большое значение в математической физике, молекулярные графы – в математической химии, клеточные автоматы, отношения различной арности и элементы алгебры высказываний – в биологии развития, алгебраические операции и логика предикатов – в математической экономике.

Таким образом, современный педагог должен не только обладать адекватными своей предметной области познаниями в ДМ, но и уметь использовать их в процессе обучения учащихся и студентов колледжа (техникума). Поэтому в объединении научной и методической линий в каждом математическом курсе, изучаемом будущими учителями-предметниками, важное значение имеет знание современной дискретной математики.

Принцип бинарности, доминирующий при выборе методов обучения [134], имеет особенно важное значение в математической подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, несущих наибольшую ответственность за обучение школьников и студентов технических колледжей (техникумов) корректному использованию потенциала современного компьютера и, в частности, систем компьютерной математики и компьютерных технологий в изучаемых профильных предметах. Как установлено в подп. 2.1.3, язык структур и схем ДМ играет фундаментальную роль в реализации этапов математического моделирования, особенно в оптимальном выборе языка и метода моделирования, разработке алгоритма, программы вычислений и в итоговом анализе всех возникающих погрешностей в избранной профессиональной области.

Таким образом, очевидна роль принципа генерализации знаний, ориентирующего на выделение общих научных основ, истоков математического и методического курсов, какими являются основные математические структуры дискретной и непрерывной математики, и организацию материала обучения «в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизаций в систему математической науки» [236, с. 96].

Напомним, что незнание языка этих структур и схем порождает ошибки моделирования – те, что остаются незамеченными в процессе итогового анализа и тестирования полученных результатов и доходят до этапа их внедрения.

2.4.3. Принцип ведущей идеи

Как уже отмечалось во введении, продолжают сохраняться проблемы, связанные с математической подготовкой будущих педагогов. В частности, по-прежнему «декларируемое родство математики и информатики в ходе освоения математической компоненты образования чаще всего не находит явного подтверждения, и студенты, изучая математические дисциплины, не склонны видеть в них часть своей профессиональной подготовки» [114, с. 2] (что высказано по поводу подготовки будущих учителей информатики, но справедливо и по отношению к подготовке будущих учителей математики и инженеров-педагогов). Для того чтобы студенты этих профилей подготовки видели в математических дисциплинах важную методическую часть своего профессионального обучения, требуется реализация принципа ведущей идеи, выражающего необходимость выдвижения на первый план связи конкретной математической дисциплины педагогического вуза с соответствующим школьным предметом. Поэтому принцип ведущей идеи, как и принцип фундаментальности, доминирует при выборе содержания обучения математике, в нашем случае – ДМ [134]. Для реализации вышеуказанной связи необходима интеграция содержания математической и методической подготовки будущих педагогов, имеющая важное методологическое значение в обучении студентов дисциплинам математического и естественнонаучного цикла (ФГОС подготовки педагогов).

Как показал проведенный в п. 1.3 анализ предмета и функций дискретной математики в математическом моделировании, в совершенствовании систем компьютерной математики, в развитии компьютерных технологий, ДМ имеет фундаментальное значение в интеграции содержания математической и методической подготовки будущих педагогов, особенно учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

Действительно, например, обучение дисциплине «Естественнонаучная картина мира» расширяет научное мировоззрение студентов указанных специальностей посредством формирования целостных представлений о процессе математизации наук и фундаментальной роли дискретной математики в этом процессе, что, в свою очередь, способствует формированию их представлений о естественнонаучной картине мира. Обучение ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов должно осуществляться в единстве с «непрерывной» математикой, поскольку эти сферы знаний лежат в основе математического аппарата многих естественнонаучных дисциплин.

Также дискретная математика имеет важное значение в обучении дисциплине «Основы математической обработки информации» как математическая основа информатики и, в частности, математической обработки информации, что установлено в подп. 1.4.1.2.

Наконец, ДМ необходима в вариативной методической подготовке и обучении некоторым дисциплинам профессионального цикла педагогов указанных профилей подготовки, что проиллюстрируем на примере подготовки будущих педагогов профессионального обучения и особенно инженеров-педагогов.

При подготовке бакалавров профессионального обучения к организационно-технологической деятельности в ФГОС ВО предусмотрена «организация образовательного процесса с применением эффективных технологий подготовки рабочих, служащих и специалистов среднего звена» [257, с. 8]. Добавим, что согласно прежнему ФГОС ВПО подготовки бакалавров профессионального обучения студент должен знать «фундаментальные разделы математики в необходимом объеме для (подготовки рабочих в различных отраслях экономики) осуществления профессионально-педагогической деятельности» [264, с. 15]. Как следует из требований этих стандартов, в обучении бакалавров применению эффективных технологий, основанных на языке математики, особенно ее фундаментальных разделов, определяющую роль играют *математическое моделирование, дискретная математика* и *вычислительные процессы.* Они имеют важное значение при разработке всех новейших *технологий* и потому необходимы в подготовке рабочих и специалистов среднего звена в наступивший век «компьютерной» автоматизации и роботизации производства. Поэтому идеи и методы этих областей математики, в том числе ДМ, учитывают при выборе как содержания математических дисциплин, так и содержания методики профессионального обучения инженеров-педагогов.

Дискретная математика приобретает еще большее значение в подготовке магистров профессионального обучения, поэтому в общенаучном цикле структуры основных образовательных программ ФГОС ВПО магистратуры не случайно были указаны дисциплины «История и методология науки», «Методология научного творчества» и «Математическое моделирование» [265]. Значение этих дисциплин фактически отражено и в новом ФГОС ВО в формировании следующих способностей: «формулировать научно-исследовательские задачи в области профессионально-педагогической деятельности, решать их с помощью современных технологий и использовать российский и зарубежный опыт» (ПК-12), «анализировать современные отраслевые (производственные) технологии для обеспечения опережающего характера подготовки рабочих (специалистов)» (ПК-31) [258, с. 10–12].

2.4.4. Принцип непрерывности

В соответствии с принципом непрерывности интеграционный потенциал дискретной математики должен быть направлен на то, чтобы студент с первого и до последнего дня своего пребывания в стенах института непрерывно приобщался к будущей педагогической деятельности. Поэтому данный принцип является доминирующим при выборе форм и средств обучения.

В реализации принципа непрерывности фундаментальное значение приобретают различные формы и средства вариативной подготовки студентов, в том числе средства формирования вариативной индивидуальной образовательной траектории (ИОТ), основанной на личности студента, на что ориентирует принцип антропоцентризма, являющийся одним из трех принципов интеграции образования (см. п. 1.1).

2.4.5. Концепция методической системы обучения дискретной математике

Анализ главных особенностей охарактеризованного интеграционного потенциала дискретной математики, ее предмета и функций, а также принципов обучения позволяет сформулировать концепцию методической системы обучения (МСО) ДМ студентов указанных специальностей, суть которой отражена в следующих положениях:

- высокая значимость обучения дискретной математике определяется тем, что *владение ее идеями и методами стало неотъемлемой частью общей культуры специалиста*, умело использующего в своей профессиональной деятельности методы современной математики и новейшие информационные технологии;

- обучение ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов должно осуществляться *в единстве* с «непрерывной» математикой, что подразумевает формирование у них умения гармоничного сочетания в приложениях математики дискретных и непрерывных моделей и корректного использования систем компьютерной математики и компьютерных технологий;
- в основе профессионально-педагогической направленности обучения дискретной математике студентов указанных педагогических специальностей лежит интеграция их математической и методической подготовки;
- обучение ДМ расширяет научное мировоззрение студентов указанных специальностей посредством формирования целостных представлений о процессе математизации наук и фундаментальной роли дискретной математики в этом процессе;
- обучение ДМ расширяет возможности метапредметного характера математической подготовки будущих педагогов указанных специальностей и тем самым усиливает возможности метапроектного обучения математическим дисциплинам, ограничивающего традиционный предметоцентризм.

Положение о единстве обучения дискретной и непрерывной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов является актуальным и для студентов многих других специальностей. К сожалению, в обучении ДМ, как правило, обращают внимание только на то, что должна быть какая-то связь между непрерывной и дискретной математикой, что значительно урезает возможности реализации широко известного тезиса о единстве в обучении математике.

Предлагаемые положения концепции регулируют процесс и формируют цели и содержание многуровневого обучения дискретной математике на всех этапах его пропедевтики (довузовская и вузовская на младших курсах бакалавриата), фундаментальной базовой подготовки при изучении курса «Дискретная математика» (на старших курсах бакалавриата или в магистратуре) и при послевузовском обучении в аспирантуре, на курсах повышения квалификации и др.

2.5. Системный анализ категории методической системы обучения математике, ее основных компонентов и состояний

2.5.1. Системный подход и его роль в анализе категории методической системы обучения будущих педагогов

Новая волна популярности системного подхода (угасшая в первой половине 90-х гг. XX в.) связана с переосмыслением программы системного исследования и его методики с точки зрения интеграции естественнонаучного и гуманитарного дискурсов в системно-педагогическом исследовании в эпоху математизации наук.

Как известно, системный подход представляет собой общенаучную методологию педагогики, отражающую всеобщую связь и взаимообусловленность явлений и процессов, происходящих в образовании в процессе интеграции естественных и гуманитарных наук. Он ориентирует исследователя на рассмотрение процесса подготовки студентов как системы, имеющей определенное строение и свои законы функционирования. Ярким отражением системного подхода в обучении предмету стали категории методической системы обучения предмету и методического мышления [214, 216].

Важные особенности влияния процесса математизации наук на исследование категории методической системы обучения предмету (дисциплине) отчетливо выявляются при анализе категориального аппарата математики и особенно языка математических структур и схем.

Действительно, описание того, что такое математическая структура, относится к основаниям математики, а предметом самой математики являются конкретные математические структуры и отношения между ними (во всем их разнообразии). Аналогично, общее описание методической системы, ее компонентов и взаимосвязей относится к методологии методики обучения, а предметом методики являются конкретные модели, концептуально отражающие различные аспекты и составляющие процесса обучения математике. Эта особенность является важным аспектом реализации системного подхода в анализе категории методической системы обучения математике.

Во-первых, для изучения методических систем, их компонентов и взаимосвязей студент должен овладеть необходимым категориальным аппаратом системного исследования, в котором фундаментальную роль играют понятия языка математических структур и схем (в общенаучной терминологии – средств, методов познания). Среди них – понятия структуры (системы) и ее модели (интерпретации), изоморфизма («равенства» моделей), отношения порядка, эквивалентности, ряд понятий математической логики, теории графов, а также другие понятия математики, необходимые для системного анализа проблемы исследования.

Во-вторых, обогащенный математическими понятиями категориальный аппарат системного методического исследования необходим для выработки у будущих учителей умения адекватно ориентироваться в существующей иерархии (структуре) тенденций, подходов методической науки, а также умения правильно выбирать и использовать существующие МСО и их модели. В результате чего будущие учителя глубже поймут взаимосвязи между различными научными областями, у них появится «умение осуществлять перенос положений из одной научной области в другую, конструировать аналоги объектов и их свойств», что является признаком методического мышления [214, с. 5].

Анализ самой структуры интеллектуальных операций в мышлении человека показывает, что в ее формировании фундаментальную роль играют структуры математики. Действительно, не случайно даже в названиях известных интеллектуальных операций – «анализ, синтез, структурирование, раскрытие отношений» и др. [278, с. 221] – нашли отражение области и разделы современной дискретной математики и ее приложения: дискретные структуры (модели), дискретный анализ, анализ и синтез (микросхем, узлов ЭВМ), отношения и соответствия и др.

Еще более отчетливо влияние процесса математизации наук на формирование представлений о категории методической системы обучения и вообще о категориальном аппарате методики обучения предмету (дисциплине) студентов *выявляется при анализе уникальных возможностей, которые предоставляет исследователям современный компьютер* (что было сделано в подп. 1.4.1.2). Методы моделирования, в том числе и математического, начинают получать не меньшее распространение в педагогической и особенно в методической подготовке, нежели в психологической, в которой уже предусмотрено изучение дисциплины «Математическое моделирование» [163]. В подтверждение этому отметим, что в обучении педагогов профессионального обучения на уровне магистратуры также предусмотрена дисциплина «Математическое моделирование в профессиональном образовании» [162].

Процесс математизации наук воздействует на развитие математического аппарата предметной области, изучаемой студентами, что потребует впоследствии от учителя умения использовать этот аппарат *в обучении предмету.*

Влияние этого процесса не столько непосредственно, сколько опосредованно происходит также через науки, с которыми связана методика (через психологию, социологию, физиологию и др.), где стали активно использоваться методы математики. Все это является еще одной причиной того, что в различных «предметных» методиках сначала стали практиковать методы математической статистики, затем – более разнообразные методы математики и, наконец, в настоящее время начинается выход на еще более высокий качественный уровень применения математики – моделирование в частных методиках на основе понятий и фактов математики [163, 166, 276]. Эти понятия и факты в силу своей фундаментальной роли в анализе, синтезе, обобщении и других мыслительных операциях имеют методологическое значение при формировании языкового пространства в методике обучения данному предмету. Они необходимы для формирования навыков системного исследования, в том числе умения интерпретировать информацию – придавать ей смысл, переводить с одного языка исследования на другой, осуществлять перенос положений из одной научной области в другую, конструировать аналоги объектов и их свойств, что является признаками методического мышления.

2.5.2. Понятие методической системы обучения математике, ее основные компоненты и состояния

Рассматривая обучение дискретной математике как методическую проблему, необходимо определить ее роль и место в методической системе обучения математике. Традиционно в состав этой системы включают цели обучения математике, содержание математического образования, а также методическое обеспечение учебного процесса, компонентами которого являются методы, формы и средства обучения [195]. Эти компоненты тесно взаимовязаны друг с другом, что обеспечивает целостность всей системы, выражаемой в единстве реализуемых ей функций. При этом основными функциями МСО традиционно являются образовательная, воспитывающая, развивающая, эвристическая, прогностическая, эстетическая, практическая, контрольно-оценочная, информационная, корректирующая, интегрирующая [216, с. 28].

Лидирующим компонентом методической системы являются, как известно, цели обучения математике, определяющие общие закономерности ее функционирования на различных уровнях рассмотрения математического образования: на уровнях теоретического представления, учебного предмета, учебных материалов и реального учебного процесса [216, с. 82].

Цели и задачи обучения математике отражают его содержание, основными элементами которого являются математические понятия, аксиомы, теоремы, правила, методы, алгоритмы, основания математики (формалистские, интуиционистские, конструктивистские и т. д.). В свою очередь, особенности предметного содержания, подлежащего изучению, во многом предопределяют характер используемых методов, форм организации учебной деятельности и набор необходимых средств обучения. При этом на практике характер соподчинения целей, содержания и методов обучения не всегда является однозначным. На различных этапах и уровнях анализа методической системы обучения математике роль *лидирующего* компонента системы могут принимать не только цели обучения, но и *содержание, методы* и *средства обучения*.

Становление абстрактной алгебры и математической логики кардинальным образом изменило в прошлом веке содержание обучения математике (особенно в высшем профессиональном образовании). Лидирующая роль нового *содержания* обучения проявилась в обновлении целей методической системы обучения математике, в том числе и целей интеграционного характера. В результате одной из главных целей обучения стала интеграция обучения как классической («непрерывной»), так и дискретной математике.

Как уже установлено, во второй половине XX в. важное влияние на МСО математике в вузе (особенно на содержание обучения) постепенно стали оказывать *методы* математического моделирования и теории вычислительных процессов, а в последнее десятилетие – *средства обучения*. Бесспорно, компьютер стал мощным техническим средством повышения эффективности учебно-педагогической деятельности. Например, в методической системе обучения математике появилась новая типология учебно-математических средств, основанная на дидактических возможностях компьютера и мультимедийных технологий.

Компьютер освободил учащегося не только от рутинных численных и символьных вычислений, но и от решения многих шаблонных задач, алгоритм решения которых может быть реализован в компьютерных программах. Не использовать эти технические, информационно-коммуникативные возможности в образовательных целях уже становится невозможно. В то же время сугубо вспомогательные функции компьютера не должны подавлять функции основные и тем более не должны подменять роль учителя в формировании личности учащегося.

В условиях информатизации образования и, как следствие, появления новых «компьютерных» средств обучения (информационных, телекоммуникационных, мультимедийных и т. д.) появилась соответствующая им дистанционная форма обучения, на некоторых специальностях высшего профессионального образования видоизменились и другие компоненты методической системы обучения математике будущих педагогов; широкое распространение получили известные и зарекомендовавшие себя на практике педагогические технологии В. М. Монахова [132], они стали играть важную роль в проецировании созданной МСО предмету (дисциплине) на учебный процесс вуза посредством уточнения всех компонентов этой системы, в том числе *целей и конкретного содержания* обучения дисциплине в данном вузе.

При рассмотрении методической системы обучения математике с «дискретной» точки зрения следует исходить из того, что «если объект конкретного методического исследования выделяет какой-либо аспект или свойство объекта методики обучения, то и предмет этого исследования будет соотноситься с предметом методики и охватывать либо подмножество основной методической системы, либо некоторые аспекты ее компонентов в их взамосвязях, либо отдельные свойства и т. д. Методическая система, адекватная исследуемому феномену (дискретной математики. – *Е. П.*), содержит структуру, содержание этого феномена, цели, средства, методы и формы его функционирования» [216, с. 29].

Структура и содержание феномена дискретной математики и его функционирование уже описаны выше. Но какое подмножество основной методической системы и какие аспекты ее компонентов в их взамосвязях проявляются в МСО ДМ, являющейся подсистемой основной методической системы?

В методической системе обучения дискретной математике, разумеется, существуют «традиционные» компоненты любой МСО: цели, содержание, методы, средства и формы обучения. Но, как следует из анализа методологии обучения дискретной математике, можно выявить и *новые*, «нетрадиционные» *факторы методической системы обучения ДМ,* каковыми стали в последние десятилетия математическое моделирование, вычислительные процессы и информатизация исследований, имеющие фундаментальное значение в выявлении лидирующего компонента, каким являются цели обучения ДМ. Это неудивительно потому, что, во-первых, существует труднообозримое многообразие различных видов моделирования с использованием компьютера и, как следствие этого, наличие на различных специальностях большого числа разнообразных подходов и особенностей обучения ДМ (наряду с непрерывной математикой, являющейся математической основой моделирования с использованием компьютера). Во-вторых, существование таких факторов вызвано самыми разнообразными условиями учебной среды. Например, в соответствии с принципом антропоцентризма интеграции образования в исследовании компонентов методической системы обучения дискретной математике необходимо учесть такой фактор, как *структура личности учащегося*, особенно в вариативном обучении.

Как известно, необходимо различать формальную математическую модель (алгебраическую систему [123], формальную систему [226]) и ее содержательную интерпретацию. В результате выбора лидирующего компонента – целей обучения – возникает **модель** методической системы, т. е. содержательная интерпретация «формальной» общей методической системы обучения математике, «формализованно» описанной в терминах методологии и методики обучения математике. В той или иной модели МСО дискретной математике (ее составе и структуре) проявляются следующие характерные *состояния* любой сложной системы (природной, социальной, экономической, педагогической и т. д.), которые необходимо учитывать при ее исследовании:

1. *Динамичность*. Состояние системы обусловлено меняющимися требованиями социума, производства и науки в целом. Модель методической системы обучения дискретной математике инженеров-педагогов является динамической, поскольку в последние два десятилетия существенно видоизменился перечень инженерных специальностей в машиностроении, металлургии и энергетике, возникли новые направления инженерной подготовки в авиационной, ракетно-космической индустрии и других областях.

2. *Статичность*. Система может быть ограничена определенными временны́ми рамками, поэтому компоненты и взаимосвязи между ними можно считать неизменными, статичными. Статичность этой системы объясняется остающимися неизменными гносеологическими, математическими и кибернетическими основаниями методологии обучения математике и минимальным влиянием на нее в ближайшие годы социокультурных оснований. Потому остается неизменным ли-

дирующий компонент этой модели. Например, в течение десяти лет для инженерной специальности 654700 Информационные системы оставалась неизменной основная цель обучения дискретной математике – овладение математическими основами разработки и совершенствования информационных систем. Фактически эта же цель провозглашена даже в самом названии нового ФГОС ВО подготовки студентов – 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Остается неизменным и примерное содержание обучения дискретной математике: логические исчисления; графы; теория алгоритмов; языки и грамматики; автоматы; комбинаторика; логика высказываний; логическое следование, принцип дедукции; логика предикатов; синтаксис и семантика языка логики предикатов; принцип логического программирования; аксиоматические системы, формальный вывод; метатеория формальных систем; понятие алгоритмической системы; рекурсивные функции; машины Тьюринга; алгоритмически неразрешимые проблемы; меры сложности алгоритмов; легко- и трудноразрешимые задачи; основы нечеткой логики; элементы алгоритмической логики.

3. *Стохастичность*. Система может иметь, например, социальный характер, поэтому результат ее действия может быть только вероятностным. Следовательно, взаимосвязь между некоторыми элементами системы может быть нечетко выраженной. В соответствии с обозначениями, принятыми в теории нечетких множеств и нечеткой логике [101], при работе со схемами, на которых изображен (кружком или прямоугольником) тот или иной компонент системы, целесообразно указывать вероятность его существования (наличия), на стрелках, показывающих взаимосвязь между компонентами системы, – вероятность наличия этой связи.

Модель методической системы обучения дискретной математике для направления подготовки гуманитариев (психологов, филологов, философов и др.) является *стохастической*, поскольку взаимосвязь между некоторыми элементами системы нечетко выражена (неопределена), так как в настоящее время не существует разработанной концепции обучения ДМ на специальностях этого направления и, следовательно, очень разнообразны цели и содержание обучения.

Элементы дискретной математики студентами этих направлений подготовки, как правило, изучались обособлено в рамках отдельных естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин. Например, в государственном стандарте 020100 Философия элементы ДМ содержатся как в разделе естественнонаучных (элементы, множества, отношения, отображения; числа; комбинаторика; конечные и бесконечные множества; основные структуры на множестве), так и в разделе общепрофессиональных дисциплин (предмет и значение логики; мышление и язык; логический анализ естественного языка; классическая логика высказываний и предикатов).

Подобная тенденция изучения тех или иных элементов дискретной математики сохраняется и поныне. Это показывает, например, анализ ряда новых основных образовательных программ и учебных планов подготовки гуманитариев, например, в Уральском федеральном университете и Российском государственном профессионально-педагогическом университете (Екатеринбург). При этом цель изучения некоторых элементов ДМ та же – овладение фундаментальными понятиями, с помощью которых строятся и описываются картины мира, категориальным аппаратом мышления, сущностью научного познания, изучение роли и значения логического мышления в нем. В результате у обучаемого формируются основные формы фиксации и преобразования знания на уровне абстрактного мышления, связь мышления с языком, навыки и умения в области классической дедуктивной логики, познавательные приемы правдоподобных рассуждений, практического анализа логики различного рода рассуждений и т. д.

4. *Управляемость*. Системой можно управлять, изменяя какой-либо ее параметр. Как будет обосновано, таким параметром является лидирующий компонент «структура личности» [199]. В соответствии с этим лидирующим компонентом конкретизируются цели и программа обучения, которые должны, во-первых, вызывать у школьника интерес, т. е. иметь личностный смысл, во-вторых, соответствовать имеющимся у него жизненным представлениям и особенностям его когнитивной структуры.

Итак, на различных этапах и уровнях анализа методической системы обучения дискретной математике наряду с лидирующим компонентом – целями обучения, определяющими состав и взаимосвязи ее компонентов (в зависимости от профиля подготовки будущих педагогов) – могут играть важную роль и другие факторы, выявляемые в процессе анализа дидактических принципов, целей и содержания обучения. В результате такого анализа возникает модель МСО математике, в которой проявляются характерные *состояния* любой сложной системы: динамичность, статичность, стохастичность и управляемость.

2.6. Анализ подходов в обучении дискретной математике в системе высшего образования

В исследовании компонентов методической системы обучения ДМ и на этой основе – ее различных *моделей* для того или иного профиля обучения студентов необходим предварительный системный анализ учебной и методической литературы, рассмотрение содержащихся в ней описаний различных направлений обучения дискретной математике в системе высшего образования.

2.6.1. Анализ учебной и методической литературы

Отличительной особенностью первых учебных пособий по дискретной математике для *специальностей, связанных с приложениями математики, инженерно-технических* и некоторых других специальностей [45, 108, 281], является обширность их содержания и нацеленность на подготовку математиков и инженеров в области прикладной математики.

Основой содержания этих пособий стали элементы теории математических моделей (в терминологии А. И. Мальцева – алгебраических систем [123]) и теории алгоритмов. И это не случайно, поскольку постепенная замена натурного эксперимента на математический стимулировала развитие этих математических теорий и использование в этих целях языка не только классической, но и современной математики (т. е. языка алгебраических, порядковых, топологических структур и логических, алгоритмических и комбинаторных схем). В этих пособиях определяется, например, понятие группы, полугруппы, излагаются алгебра высказываний, булевы функции, машины Тьюринга, рекурсивные функции и т. д. Наряду с элементами языка современной математики представлены элементы теории графов и формальных грамматик, необходимые для анализа и синтеза различных сетей (электрических, транспортных и т. п.), изучения теории автоматов и разработки программного обеспечения. Например, излагается все связанное с понятиями связных и взвешенных графов и их основных свойств.

Дальнейшее возрастание роли ДМ в совершенствовании систем компьютерной математики и компьютерных технологий повлекло за собой появление *специализированных* учебников по дискретной математике. С этой точки зрения изданные в последнее время пособия и учебники [5, 10, 70, 138, 140, 202, 282 и др.] можно в определенной мере условно разделить на два типа:

1) пособия и учебники для обучения СКМ;

2) пособия и учебники для обучения КТ.

Учебники и пособия 1-го типа предназначены для изучения таких важнейших на современном этапе узкоспециализированных дисциплин, как «Теоретическая информатика», «Методы и алгоритмы принятия решений», «Функциональное и логическое программирование», «Структуры и организация данных для компьютеров», «Системный анализ и моделирование», «Теория искусственного интеллекта» и т. п. В отличие от *первых* учебных пособий наряду с элементами теории моделей и графов в концептуальную основу учебной литературы для обучения СКМ положены булевы функции, исчисления высказываний и предикатов, комбинаторика и теория формальных языков.

Учебники и пособия 2-го типа предназначены для изучения дисциплин «Электронные вычислительные машины», «Автоматизированные системы управления», «Конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры», «Системы автоматизированного проектирования», «Робототехнические системы» и т. п. Они содержат наряду с элементами теорий моделей, алгоритмов и графов теорию автоматов. Отметим также, что в некоторых пособиях концептуальную основу составляют прикладная теория алгоритмов и характеризационный анализ.

Дальнейшее развитие математического моделирования и на этой основе – дискретной математики стало причиной того, что ее методы вместе с методами классической («непрерывной») математики распространились на область естественных, экономических и некоторых других наук (не связанных с приложениями математики). В настоящее время, как уже было отмечено, в преподавании ДМ на специальностях, очерченных рамками этих наук, «царит разнобой и разноголосица» (см. подп. 2.1.4). Как следствие этого, в разных вузах разработаны методические указания, нередко весьма неудачные.

Справедливости ради следует отметить, что для студентов некоторых социально-экономических и гуманитарных специальностей подготовлены учебные пособия [98, 136], в которых достаточно удачно и адаптированно излагаются те или иные изучаемые элементы дискретной математики. Характерно, что общей частью концептуальных основ таких пособий становятся элементы языка математических структур и схем, доминирующих в ДМ (множества и операции над ними; бинарные отношения, их основные виды свойства; алгебра высказываний и логика предикатов; основные понятия теории графов и т. д.). В частности, в учебном пособии Г. И. Москиновой «Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях» для студентов, обучающихся на экономических и управленческих направлениях подготовки, содержатся основные понятия теории множеств, логики, теории графов в иллюстрациях и поясняющих примерах, адаптированных к потребностям сферы менеджмента и управления [136].

К сожалению, эти пока редкие пособия не могут существенно изменить состояние преподавания ДМ в вузах по той простой причине, что перечень охваченных этими пособиями специальностей весьма невелик. Ситуация усугубляется тем, что в профильном обучении математике в школе пока не нашли должного отражения элементы дискретной математики. Важную роль в реализации дискретной линии в математической подготовке будущих педагогов и школьников сыграло включение в 2000 г. этого предмета в государственные стандарты подготовки учителей математики и информатики, инициированное В. Л. Матросовым, В. А. Стеценко, авторами учебного пособия «Лекции по дискретной математике» [129].

2.6.2. Направления обучения дискретной математике в высшем образовании

Охарактеризуем содержание обучения дискретной математике и концептуальные особенности для каждого из ранее указанных направлений (см. подп. 1.3.5).

Для выявления характерных особенностей содержания обучения ДМ на специальностях этих направлений были проанализированы ранее существовавшие государственные стандарты подготовки специалистов, накопленный опыт работы по которым имеет важное значение в начавшемся в последние годы переходе от специалитета к бакалавриату и магистратуре.

2.6.2.1. Содержание обучения математиков и специалистов в области прикладной математики и информатики

В обучении студентов – будущих специалистов прикладной математики и информатики – фундаментальную роль играет профильное обучение математическому моделированию с использованием компьютера, в основе которого – методы классической и дискретной математики, а также обучение умению реализовывать в своей профессиональной области все этапы построения полной цепочки использования компьютера: реальная задача – перевод задачи на адекватный математический язык – разработка математической модели решения задачи – разработка алгоритма решения и соответствующей ему программы – симуляция решения – анализ результатов (см. подп. 1.3.1).

В подготовке математиков и математиков-прикладников было предусмотрено профильное обучение языку *доминирующих* в ДМ алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем. Это необходимо для получения фундаментального математического образования, обеспечивающего действенность математических знаний.

Такие алгебраические, порядковые структуры и логические схемы выделялись, как правило, в отдельные фундаментальные курсы современной алгебры и математической логики. При этом обучение ДМ неразрывно связано с этими курсами и содержит наряду с другим материалом фундаментальное изложение алгоритмических и комбинаторных схем. В связи с этим отметим, что «комбинаторика как традиционный раздел дискретной математики для математиков-программистов должен быть обновлен и дополнен комбинаторными алгоритмами, чтобы способствовать формированию культуры разработки анализа и программной реализации алгоритмов» [243, с. 73]. Кроме того, «ведущей идеей при обучении дискретному анализу будущих математиков-программистов должна являться взаимосвязь дискретной математики и теории алгоритмов, другими словами, изучение алгоритмов над объектами дискретной математики» [243, с. 75].

Было предусмотрено, что конкретное содержание *базовой* темы «Структуры и схемы дискретной математики», а также выбор содержания ДМ в целом определяются в соответствии со спецификой направления прикладной математики (СКМ или КТ), в рамках которого происходит обучение. В процессе изучения систем компьютерной математики при прохождении базовой темы необходимо обеспечить все необходимое для успешного изучения теории формальных языков, на основе которой происходит совершенствование данных систем. При обучении компьютерным технологиям изучение базовой темы должно обеспечить успешное изучение вычислительных алгоритмов, нечисленного программирования, комбинаторных алгоритмов, алгоритмизации процессов, обязательных для изучения в рамках данного направления.

Изложение содержания дискретной математики должно быть весьма формализованным, предусматривающим строгое теоретическое обоснование всего изучаемого с небольшим числом примеров и иллюстраций.

В результате обучения ДМ должны быть обеспечены целостность обучения математике, овладение математическими идеями, содержанием и методами прикладной математики.

2.6.2.2. Содержание обучения на инженерно-технических направлениях подготовки

В программу дисциплины «Основы дискретной математики» для каждой специальности инженерно-технических направлений подготовки, как правило, включались:

1) операции над множествами и их свойства (в том числе и прямое произведение множеств);

2) бинарное отношение и его основные свойства;

3) отображение, обратное отображение и композиция отображений;

4) алгебраическая операция, алгебра и их примеры;

5) алгебра высказываний;

6) аналитическое представление булевых функций (совершенные нормальные формы);

7) некоторые основные понятия логики предикатов и их свойства;

8) основные понятия и теоремы теории графов;

9) числовые характеристики графов;

10) некоторые прикладные задачи на графах (анализ связности, эйлеровости, гамильтоновости, планарности графов, раскраска графов и т. п.);

11) некоторые понятия комбинаторики и их свойства.

В обучении по некоторым специальностям, связанным с разработкой и эксплуатацией различных управляющих автоматов и автоматизированных систем, предусматривалось изучение теории автоматов.

Все основные понятия и факты должны быть доказаны и сопровождены достаточным числом примеров и иллюстраций. Обучение дискретной математике на специальностях, очерченных рамками данного направления, в соответствии со сложившейся практикой завершает обучение математике, в результате чего должно быть обеспечено овладение теми видами математического моделирования, которые присущи соответствующей специальности.

Отметим, что «при формировании курса дискретной математики при подготовке инженера, математика-программиста и учителя информатики следует соблюдать оптимальную пропорцию между фундаментальностью и практичностью с включением как вероятностных, так и невероятностных разделов, алгоритмов над объектами дискретной математики» [244, с. 105].

2.6.2.3. Содержание обучения на экономических и управленческих направлениях подготовки

В рамках данного направления изучались следующие понятия и факты дискретной математики:

1) операции над множествами;

2) бинарное отношение и его основные свойства, операции с бинарными отношениями (для изучения баз данных);

3) отображения и их основные виды;

4) алгебра высказываний;

5) предикаты и кванторы (для анализа формулировок определений, теорем и изучения баз данных);

6) основные виды и свойства графов, операции над графами, матрицы смежности и инциденций графа;

7) некоторые экстремальные задачи теории графов (нахождение минимального остового дерева, кратчайшего маршрута, задача коммивояжера и др.).

Перечисленные понятия и факты играют ключевую роль в обучении студентов методам формализованного описания или представления процессов или систем (экономических, социологических и т. д.), качественному анализу сложных проблем (управленческих, социологических и т. д.), систематизации того, что уже известно по интересующей проблеме.

Изложение материала должно содержать минимум доказательств и максимум примеров и иллюстраций, обеспечивающих его понимание.

Изучение элементов дискретной математики на экономических и управленческих направлениях подготовки выводит применение математики за рамки рутинной статистики. В последние годы в концепции обучения ДМ в рамках данного направления предусматривается рассмотрение нечетких графов, отношений и логических схем [101], необходимых для вероятностно-статистического моделирования.

2.6.2.4. Содержание обучения на гуманитарных направлениях подготовки

В интеграции обучения на основе его фундаментализации актуальна проблема развития адекватного гуманитарной профессии математического стиля мышления, формируемого на базе единства в обучении дискретной и «непрерывной» математики.

В формировании элементов математического мышления гуманитариев решающую роль играют доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические и комбинаторные схемы, что нашло отражение в учебниках и учебных пособиях [68, 242]. Следует отметить, что на основе изучения перечисленных структур и схем в мышлении обучаемых формируются соответствующие *когнитивные* (познавательные) структуры и схемы, что в итоге способствует выработке умения *структурировать* и тем самым систематизировать информацию (необходимое умение для качественного анализа сложных проблем гуманитарных наук).

Изучение доминирующих в дискретной математике структур и схем в рамках этого направления необходимо для преодоления информационного «примитивизма» в обучении математике и информатике (усвоение в основном информационной компоненты знаний), в том числе увлечения готовыми программными «рецептами». Как справедливо указывает А. А. Кузнецов, «и сегодня вполне достаточно людей на самых различных уровнях образовательной иерархии, которые искренне считают, что изучение офисных пакетов и есть суть информатики» [107, с. 4].

Кроме доминирующих в дискретной математике структур и схем, в содержании обучения должно быть *предусмотрено* адекватное *изучение языка теории графов*, играющего значимую роль в систематизации больших массивов информации. Например, при изучении лингвистики некоторые понятия теории графов и соответствующие расчеты на компьютере позволяют систематизировать основную информацию о языке художественных произведений. Благодаря этому возможно выявление особенностей авторского стиля мастеров художественного слова.

Обучение ДМ должно быть нацелено на создание у обучаемых цельной картины современной математики и ее приложений как важной составляющей профессиональной культуры. На этом пути важно умело использовать принцип культуросообразности, а также принципы научности и генерализации знаний. В частности, в обучении необходимо исходить из внутренней логики самого предмета. Изучение дискретной математики необходимо для превращения математики в *оружие* для размышления.

Для специальностей других направлений подготовки (сфера обслуживания, транспортные средства и т. д.) в государственных стандартах высшего профессионального образования предусмотрено изучение лишь некоторых отдельных понятий и фактов ДМ (зачастую вообще не предусмотрено обучение этой дисциплине), поэтому не существует и соответствующих концепций обучения.

В условиях реформирования образования актуальной для всех направлений подготовки является необходимость использования «жесткой» и «мягкой» моделей обучения. «Жесткая» модель обучения основана на технологическом (символизируемом классно-урочной системой), а «мягкая» – на синергетическом подходе в образовании. «Мягкая» модель обучения – это «мудрость мягкого управления учебным процессом через советы и рекомендации», учитывающие незапланированные малые изменения, флуктуации различных педагогических систем. «Поэтому в основе современных моделей обучения должен лежать принцип неопределенности ряда учебных параметров, зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов» [234, с. 77].

2.6.3. Основные методические аспекты обучения дискретной математике

В исследовании уровней представления содержания профильного обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов и основанной на нем постановке профильного курса необходимо рассмотреть основные методические аспекты (принципы, цели, схемы изложения материала) обучения ДМ, характерные для выделенных направлений подготовки в системе высшего образования.

2.6.3.1. Методические аспекты обучения дискретной математике математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики

В соответствии с направлением обучения главной методологической целью обучения является овладение стилем математического мышления, которому присущи глубокое знание системы методов математического моделирования, умение выбрать соответствующий метод из этой системы, построить полную цепочку использования компьютера и применить все необходимое для решения конкретной прикладной задачи (или доказать, что задача неразрешима на данном языке). Как уже отмечалось, студент должен научиться быть одновременно постановщиком задачи, разработчиком математического обеспечения ее решения, алгоритма решения, программы вычислений на компьютере и, наконец, отладчиком этой программы (т. е. он должен научиться владеть всем «производственным» циклом моделирования). Только в этом случае он сможет стать полноценным консультантом в области математики для специалистов других профессий, что, в принципе, является одной из главных задач всего обучения прикладной математике.

Ведущую роль в обучении играют принципы научности, генерализации знаний (выделения главного), систематичности, обучения от общего к частному, единства непрерывного и дискретного.

Ввиду обширности содержания обучения дискретной математике ограничимся изложением общепринятой методической схемы обучения основным теоретико-модельным понятиям ДМ, каковыми являются ключевые в математическом моделировании понятия отношения, алгебраической операции, предиката, модели.

На основе вводных понятий алгебры множеств сразу дается определение декартова произведения множеств и лишь потом изучаются основные свойства бинарных отношений и приводятся примеры «классических» бинарных отношений. Далее дается определение n-арного отношения на множестве как подмножества соответствующей декартовой степени множества. На основе n-арного отношения формируется понятие n-арной алгебраической операции как соответствия, при котором каждому кортежу из n элементов множества ставится в соответствие по определенному правилу некоторый элемент этого же множества. На основе определения декартовой степени множества устанавливается предикат как некоторая специальная функция и изучаются некоторые свойства предикатов и их кванторных приставок. Понятия алгебраической операции и n-арного отношения позволяют сформулировать понятие математической модели.

Описанная методическая схема обучения перечисленным основным понятиям ДМ фактически содержится в учебных пособиях, предназначенных в основном студентам с высоким уровнем исходной математической подготовки, где подразумевается, что учащиеся ранее уже изучили эти понятия [5, 70, 108, 140, 281].

На базе теоретико-модельных понятий и в зависимости от специфики математического моделирования (в рамках обучения по специальности) определяются последовательность изучения других тем дискретной математики, конкретные методические приемы и способы их изложения.

Итак, можно констатировать, что существует в достаточной степени разработанная методика обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики.

2.6.3.2. Методические аспекты обучения дискретной математике на инженерно-технических направлениях подготовки

Известные и доступные студентам учебники и учебные пособия по дискретной математике предназначены, как правило, для подготовки математиков, специалистов в области СКМ и КТ и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. Выпускаемые высшими образовательными организациями пособия, методические указания и разработки пока не могут кардинально изменить ситуацию, связанную с нарушением преемственности в преподавании математики между школой и вузом. К тому же довольно распространенным недостатком этих изданий является лежащая в их основе только прагматическая точка зрения на подготовку (с учетом специфики будущей специальности обучающегося).

Действительно, как уже отмечалось в п. 2.3, содержание общего курса математики не может быть определено без учета внутренней логики самого предмета обучения. Тем не менее часто вместо должного обучения математике и, в частности, дискретной математике студентов готовят к будущей профессии с помощью определенных программных «рецептов» СКМ. В результате обучение в большинстве случаев не выходит за рамки рутинной статистики. Математический аппарат лишь «привносится» в специальные науки, а не проникает в них.

В настоящее время применяется следующий методический подход к изложению основных теоретико-модельных понятий ДМ [153, 282].

Изучение бинарных отношений начинается с конкретных примеров декартовых произведений и бинарных отношений (в частности, из школьной программы [153]). Далее рассматриваются основные свойства бинарных отношений, и лишь затем дается общее определение бинарного отношения. Изучаются понятия отображения, функции и графа как важных частных видов бинарных отношений и затем их основные виды и свойства. Все это иллюстрируется большим числом примеров из школьной программы и подкрепляется решением ряда практических задач.

Затем приводятся конкретные примеры тернарных отношений из школьной и вузовской программы, тем самым вырабатывается общее представление о тернарных отношениях. Показывается, что алгебраические операции, изученные в школе, являются частными случаями тернарных отношений. Даются примеры алгебраических операций из курса высшей математики и затем общее представление об отличительных признаках алгебраической операции (замкнутость на множестве, существование единственного результата выполнения операции).

Изучение понятия предиката начинается с основных понятий алгебры логики. При логическом анализе текстов происходит выявление логической роли союзов «или», «и», «если…, то…», частицы «не», наречия «равносильно». На этой основе естественным образом возникают понятия логических операций, приводятся таблицы истинности. Затем в соответствии с изученным в школьном курсе математики рассматриваются примеры высказывательных функций или предикатов одной и двух переменных и замкнутых формул логики предикатов с кванторами. Решаются задачи на запись в виде формул логики предикатов ряда формулировок определений и теорем из школьной и вузовской программы.

Как видно из особенностей методики изложения основных понятий ДМ, некоторая преемственность обучения достигается за счет объяснения содержательного смысла изучаемых понятий на основе примеров из школьной программы, решения ряда практических задач. Следовательно, необходима предварительная пропедевтика изучения некоторых основных теоретико-модельных понятий в профильном обучении математике в школе (в том числе пропедевтика понятий графа, бинарного отношения, отображения, основных понятий алгебры высказываний и т. д.).

2.6.3.3. Методические аспекты обучения дискретной математике на экономических и управленческих направлениях подготовки

Разработка методики обучения дискретной математике для специальностей этого направления пока находится в начальной стадии. Подтверждением этому является хотя бы тот факт, что пока, по-видимому, имеется только одно известное пособие по ДМ, предназначенное для студентов экономических и управленческих специальностей [136]. Отметим, что некоторые элементы этой методики можно встретить в других работах [4, 68, 153, 242, 271].

Наряду с нарушением преемственности обучения дискретной математике между школой и вузом серьезным препятствием в разработке методики является «превалирование принципа гуманитарной направленности обучения в ущерб другим принципам», особенно принципам фундаментальности и научности. «Некоторые ученые-педагоги под гуманитаризацией понимают только усиление роли общественных наук в ущерб естественным и математическим наукам и призывают к пересмотру учебных планов, к нарушению равновесия между этими двумя блоками дисциплин» [236, с. 221]. Именно по этой причине обучение ДМ на большинстве этих специальностей носит фрагментарный, прагматичный характер, как правило, не учитывается внутренняя логика самой математики.

Еще одним серьезным препятствием в разработке методики обучения дискретной математике является несовершенство или несогласованность учебных программ и планов. Так, в удачном в целом учебном пособии Г. И. Москиновой «Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях» [136] «закованность» в рамках учебных программ и планов вызвала некоторую фрагментарность и прагматизм содержания: не представлено понятие алгоритма, нет упоминания о полной цепочке использования компьютера (не говоря уже об ее важнейших свойствах и изучении понятия алгоритмически разрешимой задачи), что не обеспечивает усвоение внутренней логики математического моделирования. Другой значительный недостаток пособия связан с тем, что в методических приемах и методах изложения содержания не учтен опыт, представленный в научно-популярной литературе для школьников [7, 30, 50, 57, 75, 105, 218, 230, 249 и др.]. Например, важнейшее понятие изоморфизма моделей не подкреплено наглядными примерами изоморфных (равных) графов.

2.6.3.4. Методические аспекты обучения дискретной математике на гуманитарных направлениях подготовки

Как было выявлено, в обучении гуманитариев актуальна проблема развития математического *мышления*, формируемого на основе обучения дискретной и непрерывной математике, решающую роль при этом играют доминирующие алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические и комбинаторные схемы, содержание и методика изучения этих структур и схем определяют основные особенности методики обучения ДМ на гуманитарных направлениях подготовки.

Как уже отмечалось в подп. 2.6.2.4, изучение доминирующих в дискретной математике структур и схем в рамках этого направления способствует преодолению информационного «примитивизма» в обучении математике и информатике (усвоение в основном информационной компоненты знаний), в том числе увлечения готовыми программными «рецептами».

Анализ ряда учебников по ДМ, предназначенных для гуманитариев [68, 127, 242 и др.], показывает, что в содержание обучения математике и информатике входят следующие понятия:

1) бинарное и *n*-арное отношения;

2) отношения эквивалентности и частичного порядка;

3) группа и кольцо;

4) логическая операция;

5) предикат и квантор (для анализа текстов и знакомства с базами данных);

6) перестановки, размещения, сочетания, правило суммы и произведения;

7) алгоритм;

8) (конечный) автомат;

9) формализованный язык.

Понятия языка доминирующих в дискретной математике структур и схем определяют особенности целей обучения, отбор содержания форм и средств обучения на гуманитарных направлениях подготовки. Главенствующими принципами методики обучения гуманитариев являются принципы преемственности и развивающего обучения. Основой для реализации этих принципов служит максимальная мотивационная вовлеченность обучающегося в работу с занимательным или практическим *сюжетным* текстом разнообразных задач [155].

2.6.4. О роли принципа профессионально-педагогической направленности в решении проблемы преемственности обучения дискретной математике между школой и вузом

Обсуждая методические аспекты обучения дискретной математике в системе высшего профессионального образования, нельзя обойти вниманием основную проблему этой методики обучения в вузе. Она заключена в том, что в «функционально ориентированном» профильном обучении математике в школе не предусмотрено адекватное отражение элементов ДМ. Это влечет за собой *нарушение преемственности* в обучении дискретной математике между школой, колледжем (техникумом) и вузом.

Проблему преемственности усугубляет превалирование принципа *гуманитарной* направленности обучения над другими принципами (в том числе и в программах обучения).

Кроме того, в обучении ДМ, особенно на гуманитарных направлениях подготовки, не учитываются интеграционный потенциал современной дискретной математики и его роль в использовании математических структур и схем, обеспечивающих интеграцию содержания обучения прикладным методам математики на основе фундаментализации обучения (см. подп. 1.4.1). Необходимо учесть также психологические аспекты обучения ДМ, например, уже рассмотренный в подп. 2.2.1 генезис механизмов моделирования и становления, развитие на его основе символической функции в мышлении, современные представления о системах хранения знаний в памяти человека и средствах познания [273], возрастные возможности школьников и студентов [190] и, в силу этого, особенности реализации принципа преемственности в обучении дискретной математике.

Анализ состояния обучения ДМ в вузах позволяет сделать вывод о том, что в решении проблемы преемственности обучения между школой и вузом при существующих в обучении диспропорциях фундаментальное значение приобретают профильное обучение дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов и особенно реализация профессионально-педагогической направленности подготовки. В частности, в решении проблемы преемственности важную роль играет принцип бинарности, т. е. *объединение* научной и методической линий в обучении курсу ДМ. Такое объединение необходимо для подготовки студентов к обучению учащихся математическому моделированию на основе дискретных и непрерывных моделей и корректному использованию потенциала современного компьютера, в частности, систем компьютерной математики и компьютерных технологий в изучаемых ими профильных предметах. В свою очередь, принцип ведущей идеи, выражающий необходимость выдвижения на первый план связи конкретной математической дисциплины педагогического вуза с соответствующим школьным предметом, позволит увидеть студентам в этом процессе важную методическую часть своей профессиональной подготовки в области обучения ДМ. В результате будут заложены предпосылки для реализации будущими учителями информатики, математики и инженерами-педагогами вариативного обучения дискретной математике в школах и колледжах (техникумах), что важно при решении проблемы преемственности между школой, колледжем (техникумом) и вузом.

2.7. Особенности развития и постановки курса дискретной математики для студентов педагогических направлений подготовки

Сложившаяся система обучения дискретной математике будущих учителей в организациях высшего профессионального образования не вписывается в рамки ни одного из указанных направлений в силу особой специфики педагогической специальности. Поскольку пока нет длительного массового опыта обучения ДМ студентов педвузов на уровне бакалавриата и магистратуры, важную роль в исследовании конкретных особенностей компонентов рассматриваемой методической системы обучения и на этой основе – ее различных *моделей* для будущих учителей информатики, математики и инженеров-педагогов играет существующий опыт в рамках специалитета и, в частности, существовавшие до сих пор особенности развития и постановки курса дискретной математики для студентов перечисленных профилей подготовки. Это особенно важно в условиях постепенного перехода к бакалавриату и магистратуре.

2.7.1. Анализ развития и постановки курса дискретной математики в педагогическом вузе

Нормативную основу постановки курса дискретной математики на уровне специалитета в педагогическом вузе составляли государственные стандарты и содержавшиеся в них учебные планы подготовки.

Содержание обучения ДМ для будущих учителей математики и информатики в стандартах подготовки на уровне специалитета практически не отличалось друг от друга. Правда, следует заметить, что в стандарте подготовки учителей математики было предусмотрено изучение некоторых методов суммирования, но не рассматривались такие составляющие курса дискретной математики, как бином Ньютона, полиномиальная формула, основные комбинаторные конфигурации и метод включения-исключения. Эти темы играют важную роль в теоретических основах программирования, значимых как для будущих учителей информатики, так и для учителей математики.

Специфика учебного плана по специальности «Информатика» в педагогическом вузе состояла в том, что разделы ДМ, обычно изучаемые в рамках единого курса, были выделены в отдельные дисциплины («Математическая логика», «Дискретная математика», «Теория алгоритмов») либо входили как разделы в дисциплины «Элементы абстрактной и компьютерной алгебры», «Исследование операций».

На основе анализа учебной литературы, соответствующей государственным стандартам подготовки учителей математики и информатики на уровне специалитета, А. В. Козвониной и С. М. Окуловым было выделено два направления развития и постановки курса дискретной математики в педагогическом вузе [147]. Сторонники первого направления рассматривают ДМ как типичный математический курс. Такая концептуальная линия курса лежит, например, в основе широко известных первых пособий по дискретной математике [108, 281] и учебной литературе нового поколения [4, 10, 49 и др.]. Второе направление [4, 70 и др.] характеризуется тем, что в курсе ДМ рассматриваются как абстрактные объекты, так и различные алгоритмы, и при этом предполагается, что часть практических занятий должна проходить с использованием компьютера.

В то же время А. В. Козвонина и С. М. Окулов являются сторонниками более тесной интеграции «на стыке» информатики и математики, учитывают практический опыт повсеместного распространения идей и методов программирования. По их мнению, «*курс (учебник) обязан быть компьютерно-ориентированным*, то есть практически любой теоретический факт должен быть исследован, проверен с помощью его программной реализации. В таком случае инструментом педагога становится огромный методический пласт наработок, усиливающий глубину изучения материала у обучаемого. Это требование накладывает ограничения на структуру теоретического материала» [147, с. 26].

В качестве характерного ориентира А. В. Козвонина и С. М. Окулов выделяют книгу В. Липского [116], специально не относя ее ни к одному из двух рассмотренных направлений постановки курса дискретной математики в педагогическом вузе.

Следует отметить также существование менее известного направления, согласно которому дискретная математика является частью курса компьютерной математики [18, 207]. При этом компьютерная математика трактуется как система, элементами которой выступают следующие дисциплины: «Основания конструктивной математики», «Элементы семиотики», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Конструктивная дискретная математика», «Численные методы» (включая компьютерную алгебру), «Компьютерная геометрия» (конструктивные математические основы компьютерной графики и вычислительной геометрии) [18]. В содержание конструктивной дискретной математики также включены булевы функции, теория графов, теория кодирования, комбинаторный анализ, машинная арифметика. К сожалению, следует констатировать, что вся существующая учебная литература, посвященная использованию различных систем компьютерной математики при решении задач, ориентирована, как правило, только на классическую непрерывную математику.

По-видимому, большинство исследователей пока не готовы говорить о том, какому из этих трех направлений следует отдать предпочтение. Действительно, многочисленные учебники, задачники и учебные пособия являются очень разноплановыми и отражают разное видение предмета дискретной математики (см. п. 2.6). Поэтому ни одно из них не может быть предложено в качестве базового учебного пособия и тем более учебника по ДМ для будущих учителей математики и информатики в силу обширности предмета и функций изучаемой дисциплины и существующих профилей подготовки педагогов в условиях усиливающегося вариативного обучения учащихся школ и студентов колледжей (техникумов) и вузов.

Характерной важной особенностью постановки курса дискретной математики в рамках трех проанализированных направлений является использование различных видов межпредметных связей. В диссертации И. Ю. Жмуровой выделены следующие виды межпредметных связей: интродисциплинарные (всевозможные отношения взаимной зависимости, обусловленности, общности между основными объектами учебного курса), интердисциплинарные (связи дисциплин, входящих в один модуль), интерцикловые (связи взаимного использования понятий наук) и интерблоковые (отношения между дисциплинами одного блока) [67]. Эти связи часто визуализируются с помощью так называемых информационных графов, которым неявно следует каждый лектор при изложении учебного материала. Теоретический курс сначала разбивается на темы или разделы (вершины графа), которые надо освоить в процессе обучения. Каждый новый раздел в этом перечне является следствием нескольких ранее изученных разделов (тем), так как связывает или использует несколько введенных ранее понятий (утверждений), этот процесс отмечают дугами графа. Аналогичным образом в каждой теме выбирается совокупность базовых понятий и фактов (вершины орграфа), выстраивается их логически связанная последовательность (дуги орграфа) [71].

Информационные графы позволяют решать большое число самых разнообразных методических задач, полезных как для преподавателей учебных дисциплин, так и для студентов, изучающих эти дисциплины. Однако постановка курса дискретной математики в педвузе отличает чрезмерное увлечение реализацией межпредметных связей, что сильно усложняет решение поставленных методических задач. Например, если ограничиваться только одиннадцатью математическими дисциплинами федерального компонента подготовки учителей информатики на уровне специалитета, то, следовательно, каждый преподаватель должен будет провести согласование межпредметных связей с десятью преподавателями, а общее число парных согласований равно $C_{12}^{2} = 110$. При этом не учитываются взаимосвязи математических дисциплин федерального компонента с факультативными дисциплинами, взаимосвязи математических и специальных дисциплин и, наконец, то, что некоторые понятия дискретной математики одновременно изучаются более чем в двух дисциплинах.

2.7.2. Отражение дискретной математики в новых стандартах подготовки специалистов в области математики и информатики

В исследовании компонентов методической системы обучения ДМ наряду со сложившимися в прошлом веке направлениями постановки курса дискретной математики в педагогическом вузе для специалистов в области математики и информатики важное значение имеет рассмотрение особенностей компетентностного подхода в новых ФГОС высшего образования подготовки бакалавров и магистров в области математики и информатики.

Анализ содержания ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата) позволяет выявить, что выпускники в результате обучения должны освоить следующие виды профессиональной деятельности: решение различных задач с использованием методов математического моделирования процессов и объектов, разработка программного обеспечения, а также преподавание физико-математических дисциплин и информатики в общеобразовательных и профессиональных образовательных организациях. Бакалавр математики должен обладать следующими компетенциями:

- способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач (ПК-5);
- способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний (ПК-7).

Следует отметить, что для подготовки к указанным видам деятельности, для формирования перечисленных компетенций в перечень дисциплин профессионального цикла ФГОС ВПО 010100 Математика были включены «Математический анализ», «Дискретная математика» и «Математическая логика».

Анализ содержания ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика (уровень бакалавриата) позволяет выявить, что объектами профессиональной деятельности выпускников являются математические модели, методы и наукоемкое программное обеспечение, предназначенное для проведения исследований и выработки решений в конкретных предметных областях. При этом бакалавр должен уметь решать профессиональные задачи в соответствии с такими видами профессиональной деятельности, как математическое моделирование процессов и объектов на базе автоматизированного проектирования, отладка наукоемкого программного обеспечения, что отражено соответствующим образом в формулировках компетенций (фактически то же самое изложено и в прежнем ФГОС ВПО 231300 Прикладная математика).

Анализ содержания ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) позволяет установить, что в число объектов профессиональной деятельности выпускников включены математическая кибернетика, дискретная математика, математическое моделирование, математические модели сложных систем, языки программирования. В ФГОС ВПО 231300 Прикладная математика дополнительно были введены следующие дисциплины: «Математическая логика», «Теория алгоритмов». Все перечисленное также отражено соответствующим образом в формулировках компетенций.

Анализ содержания ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии (уровень бакалавриата) позволяет выявить, что в число объектов профессиональной деятельности выпускников включены математические, информационные, имитационные модели систем и процессов, программное и информационное обеспечение компьютерных средств сетей информационных систем, языки программирования, системы цифровой обработки изображений и автоматизированного проектирования. Фактически эти же дисциплины представлены и в прежнем ФГОС ВПО 010300 Фундаментальная информатика и информационные технологии. Содержание подготовки также отражено соответствующим образом в формулировках компетенций.

Проведенный анализ ФГОС ВО и ФГОС ВПО по рассмотренным выше и некоторым другим направлениям подготовки [250, 251, 252, 255, 256, 259, 260, 261, 263] подтверждает выдвинутое положение о том, что, несмотря на обилие исследований и публикаций, в настоящее время не существует общепринятой системы представлений о ДМ как о разделе математики. Например, в ФГОС ВПО по направлению подготовки 231300 Прикладная математика из курса современной дискретной математики нашел отражение только такой ее традиционный раздел, как «Теория графов», при этом он объединен с разделом «Математическая логика». В отличие от этого, в ФГОС ВПО по направлению подготовки 230700 Прикладная информатика имелась отдельная дисциплина «Дискретная математика», в содержание которой были включены следующие разделы: «Методы теории множеств», «Математическая логика», «Алгебра», «Теория графов», «Теория автоматов», «Теория алгоритмов» и «Элементы теории формальных языков».

Определенный круг «дискретных» представлений уже исторически и естественным образом сложился на практике (см. п. 1.3). Любой достойно для своей профессии знающий современную математику специалист наряду с понятиями «предел», «производная», «интеграл», «дифференциальное уравнение», «функциональный ряд», «вероятность случайного события», «закон распределения» и т. д. знает ключевые понятия дискретной математики («комбинаторная конфигурация», «бинарное отношение», «алгебраическая операция», «высказывание», «предикат», «квантор», «формализованный язык», «граф», «алгоритм», «исполнитель алгоритма»). Эти и ряд других важных понятий играют важную роль в выработке системы представлений о ДМ, реализации ее функций в математическом моделировании с использованием компьютера, разработке и совершенствовании современных СКМ и КТ и (что особенно важно) в формировании умений гармоничного сочетания языка математики, языка науки в соответствующей профессиональной области и уникальных возможностей современного компьютера.

Анализ ФГОС ВПО и ФГОС ВО по перечисленным направлениям подготовки на уровне магистратуры показывает, что, в отличие от стандартов подготовки бакалавров, в формулировках компетенций и названиях дисциплин отражены различные важные научно-исследовательские аспекты методологии математики и информатики, методологии научного познания и, как следствие, методологии математического моделирования на основе дискретных и непрерывных моделей, разработки наукоемкого программного обеспечения (например, СКМ и их применение в математическом моделировании).

2.7.3. Анализ развития и постановки курса дискретной математики в подготовке педагогов профессионального обучения

Еще в 1993 г. автором было издано небольшое учебное пособие «Введение в дискретную математику» [153], предназначенное для будущих инженеров-педагогов, обучавшихся на электроэнергетическом факультете Свердловского инженерно-педагогического института (ныне – Российский государственный профессионально-педагогический университет (РГППУ)).

Данное пособие было разработано в связи с полным отсутствием учебной литературы для студентов педагогических специальностей и весьма формализованным изложением элементов дискретной математики в учебных пособиях, созданных для студентов математических и инженерных специальностей [45, 108, 281]. В содержании пособия нашли отражение бинарные отношения, алгебра высказываний, булевы функции, некоторые элементы теории графов. В методике изложения учебного материала ведущую роль играли принцип научности и принцип преемственности обучения между школой и вузом. Основная часть содержания пособия «Введение в дискретную математику» доступна восприятию школьников. В 2004 г. на основе этого пособия и длительного опыта работы автора в школе было создано учебное пособие по дискретной математике для учащихся 8–9-х классов, в котором содержалась программа и для 10–11-х классов с углублённой подготовкой по математике [155]; оно также было использовано в практике обучения ДМ студентов РГППУ, а также студентов, обучающихся в Самарском филиале Московского городского педагогического университета, в Уральском педагогическом университете, Кировском педагогическом университете и некоторых других вузах России. В содержании этого пособия отражена и систематизирована учебная и популярная литература по дискретной математике (31 источник), которая и сейчас играет важную роль в преемственности обучения студентов педагогических специальностей и инженеров-педагогов.

Усиление роли ДМ в математическом образовании, в том числе в подготовке студентов специальности «Профессиональное обучение», повлекло за собой включение этого предмета в учебные планы по многим профилям подготовки. Было издано учебное пособие «Основы дискретной математики», авторы которого, Л. К. Конышева и В. В. Мешков [97], реализуют методологию обучения ДМ педагогов профессионального обучения по всем отраслям. Значительно позднее вышло учебное пособие Л. К. Конышевой «Дискретная математика» [96], расширившее тематику предыдущей работы и предназначенное уже для обучения студентов по 12 отраслям (от вычислительной техники до эксплуатации и ремонта автомобильного транспорта) специальности 351400 Прикладная информатика.

Названные учебные пособия [96, 97] являются весьма удачными с точки зрения реализации принципа преемственности обучения между школой и вузом. Но поскольку эти работы предназначены для многих профилей подготовки педагогов профессионального обучения, естественно, имеет место быть нарушение принципов фундаментальности и научности обучения, что можно проследить при анализе содержания этих пособий. Так, например, содержание обучения дискретной математике студентов факультета информатики и машиностроительного факультета совпадает, что, как показывает проведенный анализ предмета, функций ДМ и существующих направлений обучения (см. п. 1.3, 2.6), является нарушением указанных принципов, играющих фундаментальную роль в математической подготовке студентов. В то же время в содержании обучения дискретной математике студентов факультета информатики не было предусмотрено изучение комбинаторики, студенты машиностроительного факультета не знакомятся с разделами «Дискретные структуры и схемы», «Алгоритмы. Автоматы», «Формальные языки и системы компьютерной математики», имеющими важное значение в автоматизации машиностроительного производства.

С внедрением компетентностного подхода в образование и последующим переходом на новые ФГОС подготовки педагогов профессионального обучения на уровне бакалавриата и магистратуры указанные пособия потеряли свою актуальность. Несмотря на это, они могут быть по-прежнему полезны в обучении дискретной математике.

Вследствие перечисленных изменений в образовании была разработана рабочая программа [154] и методические указания [160], предназначенные для подготовки будущих инженеров-педагогов, отражающие особенности модели методической системы обучения ДМ, которые будут охарактеризованы далее, в п. 3.2.

2.8. Понятие методической системы обучения дискретной математике и ее компонентный состав

В процессе исследования сути термина «методическая система обучения» постепенно возникло понятие *внешней среды* МСО, т. е. совокупности факторов, оказывающих влияние на ее функционирование [216]. Как установлено в гл. 1, такими системообразующими факторами является современная математическая культура, теория интеграции образования и феномен дискретной математики (ее роль и место в науке, жизни, производстве).

В подп. 2.5.2 также отмечено, что при рассмотрении МСО математике с «дискретной» точки зрения следует исходить из того, что «методическая система, адекватная исследуемому феномену (дискретной математики. – *Е. П.*), должна отражать структуру, содержание этого феномена» [216, с. 29]. Структура и содержание этого феномена, являющиеся *философско-математической основой МСО ДМ*, соответствующим образом отражены в описании предмета, функций дискретной математики (см. п. 1.3), ее интеграционного потенциала (см. п. 1.4), особенно в реализации межпредметных связей математики и информатики, в которых и раскрывается роль и место ДМ в науке, жизни, производстве (см. п. 1.5).

Построение методической системы обучения «определяется всей совокупностью… методических принципов, причем не непосредственно, а опосредованно – через методические требования и рекомендации, которые детерминируют действия обучающего и обучающегося в тех или иных конкретных условиях обучения» [102, с. 73]. Поэтому *дидактической основой* МСО дискретной математике, оказывающей влияние и на ее функционирование, и на выявление ее компонентного состава, является охарактеризованная в п. 2.3 система (совокупность) специфических методических принципов обучения ДМ. Эта система целостно отражает учебный процесс и поэтому открывает возможность комплексного подхода к его совершенствованию, при котором изменения отдельных компонентов так или иначе отражаются на действии других компонентов и на общих характеристиках процесса. Поэтому методическую систему обучения дискретной математике можно рассматривать, с одной стороны, как *проекцию* дидактической системы на содержание подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, при этом важные особенности проектирования определяются структурой и содержанием феномена современной ДМ; с другой стороны – как *модель* реализации дидактической системы на практике в условиях конкретного процесса обучения дискретной математике студентов названных профилей подготовки.

Охарактеризованная система методических принципов МСО ДМ легла в основу обоснования концепции этой методической системы, выявленной в соответствии с особенностями обучения дискретной математике как основе реализации межпредметных связей математики, информатики и смежных с ними дисциплин. На основе положений концепции и весьма различающихся концептуальных особенностей существующих направлений обучения ДМ закономерно выявляется и характеризуется компонентный состав методической системы обучения и его конкретные особенности в зависимости от профиля подготовки будущих педагогов. Исходя из этого, разрабатываются модели обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

Как уже было обосновано в концепции, эффективность реализации дискретной линии в образовательном процессе определяется гармонией и сбалансированностью *целей различных уровней* математической и профессиональной подготовки студентов, что позволяет преодолеть разобщенность различных математических дисциплин, изолированность отдельных тем и разделов, обеспечить единство в обучении дискретной и непрерывной математике. Поэтому сначала следует определить стратегические цели подготовки (*лидирующий компонент* методической системы обучения ДМ), на основе которых и будет достигнута гармония и сбалансированность целей различных уровней математической и профессиональной подготовки студентов.

Как следует из анализа концепции обучения, концептуальных особенностей постепенно сформировавшихся направлений обучения дискретной математике в государственных стандартах и учебной литературе, лидирующим компонентом МСО ДМ, направленной на реализацию межпредметных связей математики и информатики, являются следующие главные *стратегические (долгосрочные) цели* обучения:

1) создание у обучаемых целостной картины современной математики и ее приложений как важной составляющей профессиональной культуры;

2) гармоничное сочетание в обучении студентов языка математики, языка специальной науки, соответствующей профилю подготовки в профессиональной области, и уникальных возможностей современных компьютеров;

3) достижение единства в обучении непрерывной и дискретной математике, что является основой интеграции содержания обучения математическому моделированию и теории вычислительных процес-

сов будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов;

4) обучение студентов вышеуказанных специальностей корректному использованию систем компьютерной математики и компьютерных технологий, что необходимо для формирования умения быстро адаптироваться к постоянным изменениям в области информатики;

5) обеспечение профессионально-педагогической направленности отбора содержания обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки на основе реализации межпредметных связей дисциплин;

6) достижение гармонии и сбалансированности целей различных уровней математической и профессиональной подготовки студентов на основе профильного обучения языку доминирующих в дискретной математике структур и схем.

Конкретные дидактические и методические особенности реализации *стратегических* целей обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов позволяют выявить иерархию целей на различных уровнях представления содержания профильного обучения. На основе выявленной иерархии целей определяются и характеризуются другие компоненты МСО дискретной математике – ее содержание, методы, средства и формы.

Итак, под методической системой обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов следует понимать единство и взаимодействие методических принципов, концептуальных положений, целей, содержания, методов, средств и форм обучения ДМ на базе ее философско-математических и дидактических основ, интеграционного потенциала (как основы реализации межпредметных связей математики, информатики и смежных с ними дисциплин) и роли в современной математической культуре.

Наличие внешней среды обеспечивает развитие МСО ДМ как подсистемы всей методической системы обучения математике. Этот процесс осуществляется через исследовательскую деятельность преподавателей и студентов (индивидуальная деятельность участников образовательного процесса).

Методическая система обучения дискретной математике представлена на рис. 2.1.

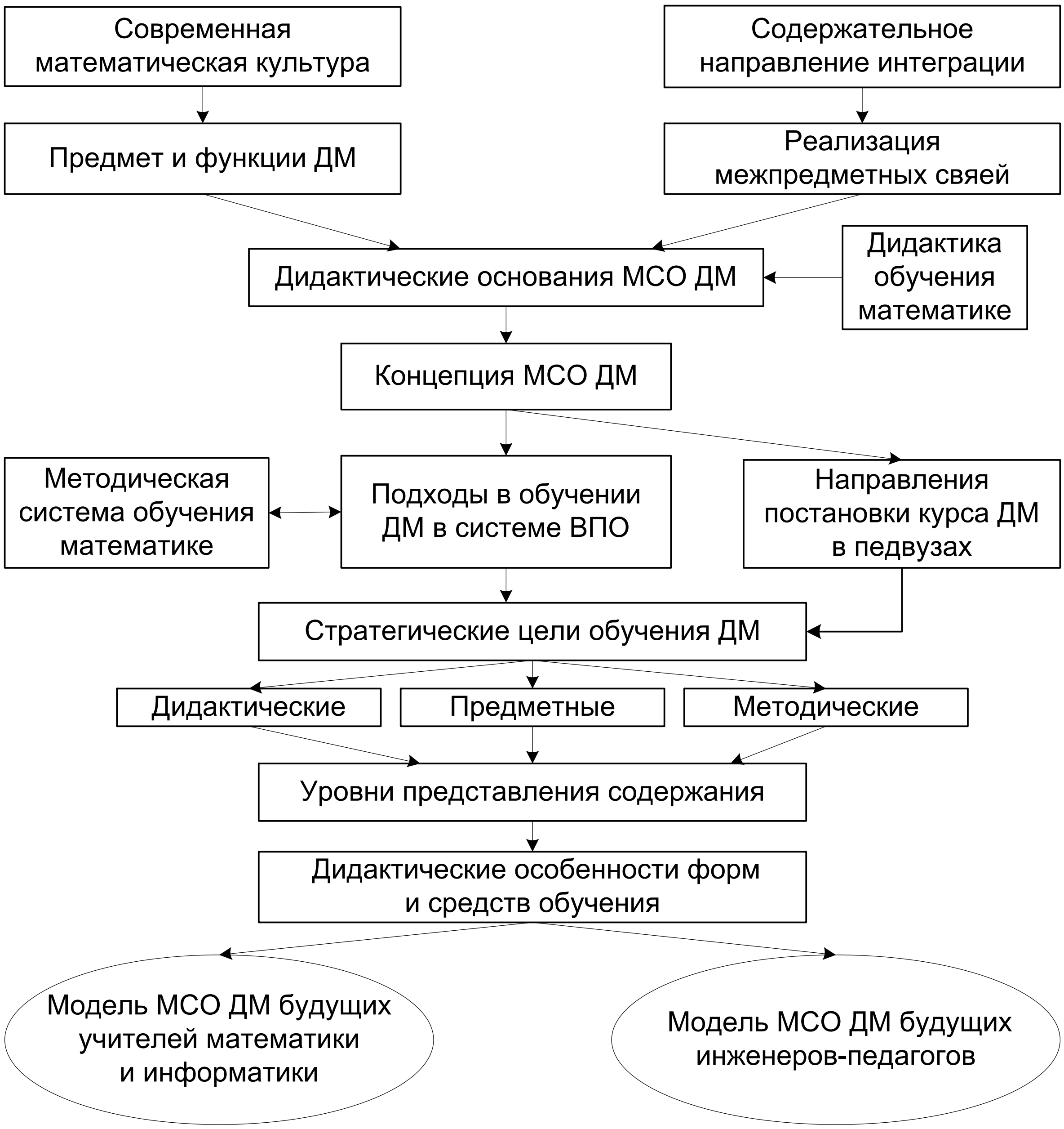


Рис. 2.1. Методическая система обучения дискретной математике

На схеме стрелками показано влияние внешней среды МСО на разработку ее концепции. В выявлении конкретных особенностей компонентного состава методической системы обучения следует учитывать специфику существующих подходов в обучении ДМ в системе высшего образования, а также направления постановки курса дискретной математики в подготовке будущих педагогов.

2.9. Уровни представления содержания профильного обучения дискретной математике

Исходя из главных стратегических целей обучения дискретной математике, рассмотрим следующий по важности компонент методической системы обучения – содержание обучения.

При отборе «уровневых» целей и содержания обучения ДМ будем исходить из определенных В. В. Краевским и А. В. Хуторским уровней представления содержания образования [102]:

1. *Уровень общего теоретического представления.* Реализацию главных стратегических целей обучения дискретной математике необходимо начинать с формирования у бакалавров представлений о ее предмете и функциях, о ее роли в современной математической культуре, особенно в математическом моделировании и теории вычислительных процессов. При этом теоретическую основу отбора содержания рассматриваемого профильного обучения в зависимости от специальности наряду с целью обучения составляют концепция обучения, концептуальные особенности направлений в системе высшего образования и дидактические принципы обучения дискретной математике, охарактеризованные в п. 2.3.

На уровне общего теоретического представления, исходя из принципа диалектического единства интеграции и дифференциации, необходимо обеспечить структурное *единство инвариантной и вариативной* составляющих содержания обучения предмету ДМ. В реализации этого процесса методологическим ориентиром станут положения концепции, а дидактическим ориентиром – принципы научности, генерализации знаний, преемственности обучения между школой, колледжем (техникумом) и вузом. Для этого необходимо создать *уровневую модель инвариантного и вариативного содержания* непрерывного обучения предмету дискретной математики с учетом реализации его межпредметных связей на разных уровнях: базового школьного обучения, специализированной подготовки школьников, среднего профессионального образования, подготовки бакалавров (специалистов – учителей математики и информатики), магистров, профессионального послевузовского образования (аспирантуры, докторантуры, переподготовки и т. п.). Данная уровневая модель служит основой отбора содержания на уровне учебного предмета.

На уровне магистратуры при отборе вариативного содержания рассматриваемого предмета также следует исходить из философского анализа современной модельной методологии и роли дискретной математики в имеющихся межпредметных связях математики, информатики и других дисциплин с целью профильного обучения языку математического моделирования, что является основой для формирования умения гармонично сочетать язык математики, язык науки в соответствующей профессиональной области и уникальные возможности современного компьютера.

2. *Уровень учебного предмета.* На данном уровне необходимо сформировать у студентов представления о том, чего нужно достичь в процессе изучения дискретной математики при обучении на данной специальности, о том, что будет главным в содержании его обучения. Для этого должна быть разработана уровневая модель предметно-профессиональных компетенций будущего учителя математики, информатики и инженера-педагога на основе анализа компетенций ФГОС ВО подготовки бакалавров (специалистов – учителей математики, информатики) и магистров.

При отборе содержания на основе разработанной уровневой модели предметно-профессиональных компетенций необходимо учитывать стремление реализовать в обучении единство «непрерывной» и дискретной математики, что является основой интеграции содержания обучения математическому моделированию и теории вычислительных процессов будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов. В содержании обучения ДМ также необходимо отразить идеи и методы СКМ и КТ для выработки у студентов умения адаптироваться к постоянным изменениям в области информатики.

В детализации содержания обучения важное значение имеет анализ роли дискретной математики в изучаемой студентами предметной области. Поэтому при непосредственном отборе содержания обучения будущих учителей математики и информатики с целью их подготовки к работе в профильных классах важным ориентиром служат понятия и методы ДМ, играющие фундаментальную роль в формировании основ математического аппарата профильного предмета, изучаемого школьниками. Например, метод конечных разностей в математической физике; молекулярные графы в математической химии; клеточные автоматы, отношения различной арности и элементы алгебры высказываний в биологии развития; алгебраические операции и логика предикатов в математической экономике и т. д.

Как следует из анализа роли дискретной математики в современной математической культуре, обучение будущих учителей математики и информатики в магистратуре должно быть направлено на формирование у них умения, необходимого для обучения учащихся начальным элементам математического моделирования и разработке алгоритмов вычислений. Практическая реализация этого обучения основана на деятельностном подходе к изучению *определений* фундаментальных понятий и принципиальным *теорем* курса ДМ, необходимо учитывать и сложившуюся систему организации научно-исследовательской работы студентов.

Отметим также, что, по мнению О. И. Мельникова, «на педагогических факультетах нужно… изучать те дискретные модели, которые попали в различные программы для средних школ, учитывая при этом, что учеников часто придется знакомить не с классическими вариантами моделей, а с их упрощенными аналогами» [131, с. 150].

Существующие проблемы обучения дискретной математике инженеров-педагогов свидетельствуют о том, что уровень теоретического обобщения и степень абстракции математического материала в учебниках по техническим дисциплинам для студентов колледжей (техникумов) не соответствует уровню их обученности, психологическим и возрастным закономерностям усвоения учебной информации. Ситуацию усугубляют недостаточная полнота представленного учебного материала по отдельным темам в рекомендуемых учебниках и отсутствие единого учебника для учебных заведений профессионального образования по целому ряду специальных дисциплин. Поэтому, исходя из принципа ведущей идеи, преподаватель должен переработать, трансформировать содержание учебника и адаптировать его к познавательным возможностям обучающихся. Поскольку «математическая модель технического объекта рассматривается, в свою очередь, как абстрактная математическая структура, в которой реальные и конкретные связи заменены абстрактными математическими отношениями» [280, с. 80], в переработке, трансформировании этого содержания фундаментальную роль играют дискретные структуры (модели) и схемы, доминирующие в дискретной математике. Язык этих структур и схем имеет важное значение в корректном использовании СКМ и КТ в реализации этапов математического (информационного) моделирования работы технических устройств и управления ими на основе вычислительного процесса, осуществляемого на основе возможностей современного компьютера (или сети компьютеров), что имеет существенную значимость в подготовке рабочих к работе со сложным автоматизированным оборудованием и робототехникой.

Как следует из вышеизложенного, в основе обучения будущих инженеров-педагогов лежит положение о том, что дискретная математика, наряду с непрерывной математикой, играет фундаментальную роль в научной, дидактической и методической переработке содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки.

Переработка учебной информации означает проведение структурно-логического анализа содержания дисциплины, в процессе которого выделяются опорные математические понятия и методы, составляющие математический аппарат изучаемой технической дисциплины, необходимый для обучения учащихся математическому моделированию технических объектов и разработке алгоритмов вычислительных процессов, реализующих определенную технологию в отрасли производства.

При переработке содержания осуществляется методическая редукция этих понятий, т. е. трансформация математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания обучающихся.

3. *Уровень учебного материала.* На этом уровне элементы содержания, обозначенные на уровне общего теоретического представления и описанные в специфической для ДМ форме на уровне учебного предмета, получают конкретное наполнение. Речь идет о конкретных знаниях, умениях, навыках, а также задачах, упражнениях, которые составляют содержание профильной реализации обучения дискретной математике и ее межпредметных связей в учебниках, сборниках задач, учебных пособиях и др. При отборе содержания на уровне учебного материала важную роль играет *системно-структурный подход* в преподавании математики на основе формирования и развития математических когнитивных структур и схем, охарактеризованный в п. 2.2.

4. *Уровень процесса обучения.* Это уровень педагогической действительности, т. е. уровень, на котором во взаимодействии преподавателя и обучающегося «распредмечивается» проектируемое содержание обучения дискретной математике.

Теоретическое осмысление этого уровня значительно осложняется тем, что категории «обучение», «процесс обучения» трактуются неоднозначно. Оставляя в стороне анализ определений этих категорий, будем придерживаться наиболее часто встречающегося в методике обучения математике понимания обучения как двустороннего процесса преподавания и учения.

5. *Уровень структуры личности студента.* Здесь достигаются конкретные результаты обучения дискретной математике, которые становятся достоянием личности. Это итог всей познавательной работы по изучению предмета ДМ. Важную роль в обучении на этом уровне, в том числе в выстраивании индивидуальной образовательной траектории, играют принципы антропоцентризма и профессионально-педагогической направленности подготовки.

Следует отметить, что на уровне процесса обучения, а также на уровне структуры личности определяющую роль играет стратегия обучения, основанная на социокультурном опыте (различные связи со всеми сторонами культуры социума) [236], из которой необходимо исходить при устранении возможных перегрузок обучения.

Известно, что основной причиной перегрузок как школьников, так и студентов является нарушение принципа единства содержательной и процессуальной сторон обучения. Оно может происходить в тех случаях, когда содержание обучения формируется бессистемно, складываясь из простой суммы учебных предметов, без учета соответствующих условий и факторов. Например, реализация обучения дискретной математике начинается с уровня учебного материала. Последующее сокращение объема содержания и установление межпредметных связей не дают, как правило, кардинальных результатов. Предлагаемый многоуровневый процесс проектирования представленного содержания обучения ДМ позволит устранить «в зародыше» разрыв между планируемым содержанием и его реализацией.

2.10. Дидактические особенности выбора форм и средств обучения дискретной математике

В реализации форм вариативной подготовки важную роль играет *принцип преемственности* в обучении между школой и вузом, в соответствии с которым необходим учет возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся (см. подп. 2.3.3).

Появившиеся в последние годы термины «индивидуальная образовательная траектория», «индивидуальные образовательные маршруты» и т. д. отражают разные подходы исследователей к проблеме реализации вариативной подготовки студентов. В аспекте принципа антропоцентризма будем придерживаться позиции А. В. Хуторского, трактующего ИОТ как персональный путь реализации личностного потенциала ученика в образовании [274]. Поэтому при построении индивидуальной образовательной траектории нельзя ограничиваться только рамками вуза, а необходимо принимать во внимание как возможности школьной подготовки, так и этап послевузовского образования. Следовательно, принцип преемственности при создании методической системы обучения дискретной математике диктует необходимость рассмотрения как предвузовских, так и послевузовских вариативных форм обучения будущего педагога. В связи с этим важное значение в отражении интеграционного потенциала ДМ в формах обучения (компонент методической системы обучения) приобретают постепенно начинающиеся внедряться в российское образование современные комплексные и индивидуализированные формы (системы) обучения.

Так, например, в работе Е. И. Деза для формирования одной из возможных ИОТ в рамках интеграции числовой и дискретной линий дидактически обоснованно предлагается курс «Основы дискретной математики», имеющий важное значение в подготовке будущего учителя прежде всего к работе в математических классах. В содержании курса отражены основные понятия теории графов, комбинаторные конфигурации, суммы и рекуррентности, преобразования сумм, элементы теории кодирования [55].

В подтверждение важности заявленных форм обучения рассмотрим одну из разновидностей комплексных форм – модульное обучение, в соответствии с которым учебная информация предлагается студентам в виде отдельных законченных учебных модулей, имеющих практическую, в том числе профессиональную, направленность (освоение определенных действий). В обучении дискретной математике, имеющем большое значение в реализации *принципа непрерывности* (непрерывное приобщение студентов к будущей педагогической деятельности), необходима реализация подобной формы обучения: содержание дисциплины разбивается на отдельные единицы – модули, дополняющие или углубляющие основной курс ДМ, а также и реализующие межпредметные связи, обеспечивающие фундаментализацию обучения или формирование тех или иных компетенций, необходимых в будущей педагогической деятельности. Самые разные сведения из дискретной математики, являющиеся важными в профильной вариативной подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, распределяются, «растаскиваются» по различным модулям. В содержании каждого модуля должны быть подробно расписаны цели его изучения, формируемые при этом знания и умения, методы обучения, подходы к оценке результатов изучения определенного материала.

Конечно, при модульной форме обучения вряд ли возможно подготовить профессионального математика, специалиста в области информатики, инженера и т. д., поскольку эта форма обучения не может обеспечить систематическое фундаментальное образование. Но форма модульного обучения играет важную роль при интеграции различных видов подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов *(системное использование интеграционного потенциала дискретной математики).* В частности, эта форма обучения имеет существенное значение в реализации принципа фундаментальности в профильном изучении будущими учителями математики и информатики математического моделирования, корректного использования СКМ и КТ, а также методик обучения учащихся школ, студентов колледжей (техникумов) соответствующим понятиям математики и информатики. В свою очередь, в подготовке будущих магистров профессионального обучения для той или иной отрасли инженерного производства необходимо включение в те или иные модули различных сведений ДМ, важных в общенаучном цикле программы магистратуры (дисциплины «История и методология науки», «Методология научного творчества» и «Математическое моделирование»).

Отметим, что важное значение среди комплексных систем обучения имеет так называемый метод проектов. Эта форма (система) обучения, при которой студенты приобретают новый опыт в процессе планирования и выполнения постепенно усложняющихся заданий практической направленности – проектов. Этот метод играет особенно важную роль в обучении этапам математического моделирования при решении задач на основе гармоничного сочетания в приложениях математики дискретных и непрерывных моделей и корректному использованию систем компьютерной математики и компьютерных технологий.

В формировании вариативной индивидуальной образовательной траектории подготовки очень важны современные средства информатизации. Среди этих средств в использовании интеграционного потенциала ДМ как математической основы информатизации особое значение приобретают современные системы компьютерной математики. Инструментальная среда СКМ позволяет интенсифицировать процесс обучения и учебно-математическую деятельность студентов за счет ее автоматизации, избавляющей от рутинной умственной работы. При этом именно в подготовке будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, где предусмотрено регулярное проведение лабораторных работ по специальным математическим дисциплинам и дисциплинам информационного профиля, системы компьютерной математики (более узко – программное обеспечение) предоставляют новые возможности математической деятельности и обусловливают дополнительную мотивацию к ее освоению и использованию, что, в свою очередь, является одной из стратегических долгосрочных целей обучения дискретной математике.

2.11. Модели методической системы обучения дискретной математике

В соответствии с предложенной концепцией, главными целями и уровнями представления содержания профильного обучения построены модели методической системы обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов (рис. 2.2, 2.3).

Отличия модели подготовки будущих учителей информатики от модели подготовки будущих учителей математики заключены в следующем: во-первых, на месте школьного курса математики в качестве элемента выступает школьный курс информатики; во-вторых, различаются уровневые цели и содержание обучения, а также методы, средства и формы обучения.

Отличия модели подготовки будущих инженеров-педагогов от моделей подготовки будущих учителей математики и информатики сводятся к следующему: во-первых, на месте соответствующих школьных курсов в качестве элемента представлены курсы обучения профильным техническим дисциплинам и методики производственного обучения; во-вторых, опять-таки различаются уровневые цели, содержание, методы, средства и формы обучения дискретной математике.

Проецирование в соответствии с принципом ведущей идеи (см. подп. 2.4.3) означает, что в выборе уровневых целей и содержания профильного обучения ДМ должны найти свое отражение цели и содержание профильного обучения математике в школе (ФГОС среднего (полного) общего образования [266]). Это позволит студентам увидеть в математических дисциплинах важную методическую часть своей профессиональной подготовки.

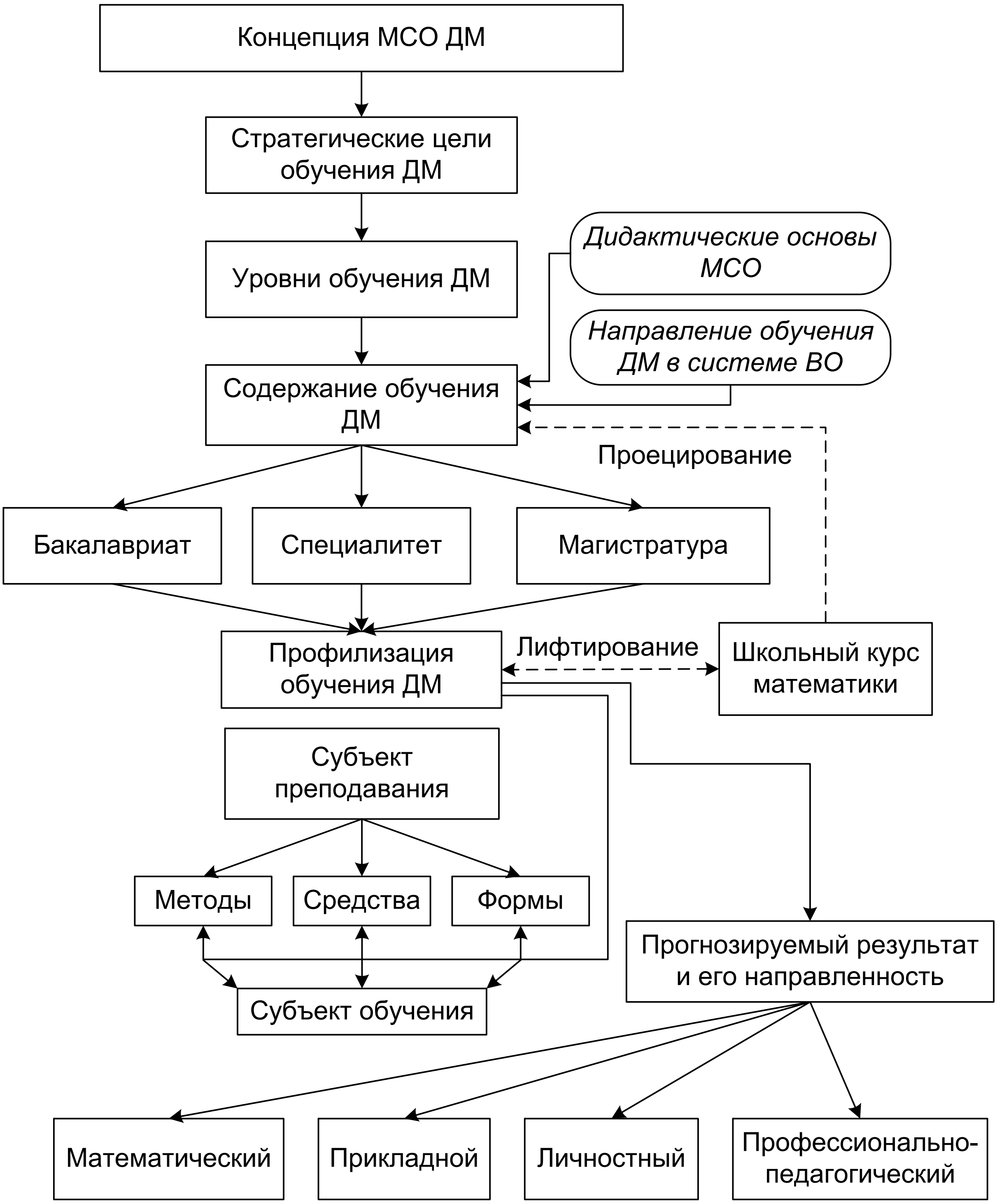


Рис. 2.2. Модель методической системы обучения дискретной математике учителей математики и информатики

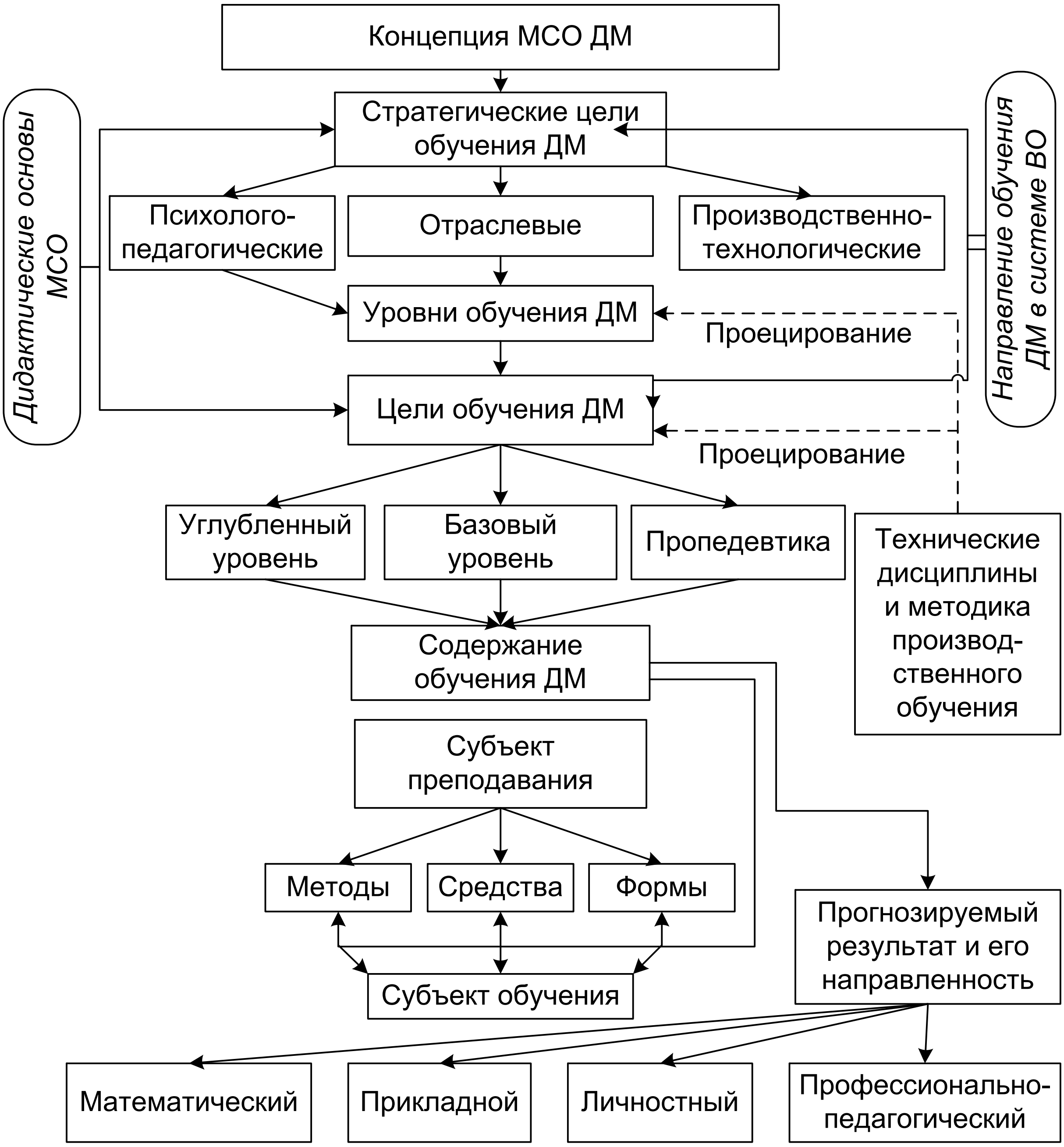


Рис. 2.3. Модель методической системы обучения дискретной математике инженеров-педагогов

Лифтирование уровневых целей и содержания обучения в соответствии с принципом непрерывности обучения (реализация профессионально-педагогической направленности подготовки) означает их коррекцию для обеспечения личностно ориентированного профильного обучения дискретной математике, учитывающего особенности и специфику образования в вузе.

Следует отметить, что такую коррекцию важно осуществлять на каждом уровне представления содержания профильного обучения ДМ, особенно на уровне формирования общетеоретических представлений о предмете и функциях дискретной математики. Как следует из изложенного в подп. 2.1.3, методологической основой коррекции является уровневая модель инвариантного и вариативного содержания непрерывного обучения предмету ДМ и реализации его межпредметных связей на разных уровнях: базового школьного обучения, специализированной подготовки школьников, среднего профессионального образования, подготовки бакалавров (специалистов – учителей математики и информатики), магистров, профессионального послевузовского образования (аспирантуры, докторантуры, переподготовки и т. п.).

Отметим, что в модели подготовки студентов по сокращенной форме должно быть также предусмотрено проецирование уровней обучения ДМ на курс математики колледжей (техникумов).

Глава 3

ОСНОВНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

В главе в соответствии с концепцией и главными целями обучения излагаются различные *методические схемы* интеграционного характера, используемые в реализации модели методической системы обучения дискретной математике будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, особенности выбора уровневых целей, содержания, методов, средств и форм обучения в бакалавриате и магистратуре.

3.1. Основные методические аспекты обучения дискретной математике будущих учителей математики и информатики

3.1.1. Методическая схема реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей математики в рамках интеграции на основе фундаментализации образования

Согласно принципу профессионально-педагогической направленности фундаментализация образования должна являться не целью, а средством профессиональной подготовки, следовательно, должна быть согласована с нуждами приобретаемой профессии (принцип фундаментальности А. Г. Мордковича [134]). Отсюда следует, что подготовка учителя математики должна коренным образом отличаться от подготовки специалиста в сфере математики. При этом особая роль должна отводиться изучению математических структур и схем.

Действительно, как было установлено в п. 1.2.2, интеграция на базе фундаментализации образования предполагает универсализацию знаний, умений, навыков, что обусловливает выделение *структурных единиц* научного знания, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений. Такими структурными единицами в дискретной математике являются доминирующие в ней алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (средства, методы математического познания). Эти структуры и схемы лежат в основе отбора содержания обучения ДМ не только будущих учителей математики, но и учителей информатики и инженеров-педагогов.

В методической схеме формирования ИОТ подготовки учителя математики на основе ее фундаментализации, предложенной Е. И. Деза, важную роль играют числовая и дискретная линии в содержании обучения математике. Обсуждаемый подход отражен в *числовой линии* при помощи констатации «необходимости проведения в рамках изучения курса числовых систем серьезной работы по систематизации и обобщению ряда важнейших математических понятий (алгебраические структуры, отношения и операции, метрики, сходимость и др.), что лишний раз свидетельствует о межпредметной направленности дисциплины» [55, с. 187]. При этом среди обязательных результатов изучения курса «Числовые системы» предусмотрено знание классических числовых систем (полукольца натуральных чисел, кольца целых чисел, поля рациональных, действительных и комплексных чисел, алгебры кватеринонов). Другой курс, «Математические модели, методы и теории», в методической схеме Е. И. Деза «предназначен для более полного и всестороннего знакомства старшекурсников с теорией конечных полей и ее приложениями» [55, с. 188], что существенно сужает формирование у студентов представлений о тематике осваиваемой дисциплины. В рамках реализации *дискретной линии* разработана программа курса «Основы дискретной математики», в которой предусматривается изучение элементов теории графов и комбинаторики. При этом подчеркивается, что «для будущих учителей математики на первый план выходят вопросы, связанные со школой, а следовательно, история соответствующей теории, темы, связанные с рекуррентными соотношениями, комбинаторикой, конечными суммами» [55, с. 212].

Таким образом, в реализации числовой и дискретной линий методической схемы Е. И. Деза фундаментальную роль играют алгебраические структуры и комбинаторные схемы (средства, методы математического познания), базой для изучения которых являются основные комбинаторные конфигурации и методы.

Все алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (средства, методы математического познания) положены в основу отбора содержания обучения ДМ будущих учителей математики и информатики в концепции и методической схеме, предложенной в учебных пособиях по дискретной математике и абстрактной алгебре [156, 157, 158, 159, 186, 187] и в сборнике задач [182], написанных автором совместно с Г. А. Клековкиным в рамках существовавших ранее стандартов на уровне специалитета.

При разработке концепции и методической схемы изложения содержания учебного пособия [156, 157, 158, 159] учитывалось то, что содержание обучения ДМ для учителей математики и информатики в стандартах подготовки на уровне специалитета практически не различалось (см. подп. 2.7.1). Поэтому с точки зрения интеграции обучения математике и информатике представляется целесообразным обучение учителей математики и информатики на уровне бакалавриата по заявленной методической схеме, характеризуемой далее.

Также при разработке методической схемы изложения содержания рассматриваемого пособия принимался в расчет различный уровень математической подготовки студентов. Одни из них, закончив школу по программам углубленного изучения математики, уже знакомы с комбинаторикой и графами, другие – сталкиваются с ними впервые, поэтому изложение учебного материала зачастую ведется, может быть, излишне подробно; для изучения значительной части содержания пособия достаточно знаний в объеме программы средней школы. Теоретический материал постоянно сопровождается многочисленными примерами и задачами, что является, несомненно, достоинством заявленной методической схемы: выбранный способ подачи материала делает книгу доступной для студентов-заочников, которым приходится знакомиться с некоторыми темами самостоятельно, и для студентов других специальностей, изучающих комбинаторику, а также она будет полезна учащимся 10–11-х классов, увлекающимся математикой.

Пособие состоит из четырех частей. В первой части («Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа») излагаются правила суммы и произведения, основные комбинаторные конфигурации, их свойства и формулы для их подсчета, бином Ньютона и полиномиальная формула, формула включений и исключений, теорема обращения, целочисленные функции. Подобранный учебный материал дает возможность решать классические задачи на выбор и расположение элементов конечного множества в соответствии с заданными правилами. В частности, это традиционные «школьные» задачи на изучение свойств основных комбинаторных конфигураций, на разбиение множеств (мультимножеств), на разложение предметов по ящикам (на разложение чисел на слагаемые). Широко представлены примеры, демонстрирующие связи комбинаторных чисел с рекуррентными последовательностями (в частности, чисел Стирлинга и Белла). Таким образом, в содержании данной части предусмотрено все необходимое для изучения основных методов современной комбинаторики.

Вторая часть («Рекуррентные соотношения и производящие функции») посвящена линейным рекуррентным соотношениям и производящим функциям как универсальному средству решения комбинаторных задач. Здесь изучаются операции с производящими функциями, на основе которых излагается общий метод решения различных рекуррентных соотношений, унифицируются многие ранее полученные результаты, что дает возможность резко расширить круг обсуждаемых комбинаторных задач. В частности, рассматриваются единообразно решаемые задачи на вычисления комбинаторных чисел, связанных с различными выборками из элементов конечных множеств и мультимножеств, задачи на различные виды раскладок неразличимых (различимых) предметов в неразличимые (различимые) ящики, в ряде случаев приводятся конкретные формулы для подсчета числа разложений. При этом демонстрируются способы извлечения информации из сложных производящих функций (полученных операциями из простых) о «считающих» функциях $f(n)$. Выявляется связь между стандартными способами построения одних конфигураций с помощью других и соответствующими им действиями с производящими функциями – связь, на которой основано «искусство» описания конфигураций с помощью производящих функций.

В третьей части («Графы») изложены основные понятия и классические задачи теории графов, рассмотрены асимптотические оценки различных классов графов. Изложение, как и в предшествующих частях, сопровождается большим числом примеров и учебных задач, что будет, несомненно, полезно при прохождении школьной практики.

В четвертой части («Асимптотические оценки и приближения») освещены асимптотические методы решения комбинаторных задач, демонстрирующие объединенную «мощь» методов математического анализа и комбинаторики. В частности, рассматривается формула Эйлера (суммирование значений произвольной дифференцируемой функции), лежащая в основе общего эффективного метода нахождения весьма точных асимптотических оценок самых различных комбинаторных величин. На основе доказываемой далее теоремы излагается более простой, по сравнению с формулой Эйлера, метод нахождения асимптотических оценок суммы значений непрерывной монотонной положительной функции, что позволяет уточнить некоторые ранее полученные оценки.

Разработанная методическая схема доказывает, что профессионально-педагогическая направленность курса теории и методики обучения математике для будущих учителей математики обеспечивается адекватным отражением в нем основных понятий языка доминирующих структур и схем современной ДМ, изучаемых на математических направлениях подготовки, а также на тех направлениях подготовки, которые связаны с приложениями математики, поскольку эти понятия («граф», «булева функция», «комбинаторная конфигурация», «асимптотическая оценка» и др.) являются общеобразовательными понятиями, играют фундаментальную роль в профильном обучении учащихся классов физико-математического профиля.

3.1.2. Методика реализации алгебраической линии в содержании подготовки будущих учителей математики и информатики

В последние десятилетия в содержании многих направлений подготовки студентов все большее отражение находят идеи и методы современной алгебры, известной также под названием общей или абстрактной алгебры. Это вызвано тем, что современная алгебра стала одной из наиболее важных и бурно развивающихся областей математики. Как отмечается в «Математической энциклопедии», роль абстрактной алгебры «в современной математике исключительно велика, и существует объективная тенденция к дальнейшей “алгебраизации” математики» [128, т. 1, стб. 117], сфера ее применения расширяется «столь стремительно, что иногда поговаривают об “алгебраической чуме”, охватившей не только математику, но и другие науки» [270, с. 7]. Сейчас уже трудно перечислить все науки (естественные, технические, экономические и некоторые другие), в которых используются те или иные результаты исследований современной алгебры. Ее методы и разрабатываемые на их основе средства используются в самых различных областях науки и производства, где возникает потребность в организации больших объемов данных и реализации вычислительных процессов.

Идеи и методы современной алгебры оказались эффективными и в исследованиях плохо формализованных прикладных наук, где обнаруживается отсутствие для изучаемых реальных ситуаций или объектов сколько-нибудь адекватных математических моделей, на базе которых можно было бы вести расчеты и получать количественные или качественные результаты. Например, в области обработки и распознавания информации (в том числе видеоинформации) получил широкое признание алгебраический подход, разработанный в трудах академиков Ю. И. Журавлева, В. Л. Матросова, а также их учеников и последователей.

В связи с расширяющейся «культурной экспансией» современной алгебры все более возрастает ее значение в обучении ДМ будущих учителей математики и информатики. Межпредметные связи абстрактной алгебры и дискретной математики явились концептуальной основой разработки уже упоминавшихся учебных пособий автора [156, 157, 158, 159, 186, 187], нашли отражение в соответствующем содержании. Данные связи играют важную роль и в разработке методической схемы реализации модели обучения ДМ. С учетом принципа профессионально-педагогической направленности подготовки главные особенности этих межпредметных связей выражены в следующей методической схеме.

Краткая концептуальная характеристика методической схемы элективного обучения дискретной математике учащихся классов физико-математического профиля [155]. Изучение особенностей преподавания в классах физико-математического профиля необходимо для подготовки математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. В рамках этого профиля основной целью методической схемы и разработанной в соответствии с ней программы является ранняя пропедевтика обучения построению полной цепочки использования компьютера [103]: реальная ситуация – математическая модель – алгоритм – программа – симуляция решения – анализ результатов (см. п. 1.3.1). Иными словами, основная цель – начать подготовку будущего «многоборца»: постановщика задачи (переводящего условия задачи на точный математический язык), математика (обеспечивающего разработку модели и алгоритма ее решения), программиста (создающего, тестирующего программу и симулирующего результаты ее работы) и в определенной мере заказчика (анализирующего результаты решения задачи). Все это способствует интеграции обучения математике и информатике.

В соответствии с целью обучения по данному профилю в программе предусмотрено изучение элементов дискретной математики. Ориентиром при составлении программы послужил перечень понятий и фактов, играющих важную роль в концепции обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. При этом особое внимание уделено ранней пропедевтике понятий графа, (бинарного) отношения, алгебры, модели, алгоритма, исполнителя, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий.

Разработанная программа является необходимым дополнением к различным программам элективного обучения элементам математического анализа в школе и направлена на формирование первоначальных представлений о методах как дискретной, так и классической («непрерывной») математики.

Основные особенности методики элективного обучения дискретной математике по программе. Данная методика обучения основана на концепции развивающего обучения. Как известно, системы развивающего обучения Л. В. Занкова и Д. Б. Эльконина, В. В. Давыдова имеют в своей основе идеи Л. С. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств. Для такой реконструкции обстоятельств «жизни» необходимы задачи с занимательным или практическим сюжетным текстом (см. п. 2.2.3). Образно говоря, необходимы «такие методы обучения, когда дорога к серьезным проблемам мостится из упрощенных, пусть даже сказочных и шуточных задач» [103, с. 22]. Только на этом пути можно достичь детской, игровой манеры изложения, доступной восприятию школьников. Перечислим возможные виды задач [155]:

1) нестандартные задачи (применение в необычных ситуациях понятий и фактов, входящих в содержание обычной программы);

2) занимательные и практические задачи (перевод условий задачи на математический язык);

3) задачи, в рамках решения которых уже в 8-м классе начинается пропедевтика понятия модели на основе первого знакомства с пятиэлементным полем («новой арифметикой»), кольцом остатков, алгеброй высказываний;

4) задачи по дискретной математике, объединяющие весь изученный материал по темам «Графы», «Пятиэлементное поле», «Кольцо остатков», «Алгебра высказываний», «Группы» и т. д. В процессе решения таких задач углубляются первые представления о понятиях и фактах языка ДМ;

5) задачи на решение аналогов школьных уравнений в кольце целых чисел, поле рациональных чисел, пятиэлементном поле, кольце остатков от деления на 4 и алгебре высказываний. Решение этих задач завершает пропедевтику понятия модели.

Отметим, что в программе представлены задачи на вычисление значений, тождественные преобразования выражений и решение уравнений в пятиэлементном поле (в «новой» арифметике, в которой нет дробей и отрицательных чисел). Благодаря этому осуществляется «уход от довлеющих рекомендаций с установившимся инструктивным материалом» [103, с. 13] из арифметики и элементарной алгебры. Очевидно, «довлеют» свойства действий с дробями, свойства степеней, тождественные преобразования привычных алгебраических выражений. Важно показать, что «мир может быть устроен по-другому» и что, например, в «новой» арифметике $3 + 4 = 2$ или $2 \cdot 3 = 1$.

Естественно, хорошее знание того или иного математического языка подразумевает, в частности, умение находить решения в рамках этого языка. Необходимо научить учащихся выяснять, существует ли ответ на поставленный вопрос задачи на данном языке. Предлагаются следующие виды задач:

1) задачи с неверно составленным условием;

2) задачи с ненайденным решением;

3) задачи, которые не имеют решения (на данном языке);

4) задачи с бесконечным числом действий исполнителя, в качестве которого используются различные виды условных микрокалькуляторов;

5) задачи с конечным числом действий;

6) задачи на составление эффективного алгоритма.

Повторение изученных понятий дискретной математики происходит при переходе в следующий класс. Спиралевидное построение содержания, при котором тема не рассматривается во всех деталях сразу же в течение одного учебного года, позволяет осуществить медленное, тонкое приспособление знания к задаче, облегчаемое и за счет использования внутриматематических и межпредметных связей.

Программа элективного обучения дискретной математике учащихся классов физико-математического профиля. С учетом целей обучения и объема содержания на обучение по программе в 8–9-х классах предусматривается 1 час в неделю, в 10–11-х классах – 2 часа в неделю. Отметим, что в соответствии с программой для 8–9-х классов написано учебное пособие [155].

8-й класс

Понятие графа. Маршруты цепи и циклы. Применение графов в решении занимательных и практических задач.

Шифры и остатки. Действия с остатками. Законы действий с остатками. Вращения фигур. Необычные таблицы сложения и умножения. Законы действий алгебры пятиугольника («новой» арифметики).

Логическое умножение, сложение и отрицание. Вычисление значений и тождественные преобразования логических выражений. Физический смысл логических действий.

Уравнения с параметрами. Задачи на свойства натуральных чисел. Нестандартные задачи. Решения Смекалкина, Ленивкина и Кнопкина.

9-й класс

Графы и группы. Связные графы. Деревья. Равные (изоморфные) графы. Понятие группы. Примеры групп. Группа симметрий (автоморфизмов) графа.

Логические умозаключения. Анализ текстов и логические выражения. Вычисление значений логических выражений. Законы алгебры высказываний. Доказательство логических тождеств. Логические тождества и электрические схемы.

Решение уравнений в различных числовых множествах. Свойства операций алгебры пятиугольника. Решение уравнений в алгебре пятиугольника (в том числе и с параметрами). Свойства операций алгебры (кольца) остатков. Решение уравнений в алгебре остатков. Решение уравнений в алгебре высказываний.

Метод перебора в нахождении целых корней уравнений и других задачах. Метод перебора в занимательных задачах. Комбинаторные задачи. Произведение множеств. Различные нестандартные задачи.

10-й класс

Правила суммы и произведения. Размещения и перестановки (с повторениями). Сочетания (с повторениями). Бином Ньютона. Разложение предметов по ящикам (чисел на слагаемые). Примеры рекуррентных соотношений и производящих функций и их применение в решении комбинаторных задач. Практические задачи на целочисленное решение уравнений.

Вычисления на различных микрокалькуляторах. Возможность вычислить точный ответ задачи. Число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина. Алгоритмы решений квадратных уравнений в различных алгебрах.

Устройство и работа машины Поста. Примеры программ. Арифметические действия с натуральными числами. Эффективные алгоритмы работы машины Поста.

Примеры бинарных отношений (равенства, сравнения, делимости нацело на множестве целых чисел, параллельности и перпендикулярности на множестве прямых и др.). Свойства бинарных отношений. Декартов квадрат множества и его графическое изображение (на примере трех- и четырехэлементного множества). Определение бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества. Примеры бинарных отношений на конечном (трех-, четырех-, пятиэлементном) множестве. Связь между бинарными отношения и графами. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфные (равные) графы и бинарные отношения. Машинное представление графов. Сеть. Граф сети.

Отображения и функции. Способы задания отображений.

Примеры частично упорядоченных (ч. у.) множеств: множество целых чисел с обычным отношением порядка или с отношением «делиться нацело», множество всех подмножеств данного множества с отношением включения и др. Сравнимые и несравнимые элементы ч. у. множества. Определение ч. у. множества как множества с рефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением. Диаграмма ч. у. множества. Изоморфные (равные) ч. у. множества. Описание «малых» ч. у. множеств.

Пересечение двух сравнимых элементов ч. у. множества. Пересечение $a \wedge b$ двух несравнимых элементов a, b ч. у. множества как элемент, наибольший среди всех элементов ч. у. множества, меньших a, b одновременно.

Полурешетка. Полурешетка как алгебра с одной операцией. Таблицы Кэли полурешеток. Полугруппа. Примеры полугрупп.

11-й класс

Понятие высказывательной формы или предиката от одной переменной. Примеры предикатов. Область определения и множество истинности предиката. Логические операции над предикатами. Связь операций над предикатами с их множествами истинности. Кванторы.

Двухместные предикаты. Определения уравнения, тождества, неравенства, функции и периодической функции. Отрицание высказываний, содержащих кванторы. Понятие о логике предикатов.

Строение математической теоремы. Виды теорем.

Понятие унарной, бинарной и n-арной алгебраической операции и алгебры. Примеры алгебр. Понятие кольца. Примеры колец. Кольцо вычетов и криптография. Примеры бинарных и тернарных отношений. Понятие n-арного отношения. Понятие математической модели, языка и подъязыка. Языки «непрерывной» математики и ДМ.

Основные понятия математической лингвистики, типы синтаксических языков, принципы синтаксической простоты. Анализ текстов художественных произведений.

Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

Алгоритмы построений циркулем и линейкой, нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, поиска эйлеровой цепи в графе.

Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$, $xy + x + y + 1$ и др.

Устройство и команды машины Тьюринга. Примеры программ машины Тьюринга. Программа сложения натуральных чисел. Понятие автомата. Примеры автоматов. Понятие исполнителя. Уточнение понятие алгоритма. Эквивалентные и эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и машины Тьюринга к ЭВМ.

Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. Разрешимость уравнений в радикалах. Разрешимость уравнений в алгебре пятиугольника и кольце вычетов. Распознавание конечных изоморфных (равных) графов и ч. у. множеств.

Проблема разрешимости. Разрешающие алгоритмы. Полиномиальное и экспоненциальное время работы алгоритма. Примеры алгоритмически разрешимых задач.

Процесс математизации наук. Классификация видов математического моделирования. Машинный эксперимент и его отличие от «натурного». Дискретная математика как фундаментальная основа математического моделирования. Понятие полной цепочки использования компьютеров. Этапы решения задачи с использованием компьютера: постановка задачи – выбор математического языка – разработка модели – разработка алгоритма – написание и отладка программы – симуляция – анализ результатов. Примеры.

Отметим, что в учебном пособии для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы [155] приведены учебно-тематический план работы по программе и программа-минимум, отражающая уровень обязательных требований к результатам обучения.

3.1.3. Особенности реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей информатики для углубления межпредметных связей математики и информатики на основе компетентностного подхода

В современном цифровом обществе становится очень важным развитие информационной культуры будущих специалистов. Бесспорно, учителя информатики несут наибольшую ответственность за формирование этой культуры у школьников и студентов колледжей (техникумов), особенно в условиях создания новой информационно-коммуникационной образовательной среды (ИКОС).

Важным элементом информационной культуры будущего учителя информатики является использование языка дискретной математики при достоверном, исчерпывающем и своевременном применении методов и средств сбора, хранения, обработки и распространения информации для систематизации имеющихся и формирования новых знаний. Как считал А. П. Ершов, «курс математических основ программирования… должен базироваться на дискретном анализе (в современной терминологии – дискретной математике. – *Е. П.*) и основаниях математики» [66, с. 294]. Для нас важно и то, что изучение *доминирующих* в ДМ структур и схем должно быть обязательным в подготовке системных программистов [66, с. 283]. Таким образом, можно утверждать, что дискретная математика играет фундаментальную роль в разработке информационных (более узко – компьютерных) технологий.

Не случайно в ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии (квалификация «бакалавр») отмечается, что выпускник должен обладать «способностью применять в профессиональной деятельности современные языки программирования и языки баз данных, методологии системной инженерии, системы автоматизации проектирования…» (ОПК-2) [259, с. 6].

Будущий учитель информатики должен владеть культурой программного обеспечения в обучении своему предмету, в том числе в обучении учащихся построению полной цепочки использования компьютера. Это имеет особенно важное значение в реализации модели обучения дискретной математике будущих учителей информатики в условиях большой свободы выбора содержания обучения, предоставляемой новыми ФГОС ВО педагогического образования в рамках компетентностного подхода [253, 254].

Как известно, программное обеспечение персональных компьютеров должно обеспечивать «выполнение операций по обработке информации под управлением специально разрабатываемых компьютерных программ, нацеленных как на поддержание работы различных системных функций компьютера, так и на решение прикладных задач, значимых для информатизации деятельности человека» [47, с. 29]. Поэтому в модели обучения дискретной математике будущих учителей информатики при реализации межпредметных связей математики и информатики на основе компетентностного подхода фундаментальную роль играет положение о том, что «практически любой теоретический факт должен быть исследован, проверен с помощью его программной реализации. В таком случае инструментом педагога становится огромный методический пласт наработок, усиливающий глубину изучения материала у обучаемого. Это требование накладывает ограничения на структуру (содержание. – *Е. П.*) теоретического материала» [147, с. 25], а также на методы, средства и формы обучения. Это положение важно и при отборе содержания обучения информатике в старших классах физико-математического профиля.

3.1.4. Направления методической специализации учителей математики и информатики на уровне магистратуры

Как уже ранее было обосновано, главную роль в исследовании направлений методической специализации будущих учителей математики и информатики в магистратуре играет формирование у них методических умений, необходимых для обучения учащихся начальным элементам математического моделирования и разработке алгоритмов вычислений с учетом профиля подготовки.

3.1.4.1. Направления методической специализации учителей математики

В методической специализации будущего учителя математики для работы в классах того или иного профиля прежде всего необходимо учитывать направления обучения дискретной математике, существующие в системе высшего образования.

Наиболее важно подготовить будущего учителя математики к работе в классах физико-математического профиля. Для этого необходимо принять во внимание особенности подготовки математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. С учетом специфики этого профиля основной целью методической специализации будущего учителя является умение реализовывать пропедевтику обучения построению полной цепочки использования компьютера (см. подп. 3.1.2).

В соответствии с этой методической целью при работе в классах физико-математического профиля необходимо предусмотреть методику изучения соответствующих элементов дискретной математики. Ориентиром в такой методической специализации должен послужить перечень понятий и фактов, играющих важную роль в концепции обучения ДМ. При этом особое внимание должно быть уделено ранней пропедевтике понятий графа, (бинарного) отношения, алгебры, модели, алгоритма, исполнителя, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий.

Для работы будущего учителя математики в классах другого профиля в выборе направления методической специализации необходимо учитывать следущее положение. В формировании математического аппарата исследований с использованием СКМ и КТ в различных научных областях, которые соответствуют названиям школьных предметов, наряду с классической («непрерывной») математикой фундаментальную роль играет дискретная математика. Напомним, метод конечных разностей в математической физике; молекулярные графы в математической химии; клеточные автоматы, отношения различной арности и элементы алгебры высказываний в биологии развития; алгебраические операции и логика предикатов в математической экономике и т. д. Это неполный перечень понятий и методов современной ДМ, так или иначе сыгравших свою междисциплинарную роль в формировании основ математического аппарата указанных дисциплин.

Таким образом, в методической подготовке будущего учителя математики к работе в классах того или иного профиля должно быть предусмотрено формирование умений использовать соответствующие школьному предмету знания дискретной математики в процессе обучения учащихся и студентов колледжа (техникума). Для этого необходимо объединение научной и методической линий в обучении ДМ.

3.1.4.2. Направления методической специализации учителей информатики

В методической специализации будущего учителя информатики для работы в классах того или иного профиля также необходимо учитывать направления обучения дискретной математике, существующие в системе высшего образования, а для работы в классах физико-математического профиля – особенности обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики.

Как уже отмечалось в подп. 1.3.4, современная прикладная дискретная математика имеет важное значение в разработке и совершенствовании современных систем компьютерной математики и компьютерных технологий. Поэтому, несмотря на различия в обучении ДМ, существующие в системе высшего образования, в методической специализации учителей информатики по любому профилю необходимо отразить методику изучения базовых понятий и методов дискретной математики, необходимых для обучения учащихся математическому моделированию и теории вычислительных процессов на основе корректного использования СКМ и КТ.

Как известно, потенциальные возможности инструментальной среды систем компьютерной математики и компьютерных технологий позволяют интенсифицировать процесс обучения и учебно-математическую деятельность студентов за счет ее автоматизации, в том числе в процессе выполнения ими лабораторных работ по специальным дисциплинам информационного профиля. Поэтому освоение и использование СКМ в обучении обусловливают у студентов дополнительную мотивацию и, следовательно, имеют важное значение в методической специализации за счет предоставления новых возможностей, имеющихся в информационной среде. В результате у студентов возникает стимул к изучению курса «Методика обучения учащихся корректному использованию систем компьютерной математики и компьютерных технологий».

В рамках этого курса целесообразно предусмотреть методику изучения такой важной темы, как «Основные понятия комбинаторики и комбинаторные числа» с помощью команд встроенных пакетов combinat и combstruct системы Maple. Эти пакеты позволяют демонстрировать учащимся доведение решений комбинаторных перечислительных задач с громоздким счетом до численного результата. При этом при решении комбинаторных задач следует постоянно обращать внимание на то, что недостаточно знать только возможности той или иной системы применительно к решению данного класса задач. Чтобы создать математическую модель задачи, необходимы знания правил построения основных комбинаторных конфигураций и умение их применять.

Следует интенсивно использовать в обучении электронные демонстрации при изучении темы «Элементы теории графов». В СКМ Maple имеется пакет networks, который содержит команды для создания различных типов графов и работы с ними. Данный пакет можно использовать для визуализации различных видов графов с помощью матриц смежности и инцидентности, что вызывает большой интерес у учащихся физико-математических классов благодаря многочисленным возможностям их практического применения.

В методической специализации будущего учителя информатики важную роль играют лабораторные работы как форма организации учебного процесса в школе или колледже (техникуме), позволяющая оптимально формировать навыки применения СКМ в процессе решения конкретных математических задач на основе методов дискретной математики (в частности, задач по дискретизации непрерывной модели). В ходе лабораторных работ не только приобретаются определенные навыки, но и закрепляются, углубляются полученные знания. Эта форма организации учебного процесса служит важным критерием успешности освоения изучаемого содержания ДМ. В процессе выполнения лабораторных работ у учащихся расширятся представления об основах математической обработки информации, имеющие важное общеобразовательное значение.

Для успешного осуществления методической специализации будущего учителя информатики в области корректного использования СКМ и КТ необходимо предусмотреть их использование при выполнении курсовых работ и дипломном проектировании. При этом важно сформировать у студентов представление о роли дискретной математики в обеспечении достоверного, исчерпывающего и своевременного применения систем компьютерной математики и компьютерных технологий при сборе, хранении, обработке информации для получения новых знаний.

3.1.5. Специализированные курсы для магистров

Важную роль в вариативном обучении дискретной математике магистров играют специализированные курсы, выполняющие интегративную роль. Прежде всего они обеспечивают систематизацию учебного материала: отдельные знания, полученные ранее при изучении других дисциплин как частные случаи решения какой-то общепрофессиональной проблемы, сливаются в одно целое и создают основу для ее решения.

Ориентиром в формировании структуры этих специализированных курсов является принцип профессионально-педагогической направленности подготовки, в соответствии с которым можно выделить направления методической специализации математиков, программистов, бакалавров и магистров прикладной математики, инженеров для высокотехнологичных автоматизированных отраслей производства.

В качестве инструментария для составления программ курса (специализированных курсов) по дискретной математике и формирования их содержания в рамках подготовки магистров педагогических специальностей могут выступить следующие целевые модули: методологический (научно-исследовательский), теоретический (базовый профессионально-педагогический), методический (изучение элементов методики обучения ДМ в школе).

В качестве примера специализированного курса в вариативной подготовке будущих учителей математики рассмотрим курс «Элементы теории решеток». В рамках этого курса реализуется возможность наглядного изучения со школьниками основных понятий современной абстрактной алгебры (на основе понятия решетки). При разработке курса «Элементы теории решеток» были использованы основополагающие труды [11, 100, 270].

Изложим представленный в спецкурсе подход к определению понятия решетки и ее эндоморфизма, облегчающий изучение указанных книг.

Понятие решетки

Пусть A – некоторое множество. Декартовым квадратом A^2 множества A называется множество всевозможных пар, составленных из элементов этого множества. Пусть, например, дано множество чисел $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда множество всевозможных пар, составленных из элементов M, изображено точками на рис. 3.1: множество M^2 состоит из пар чисел, являющихся координатами изображенных на рисунке точек.

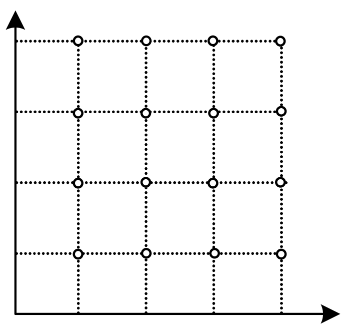


Рис. 3.1

Определение 1. Бинарным отношением на множестве A называют некоторое подмножество декартова квадрата A^2 множества A. Например, отношение порядка на множестве чисел M есть множество пар

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

Если вместо, например, (1, 2) и (1, 3) писать $1 \leq 2$ и $1 \leq 3$, то увидим за обозначением пары (a, b) привычную запись $a \leq b$.

Заметим, что отношение равенства на множестве M состоит из пар $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

Бинарное отношение на множестве принято также обозначать греческими буквами α, β, γ, ρ и т. д. Например, если запись $a\rho b$ означает, что «*a* делится нацело на *b*», где $\{2, 3, 6\}$, то бинарное отношение ρ состоит из пар (6, 6), (6, 2), (6, 3), (3, 3), (2, 2). Если запись $a\rho b$ означает, что «прямая *a* перпендикулярна прямой *b*» на множестве всех прямых на плоскости, то бинарному отношению ρ на множестве этих прямых принадлежат все пары перпендикулярных друг другу прямых.

Определение 2. Бинарные отношения на множестве называются равными, если они образованы одним и тем же множеством пар.

Бинарное отношение ρ на некотором множестве A может обладать следующими *свойствами:*

1^0. Рефлексивность. Бинарное отношение ρ на A называется рефлексивным, если $a\rho a$ истинно для любого элемента a, $a \in A$.

2^0. Антисимметричность. Бинарное отношение ρ на A называется антисимметричным, если для любых $a, b \in A$ из истинности $a\rho b$ и $b\rho a$ следует, что $a = b$.

3^0. Транзитивность. Бинарное отношение ρ на A называется транзитивным, если для любых $a, b, c \in A$ из истинности $a\rho b$ и $b\rho c$ следует истинность $a\rho c$.

Например, отношение «быть параллельными» на множестве прямых в пространстве ($a\rho b$ означает $a \| b$), очевидно, обладает свойствами 1^0, 3^0.

Определение 3. Бинарное отношение ρ на множестве A, обладающее свойствами 1^0, 2^0 и 3^0, называется отношением частичного порядка на этом множестве.

Определение 4. Множество с определенным на нем отношением частичного порядка называется частично упорядоченным множеством.

Примеры ч. у. множеств:

1) множество натуральных чисел N с отношением «делиться нацело»: $a\rho b$ означает, что «число a делится нацело на число b»;

2) множество P (M) всех подмножеств данного множества M с отношением ρ, где $A\rho B$ для A, $B \in P$ (M) означает, что A – подмножество B.

Бинарное отношение частичного порядка ρ на множестве A будем обозначать символом $\leq$. Иными словами, вместо $a\rho b$ будем писать $a \leq b$ в случае, когда пара (a, b) принадлежит бинарному отношению ρ на множестве A. Само ч. у. множество будем кратко обозначать так: (A, $\leq$).

Определение 5. Элементы a, b ч. у. множества (M, $\leq$) называются сравнимыми, если истинно либо $a \leq b$, либо $a \geq b$. В противном случае элементы a, b называются несравнимыми. Если $a \geq b$, то говорят, что элемент a больше элемента b.

Определение 6. Элемент a называется элементом, строго большим элемента b в ч. у. множестве, если $a \geq b$ и $a \neq b$. В этом случае пишут $a > b$.

Определение 7. Говорят, что элемент a покрывает элемент b в ч. у. множестве M, если $a > b$ и не существует такого элемента $x \in M$, такого, что $a > x > b$. В этом случае пишут $a > b$.

В ряде случаев ч. у. множество может быть наглядно изображено в виде диаграммы на плоскости. Для того, чтобы изобразить ч. у. множество (M, $\leq$) в виде диаграммы, примем следуюшие соглашения:

• различные элементы (M, $\leq$) изображаются различными точками плоскости;

• если a, $b \in M$ и элемент a покрывает элемент b, то точка, изображающая a, располагается выше точки, изображающей элемент b, и эти точки соединяются отрезком (рис. 3.2).

Понятно, что диаграмма ч. у. множества может быть построена полностью, когда ч. у. множество конечно. Очевидно также, что при построении диаграммы ее отрезки могут пересекаться в точках, не изображающих элементы.

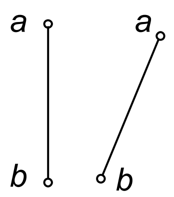


Рис. 3.2

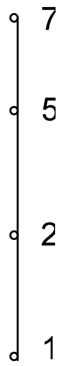


Рис. 3.3

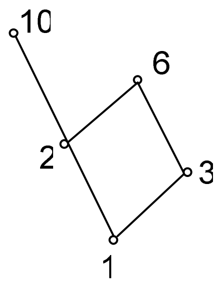


Рис. 3.4

Рассмотрим примеры ч. у. множеств и их диаграмм.

Пример 1. $(M, \leq)$, где $M = \{1, 2, 5, 7\}$ и $a \leq b$ для $a, b \in M$ означает, что «число a меньше числа b» (рис. 3.3).

Пример 2. $(P, \leq)$, где $P = \{1, 2, 3, 6, 10\}$ и $a \leq b$ для $a, b \in P$ означает, что «число b делится нацело на число a» (рис. 3.4).

Определение 8. Элемент a ч. у. множества $(M, \leq)$ называется его наибольшим (наименьшим) элементом, если для любого $x \in M$ справедливо соотношение $a \geq x$ $(a \leq x)$.

Из определения очевидно следует, что в ч. у. множестве может существовать только единственный наибольший или наименьший элемент.

Заметим, что в ч. у. множестве на рис. 3.4 существует наименьший элемент 1, наибольший – не существует. В ч. у. множестве на рис. 3.5, наоборот, существует наибольший элемент a, а наименьший – не существует.

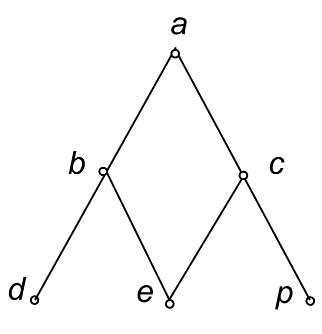


Рис. 3.5

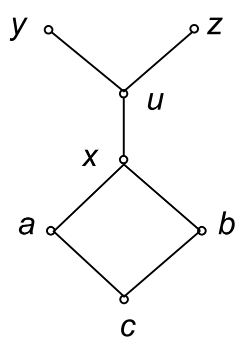


Рис. 3.6

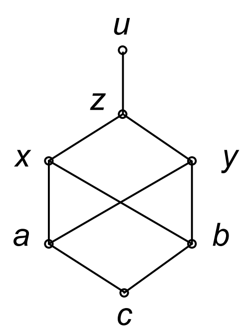


Рис. 3.7

Пусть дано некоторое ч. у. множество $(P, \leq)$ и $a, b \in P$. Рассмотрим множество всех элементов ч. у. множества $(P, \leq)$ таких, которые больше как элемента a, так и элемента b одновременно.

Определение 9. Пусть на множестве элементов из ч. у. множества $(P, \leq)$, которые больше элементов a и b одновременно, существует наименьший элемент. Тогда этот элемент называется объединением элементов a и b и обозначается $a \vee b$.

Например, в ч. у. множестве $(A, \leq)$ на рис. 3.6 объединением элементов a и b является элемент $a \vee b = x$, а в ч. у. множестве $(B, \leq)$ на рис. 3.7 элемент $a \vee b$ не существует. Действительно, в ч. у. множестве $(A, \leq)$ на его подмножестве $\{x, y, z, u\}$ элементов, больших a и b одновременно, существует наименьший элемент x. В свою очередь, на ч. у. множестве $(B, \leq)$ на его подмножестве $\{x, y, z, u\}$ такого наименьшего элемента нет.

Определение 10. Пусть на множестве элементов ч. у. множества $(P, \leq)$, которые меньше выбранных заранее элементов a и b из $(P, \leq)$, существует наибольший элемент. Тогда этот элемент называется пересечением элементов a и b и обозначается $a \wedge b$.

Например, в ч. у. множестве $(A, \leq)$ на рис. 3.6 $z \wedge y$, а в ч. у. множестве $(B, \leq)$ на рис. 3.7 $x \wedge y$ не существует.

Определение 11. Ч. у. множество называется решеткой, если для любых двух его элементов существует и элемент, являющийся их объединением, и элемент, являющийся их пересечением.

Примеры решеток даны на рис. 3.8, 3.9, 3.10.

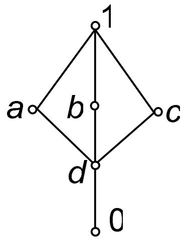


Рис. 3.8

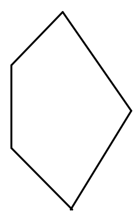


Рис. 3.9

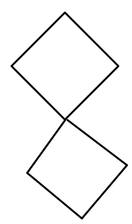


Рис. 3.10

Заметим, что наименьший элемент решетки обозначается 0, а наибольший – 1.

Определение 12. Элемент решетки, покрывающий 0, называется ее атомом. Если единица решетки 1 покрывает какие-то элементы, то они называются коатомами решетки.

В решетке на рис. 3.8 элемент d – атом, а в решетке на рис. 3.8 элементы a, b, c – коатомы.

Определение 13. Цепью называется решетка, любые два элемента которой являются сравнимыми.

Решетка на рис. 3.3 является цепью.

Множество элементов решетки, которое относительно определенного на ней частичного порядка само является решеткой, называется подрешеткой этой решетки.

Множество $\{1, a, b, c, d\}$ – подрешетка решетки, изображенной на рис. 3.8.

Из определения решетки очевидно следует, что справедливы следующие свойства:

Свойство 1. Объединение сравнимых элементов ($a \leq b$) решетки равно большему элементу b, пересечение этих элементов равно меньшему элементу a.

Свойство 2. Объединение и пересечение несравнимых элементов a, b решетки есть элементы, не равные a и b и не равные друг другу.

Определение 14. Эндоморфизмом φ конечной решетки L называется такое отображение φ элементов множества L в себя, при котором для операций $\wedge$ и $\vee$ справедливы равенства $\varphi(a \wedge b) = \varphi a \wedge \varphi b$, $\varphi(a \vee b) = \varphi a \vee \varphi b$.

Определение 15. Автоморфизмом φ конечной решетки L называется такое отображение φ элементов множества L в себя, при котором различные элементы отображаются в различные и для операций $\wedge$ и $\vee$ справедливы равенства $\varphi(a \wedge b) = \varphi a \wedge \varphi b$, $\varphi(a \vee b) = \varphi a \vee \varphi b$.

Например, автоморфизмом φ решетки на рис. 3.8 является следующее отображение: $\varphi 0 = 0$, $\varphi d = d$, $\varphi a = b$, $\varphi b = c$, $\varphi c = a$, $\varphi 1 = 1$.

Из определения автоморфизма решетки очевидно вытекают следующие свойства:

Свойство 3. Сравнимые элементы решетки отображаются в сравнимые элементы.

Действительно, по определению операций $\wedge$ и $\vee$ для элементов a, b, очевидно, $a \leq b$ равносильно $a \vee b = b$ и $a \wedge b = a$. Отсюда, по определению автоморфизма φ, имеем $\varphi a \vee \varphi b = \varphi b$ и $\varphi a \wedge \varphi b = \varphi a$. Последние два равенства, в свою очередь, означают, что $\varphi a \leq \varphi b$.

Из свойства 3 непосредственно следуют свойства 4 и 5.

Свойство 4. Цепь при автоморфизме решетки отображается в цепь.

Свойство 5. Элемент, покрывающий n элементов, отображается в элемент с таким же свойством: $i \in N$.

Доказательство. Пусть элемент a решетки покрывает n элементов a_i, $i \in N$, и $1 \leq i \leq n$. Тогда $a_i \vee a_j = a$ для $1 \leq i$, $j \leq n$. Значит, $\varphi a_i \vee \varphi a_j = \varphi a$. Поскольку все φa_i для $1j \leq i \leq n$ различны, то последнее равенство означает, что элемент φa покрывает n элементов φa_i.

Аналогично доказывается следующее свойство.

Свойство 6. Элемент, который имеет n покрывающих его элементов, отображается в элемент с таким же свойством.

На основе предложенной методики изучения понятия решетки, ее эндоморофизма и перечисленных свойств магистр может предложить школьникам различные темы для самостоятельной работы над рефератами, например:

1. Описать все n-элементные решетки для $n \leq 7$ (при $n = 7$ имеется 53 решетки, что уже ранее доказано с помощью алгоритма перечисления решеток).

2. Найти все n-элементные решетки для $n \leq 7$, обладающие только тождественным или постоянным эндоморфизмом (в научной литературе такие решетки называются жесткими). При этом постоянным называется эндоморфизм, отображающий все элементы решетки в один элемент. Тождественным называется автоморфизм φ, при котором для любого элемента решетки x $\varphi x = x$. (Имеется только одна жесткая неодноэлементная решетка при $n = 7$.)

Как следует из изложенного, при выборе содержания курсовых и дипломных работ по ДМ будущих учителей математики и информатики главным ориентиром являются математическое моделирование и теория вычислительных процессов, а также системы компьютерной математики. При этом учебно-исследовательская работа студентов при выполнении этих работ может плавно переходить в научно-исследовательскую работу.

3.2. Основные методические аспекты обучения дискретной математике будущих инженеров-педагогов

3.2.1. Методическая схема реализации модели обучения дискретной математике в рамках интеграции на основе компетентностного подхода

В результате изучения дисциплины «Математика», которая была включена в ФГОС ВПО 051000 Профессиональное обучение (по отраслям), студент должен знать «фундаментальные разделы математики в необходимом объеме для осуществления профессионально-педагогической деятельности» по подготовке рабочих [264, с. 15]. Эта же дисциплина необходима для формирования у бакалавров ряда важных компетенций учебно-профессиональной образовательно-проектировочной деятельности при подготовке современного рабочего, что нашло отражение в новом ФГОС ВО подготовки бакалавров профессионального обучения [257].

Как следует из анализа предмета и функций ДМ, направления обучения на инженерно-технических специальностях и принципа профессионально-педагогической направленности, в изучении *фундаментальных разделов математики* определяющую роль играют математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы, лежащие в основе всех новейших технологий, что, несомненно, влияет на подготовку рабочих и специалистов среднего звена в наступивший век «компьютерной» автоматизации и роботизации производства. Идеи и методы этих областей математики имеют важное теоретическое значение в исследовании компонентов рассматриваемой модели обучения ДМ.

Таким образом, при выборе уровневых целей и содержания обучения математике особенно важно учесть, что современное математическое моделирование с применением компьютера основано на использовании (часто совместном) дискретных и непрерывных моделей математики с использованием СКМ и КТ. Поэтому в выявлении конкретных особенностей компонентов обсуждаемой модели обучения бакалавров профессионального обучения важную роль играют главные цели обучения ДМ: достижение *единства* в обучении дискретной и непрерывной математике, что подразумевает формирование у студентов определенных умений на основе гармоничного сочетания дискретных и непрерывных моделей, необходимых им для овладения профессиональной культурой профильного обучения учащихся решению технологических задач (отрасли производства), в том числе и в обучении реализации вычислительных процессов в рамках той или иной производственной технологии.

Как следует из изложенного в подп. 1.3.4, современная дискретная математика имеет фундаментальное значение в математическом моделировании, в разработке и совершенствовании СКМ и КТ, являющихся математической основой вычислительных процессов при реализации современных отраслевых (производственных) технологий и многих других областей деятельности. Следовательно, ДМ «играет важную роль в реализации принципа интеграции психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогической направленности подготовки)» [267, с. 130]. Поэтому при выборе уровневых целей и содержания, методов и средств рассматриваемой модели обучения также должно быть предусмотрено соответствующее специальности изучение этапов решения производственных задач с использованием компьютера на основе систем компьютерной математики и компьютерных технологий. Это необходимо для выработки у бакалавров умения адаптироваться к постоянным изменениям в области компьютерной автоматизации и роботизации производства, что, несомненно, играет важную роль в профильном обучении математике.

В данной модели обучения дискретной математике необходимо учесть, что при обеспечении надежности работы сложных систем управления технологическими процессами, энергетических и других важных производственных отраслевых систем важны такие показатели эффективности функционирования, как точность выполняемых при этом вычислений, эффективность разрабатываемых алгоритмов вычислений, помехозащищенность и т. д. А это, в свою очередь, требует отражения в уровневом содержании обучения областей современной ДМ (теорий алгоритмов, автоматов, асимптотических оценок и приближений и др.). Поэтому эти разделы ДМ являются математической основой формирования соответствующих компетенций: способность и готовность «проектировать образовательные программы для разных категорий обучающихся» (ПК-19), «управлять образовательной деятельностью с использованием современных технологий подготовки рабочих (специалистов)» (ПК-22), «анализировать современные отраслевые (производственные) технологии для обеспечения опережающего характера подготовки рабочих (специалистов)» (ПК-31) [258].

Таким образом, справедливо положение о том, что дискретная математика играет фундаментальную роль в формировании у будущих инженеров-педагогов умений научной, дидактической и методической *переработки* содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки.

Переработка содержания учебного материала означает проведение структурно-логического анализа содержания дисциплины, в процессе которого выделяются опорные математические понятия и методы, составляющие математический аппарат изучаемой технической дисциплины, необходимый для обучения учащихся математическому моделированию технических объектов и алгоритмов вычислительных процессов, реализующих технологию их функционирования во многих отраслях производства.

При переработке содержания осуществляется методическая редукция этих понятий, т. е. трансформация математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания учащихся.

Это положение наряду с главными целями обучения стало одним из основных ориентиров при разработке модели методической системы обучения ДМ будущих инженеров-педагогов, послужило основой выбора уровневых целей и содержания рабочей программы [154] и методических указаний к ней [161], где нашли отражение требования компетентностного подхода, содержащиеся в ФГОС ВО подготовки бакалавров профессионального обучения.

3.2.2. Содержание обучения в методической схеме модели обучения дискретной математике

Для выработки умений структурно-логического анализа содержания технических дисциплин в заявленной рабочей программе предусмотрено изучение разделов «Дискретные структуры и схемы», «Алгоритмы. Формальные языки и системы компьютерной математики», «Элементы теории графов» со следующим содержанием [154]:

Раздел 1. Дискретные структуры и схемы

Понятие комбинаторной конфигурации. Перестановки, сочетания, размещения и формулы для их подсчета. Правило суммы и произведения.

Основные комбинаторные схемы: списки элементов, урновая схема, схема раскладки предметов по различным ящикам.

Отображения и их основные виды. Функция как частный случай отображения.

Операции над множествами и их свойства.

Понятие алгебраической операции. Примеры. Определение полугруппы, группы, кольца и полукольца и их примеры. Понятие алгебры.

Роль алгебр в разработке систем компьютерной математики.

Декартово произведение множеств. Бинарное соответствие между множествами. Примеры.

Декартов квадрат множества. Бинарные отношения на множестве и их основные свойства. Граф бинарного отношения. Отношения эквивалентности и частичного порядка. Примеры.

Примеры использования отношения эквивалентности в классификации видов технического оборудования. Примеры расчета вариантов сборки изделий на основе упорядоченных множеств.

Понятие математической структуры и ее модели (интерпретации). Примеры. Дискретная и непрерывная величина. Дискретные структуры и способы их задания. Дискретизация непрерывной модели.

Высказывания. Операции с высказываниями и таблицы истинности. Простые и сложные высказывания. Алгебра логики. Логические тождества. Вычисление значений формул алгебры логики. Тождественные преобразования формул алгебры логики.

Определение булевых функций одной и двух переменных. Описание булевых функций двух переменных. Булева алгебра.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) булевой функции. Упрощение СДНФ на основе логических тождеств. Реализация булевой функции на логических элементах «конъюнктор», «дизъюнктор», «инвертор» и «двоичный сумматор». Анализ и синтез логических устройств. Формы представления чисел в цифровых устройствах. Роль цифровых устройств в структуре ЭВМ.

Раздел 2. Алгоритмы. Формальные языки и системы компьютерной математики

Понятие алгоритма и его основные свойства. Проблема алгоритмической разрешимости задачи. Экспоненциальные и полиномиальные алгоритмы. Примеры.

Определение асимптотической оценки ~, O и o. Применение асимптотических оценок в анализе сложности алгоритмов.

Понятие формального языка. Алфавит и слово языка. Правила образования слов. Примеры. Исчисление высказываний как формальный язык. Роль формальных языков в теоретической информатике.

Понятие конечного автомата. Автоматы-распознаватели. Роль формальных языков и конечных автоматов в автоматизации технологических процессов в машиностроении.

Понятие компьютерной алгебры. Понятие системы компьютерной математики. Роль СКМ в реализации этапов математического моделирования и вычислительных процессов в машиностроительном производстве. Основные преимущества и недостатки СКМ.

Раздел 3. Элементы теории графов

Задачи, приводящие к понятию графа. Определение графа и его элементов. Маршрут, цепь, цикл.

Виды графов (неориентированные, ориентированные, простые, эйлеровы, гамильтоновы, двудольные деревья, бинарные деревья, леса).

Изоморфизм графов. Описание n-элементных графов для малых n.

Машинное представление графа. Матрица смежности и инцидентности. Переход от матричного представления к машинному и обратный переход.

Применение графов в анализе систем энергоснабжения.

Разрезы графа. Связные графы. Компоненты графа. Разрезающее множество и разрез графа.

Дерево графа. Остов и коостов графа. Граф электросхемы. Анализ электросхемы с помощью ее графа.

Сеть. Граф сети. Примеры использования сетей в машиностроении.

Мультиграфы и их применение в технологии сборки электроприборов, электрооборудования и других технических устройств.

3.2.3. Типичные примеры методической редукции математических понятий

В основе методической редукции математических понятий лежат охарактеризованные ранее особенности реализации принципов преемственности и профессионально-педагогической направленности обучения (см. подп. 2.3.3, п. 2.4). Отметим, что методическая редукция понятий имеет особенно важное значение в индивидуализации работы со слабыми студентами и студентами заочного отделения.

Необходимость методической редукции многих важных понятий дискретной математики можно обнаружить при изучении почти каждой технической дисциплины. Например, редукция понятия конечной суммы и свойств преобразований конечных сумм для их приближенной оценки необходима в рамках «нормативной», а потому очень важной в машиностроении дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация».

3.2.3.1. Редукция понятия равносильных формул алгебры высказываний

Необходимость редукции понятия равносильных формул постоянно возникает при обучении электротехнике (анализу и синтезу электрических цепей), радиотехнике, а также при изучении дисциплин, так или иначе связанных с автоматизацией технологических процессов и производств.

Приведем типичный пример изложения в учебной литературе этого понятия, играющего важную роль в конструировании разного рода логических устройств схемотехники, которая, в свою очередь, лежит в основе конструирования автоматически работающих технических устройств.

В учебном пособии Л. К. Конышевой представлено строгое определение понятия равносильных формул: «две логические формулы $A = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют равносильными формулами, если их единичные и нулевые наборы совпадают» [96, с. 136]. При этом строки, на которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, названы единичными наборами, остальные строки – нулевыми наборами.

Не умаляя методических достоинств этого и другого аналогичного определения равносильных формул, предложим следующую методическую редукцию этого понятия.

В начале при необходимости следует использовать методику изложения понятия высказывания, логического умножения, сложения и отрицания, вычислений значений логических выражений, законов алгебры высказываний, доказательства логических тождеств и тождественных преобразований логических выражений из учебного пособия по дискретной матаметике для 8–9-х классов [155].

В этом случае следует продолжить обозначать операции конъюнкции $\wedge$ и дизъюнкции $\vee$ символами «·» и «+» соответственно, называть их логическим умножением и сложением. Кроме этого, для облегчения восприятия символы 0, 1 будут иметь следующее логическое выражение: соответственно *и* («истина»), и *л* («ложь»).

Независимо от заявленного учебного пособия [155] предложим вариант изложения методической редукции рассматриваемого понятия.

В алгебре принято равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, называть *тождествами*. Например, тождествами являются формулы сокращенного умножения. Равенство $(a+b)^2 = a+b$ тождеством не является, поскольку оно неверно, например, при $a = b = 3$.

Рассмотрим логические равенства $A+B \equiv B+A$, $(A+B)\cdot C \equiv \equiv A\cdot C + B\cdot C$, $\overline{A} + B \equiv A \cdot B$. Три черты в знаке логического равенства $\equiv$ позволяют отличить его от знака алгебраического равенства =. Логическое равенство также отличает от алгебраического запись с использованием заглавных букв. Поэтому, например, легко распознается алгебраическое равенство $a+b=b+a$ и логическое равенство $A+B=B+A$. Выражения $A \equiv л$, $B \equiv и$ также являются простейшими логическими равенствами, в которых на месте знака $\equiv$ ранее записывался обычный знак равенства =.

Подставим в логическое равенство $\overline{A} + B \equiv A \cdot B$ значения $A \equiv л$, $B \equiv и$. Тогда получим, что истина равна лжи ($и \equiv л$), что неверно.

Определение. Логическое равенство, справедливое при любых значениях входящих в него букв, называется логическим тождеством.

Левая и правая часть логического равенства $A \equiv B$ образована формулами $A = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемыми равносильными.

Очевидно, $A + B \equiv B + A$, т. е.

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

есть логическое тождество. Например, такое тождество имеем при

$$A = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 \text{ и } B = f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1.$$

Справедливы алгебраические тождества $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$, в записи которых имеются числа 0, 1. В свою очередь, справедливы логические тождества $A + и \equiv и$, $A + л \equiv A$, $A \cdot и \equiv A$, $A \cdot л \equiv л$, в записи которых есть символы $и$, $л$, являющиеся значениями логических выражений. Приведем список логических тождеств, важных для упрощения логических выражений и доказательства логических тождеств.

Основные тождества:

$A \cdot \overline{A} \equiv л$, $A + \overline{A} \equiv и$, $\overline{\overline{A}} \equiv \overline{A}$ (где $\overline{\overline{A}}$ – отрицание $\overline{A}$).

Свойства символов и, л:

$\overline{и} \equiv л$, $\overline{л} \equiv и$, $A + и \equiv и$,

$A + л \equiv A$, $A \cdot и \equiv A$, $A \cdot л \equiv л$.

Законы идемпотентности:

$A \cdot A \equiv A$; $A + A \equiv A$.

Переместительные законы:

$A + B \equiv B + A$, $A \cdot B \equiv B \cdot A$.

Сочетательные законы:

$(A + B) + C \equiv A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C)$.

Распределительный закон: $(A + B) \cdot C \equiv A \cdot C + B \cdot C$.

Законы поглощения:

$A + A \cdot B \equiv A$, $A + (A \cdot B) \equiv A$.

Закон замены логического следования:

$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \equiv \overline{A} + B$.

Для доказательства логического тождества достаточно подставить в него все возможные наборы значений входящих в него букв и воспользоваться таблицами истинности. Но для доказательства следует прежде всего применить перечисленные выше логические тождества.

Пример. Доказать тождество $(A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv A + B$.

Доказательство. Обозначим левую часть тождества через Т: $\mathrm{T} \equiv (A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B)$. Согласно переместительному закону, $\mathrm{T} \equiv \overline{A} \cdot \cdot (A \cdot B) + (A + B)$. На основании сочетательного закона $\mathrm{T} \equiv (\overline{A} \cdot \cdot A) \cdot B + (A + B)$. По переместительному закону $\overline{A} \cdot A \equiv A \cdot \overline{A}$, поэтому $\mathrm{T} \equiv (A \cdot \overline{A}) \cdot B + (A + B)$. Из основного тождества $A \cdot \overline{A} \equiv л$ следует, что $\mathrm{T} \equiv л \cdot B + (A + B)$. Из свойства символов $A \cdot л \equiv л$ вытекает, что $\mathrm{T} \equiv л + (\mathrm{A} + \mathrm{B})$. Согласно переместительному закону, $\mathrm{T} \equiv (A + B) + л$. Тогда из свойства символов $A + л \equiv \mathrm{A}$ получаем, что $\mathrm{T} \equiv A + B$.

Обычно такие преобразования записывают в сокращенном виде без ссылок на используемые законы:

$$(A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv \overline{A} \cdot (A \cdot B) + (A + B) \equiv (\overline{A} \cdot A) \cdot B + (A + B);$$

$$л \cdot B + (A + B) \equiv л + (A + B) \equiv (A + B) + л \equiv A + B.$$

При необходимости можно продолжить изучение понятия равносильных формул на основе учебного пособия Л. К. Конышевой [96].

В связи с использованием этого понятия можно предложить следующий прием, упрощающий вычисление значений логических выражений. Для этого заменяем символы *и*, *л* снова на символы 0,1 и сообщаем, что для них справедливы все правила умножения чисел из курса математики начальной школы. Например, $0 \cdot 1 = 0$, $0 + 1 = 1$ и т. д. Но есть только одно изменение, а именно, вместо $1 + 1 = 2$ сейчас договоримся, что $1 + 1 = 1$. Кроме того, имеется операция отрицания, не изучаемая в начальной школе и выполняемая так: $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$. Тогда, например, $T \equiv (A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B)$ при $A = 0$, $B = 1$ легко вычисляется так:

$$T \equiv (A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv (0 \cdot 1) \cdot \overline{0} + (0 + 1) = (0 \cdot 1) \cdot 1 + (0 + 1) = 0 \cdot 1 + 1 = 1.$$

Для облегчения восприятия здесь знак логического умножения заменен на знак умножения, используемый в школе, что в данном случае является более корректным. После этого надо сообщить, что благодаря тождеству $A + 1 = 1$ легко было сосчитать ответ, даже не воспользовавшись ранее доказанным тождеством $(A \cdot B) \cdot \overline{A} + (A + B) \equiv A + B$.

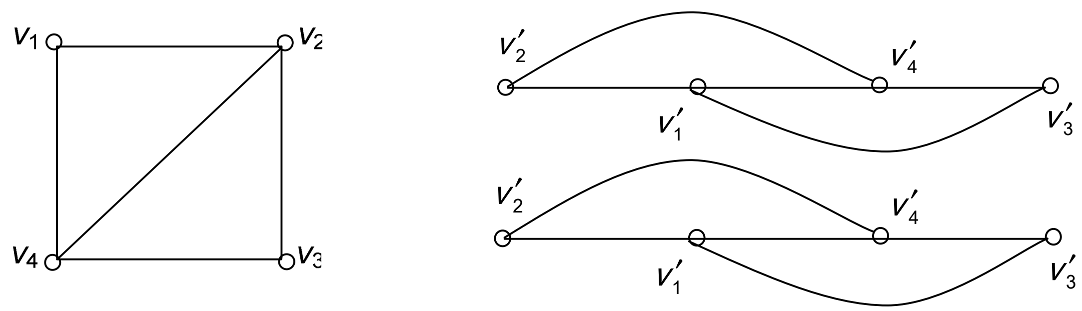
3.2.3.2. Редукция понятия изоморфных графов

Необходимость редукции понятия изоморфных графов возникает при изучении многих технических дисциплин, где так или иначе используются основные виды графов, например при трассировке печатных плат в радиотехнике, при проектировании различных управляющих автоматов в электротехнике, систем энергоснабжения в электроэнергетике и т. д.

Приведем типичный пример изложения этого важного понятия.

Пусть имеются графы $G_1 = (V_1,\ E_1)$ и $G_1' = (V_1', E_1')$, для которых $|V_1| = |V_1'|$. Графы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует такая биекция φ (взаимно однозначное отображение φ) множества вершин V_1 на множество вершин V_1', что для любого ребра $(v_1, v_2) \in E_1$ справедливо $(\varphi v_1, \varphi v_2) \in E_1'$.

Пример. Даны графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_1' = \left(V_1', E_1'\right)$, изображенные на рис. 3.11. Графы G_1 и G_2 изоморфны, поскольку для любого ребра $(v_1,\ v_2) \in E_1$ справедливо $(\varphi v_i,\ \varphi v_j) \in E_1'$ $(1 \le i,\ j \le 4)$ при биекции $\varphi v_1 = v_1'$, $\varphi v_2 = v_2'$, $\varphi v_3 = v_3'$, $\varphi v_4 = v_4'$.



Граф G_1 Граф G_2

Рис. 3.11

Такой достаточно формальный подход к изложению понятия изоморфных графов, как правило, вызывает трудности при его восприятии студентами. Поэтому предложим следующую методическую редукцию этого понятия.

Населенные пункты *a*, *b*, *c*, *d* (рис. 3.12) необходимо соединить дорогами так, чтобы существовал единственный маршрут, связывающий любые два пункта. Для этого рассмотрим графы, вершины которых обозначают населенные пункты, ребра – дороги, их соединяющие. С помощью этих графов на рис. 3.13–3.24 изображены все возможные варианты прокладки дорог. Выбор того или иного варианта зависит от разных обстоятельств, например от стоимости каждой дороги, соединяющей пункты.

Представим сейчас, что буквы *a*, *b*, *c*, *d* обозначают сигнальные устройства системы электроснабжения. Требуется указать схему, в которой радиосигнал, поступивший на одно из устройств, мог бы передаться единственным способом на все другие устройства.

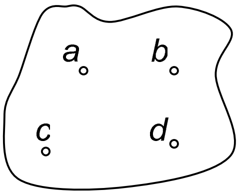


Рис. 3.12

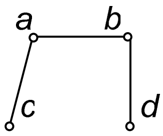


Рис. 3.13

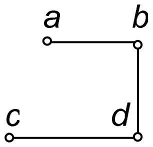


Рис. 3.14

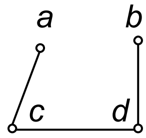


Рис. 3.15

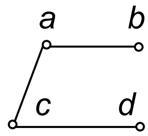


Рис. 3.16

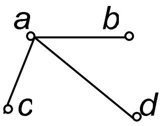


Рис. 3.17

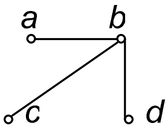


Рис. 3.18

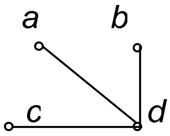


Рис. 3.19

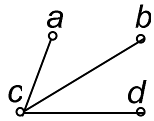


Рис. 3.20

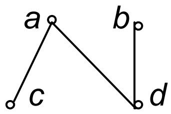


Рис. 3.21

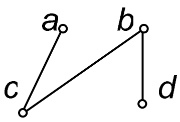


Рис. 3.22

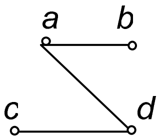


Рис. 3.23

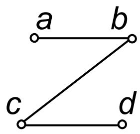
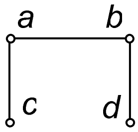


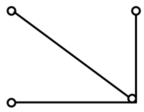
Рис. 3.24

Очевидно, при передаче радиосигнала расположение устройств и расстояние между ними безразлично, поэтому можно не учитывать их обозначение на схеме. Следовательно, можно указать только две схемы, принципиально отличающиеся друг от друга: схема последовательной передачи сигнала (рис. 3.25) и схема передачи сигнала через одно и то же устройство (рис. 3.26).



Граф *A*

Рис. 3.25



Граф *B*

Рис. 3.26

Ясно, что графы отличаются друг от друга как числом вершин, так и числом ребер. Но кроме того, они могут отличаться расположением ребер, как, например, графы на рис. 3.13–3.14. Однако среди всех этих графов имеются одинаковые, или равные, графы, так же как и имеются, например, одинаковые, или равные, треугольники. Какие же графы считаются равными?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим произвольный граф с n вершинами. Пронумеруем его вершины числами от 1 до n (см., например, граф A на рис. 3.25, для которого $n = 4$). Ребро графа, соединяющее вершины i, j, обозначим (i, j) в случае $i < j$. Если же $i > j$, то обозначим ребро (j, i). Например, у графа A ребро, соединяющее вершины 2 и 3, обозначим (2, 3), а не (3, 2), поскольку 2 < 3. Тогда каждому ребру (i, j) графа соответствует точка (i, j) на координатной плоскости Oxy. Так, трем ребрам (1, 2), (2, 3), (3, 4) графа A соответствуют три точки (1, 2), (2, 3), (3, 4) (рис. 3.27). Таким образом, с помощью этих точек можно записать всю информацию о ребрах: число ребер и вершины, которые соединяет каждое ребро.

Рассмотрим графы Γ_1 и Γ_2 с одинаковым числом вершин и ребер, изображенные на рис. 3.28. Можно ли пронумеровать вершины каждого графа так, чтобы ребрам графа Γ_1 и графа Γ_2 соответствовало одно множество точек на координатной плоскости Oxy?

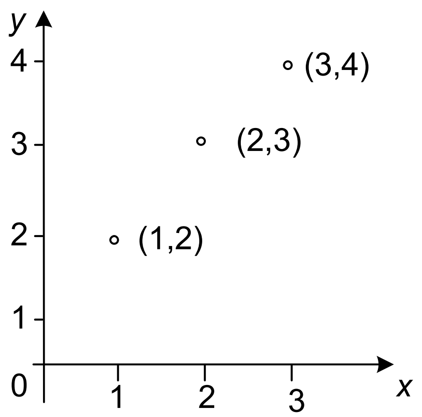


Рис. 3.27

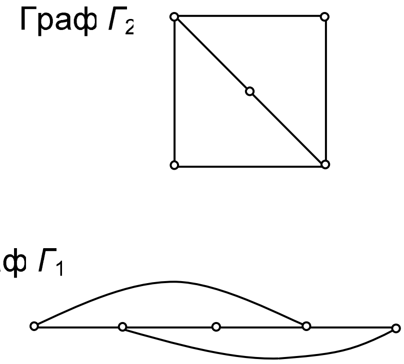


Рис. 3.28

Ответ на этот вопрос утвердительный. На рис. 3.30 показано, как пронумеровать вершины каждого графа, а на рис. 3.29 изображены точки, соответствующие ребрам каждого из графов.

Определение. Графы Γ и G с одинаковым числом элементов называются равными, если вершины каждого графа можно пронумеровать так, чтобы ребрам Γ и ребрам G соответствовало одно и то же множество точек на координатной плоскости.

Неравные графы еще называются различными графами.

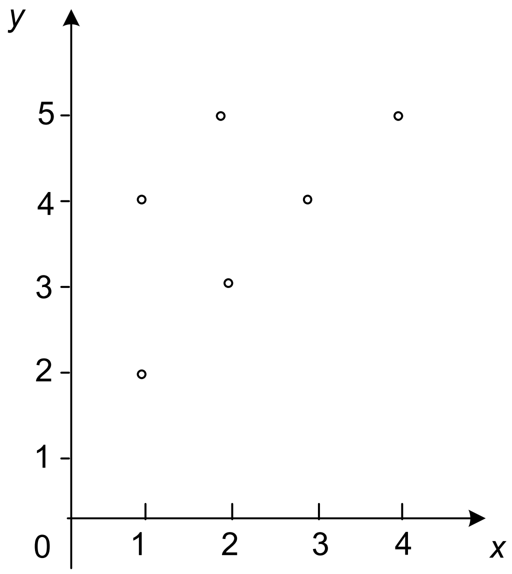


Рис. 3.29

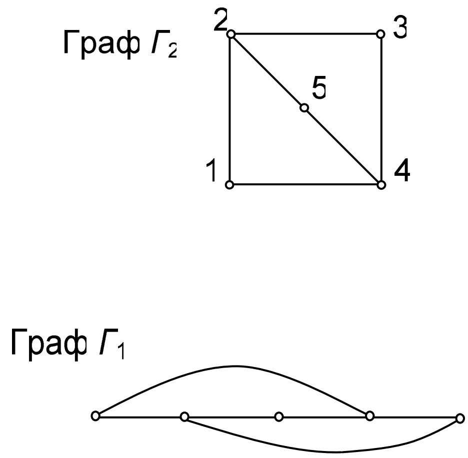


Рис. 3.30

Согласно определению изображенные на рис. 3.30 графы $Г_1$ и $Г_2$ являются равными. Легко проверить, что графы *A*, *B* на рис. 3.25 и 3.26 не являются равными. Все графы, изображенные на рис. 3.13–3.24, делятся на графы, равные графу *A*, и графы, равные графу *B*.

3.2.4. Методические особенности обучения дискретной математике в магистратуре

В общенаучном цикле ФГОС ВПО подготовки магистров профессионального обучения [265] были указаны дисциплины «История и методология науки», «Методология научного творчества» и «Математическое моделирование в профессиональном образовании», играющие фундаментальную роль в формировании умений решать важные задачи в профессиональной деятельности. Например, «организовывать научно-исследовательскую работу в образовательном учреждении» [265, с. 5].

В формировании этих умений важное значение имеют характерные особенности процесса математизации наук, т. е. процесса проникновения идей и методов математики практически во все области научного знания. Процесс математизации наук наиболее ярко воплотился в современной модельной методологии, основные особенности которой охарактеризованы в подп. 1.4.1.1. Как было отмечено, в рамках модельной методологии осуществляются следующие операции: постановка возникающих задач, их перевод на адекватный научный язык, рациональная разработка моделей исследуемых объектов или явлений (в частности, корректная формализация описания их свойств и характеристик) и эффективных алгоритмов и компьютерных программ для решения задач на основе найденных моделей. В свою очередь, математическое моделирование на основе дискретных и непрерывных моделей, а также использование в нем СКМ и КТ имеют фундаментальное значение в современной модельной методологии и, стало быть, в истории и методологии науки, методологии научного творчества и математическом моделировании в профессиональном образовании (взаимосвязь общенаучной и профессиональной подготовки магистров).

Наличие перечисленных выше дисциплин в ФГОС ВПО [265] свидетельствовало о важности сформулированных главных целей обучения дискретной математике и о ее фундаментальной роли в формировании ряда общекультурных и профессиональных компетенций магистров. Это подтверждается и новым ФГОС ВО их подготовки, где в ряде компетенций предполагается формирование готовности и способности к научно-исследовательской деятельности (см., например, компетенции ОПК-3, ПК-12, ПК-14, ПК-31 и др.) [258].

В вариативной подготовке магистра определяющую роль играет фундаментализация обучения, в том числе и математике, т. е. его направленность на создание цельного, обобщающего знания, которое являлось бы ядром (основой) всех полученных студентом знаний, объединяющим эти знания в единую мировоззренческую систему.

Анализ предмета и функций дискретной математики показывает, что создание цельного, обобщающего знания у магистров предполагает изучение языка доминирующих в ней алгебраических, порядковых структур и логических, алгоритмических, комбинаторных схем (средств, методов математического познания). Напомним, что язык этих структур и схем играет фундаментальную роль в качественном анализе сложных проблем математического моделирования, в систематизации того, что известно по интересующей проблеме, в ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа как «вручную», так и с использованием современных средств компьютерной техники. Изучение языка доминирующих в ДМ структур и схем должно быть нацелено на реализацию положения о единстве в обучении математике и раскрытие ее внутренней логики, что, в свою очередь, будет способствовать внутриматематической интеграции обучения магистров.

Необходимо реализовывать непрерывное обучение дискретной математике в системе «школа – колледж – вуз» [131, 166]. Естественно, главную роль в организации такого обучения сыграют будущие педагоги профессионального обучения, особенно магистры. Поэтому для обеспечения преемственности вариативного обучения ДМ важно отразить специфику содержания изучаемой дисциплины в той области (отрасли) высшего образования, которую выберут будущие выпускники колледжа (техникума) (см. подп. 2.6.2). Кроме того, изучение основных понятий и методов дискретной математики предусмотрено в целом ряде стандартов среднего профессионального образования («Автомобилестроение и тракторостроение», «Метрология», «Автоматические системы управления» и др.).

Далее, при отборе содержания вариативного обучения ДМ магистров необходимо выбрать базовые понятия языка структур и схем, которые должны стать своеобразными «маяками» (см. подп. 2.1.4). Обязательное включение тех или иных математических структур обеспечивает своеобразный «стандарт» вариативного обучения, свидетельствующий о фундаментальном, опережающем практику обучении математике, позволяющем реально научить выделять комплекс основных связей исследуемого технологического объекта или явления.

В реализации дискретной линии в вариативном обучении магистров должны присутствовать интегрированные программы и курсы, содержание которых должно отражать межпредметные связи ДМ с курсами математического моделирования, вычислительной математики, выражающими специфику выбранной отрасли подготовки. Такие методически ориентированные программы и курсы необходимы для совершенствования содержания методической подготовки магистров, которое в противном случае может остаться «методическим комментарием» к соответствующим специальным курсам подготовки специалистов в других областях (естественнонаучных, инженерных и др.).

При разработке содержания интегрированных программ и курсов следует принять во внимание существующие модели профильного обучения в колледжах (техникумах) и вузах, где планируют работать магистры, должна быть учтена сложившаяся в образовательной организации система обучения для органичного вхождения данных программ и курсов в учебный процесс, что будет способствовать фундаментальному, опережающему практику обучению.

Также важно предусмотреть решение функциональных задач, которые могут возникнуть в ходе обучения по этим программам и курсам. Для этого необходимо создание гибкого программно-методического сопровождения (комплекса), позволяющего использовать технологию интегрированного представления информации и знаний с использованием систем гипермедиа, мультимедиа, электронных книг и др. Такое сопровождение обучения позволит интегрировать все ранее известные педагогические программные средства, способствуя тем самым использованию средств информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) в реализации дискретной линии в вариативном обучении магистров.

Представляется, что наиболее продуктивным методом такого обучения является метод учебных проектов, основанный на исследовательской деятельности студентов по решению задач из выбранной области математического моделирования и вычислительной математики, это, в свою очередь, позволит расширить возможности преподавателей в формировании научно-исследовательских умений магистров. В результате будут созданы условия для реализации индивидуальных образовательных маршрутов обучаемых.

Отметим, что для обучения дискретной математике магистров профессионального обучения в технических отраслях производства разработаны учебные пособия [4, 45, 108, 231], полезны будут также работы автора [156, 157, 158, 159, 160, 182].

3.2.5. Специализированные курсы для магистров профессионального обучения

Как уже упоминалось, важную роль в вариативном обучении дискретной математике магистров играют специализированные курсы, выполняющие интегративную роль. Прежде всего они обеспечивают систематизацию изученного: отдельные знания, представляющие собой частные случаи решения какой-то общепрофессиональной проблемы, сливаются в единое целое и создают основу для ее решения.

3.2.5.1. Программа спецкурса «Математическое моделирование в профессиональном образовании»

В качестве примера рассмотрим программу спецкурса для магистров «Математическое моделирование в профессиональном образовании» [162], предназначенную для формирования уже перечисленных ранее важных компетенций ФГОС ВО [258].

Для более углубленной работы по этой программе и организации самостоятельной работы студентов рекомендуем первую главу нашей монографии [166], а также научные труды, содержание которых нашло отражение в этой программе [131, 137, 196, 204, 205, 236].

Приведем примерное содержание программы «Математическое моделирование в профессиональном образовании».

Раздел 1. Методологические и теоретические основы математического моделирования

Процесс математизации наук. Математизация как форма интеграции научного знания. Этапы математизации. Математика как феномен современной «всечеловеческой» культуры исследований.

Современная модельная методология. Социокультурные детерминанты модельной методологии, выполняющие функцию корректировки развития и совершенствования моделирования в соответствии с общественной культурой и потребностями социума. Внутренние детерминанты модельной методологии, отражающие логику развития математики и кибернетики (информатики). Единство социокультурных и математико-кибернетических аспектов моделирования.

Этапы моделирования (решения задач) с использованием компьютера.

Историко-философские аспекты математического моделирования. Значение математического моделирования в модельной методологии и в методологии специальной (конкретной) науки.

Математическое моделирование как системообразующий фактор современного профессионального образования. Роль математического моделирования в решении проблем профессионального образования.

Системность знаний, умений и навыков как результат реализации интегративной функции математического моделирования в процессе обучения. Специфика математического моделирования в зависимости от области и предмета исследования.

Основные принципы математического моделирования: онтологический принцип (единство качественной и количественной характеристик объекта, процесса или явления); гносеологический принцип (познание определенного качества через исследование соответствующего ему количества); принцип инверсии (замена познания качества познанием соответствующего ему количества).

Использование методов математического моделирования в дополнительном профессиональном образовании. Методическая система обучения математическому моделированию (внешняя среда обучения, разработка целей, содержания, методов, форм и средств обучения).

Раздел 2. Теоретические основы математического моделирования

Различные подходы к определению понятия математической модели. Математическая модель задачи. Информационная математическая модель. Математическая модель как аналог оригинала. Математическая модель как абстрактный образец решения задачи.

Полная цепочка использования компьютера в решении задач математического моделирования: реальная ситуация – математическая модель – алгоритм – программа – симуляция решения – анализ результатов.

Математическая модель (структура) как множество с заданными на нем математическими операциями и отношениями. Математическая модель как представитель класса математических моделей.

Способы задания математических моделей. Интерпретация модели. Примеры математических моделей и их интерпретаций.

Понятие дискретной модели. Дискретная и классическая («непрерывная») математика и их фундаментальная роль в математическом моделировании. Принцип единства в обучении непрерывной и дискретной математике.

Вычислительный процесс как завершающий этап математического моделирования. Вычислительный эксперимент, его значение и перспективы. Стирание противоположности между дедуктивным и индуктивным методами познания.

Виды математических задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и конечным числом действий исполнителя алгоритма.

Проблема алгоритмической разрешимости. Понятие экспоненциального полиномиального алгоритма вычислений. Эффективные алгоритмы и их примеры.

Характерные особенности динамического, дискретного, стохастического (статистического), имитационного, компьютерного моделирования.

Виды стохастического моделирования в педагогике.

Классификация видов математического моделирования.

Прямая и обратная задачи математического моделирования.

Проблема оптимальной математической формализации наблюдаемого объекта, процесса или явления.

Изменение характера и роли математических моделей в процессе развития математики.

Примеры решения задач динамического, дискретного и стохастического моделирования.

3.2.5.2. Программа спецкурса для подготовки высококвалифицированных рабочих

В вариативном обучении магистров профессионального обучения необходимо также предусмотреть спецкурсы для подготовки рабочих к работе в высокотехнологичных отраслях (например, в рамках изучения дисциплин «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений» и «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»). В качестве такого спецкурса была разработана программа по дискретной математике для магистров. Приведем ее содержание.

Раздел 1. Булевы функции. Анализ и синтез электросхем

Понятие высказывания. Операции с высказываниями и таблицы истинности. Алгебра высказываний. Логические тождества. Вычисление значений формул алгебры высказываний. Тождественные преобразования формул алгебры высказываний.

Определение булевых функций одной и двух переменных. Описание булевых функций двух переменных.

Булева алгебра и алгебра Жегалкина.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма булевой функции. Упрощение СДНФ на основе логических тождеств. Реализация булевой функции на логических элементах «конъюнктор», «дизъюнктор», «инвертор» и «двоичный сумматор». Суперпозиция булевых функций. Полнота множества булевых функций.

Анализ и синтез электросхем, сконструированных из перечисленных логических элементов.

Раздел 2. Элементы теории графов

Задачи, приводящие к понятию графа. Определение графа и его элементов. Маршрут, цепь, цикл.

Виды графов (неориентированные, ориентированные, простые, эйлеровы, гамильтоновы, двудольные деревья, бинарные деревья, леса).

Изоморфизм графов. Описание n-элементных графов для малых n. Автоморфизм (симметрия) графа.

Машинное представление графа. Матрица смежности и инцидентности. Переход от матричного представления к машинному и обратный переход.

Разрезы графа. Связные графы. Компоненты графа. Разрезающее множество и разрез графа. Матрица разрезов в графе. Циклы и контуры в графе. Цикломатическая матрица. Дерево графа. Остов и коостов графа.

Пространство разрезов и пространство циклов графа, их ортогональность. Базисная система циклов и базисная система разрезов графа по заданному остову. Матрицы базисных циклов и разрезов, их ортогональность. Фундаментальные матрицы циклов и разрезов.

Граф электросхемы. Законы Кирхгофа. Анализ электросхемы с помощью ее графа. Теорема о токах и напряжениях в цепях с одинаковыми графами.

Укладка графа на поверхности. Планарность и толщина графа. Графы Куратовского. Формула Эйлера для связных и несвязных графов. Необходимые и достаточные условия планарности графа. Трассировка электросхем.

Раздел 3. Бинарные отношения

Декартово произведение множеств. Бинарное соответствие между множествами. Примеры. Декартов квадрат множества. Бинарные отношения на множестве и их основные свойства. Граф бинарного отношения. Отношения эквивалентности и частичного порядка.

Изоморфные частично упорядоченные множества. Описание n-элементных ч. у. множеств для $n \leq 4$.

Раздел 4. Конечные автоматы и их приложения в электротехнике

Определения конечных автоматов. Понятие алгоритма работы автомата. Примеры автоматов в электротехнике. Виды автоматов (информационные, управляющие и вычислительные). Конечные автоматы.

Базовое множество конечного автомата. Бесконечные, синхронные, асинхронные, детерминированные, вероятностные автоматы. Примеры автоматов перечисленных видов в электротехнике и системах энергоснабжения.

Математическая модель цифрового автомата. Автоматы Мили и Мура. Способы задания конечных автоматов. Три основные задачи теории автоматов. Композиция автоматов.

Раздел 5. Математические модели технологии сборки

Понятие дискретного технологического процесса. Примеры из электротехники и систем энергоснабжения.

Представление сборочных изделий упорядоченными множествами.

Мультиграфы и их применение в технологии сборки электроприборов, электрооборудования и обеспечении электроснабжения.

Нормальные алгоритмы и их применение в технологических процессах микроэлектроники.

Раздел 6. Компьютерные технологии в электротехнике

Компьютерный расчет параметров электрических и магнитных цепей.

Компьютерное моделирование графических изображений технологического оборудования и технологических схем. Компьютерная диагностика неисправностей.

Математический аппарат компьютерного моделирования технологии эксплуатации и диагностики электрооборудования и систем электроснабжения.

Основой для составления этой программы послужили учебники и учебные пособия, которые можно применять при работе с ней [4, 10, 13, 46, 98, 101, 231, 239, 246, 271].

Глава 4

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПОНЯТИЯМ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Изучение общеобразовательных понятий дискретной математики и их свойств студентами педагогических направлений подготовки имеет фундаментальное значение, что показывает анализ ФГОС среднего (полного) общего образования. Действительно, эти понятия и их свойства играют важную роль в формировании предметных, метапредметных и общекультурных компетенций в обучении школьников в рамках научной сферы «Математика и информатика». Это прежде всего сформированность «представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира… о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий» [266, с. 15]. Кроме того, это и результаты освоения углубленного курса математики с целью формирования «представлений о важнейших видах дискретных объектов и об их простейших свойствах, алгоритмах анализа этих объектов» [266, с. 17].

Обучение студентов педагогических направлений подготовки общеобразовательным понятиям и их свойствам должно осуществляться на основе методических принципов обучения и в рамках моделей МСО дискретной математики будущих учителей математики и информатики и инженеров-педагогов (см. рис. 2.2, 2.3). В соответствии с этими моделями проецирование уровней и содержания обучения на школьные курсы математики и информатики является важным теоретическим ориентиром в дальнейшем исследовании методики обучения студентов названных профилей, направленной на реализацию межпредметных связей математики и информатики.

4.1. Основные аспекты методики обучения студентов педагогических направлений подготовки общеобразовательным понятиям дискретной математики и их свойствам

Конкретные особенности методики обучения студентов педагогических направлений подготовки общеобразовательным понятиям дискретной математики и их свойствам целесообразно рассмотреть в процессе анализа следующих ее аспектов.

Аспекты реализации профессионально-педагогической направленности в методике обучения. В п. 2.4 уже охарактеризована фундаментальная роль профессионально-педагогической направленности математической и методической подготовки студентов. В частности, для солидной и в то же время не оторванной от нужд приобретаемой профессии математической подготовки будущего учителя в первую очередь необходима «направленность содержания образования на методологически важные долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала будущего педагога» [238, с. 8]. В такой направленности содержания математической и методической подготовки важную роль играет принцип *бинарности:* объединение научной и методической линий, необходимое не только для разработки этой методики для будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, но и для будущих учителей и педагогов профессионального обучения других профилей подготовки.

Объединение научной и методической линий в методике обучения студентов общеобразовательным понятиям ДМ и их свойствам играет фундаментальную роль в математической подготовке студентов названных профилей к преподаванию математики, информатики, физики, химии и других предметов в профильных классах, в формировании, особенно у слабых студентов, методических умений, необходимых для обучения учащихся начальным элементам математического моделирования и разработке алгоритмов вычислений с учетом профиля подготовки. Такое объединение имеет важное значение и в профильном обучении студентов колледжей (техникумов) математическому моделированию технических объектов и алгоритмов вычислительных процессов, реализующих технологию их функционирования в отрасли производства.

Аспекты реализации принципа преемственности в методике обучения. Практика показывает, что студенты подавляющего большинства специальностей испытывают большие трудности в изучении дискретной математики, что вызвано прежде всего тем, что при обучении математике в школе в основном преобладает функциональный подход. Ситуация усугубляется рассогласованием содержания обучения ДМ в школах, колледжах (техникумах) и вузах на педагогических направлениях подготовки, к тому же в школах зачастую не изучают элементы дискретной математики. В результате закономерно возникает разрыв между уровнем довузовской подготовки студентов и требованиями, предъявляемыми к ним при обучении математическим дисциплинам, в том числе ДМ.

Таким образом, наряду с профессионально-педагогической направленностью предлагаемой методики обучения важную роль играет и принцип преемственности, без которого невозможно преодолеть указанный разрыв. При этом для осуществления преемственности обучения необходимо сначала учесть главное в проектировании и реализации содержания методики, а уже затем на этой основе выявить главное в динамике изменения основных целей, содержания, методов, форм и средств обучения, логической связи теоретического и практического материала, упорядоченности в изучении различных тем, оправданности межпредметных связей.

В подп. 2.3.3 обосновано, что принцип преемственности в обучении играет особенно важную роль в преодолении высокой степени абстрактности языка доминирующих в дискретной математике структур и схем. Как уже отмечалось, в проектировании процесса обучения и, следовательно, в теоретических основах преемственности обучения ДМ необходимо учесть возрастные особенности формирования и развития математических когнитивных структур.

Как следует из изложенного, важное значение в излагаемой методике обучения имеет *пропедевтика* изучения студентами общеобразовательных понятий языка этих структур и схем (понятий графа, бинарного и n-арного отношения, комбинаторных конфигураций, алгебраической операции и алгебры, логической операции, математической модели, математического языка, алгоритма, алгоритмической разрешимости и др.), что делает предлагаемую методику в значительной мере доступной для учащихся физико-математических классов.

К сожалению, пропедевтику изучения этих понятий и их свойств обычно затрудняет широко применяемый формальный подход в их изложении, который «унаследован» из учебников по ДМ для подготовки математиков и специалистов по системам компьютерной математики и компьютерным технологиям.

Аспекты методики изучения понятий математической модели, алгоритма и алгоритмической разрешимости. Ключевую роль в изучении понятия математической модели (особенно важного в реализации *основных целей*) играют теоретико-модельные понятия ДМ: «отношение», «алгебраическая операция», «высказывание», «предикат», «гомоморфизм» и «изоморфизм», «алгоритм» и «алгоритмическая разрешимость». Изучение этих понятий способствует выработке у студентов первых представлений о классификации видов моделирования и задач, о математике как о единой науке, что позволит в итоге преодолеть разобщенность в преподавании алгебры, начал анализа и геометрии. Вследствие этого данные понятия имеют важное значение для становления математической культуры и формирования математического мышления студентов.

В излагаемой методике определяющим является и то, насколько правильно выбраны дидактические принципы изучения этих понятий в зависимости от профиля подготовки.

Аспекты изучения математического языка. Процесс математизации какой-либо специальной науки происходит на основе взаимодействия языка современной математики и языка этой науки. Язык ДМ в моделировании играет ту же роль, что и синтаксис в литературном языке (наука о законах соединения слов и строении предложений). Образно говоря, дискретная математика есть наука *о законах* гармоничного *соединения* языков различных разделов математики для правильного выбора «техники» моделирования при решении задачи *с использованием компьютера* и о правильном «*построении»* последовательности рассуждений при непосредственной разработке модели. Если не учитывать эту «языковую» роль ДМ, то методика обучения, особенно слабых студентов, будет носить «механический» характер.

«Синтаксическая» роль дискретной математики важна в реализации системно-структурного подхода в предлагаемой методике обучения. Этот подход раскрывает характер *соответствия* между структурами реальных процессов, операционными структурами мышления и структурами математики. Игнорирование этого соответствия влечет отсутствие мотивации к обучению и тем самым сильно усложняет достижение основных целей методики.

При обучении дискретной математике следует обратить особое внимание на методические особенности изучения общеобразовательных понятий, от которых зависит формирование в абстрактном мышлении студентов необходимых *законов* гармоничной интеграции языков: дифференциального и интегрального исчисления, численных методов, теории вероятностей и математической статистики, теории графов, исследования операций и др. Только при этом условии вырабатается умение правильно выбирать «технику» моделирования (аналитическую, статистическую, «объединенную» и пр.) и выстраивать последовательность рассуждений при непосредственном решении задачи.

Для того чтобы изучение дискретной математики стало интересным студентам, уже на этапе их довузовской подготовки необходима соответствующая языковая «профилактика», основанная на полноценном использовании «синтаксической» роли языка ДМ в представлении математики как единой науки (неразобщенной на математический анализ, алгебру и геометрию).

Более углубленное изучение изложенных и других аспектов указанной методики можно продолжить по нашему учебному пособию [164].

4.2. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки отбору задач по дискретной математике

В методике обучения общеобразовательным понятиям дискретной математики и их свойствам необходимы «такие методы обучения, когда дорога к серьезным проблемам “мостится” из упрощенных, пусть даже сказочных и шуточных задач» [103, с. 22], только тогда студенты смогут понять не только суть этих понятий, но и овладеть детской, игровой манерой их изложения, необходимой для преподавания профильных элективных курсов, так или иначе связанных с математикой и ее приложениями. Процитированное согласуется и с важнейшим в обучении математике принципом «от частного к общему», а также с ролью упражнений (задач) как способа стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности студентов.

Для реализации деятельностного подхода, в том числе для овладения студентами детской, игровой манерой изложения указанных понятий, в содержании предлагаемой методики необходимо предусмотреть соответствующую профилю подготовки структуру тщательно подобранных задач на основе полной цепочки использования компьютера.

Первыми в такой структуре должны быть задачи, с которых можно начать обучение пропедевтике перевода *реальной задачи* на математический язык. В качестве таковых можно использовать нестандартные задачи, т. е. задачи, решение которых требует применения в необычных ситуациях обычных, знакомых студенту определений, теорем и формул. В частности, это могут быть задачи на свойства натуральных чисел, на параметры и пр. Также важное значение в пропедевтике имеют занимательные и практические задачи (например, простые задачи на графы, на метод перебора, на принцип Дирихле, комбинаторные и игровые задачи, разные задачи логического характера и т. д.).

Далее следует рассмотреть задачи, ориентированные на обучение поиску их *решения* на выбранном математическом языке. Необходимо привести примеры задач с неверно составленным условием, с ненайденным решением и не имеющих решения на данном математическом языке. После этого целесообразно рассмотреть задачи, которые имеют решение на этом языке, затем – задачи на составление алгоритма решения. Потом необходимо разобрать задачи с бесконечным (конечным) числом действий исполнителя алгоритма, решение таких задач поможет студентам понять суть проблемы существования алгоритма решения. После этого целесообразно перейти к задачам на составление эффективного алгоритма. При этом в качестве исполнителя можно предложить различные виды микрокалькуляторов. Полезно отдельно выделить задачи на алгоритмы решения уравнений в конечном (пятиэлементном) поле, кольце остатков и алгебре высказываний [155], задачи на составление эффективных алгоритмов работы машины Поста и т. д.

Важную роль в «задачной» классификации играют занимательные, практические и теоретические задачи: на проблему изоморфизма, на проблему разрешимости (существования алгоритма решения на выбранном математическом языке), на выразимость в терминах языка логики предикатов тех или иных понятий, на составление алгоритмов на языке классической и дискретной математики. Такие задачи способствуют развитию общей математической культуры у учащихся в школе.

В методике обучения студентов педагогических направлений подготовки общеобразовательным понятиям дискретной математики и их свойствам фундаментальную роль играют характеризуемые далее особенности методики изучения понятий графа, бинарного отношения, понятий и фактов комбинаторики и ряда других понятий.

Очевидно, содержательная часть этого раздела может быть использована при построении элективных курсов по математике для школьников.

4.3. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки понятиям графа, бинарного отношения и их основным свойствам

4.3.1. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки понятию графа и его основным свойствам

В учебной литературе по дискретной математике для студентов колледжей и техникумов, а также для студентов экономических, естественнонаучных и других специальностей вузов широко применяется формальный подход к изложению понятий и фактов теории графов [5, 44, 136]. Как уже отмечалось, такой подход неправомерно «унаследован» из учебников по ДМ для подготовки математиков и специалистов по СКМ и КТ. Например, в учебном пособии Г. А. Гончаровой и А. А. Мочалина после несколько неудачного описания задачи о кенигсбергских мостах (без какой-либо опоры на эту задачу) приводится следующее формальное определение графа: «Пусть на плоскости задано некоторое множество вершин X и множество U соединяющих их дуг. *Графом* называют бинарное отношение множества X и множеств U: $G = (X; U)$ или, иначе, $f : X \rightarrow Y$. Здесь f – отображение *инциденции»* [44, с. 71].

Следует отметить, что задолго до этого дается опять же стандартное формальное определение бинарного отношения на множестве как подмножества декартова квадрата этого множества. Таким образом, становятся очевидными некорректность и терминологические погрешности рассматриваемого определения графа.

Такой формальный подход к определению графа в учебной литературе усугубляется и большим количеством различных определений, обычно весьма сжато излагаемых на нескольких страницах. Например, в учебнике Г. Г. Асеева, О. М. Абрамова, Д. Э. Ситникова на трех страницах приводится 21 (!) определение понятия графа [6]. Все это в совокупности усиливает существующий сегодня терминологический разлад в учебной и научной литературе по теории графов.

В обучении студентов элементам теории графов стоит использовать цветные иллюстрации, на которых необходимо показать отношения между элементами множеств различных предметов (отношения родства, порядка и т. д.), существенные связеи между ними (например, взаимно однозначные соответствия), а также простейшие логические, комбинаторные, игровые и другие занимательные задачи.

В начале обучения целесообразно привести примеры и раскрыть свойства связных, эйлеровых, гамильтоновых графов и деревьев [30, 33, 50, 94]. При этом знакомство слабых студентов с простейшими графами указанных видов должно происходить в процессе их самостоятельного решения задач с занимательными и практическими сюжетами. Например, в учебном пособии Л. П. Конновой, посвященном начальному изучению графов, содержится серия более чем из восьми видов задач (логических, комбинаторных и др.), благодаря которым объемное многословное описание разнообразных сложных связей между элементами множеств предметов легко иллюстрируется с помощью графов [94].

К сожалению, в методике изучения элементов теории графов в большинстве изданий для студентов такой пропедевтики не предусмотрено.

С учетом уже изложенного, принимая во внимание объем выделяемого на обучение времени, можно предложить следующую методическую схему изучения понятия графа и его основных свойств, пригодную также для слабых студентов и учащихся физико-математических классов.

Сначала важно рассмотреть несколько наиболее ярких занимательных и практических задач, в процессе решения которых студенты изучат понятия вершины, ребра и степени вершины графа, а также на интуитивном уровне познакомятся с понятием связного графа. В процессе решения задач с сюжетным текстом они постепенно освоят понятия маршрута, цепи, цикла, связного, эйлерова и гамильтонова графов. Затем целесообразно доказать признак эйлерова графа и теорему о том, что в любом графе имеется четное число вершин нечетной степени. При этом доказательства возникают как естественное продолжение и обобщение решения ранее разобранной задачи.

Далее даются точные определения маршрута, связного графа, дерева, равных (изоморфных) графов и доказываются несколько теорем.

Теорема 1 (о признаке связного графа). Граф с n вершинами связен, если степень каждой его вершины не менее $\frac{n-1}{2}$.

Теорема 2 (о признаке дерева). В любом дереве нет циклов**.**

Теорема 3 (о висячей вершине). В любом дереве есть висячая вершина. Напомним, что вершина a графа называется висячей, если существует только одна вершина графа, смежная с a.

Теорема 4 (о числе ребер дерева). В дереве число ребер на единицу меньше числа вершин.

Теорема 5 (об удалении ребра). При удалении любого ребра дерева получается несвязный граф.

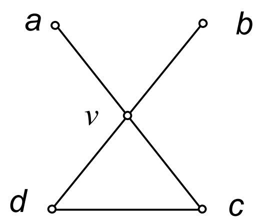
Кратко охарактеризуем методические особенности обучения студентов изложению перечисленных понятий и теорем.

Маршрут в графе G определяется как последовательность ребер (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4),…, (v_{n-1}, v_n) с началом v_1 и концом v_n. Этот маршрут соединяет вершины v_1 и v_n.

Приводятся примеры маршрутов и примеры последовательностей ребер, не являющихся маршрутами. Начать можно с примера графа $Г$ (рис. 4.1), в котором последовательность ребер (a, v), (v, c), (c, d) является маршрутом, соединяющим вершины a и d.

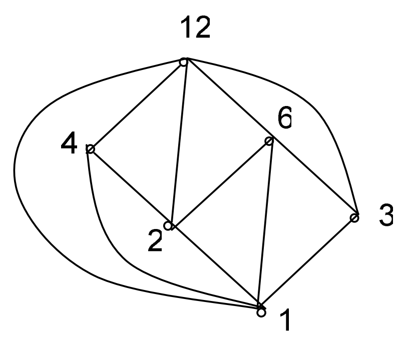
Далее нужно отметить, что в маршруте каждые два соседних, записанных рядом ребра имеют общую вершину. Но не любая такая последовательность ребер графа является маршрутом. Приводится пример последовательности ребер, не являющейся маршрутом.

Один из возможных примеров – последовательность ребер (a, v), (b, v), (c, v), (v, d) графа $Г$, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Однако эта последовательность ребер не является маршрутом, соединяющим вершины a и d. Действительно, по определению маршрута общая вершина v двух соседних ребер (a, v), (b, v) должна быть записана следующим образом: (a, v), (v, b).



Граф $Г$

Рис. 4.1



Граф G

Рис. 4.2

Объяснение определения связного графа можно предложить начать со следующего примера.

Пусть вершины графа обозначены числами 1, 2, 3, 4, 6, 12. Две вершины n и m образуют ребро (n, m) тогда и только тогда, когда одно из чисел n, m делится нацело на другое. Очевидно, в графе имеется 12 ребер: (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (12, 1), (4, 2), (6, 2), (6, 3), (12, 3), (12, 4), (12, 6) (рис. 4.2).

Далее даются определения понятий цепи и связанных вершин.

Маршрут (1, 2), (2, 4), (4, 12) является *цепью*, т. е. маршрутом, в котором все ребра различны. Всего в графе имеется восемь цепей, соединяющих вершины 1 и 12. Две вершины a и b графа называются *связанными*, если существует цепь, соединяющая вершины a и b.

Определение. Граф называется *связным*, если любые две его вершины связанные.

Граф на рис. 4.2 связный, поскольку есть цепь, соединяющая любые две вершины из множества $\{a, b, c, d, v\}$. Граф на рис. 4.3 несвязный, поскольку нет цепи, соединяющей вершины a, p.

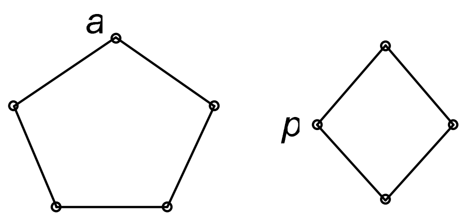


Рис. 4.3

Доказательство признака связного графа предваряет задача.

Задача. В стране Океании 11 островов. Каждый из островов соединен мостами не менее чем с пятью другими. Требуется доказать, что с любого острова можно добраться пешком через мосты до любого другого.

Доказательство начинается с предположения, что найдутся два таких острова, которые не связаны пешеходным маршрутом, проходящим через мосты. Предлагается изобразить эти два острова точками A и B, а линиями – мосты, соединяющие эти острова с другими. Каждый из этих островов связывают с другими островами не менее пяти мостов, что и показано на рис. 4.4. Поэтому в Океании есть не менее 12 островов. Отсюда легко обнаруживается противоречие условию. Объясняется, что граф, вершинам которого соответствуют острова, а ребрам – мосты, является связным. Иными словами, граф островов и мостов Океании связен, т. е. для любых двух его вершин существует цепь, их соединяющая.

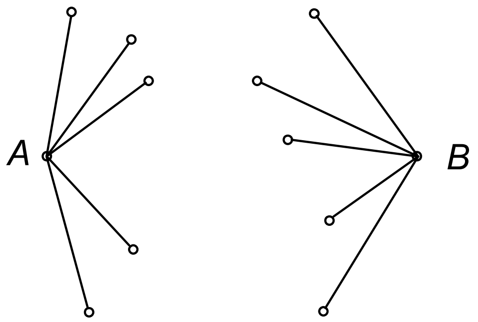


Рис. 4.4

После решения этой задачи даже слабым студентам будет легко понять, как аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема (*признак связного графа*). Граф с n вершинами связен, если степень каждой его вершины не менее $\frac{n-1}{2}$.

Для облегчения восприятия доказательства студентам после аналогичного предположения о том, что существуют две такие вершины A и B, для которых нет цепи, их соединяющей, следует предложить обозначить степени вершины A и вершины B через $m = \frac{n-1}{2}$. По определению степени вершины из вершины A, как и из вершины B, выходит не менее m ребер (где m записано уже не в виде дроби).

Для доказательства других теорем используется тот же методический прием (сюжетный фактор).

Дерево определяется как граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной цепью, состоящей из различных вершин.

Слабым студентам можно предложить изучение важнейшего понятия изоморфных графов на основе методической редукции этого понятия, изложенной в подп. 3.2.3.2.

4.3.2. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки понятию бинарного отношения и его основным свойствам

Как известно, граф без кратных ребер является частным случаем бинарного отношения. Методические основы обучения студентов понятию бинарного отношения с использованием понятия графа представлены в работе «Введение в дискретную математику» [153]: приводятся многочисленные примеры бинарных отношений из школьной программы, на основе которых затем изучаются их свойства. Некоторые бинарные отношения на конечном множестве изображаются точками в декартовой системе координат, что используется для определения декартова квадрата множества и бинарного отношения.

Отметим, что интересные методические особенности в изложении данной темы имеются в учебном пособии В. Я. Турецкого для студентов-гуманитариев [242]. Но, к сожалению, в немногочисленных учебных изданиях, предназначенных для студентов вузов, не изучающих математику и ее приложения, понятие бинарного отношения объясняется на абстрактном уровне без опоры на типичные знания указанной в аннотации категории читателей. Например, как и в первых учебных изданиях по ДМ [45, 108, 281] для математических и других специальностей (связанных с приложениями математики), в учебном пособии для управленческих специальностей [136] изложение начинается фактически сразу со стандартного формального определения бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества (причем на этой же странице аналогичным образом определяется и n-местное отношение).

На наш взгляд, обучение студентов нецелесообразно начинать с рассмотрения соответствий между элементами различных множеств (в частности, с изучения отображений, образов и прообразов элементов). При этом представляется весьма удачным изображение отношений (соответствий) с использованием *графов* [75].

С учетом перечисленных особенностей, принимая во внимание объем выделяемого на обучение времени, можно предложить следующую методическую схему изучения понятия бинарного отношения, пригодную также для слабых студентов и учащихся физико-математических классов.

Сначала приводятся примеры отношений порядка на множестве чисел, примеры параллельности и перпендикулярности на множестве прямых, отношения «делиться нацело» и т. д. В частности, поясняются записи $a < b$ или $a \perp b$, означающие, что число b больше *по отношению* к числу a или прямая b перпендикулярна *по отношению* к прямой a соответственно. Таким образом, элементы того или иного множества (чисел, прямых и т. д.) могут состоять между собой в каком-то отношении (быть больше, быть перпендикулярными и т. д.). Затем объясняется, что если элементы a и b некоторого множества A состоят в каком-то произвольном (пока неизвестном) отношении, то это кратко записывается так: $a\rho b$, где a, $b \in A$.

Стало быть, если ρ является отношением порядка на множестве натуральных чисел N, то вместо $a\rho b$, a, $b \in A$ пишется, как и прежде, $a \leq b$, a, $b \in N$. Точно так же следует прокомментировать и другие рассматривавшиеся ранее отношения и еще раз подчеркнуть, что символом ρ принято обозначать любое отношение между элементами данного множества. Например, можно договориться, что запись $a\rho b$ для множества A учеников класса обозначает, что ученик a дружит с учеником b, и учесть таким образом все пары друзей из класса. Если же $a\rho b$ означает, что населенный пункт a соединен дорогой с населенным пунктом b, то следует записать $a - b$ вместо $a\rho b$ и с помощью уже изученного ранее понятия неориентированного графа изобразить это отношение на рисунке. В результате студент понимает, что неориентированный граф является бинарным отношением на множестве его вершин.

Затем можно объяснить, что слово «би» в переводе с латинского языка означает «два». Поскольку рассмотренные ранее отношения связывают между собой пары элементов, все такие отношения называются бинарными. Необходимо сообщить, что в математике изучаются тернарные, n-арные отношения, и пояснить это небольшим числом примеров.

Далее следует обеспечить привыкание к использованию обычного обозначения ρ бинарного отношения. Для этого целесообразно определить основные свойства бинарных отношений и предложить установить наличие этих свойств у отношений, неявно изучаемых в школьной программе или легко определяемых в рамках ее содержания, а также у отношений, задаваемых графами.

Приводятся определения основных свойств бинарного отношения: рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности. После этого можно выполнить, например, следующее упражнение.

Упражнение. Какими основными свойствами обладают следующие бинарные отношения:

1) a, $b \in N$ и $a\rho b$ означают, что $a \leq b$;

2) a, b – прямые на плоскости, и $a\rho b$ означает, что $a||b$;

3) c, $в$ – прямые на плоскости, и $c\rho d$ означает, что $c\perp d$;

4) m, $n \in N$ и $m\rho n$ означают, что m делится нацело на n (кратко $m \vdots n$);

5) x, $y \in R$ и $x\rho y$ означают, что $xy = 0$;

6) x, $y \in R$ и $x\rho y$ означают, что $(x + y)^2 = x^2 + y^2$;

7) x, $y \in R$ и $x\rho y$ означают, что $|x| = |y|$.

Далее можно дать определение декартова квадрата множества и бинарного отношения точно так же, как это уже было сделано в подп. 3.1.5.

Для полноты изложения повторим эти определения.

Определение 1. Пусть A – некоторое множество. Декартовым квадратом A^2 множества A называется множество всевозможных пар, составленных из элементов этого множества.

Определение 2. Бинарным отношением на множестве A называется любое подмножество декартова квадрата A^2 множества A.

Далее можно привести примеры бинарных отношений, являющихся графами, из окружающей (школьной) жизни [75, 155].

Следует также объяснить, что функция $y = f(x)$ является отношением ρ, определяемым на множествах (чисел) X и Y следующим образом: $x\rho y$ для $x \in X$ и $y \in Y$ истинно тогда и только тогда, когда для каждого элемента x в существует только одна пара (x, y) с элементом $y \in Y$.

Целесообразно также пояснить, что и геометрические отображения являются бинарными отношениями. Подобный подход к учебному материалу способствует построению профильного курса, в котором будет обеспечено гармоничное обучение всей системе методов математического моделирования, основанных как на «непрерывной», так и на дискретной математике.

На основе изученного можно реализовать плавный переход к более глубокому профильному обучению студентов теоремам о бинарных и n-арных отношениях, используя соответствующее учебное пособие для будущих учителей математики и информатики [158, 164, 186]. После предварительного обучения понятию n-арной алгебраической операции и ее основным свойствам (см. п. 4.5) необходимо дать определение формальной алгебраической системы.

Алгебраической системой называется упорядоченная тройка $A = \langle A, \Omega, \Theta \rangle$, в которой Ω – множество операций, а Θ – множество отношений, определенных на множестве A. Если множество A конечно, то алгебраическая система A называется конечной, в противном случае она называется бесконечной.

Когда $\Theta = \varnothing$, алгебраическая система является системой с набором операций, а в случае $\Omega = \varnothing$ – реляционной системой.

Последовательность операций и отношений алгебраической системы называется сигнатурой, а последовательность их арностей – ее типом. Если сигнатура $(f_1, \ldots, f_n; \rho_1, \ldots, \rho_k)$ алгебраической системы конечна, то такая система называется алгебраической системой конечного типа $(m_1, \ldots, m_n; r_1, \ldots, r_k)$, где m_i – арность операции f_i, r_α – арность отношения ρ_α, $\alpha = 1, \ldots, k$.

Далее следует привести примеры полугрупп, групп, колец, полей и других важных классических алгебраических структур.

Итак, основными особенностями методики обучения студентов педагогических направлений подготовки понятиям графа, бинарного отношения и их основным свойствам являются следующие. Во-первых, осуществляется необходимая максимальная мотивационная вовлеченность студентов, особенно слабых, в работу по решению задач с занимательным или практическим сюжетным текстом. Тем самым воплощается в жизнь идея Л. С. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств жизни. Во-вторых, реализуется преемственность в обучении (опора на понятия равных треугольников, параллельных и перпендикулярных прямых и др.). В-третьих, устанавливаются внутриматематические связи изучаемого с понятиями и фактами других курсов математики (функциями и геометрическими преобразованиями). В-четвертых, важной методической особенностью является и опора на привычные представления студентов.

Содержательная часть этого раздела может быть использована при построении элективных курсов по математике для школьников, в которых предусмотрено обучение понятиям графа, бинарного отношения и их основным свойствам.

4.4. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки первым понятиям и фактам комбинаторики

К сожалению, в имеющейся учебной литературе по дискретной математике для студентов колледжей (техникумов) и вузов в изложении комбинаторики преобладает формальный подход к изложению понятий комбинаторики. Приведем один достаточно характерный пример.

«Пусть X – конечное множество, содержащее n элементов. Такое множество в комбинаторике именуют n множеством X или n–X множеством.

Мы будем строить размещения на основе постановок задач выбора и расположения.

Запишем эти задачи вначале в их простейшей формулировке.

Начнем с задачи *выбора.* Пусть задано n–X множество. Можно считать, что в качестве элементов n–$X = \{x_1, \ldots, x_2\}$ имеем пронумерованные шары, помещенные в непрозрачную урну. Требуется построить комбинаторную конфигурацию – множество Y всех возможных вариантов выбора одного шара без повторений. При этом порядок представления элементов в множестве Y существенным не является» [6, с. 61].

Такое формализованное изложение с терминами «конфигурация» и «n – X множество» (утяжеленное индексацией его элементов, обозначением Y) и неожиданную замену «шаров» на «письма» в следующем примере нельзя считать удачными даже с учетом восприятия учащихся выпускных математических классов, которым в первую очередь адресована книга Г. Г. Асеева, О. М. Абрамова, Д. Э. Ситникова [6]. Кстати, термин «n–X множество» используют, по-видимому, только эти авторы, поскольку классическими (общепринятыми), в том числе и в комбинаторике, являются другие приемы указания числа элементов множества («n-элементное»), использование оборота «пусть дано» и т. д.

С учетом перечисленных особенностей, принимая во внимание объем выделяемого на обучение времени, можно предложить следующую методику изучения первых понятий и фактов комбинаторики.

Сначала осуществляется пропедевтика изучения правил суммы и произведения.

Правило суммы. Пусть в множестве A есть n элементов, в множестве B есть m элементов, причем эти множества не пересекаются. Тогда существует $n + m$ способов выбрать один элемент, имеющийся либо во множестве A, либо во множестве B.

Правило произведения. Пусть множества A и B состоят из n и m элементов соответственно. Тогда имеется $n \cdot m$ способов выбрать пару $(x; y)$, где $x \in A$ и $y \in B$.

Далее со студентами, особенно слабыми, следует рассмотреть задачи на каждое из правил, чередуя их, а затем – задачи на совместное применение обоих правил. В результате этого должно выработаться понимание того, «в какой ситуации при подсчете вариантов следует перемножать, а в какой – складывать» [33, с. 18]. Приведем наиболее простые задачи такого типа.

1. В продуктовом магазине есть 4 сорта шоколада и 3 сорта мороженого. Сколькими способами можно купить шоколад и мороженое?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную или согласную букву в слове «кабинет»?

3. В футбольной команде из 11 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколько диагоналей имеется у выпуклого десятиугольника?

Далее можно начать изучение понятия декартового произведения двух множеств. При этом желательно предварительно решить несколько задач. Приведем примеры.

Задача 1. Каждый из трех островов реки связан с обоими берегами мостом. Найти число мостов, связывающих острова с берегами.

В решении представляется удачным для восприятия обозначение островов буквами А, В, С, а берегов – цифрами $\{1, 2\}$. Далее студентам предлагается рассмотреть множества $\{A, B, C\}$ и $\{1, 2\}$ и выписать все возможные пары (x, y), где x $\in \{A, B, C\}$ и y $\in\{1, 2\}$:

$(A, 1), (B, 1), (C, 1), (A, 2), (B, 2), (C, 2)$.

После этого отмечается, что каждой такой паре (x, y) соответствует мост, связывающий остров x с берегом y. Подсчитав число этих пар, студенты получают ответ: 6.

Задача 2. Каждый из четырех складов должен быть соединен напрямую линией телефонной связи с каждым из трех цехов завода. Найти число линий телефонной связи, соединяющих эти склады и цеха.

Задача 2 решается аналогичным образом.

После решения этих задач легко воспринимается определение: *декартовым произведением $X \cdot Y$ множеств X* и Y называется множество всевозможных пар (x, y), где первый элемент x пары есть элемент множества X, второй элемент y есть элемент множества Y.

Решение задачи 1 и задачи 2 поможет легко доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема (правило произведения). Пусть множества X и Y состоят из n и m элементов соответственно. Тогда произведение $X \cdot Y$ состоит из $n \cdot m$ элементов.

С учетом знаний, полученных студентами на этапе довузовской подготовки, изучаются перестановки, размещения, сочетания, выводятся формулы для подсчета числа этих основных конфигураций. При этом полезно давать задачи с некорректной формулировкой. Наиболее характерной задачей такого типа является, например, следующая задача.

Задача. Для обеспечения одного из вариантов работы заводского конвейера необходимо последовательно нажать две из трех различных кнопок, обозначенных на пульте управления буквами p, q и s. Сколько может существовать различных вариантов работы конвейера?

На этот вопрос даются различные ответы в зависимости от уточнения его формулировки:

1. Предусмотрен ли вариант работы, для включения которого необходимо нажать дважды на одну и ту же кнопку p, т. е. вариант pp?
2. Существуют ли варианты, отличающиеся порядком нажатия кнопок p и s? Иными словами, возможны ли варианты ps или sp?

Как показывает практика, при определении комбинаторных конфигураций у студентов вызывает трудности использование понятия прямого произведения нескольких множеств и термина «кортеж», общепринятых в современной абстрактной алгебре. Вместо этого, например, используется понятие упорядоченного или неупорядоченного подмножества из k элементов n-элементного множества.

Наиболее целесообразно доказать формулы: сначала – для подсчета числа размещений, а затем – для подсчета числа перестановок. Из этих формул следует формула для подсчета числа сочетаний.

Восприятие доказательств этих формул (подсчет числа комбинаторных конфигураций) может значительно облегчить решение соответствующих задач, в которых предварительно уясняется метод или суть доказательства [30, 33, 76].

На основе изученного можно реализовать плавный переход к более глубокому профильному обучению студентов другим важным свойствам и теоремам комбинаторики, используя учебное пособие для будущих учителей математики и информатики [156]. Например, в этом учебном пособии следующим образом (после решения задачи о заводском конвейере) дается определение понятия размещения.

Предварительно дается понятие выборки из элементов множества: «Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество из n элементов. Любая совокупность r элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ из множества X называется выборкой из n элементов по r или кратко – (n, r)-выборкой.

Например, (3, 2)-выборкой является выборка *pp* или выборка *pq* из множества $M = \{p, q, s\}$» [156, с. 19].

Затем дается само определение с соответствующими пояснениями.

«Размещения. В этом параграфе нас будут интересовать упорядоченные выборки. Выборка называется упорядоченной, если задан порядок следования ее элементов. Поэтому две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком их следования, являются различными.

Например, различными являются (3, 2)-выборки pq и qp из множества $M = \{p, q, s\}$. Телефонные номера 123–45–67 и 213–45–67 являются различными (10, 7)-выборками из множества цифр.

Из определения декартовой степени множества следует, что упорядоченная (n, r)-выборка является элементом множества $X^r = \underbrace{X \times \ldots X}_{r \quad раз}$.

Упорядоченная (n, r)-выборка, все элементы которой различны, называется *размещением из n элементов по r без повторений* или (n, r)-*размещением без повторений.*

Например, (10, 7)-размещением без повторений является (10, 7)-выборка 123–45–67 из множества цифр.

Упорядоченная (n, r)-выборка, элементы которой могут повторяться, называется *размещением r элементов из n с повторениями* или (n, r)-*размещением с повторениями.*

Например, (3, 6)-размещением с повторениями является (3, 6)-выборка *ppqsqq* из множества $M = \{p, q, s\}$.

Число всех размещений из n элементов по r без повторений обозначается $A_n^{\,r}$, а число всех размещений из n элементов по r с повторениями – $\overline{A}_n^r$.

Например, для множества M имеется всего 6 размещений из 3 элементов по 2 без повторений: *pq*, *qp*, *ps*, *sp*, *qs*, *sq*. Поэтому $A_3^{\,2} = 6$.

Если добавить к этим размещениям (3, 2)-выборки *pp*, *qq*, *ss* с повторениями, то получим $\overline{A}_3^2 = 9$» [156, с. 19].

Далее доказывается теорема $A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-1)!}$ *при* $r \le n$ *и* $A_n^r = 0$ *при* $r > n$.

Итак, основными особенностями методики обучения студентов педагогических направлений подготовки первым понятиям и фактам комбинаторики являются следующие. Во-первых, осуществляется максимальная вовлеченность студентов в работу по решению задач с занимательным или практическим сюжетным текстом. Во-вторых, реализуется пропедевтика изучения правил суммы и произведения. В-третьих, для преемственности обучения используется метод перебора в решении простых задач комбинаторики на нахождение числа перестановок, размещений и сочетаний (для подсчета числа этих основных конфигураций).

Содержательная часть этого раздела может быть использована при построении элективных курсов по математике для школьников, в которых предусмотрено обучение первым понятиям и фактам комбинаторики.

4.5. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки понятиям алгебраической операции, алгебры и их основным свойствам

Изучение понятий алгебраической операции и алгебры в профильном обучении математике в большинстве школ не предусмотрено, что вызывает трудности в освоении этих понятий у студентов педагогических направлений подготовки. Начавшееся в последние десятилетия системное внедрение профильного обучения математике в школе позволит изменить существующую ситуацию.

Впервые понятие алгебраической операции на множестве, удовлетворяющей аксиомам группы (групповой операции), изложил П. С. Александров [2]. В качестве основы им были использованы наглядные примеры группы вращений правильного треугольника и квадрата, являющихся их самосовмещениями и различающиеся только положением вершин. Доступность в изучении понятия бинарной операции была обеспечена также за счет применения группы целых чисел по сложению, групп подстановок, групп вращений геометрических фигур и правильных многогранников и других тел. Все это позволило изложить различные свойства этой операции и вытекающие из них элементарные понятия и факты теории групп (понятие циклической группы и нормальной подгруппы, теорему Кэли, изоморфизм групп, систему образующих и т. д.).

Важная методическая особенность книги «Факультативный курс. Избранные вопросы математики» заключается в том, что групповая операция предстает как композиция геометрических преобразований плоскости [249]. Это обеспечивает наглядность при изучении основных абстрактных свойств алгебраической операции. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований гарантирует преемственность в изучении групповой операции.

Э. Фрид на доступном для восприятия студентов уровне рассматривает кольца, тела, модули, решетки, булевы алгебры [270]. Методический интерес представляют простые примеры групп, иллюстрируемое графами изложение групп движений на плоскости, подгрупп, полугрупп, колец на основе примеров колец четных и вещественных чисел, изучение многочленов с коэффициентами из различных числовых множеств, первые примеры решеточных операций.

А. Я. Блох, А. А. Бухштаб предложили интересный подход в определении кольцевых операций на основе понятий и фактов из школьной программы [14]. В частности, удачно изложены свойства замкнутости таких операций, приведены интересные примеры. На основе понятия координатной плоскости раскрывается геометрический смысл операций элементов кольца $\{x, y \in Z \mid x + y\sqrt{2}\}$, прослеживается связь диофантовых уравнений с понятиями кольца и поля.

Впервые определение произвольной алгебраической операции дал В. В. Деменчук [57]. Рассмотрим интересную методику, применяемую им при изучении этого понятия.

Вначале изучаются композиции подстановок и преобразований конечных множеств, записываемых как подстановки, в виде такой же таблицы (с возможно некоторыми равными элементами во второй строчке). Постепенно на основе серии примеров операций на числовых множествах, с векторами, с подмножествами данного множества, с преобразованиями данного множества и выявляемых при этом их характерных особенностей подготавливается восприятие следующего общего определения алгебраической операции.

Пусть M – некоторое множество. *Если каждым двум элементам множества М (одинаковым или различным), взятым в определенном порядке, ставится в соответствие по некоторому правилу определенный элемент из этого же множества, то такое соответствие называется алгебраической операцией, заданной на множестве М* [57, с. 55].

Затем приводятся различные наиболее распространенные обозначения алгебраических операций. После этого разъясняются их признаки, раскрывающие суть определения. В частности, констатируется факт существования результата операции и принадлежности его к заданному множеству (т. е. замкнутость операции), приводятся интересные примеры проверки наличия или отсутствия этих свойств.

После изучения операции поворотов квадрата, являющихся его самосовмещениями, и способов задания алгебраической операции определяется понятие группоида, приводятся многочисленные простые примеры группоидов. Рассматриваются свойства ассоциативности и сократимости операции группоида, определяется понятие полугруппы. Изучаются типичные алгебраические свойства элементов этих алгебр (свойства быть идемпотентом, симметричным, нейтральным, аннулирующим элементом).

Далее можно перейти к изучению понятия группы и предварительно сообщить, что для операции сложения на множестве целых чисел Z справедливы следующие законы:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых a, b, c (*сочетательный закон*).

2. Существует такой элемент 0, что для любого элемента a справедливо равенство $a + 0 = 0 + a$ (*существование нуля*).

3. Для любого элемента *а* существует такой элемент *–а*, что справедливо равенство $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (*существование противоположного слагаемого).*

Целесообразно доказать справедливость аналогов этих законов для других ранее изученных студентами операций сложения:

1) сложения остатков от деления целых чисел на 3;

2) сложения (т.е. последовательного выполнения) вращений правильного треугольника;

3) сложения векторов.

Отметим следующие существенные особенности использования символики в доказательствах этих законов на следующем примере.

Пример. *Сложение остатков* от деления целых чисел на 3.

Сначала с помощью теоремы об остатке суммы строится таблица сложения остатков $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ от деления натуральных чисел на 3 (рис. 4.5):

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Рис. 4.5

Далее доказывается *существование нуля*. При этом замечается, что нулем при сложении остатков является остаток $\overline{0}$. Поэтому для проверки равенства $a + 0 = 0 + a = a$ следует подставить в него вместо символа 0 остаток $\overline{0}$:

$a + \overline{0} = \overline{0} + a = a.$

Затем студентам можно предложить последовательно подставлять в $a + \overline{0} = \overline{0} + a = a$ вместо символа *а* его значения $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, чтобы убедиться в справедливости закона.

Замечается, что для проверки закона $a + (–a) = (–a) + a = 0$ (*существование противоположного слагаемого*) необходимо подставить в это равенство вместо символа 0 остаток $\overline{0}$: $a + (–a) = (–a) + a = \overline{0}$. Тогда очевидно, что для слагаемого $a = \overline{0}$ имеем противоположное слагаемое $– a = \overline{0}$, для $a = \overline{1}$ имеем $–a = \overline{3}$, для $a = \overline{2}$ имеем $–a = \overline{2}$, для $a = \overline{3}$ имеем $– a = \overline{1}$.

При доказательстве *сочетательного закона* предлагается подставить в равенство $(a + b) + c = a + (b + c) = 0$ вместо a, b, c все возможные наборы их значений. При этом особо отмечается, что по закону о существовании нуля равенство $(a + b) + c = a + (b + c) = 0$ справедливо для всех наборов, содержащих элемент $\overline{0}$:

$$(\overline{0} + b) + c = b + c = \overline{0} + (b + c); (a + \overline{0}) + c = a + c = a + (\overline{0} + c);$$

$$(a + b) + \overline{0} = a + b = a + (b + \overline{0}).$$

Далее рассматриваются все наборы значений a, b, c, не содержащие $\overline{0}$.

Затем студентам, особенно слабым, необходимо изучить вращения квадрата и правильного пятиугольника, являющихся их самосовмещениями, для этого приводятся таблицы Кэли этих операций. Точно так же, как и для вращений треугольника, студентам можно доказать законы 1–3 для операций сложения этих вращений квадрата и правильного пятиугольника.

Целесообразно также сообщить, что доказательство этих законов для операции сложения векторов имеется в школьных учебниках по геометрии. Отмечается, что символы a, b, c и 0 в этом случае обозначают векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{0}$, где $\vec{0}$ – нулевой вектор. Символ $–a$ обозначает вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$.

Операция сложения определена на каком-либо множестве, если при сложении двух любых элементов множества получается элемент этого же множества. Студентам сообщается, что обычная операция сложения чисел на множестве простых чисел не определена, поскольку сумма простых чисел не всегда является простым числом (т. е. может оказаться «чужим» числом).

Дается определение группы как множества G с определенной на нем операцией сложения, удовлетворяющей выделенным законам.

Сообщается, что согласно определению множество целых чисел Z, множество остатков от деления целых чисел на три, множество вращений правильного треугольника, квадрата и пятиугольника, множество векторов являются группами относительно рассмотренных операций.

Приводятся следующие примеры множеств с операцией сложения, *не являющихся группами.*

1. Рассмотрим множество натуральных чисел N с определенной на нем обычной операцией сложения его чисел. Число нуль не принадлежит множеству N, поэтому его нельзя подставлять в равенство $a + 0 = 0 + a = a$ вместо символа 0. Ясно, что в множестве N не существует такого элемента 0, что $a + 0 = 0 + a = a$ для любого a из N. Стало быть, операция сложения натуральных чисел не удовлетворяет закону 2. Следовательно, множество N не является группой.

Отмечается также, что для любого натурального числа a противоположное ему отрицательное число не принадлежит множеству натуральных чисел. Поэтому на множестве N для любого a не существует такого $–a$, что $a + (–a) = (–a) + a = 0$. Следовательно, закон 3 не справедлив для операции сложения на N.

2. Рассмотрим множество неотрицательных целых чисел M с определенной на нем операцией сложения. Очевидно, для операции сложения справедливы законы 1 и 2. Для положительного целого числа противоположное ему отрицательное число уже не принадлежит M. Отсюда следует, что закон 3 не справедлив для операции сложения чисел из M, поэтому множество M не является группой.

3. Рассмотрим три целых числа (–1, 0, 1) из множества целых чисел с операцией сложения. Очевидно, для сложения чисел –1, 0, 1 справедливы законы 1–3. Но число 1 + 1 = 2 уже не принадлежит данному множеству чисел –1, 0, 1 (является «чужим» числом!). Поэтому операция сложения не определена на множестве чисел –1, 0, 1. Следовательно, это множество не является группой.

Можно привести другие примеры групп.

1. Рассмотрим числа 0 и 1 из множества целых чисел. Поскольку 1 + 1 = 2, множество чисел 0, 1 не является группой. Однако изменим равенство 1 + 1 = 2, положив 1 + 1 = 0. Очевидно, множество чисел 0, 1 с определенной на нем операцией сложения является группой с таблицей сложения на 3 (см. рис. 4.5).

2. Легко проверить, что множество многочленов $ax = b$, где a, b – произвольные числа, с операцией сложения многочленов является группой. В этой группе нулем является многочлен $0x + 0$. Для многочлена $ax + b$ противоположным многочленом является многочлен $-ax - b$.

3. Рассмотрим таблицу сложения вращений квадрата, являющихся его самосовмещениями (рис. 4.6):

+	n_0	n_1	n_2	n_3
n_0	n_0	n_1	n_2	n_3
n_1	n_1	n_2	n_3	n_0
n_2	n_2	n_3	n_0	n_1
n_3	n_3	n_0	n_1	n_2

Рис. 4.6

Это множество является группой, в которой 0 есть вращение на 0 градусов, а противоположными являются вращения, сумма градусных величин которых равна 0^o.

Таблица сложения, согласно которой выполняется операция сложения элементов группы, называется *таблицей Кэли*, по имени немецкого математика Артура Кэли. Он первый применил такие таблицы для записи сложения элементов группы.

На основе изученного понятия группы далее студентам можно следующим образом изложить понятие произвольной алгебраической операции.

Сначала определяется, что упорядоченной парой (a, b) называется двухэлементное подмножество $\{a, b\}$ элементов множества, в котором элемент a находится на первом месте. Поэтому (a, b) и (b, a) – различные пары.

Затем объясняется, что операции возведения числа $a \in R$ в n-ю степень и взятия логарифма производятся с одним числом a. В отличие от этих операций, операции умножения чисел из R и сложения векторов являются бинарными операциями. Поскольку операции производятся с двумя элементами множества, понятно, почему в названии операции имеется приставка «би-» (напомним, что «би» в переводе с латинского означает «два»).

Далее дается общее определение алгебраической операции. Пусть A – непустое множество. Говорят, что на множестве A задана бинарная алгебраическая операция, если *каждой* упорядоченной паре элементов из множества A поставлен в соответствие по некоторому правилу *единственный* элемент этого же множества A.

Определение необходимо прокомментировать: правило, по которому каждой упорядоченной паре натуральных чисел из R (векторов) ставится в соответствие их произведение (сумма), является алгоритмом умножения «столбиком» (правилом «параллелограмма»).

Необходимо объяснить, что правила (описания), с помощью которых задаются (описываются) бинарные алгебраические операции, могут быть самыми разными. Например, описывается формулой $c = \frac{a+b}{2}$ правило, задающее на множестве R бинарную операцию, по которой каждой упорядоченной паре $(a,\ b)$ чисел ставится в соответствие число $\frac{a+b}{2}$. Нельзя назвать формулой правило, по которому каждой упорядоченной паре $(a,\ b)$ чисел из N ставится в соответствие (находится) наибольший общий делитель $НОД\,(a, b)$.

Отмечается, что кратко бинарную алгебраическую операцию на произвольном множестве A обозначают символом «*» и пишут $a * b = c$. Например, $a * b = НОД\,(a,\ b)$ или $a * b = \frac{a+b}{2}$. При этом $a * b$ называют результатом операции «*» с элементами a и b. Когда речь идет об одной и той же операции, слова «бинарная алгебраическая» обычно опускают.

Для наиболее употребительных операций зафиксированы следующие обозначения: «+», «–», «×», «:» – для арифметических операций на множестве R и $\cap$, $\cup$ – для операций со множествами.

После этого приводятся примеры множеств с бинарными алгебраическими операциями:

1) множество n-элементных подстановок с операцией умножения;

2) множество многочленов (одной переменной с действительными коэффициентами) с операциями сложения, вычитания, умножения;

3) множество преобразований и функций с операцией композиции;

4) множество действительных чисел R с операцией $a \circ b = \max(a, b)$, где есть большее из чисел a и b;

5) множество всех подмножеств множества M с операциями объединения и пересечения.

Важную роль в определении алгебраической операции играет понятие упорядоченной пары. Поэтому следует заметить, что, подставляя в равенство $a * b = b * a$ вместо знака $*$ символ соответствующей операции, можно проверить, справедлив или несправедлив для нее коммутативный, т. е. переместительный, закон. Именно по этой причине в определении бинарной алгебраической операции говорится об упорядоченной паре элементов.

Далее следует вернуться к самому определению алгебраической операции и объяснить подробнее, что означают слова «на множестве A задана *бинарная алгебраическая операция*».

Для того чтобы операция была задана на множестве A, по определению предъявляются три требования:

1. *Существование* результата. Результат $a * b$ операции $*$ должен существовать или быть известен для *каждой* пары элементов a, b множества A. Например, для пары a, 0 на множестве R не существует результат операции $a * b = \dfrac{a}{0}$. На множестве R не каждой пары (a, b) существует результат операции $a * b = \sqrt{ab}$ извлечения корня.

2. *Единственность* результата. Результат $a * b$ операции $*$ должен быть единственным. Например, результатом операции извлече-

ния корня $\sqrt{ab}$ являются два противоположных числа. Поэтому есть соглашение считать результатом этой операции арифметический корень, т. е. положительное число.

3. *Замкнутость* операции. Результат $a * b$ операции $*$ на множестве A должен принадлежать этому же множеству. Например, результат операции вычитания на множестве N может быть отрицательным числом и, следовательно, может не принадлежать N. Поэтому вычитание на множестве N не является бинарной алгебраической операцией. На множестве Z целых чисел вычитание – бинарная алгебраическая операция.

Следует заметить, что бинарная алгебраическая операция на множестве A является отображением φ множества всевозможных пар элементов A (декартова квадрата A^2) в это же множество A. Если при отображении φ упорядоченной паре (a, b) соответствует элемент c, то вместо $\varphi(a, b) = c$ обычно пишут $a * b = c$. Элемент c назвается еще *композицией* элементов a и b.

Отмечается, что наиболее часто используются аддитивная и мультипликативная формы записи бинарной операции. При аддитивной записи операцию называют *сложением*, а ее результат элемент $a + b$ – *суммой*. При мультипликативной записи операцию называют *умножением*, а ее результат элемент $a \cdot b$ – *произведением*.

На основе изученного можно реализовать плавный переход к более глубокому профильному обучению студентов понятию n-арной алгебраической операции, алгебры, алгебраической структуры и основных классических алгебр, используя учебные пособия [186, 187].

Итак, основными особенностями методики обучения студентов педагогических направлений подготовки понятиям алгебраической операции, алгебры и их основным свойствам являются следующие. Во-первых, обеспечивается преемственность обучения на основе наглядных понятий группы вращений правильного треугольника и квадрата, групп целых чисел по сложению и др. Во-вторых, разъясняются признаки произвольной алгебраической операции, раскрывающие суть ее определения. В-третьих, устанавливаются внутрипредметные связи математики (использование понятий вектора, наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя, многочлена, функции и др.).

Содержательная часть этого раздела может быть использована при построении элективных курсов по математике для школьников, в которых предусмотрено обучение понятиям алгебраической операции, алгебры и их основным свойствам.

4.6. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки понятию математической модели и его различным трактовкам

Понятие «математическая модель» является ключевым в описании сути термина «математическое моделирование», трудно обозримым в своей современной полноте и глубине, особенно в изложении для школьников. Поэтому студентам следует сообщить, что проблемы методики изучения этого понятия в школе особенно сложны.

Глубокий, многообразный смысл понятия идеальной математической модели, существующей лишь в сознании, даже профессиональными математиками воспринимается по-разному. Специалист в области математического анализа привычно отождествляет это понятие с одними важными признаками «своих» математических моделей, специалист в области современной алгебры – с другими. Как известно, многообразие современных видов математического моделирования и, соответственно, математических моделей настолько велико, что его можно уподобить безграничному океану со многими сотнями островов, которые будут соответствовать конкретным типам задач [135, 137, 169]. Таким образом, даже краткое описание всех отличительных признаков потребует издания многих сотен томов.

Понятие математической модели настолько объемно и глубоко, что его в принципе следует считать неопределяемым, как и понятие множества, алгоритма и его исполнителя и т. д.

В учебной литературе по информатике объяснение этого понятия традиционно начинается с простых примеров из физики, химии, биологии и других наук, также предлагаются примеры из окружающей жизни: модели – это макеты, таблицы, словесные описания, чертежи, планы действий и пр. [12, 32].

Разнообразие современных математических моделей обусловливает наличие разных подходов к определению этого понятия даже в учебниках по информатике для школ и вузов. Приведем характерные примеры.

Четко сформулировать – это значит высказать те предположения, которые позволят из информации об изучаемом явлении или объекте выделить исходные данные, определить, что будет служить результатом и какая имеется связь между исходными данными и результатами. Все эти предположения, исходные данные, результаты и связи между ними называют моделью задачи. Моделирование – это решение задачи на ЭВМ [32].

В учебнике по информатике для учащихся 7–9-х классов под редакцией Н. В. Макаровой понятие модели трактуется так: «*Модель – аналог (заместитель) оригинала (объекта), отражающий некоторые его характеристики.* Этот аналог служит для хранения и расширения знания об оригинале (объекте). Разнообразие моделей определяется разнообразием *целей,* поставленных при их создании» [77, с. 153].

С учетом приведенных и других трактовок понятия математической модели можно предложить следующую методическую схему его изучения.

1. *Математическая модель как абстрактный образец решения задачи*. Любой закончивший школу человек знает смысл понятий «модель обуви», «модель одежды» и т. п. Слово «модель» ассоциируется прежде всего с материальной моделью, т. е. с каким-то новым, более совершенным, готовым для массового использования образцом. Поэтому студентам следует дать первое представление о математической модели как о математическом *образце* (теореме, формуле, правиле и т. д.), готовом для «массового использования» в приложениях, т. е. для решения различных задач, особенно *однотипных* (условие однотипности обязательно). Подчеркнем, что элемент массовости очень важен для восприятия школьников. Здесь уместно сослаться на тео-

рему Пифагора как великолепный образец математической «красоты», к которой необходимо стремиться в определении понятия модели (красоты в смысле неожиданности, изящества формулировки теоремы, нетривиальности доказательства и универсальности приложений).

Итак, при первоначальном знакомстве понятие математической модели должно быть представлено как готовый *результат* исследования объекта, пригодный и удобный для использования на практике. В качестве такого результата могут быть даны формула, теорема, правило (алгоритм), метод и т. д. Показ каких-то готовых результатов исследования (объекта или явления) в данном случае уместен, поскольку студенты уже обладают умением решать задачи. Отсутствие самого решения дает так называемый эффект многосерийного кино, когда изложение обрывается на самом интригующем эпизоде и тем самым вызывает сильный интерес к излагаемому.

Необходимо демонстрировать такие образцы, которые произведут большое впечатление на студентов своей неожиданностью, универсальностью, простотой и нетривиальностью при получении конкретных практических результатов в различных областях. Лучшие образцы могут быть найдены прежде всего на основе использования внутрипредметных и межпредметных связей математики. Типичными «модельными» образцами являются физические формулы (в частности, формула для расчета времени падения тела с заданной высоты). Немало хороших образцов математических моделей можно найти в учебной литературе, предназначенной для элективного обучения в школе [25, 28, 30, 50, 75, 230].

2. *Математическая модель как важнейший этап в построении полной цепочки использования компьютера*. Раскрытие понятия математической модели на основе понятия полной цепочки использования компьютера соответствует идее Л. С. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств (см. подп. 2.2.2). Для такой реконструкции обстоятельств «жизни» и необходимы задачи с занимательным и практическим сюжетным текстом. Яркие примеры построения полной цепочки

на языке теории графов, геометрии и тригонометрии, дифференциального и интегрального исчисления и т. д. необходимы для популярного объяснения *роли* и *места* математической модели в процессе исследования объекта или явления. Понятие математической модели, «вырванное» из процесса исследования, не отражает этот процесс и поэтому не может служить ориентиром в обучении.

Изучение понятия модели, осуществляемое в рамках обучения построению полной цепочки использования компьютера, должно сопровождаться (естественно) объяснением смысла следующих терминов.

Реальная ситуация – это осознание субъектом потребности в изучении какого-либо объекта или явления. Например, объектом может быть схема железнодорожных путей, связывающих между собой цеха завода, а реальной ситуацией – осознание необходимости найти такой вариант обхода железнодорожных путей, при котором каждое звено пути между пунктами можно обойти только раз (задача путевого обходчика, решаемая с помощью эйлеровых графов).

Выбор языка – это поиск терминов того раздела (темы) математической дисциплины (алгебры, геометрии, тригонометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теории графов и т. д.), на языке терминов которого возможно составить схему (план) решения задачи. Случается так, что для решения сложной задачи необходимо использовать знания различных тем или дисциплин.

Разработка модели – это процесс нахождения плана (схемы, алгоритма) использования определений, теорем, формул или методов, на основе которого можно подробно описать и обосновать решение задачи. Яркий пример такого плана – этапы решения стереометрической задачи (запись данных и иллюстрация их на рисунке, обоснование дополнительного построения, решение и его анализ, приведение ответа к каноническому виду).

Математическая модель – это готовый *результат* решения задачи, пригодный и удобный для использования на практике: формула, теорема, правило, алгоритм, чертеж и т. д.

Алгоритм – это последовательность действий, которую надлежит выполнить исполнителю (конторским счетам, калькулятору, машине Поста, компьютеру) для получения конкретного ответа при заданных исходных данных в условии задачи.

Программа – это последовательность команд языка программирования, на котором дано точное описание алгоритма действий (вычислений) исполнителя.

Симуляция решения (термин Н. Н. Красовского [103]) – это проверка правильности построения полной цепочки использования компьютера в процессе решения задачи. Если обнаружено несоответствие результата решения исходным данным, то необходимо выявить слабое звено в построении цепочки. В связи с этим целесообразно предлагать студентам задачи на выявление того или иного некорректного звена (этапа) в полной цепочке использования компьютеров (задачи на некорректно построенные цепочки).

Анализ результата – это выявление пригодности или непригодности (частичной) полученной математической модели (математического образца) для массового математического или прикладного использования. Особенно яркие примеры такого анализа можно продемонстрировать на основе понятий комбинаторики (при анализе азартных игр, возможностей выигрыша в лотереях), теории вероятностей и математической статистики.

Для полноценного раскрытия смысла понятия математической модели на основе построения полной цепочки использования компьютера требуется поэтапное профильное обучение студентов, в процессе которого будет осуществляться неоднократный (и на более высоком уровне) возврат к объяснению этого понятия.

Необходимо также объяснить, что существует очень много видов математического моделирования, классифицируемых на основе того или иного математического метода или, в более широком смысле, – языка математики, с учетом которого решаются задачи (проводятся большие исследования). Следует привести примеры моделирования, в том числе и с использованием компьютера, на языке «непрерывной» математики (задачи на нахождение наименьшей или наибольшей площади, объема и т. д.), дискретной математики (нахождение кратчайшего маршрута, минимального остового дерева и т. д.), линейного программирования (нахождение оптимального плана перевозок, выпуска продукции и т. д.), теории игр [28] и т. д. Целесообразно продемонстрировать простейшие примеры совместного использования языка дифференциального и интегрального исчисления и языка дискретной математики (примеры асимптотических оценок комбинаторных чисел, использующихся в оценке величин частичных сумм рядов и др.).

3. *Математическая модель есть множество с заданными на нем операциями и отношениями определенного типа (т. е. абстрактная структура)*. Напомним, что понятие *«тип операции»* и отношения (способ определения или задания, арность, свойства и т. д.), образно говоря, играют такую же важную роль в классификации математических моделей, как понятие *атомного веса* элемента при создании периодической таблицы химических элементов.

При дальнейшем изложении следует объяснить, что данное определение универсально с точки зрения математического моделирования. Другим важнейшим его преимуществом является то, что оно позволяет избежать очень сложного описания всех видов математического моделирования: вместо этого на основе типа математической модели можно уяснить и запомнить его самые главные «параметры».

Очень важно представить исторический обзор становления понятия математической модели, причем следует начать с примера модели натуральных чисел как алгебры на счетном множестве с заданными на нем алгебраическими операциями сложения, умножения и отношением линейного порядка. Далее целесообразно рассказать об истории возникновения геометрии Евклида, Лобачевского, Римана и их интерпретаций, дифференциального и интегрального исчислений, алгебры высказываний.

4. *Модель как представитель класса математических моделей*. Следует начать с того, что в математике (например, в современной алгебре) изучаются классы математических моделей, т. е. множества, образованные теми и только теми моделями, на каждой из которых истинны заданные аксиомы, описывающие конкретные свойства моделей этого класса. В качестве примера можно привести аксиомы, оп-

ределяющие понятия группы, полугруппы, кольца, отношения эквивалентности, частичного порядка, решетки, и показать содержательные различия между моделями (интерпретациями аксиом).

Как видно из изложенной методической схемы, в рамках профильного обучения дискретной математике нецелесообразно давать *общее* определение математической модели (например, в работе «Модели в науке и технике» [137, с. 44]), поскольку любое общее определение ограничит глубокий, многообразный смысл этого понятия и окажется трудным для восприятия студентов. К тому же рассмотренное выше определение модели как абстрактной структуры является общепринятым в современной ДМ, достаточно посильным для восприятия при условии соответствующей пропедевтики его изучения, хотя бы отчасти может способствовать достижению поставленных целей обучения.

В заключение полезно сделать краткий обзор философских проблем моделирования (проблем математизации, компьютеризации), дать представление о классификации его видов (математическое, информационное, стохастическое, имитационное), привести примеры поиска оптимального языка моделирования (в зависимости от видов используемых переменных, операций в инженерно-технических, экономических, социологических, лингвистических и других исследованиях). Все это расширит представления студентов об определяющей роли понятий модели и языка моделирования.

Итак, основными особенностями методики обучения студентов педагогических направлений подготовки понятию математической модели являются следующие. Во-первых, понятие модели рассматривается с разных точек зрения, тем самым осуществляется ранняя пропедевтика изучения различных видов моделирования с использованием компьютера, основанных на применении различных математических языков (классической математики, абстрактной алгебры, математического программирования, теории моделей и др.). Во-вторых, студентам разъясняется содержательная суть понятий, являющихся терминологической основой обучения построению полной цепочки использования компьютера. В-третьих, методическим ориентиром изучения понятия математической модели является необходимость гармоничного использования формального языка математики и неформального языка других наук. В-четвертых, исторический обзор становления понятия математической модели вызовет у студентов большой интерес к изучению этого понятия, прояснит формальную суть излагаемого.

На основе изученного можно реализовать плавный переход к более глубокому профильному обучению студентов понятию математической модели и его различным трактовкам, используя учебные пособия [162, 186].

Содержательная часть этого раздела может быть использована при построении элективных курсов по математике и информатике для школьников, в которых предусмотрено обучение понятию математической модели и его различным трактовкам.

4.7. Методика обучения студентов педагогических направлений подготовки математическому языку, понятиям алгоритма и алгоритмической разрешимости

В методике обучения дискретной математике следует обратить особое внимание на *методические особенности* изучения терминов ее языка, от которых зависит развитие в абстрактном мышлении студентов необходимых *законов* гармоничной интеграции языков: дифференциального и интегрального исчисления, численных методов, теории вероятностей и математической статистики, теории графов, исследования операций и др. Только при этом условии у них сформируется умение правильно выбирать «технику» моделирования (аналитическую, статистическую, «объединенную» и пр.), выстраивать последовательность рассуждений при непосредственном решении задачи.

Методика обучения математическому языку, понятиям алгоритма и алгоритмической разрешимости задачи на выбранном для ее решения математическом языке позволяет студентам выработать соответствующие представления о проблемах моделирования, поэтому играет важную роль в формировании математической культуры.

При изучении особенностей математического языка следует учитывать концептуальные различия понятий формального языка (например, в СКМ и математической лингвистике), формальной системы (например, теорий, исчислений в математической логике и алгебре) [225, 226].

Необходимо предусмотреть последовательное изучение следующих основных понятий: «алфавит», «формула» («слово»), «аксиома», «правило вывода», «теорема», «доказательство», «формальная теория», «интерпретация формальной теории», «метаязык». Процесс изучения этих понятий целеобразно сопровождать примерами корректного и некорректного перевода формулировок практических задач на математический язык.

В начале обучения необходима пропедевтика изучения понятий алфавита, формулы (слова) и простейших преобразований формул (слов) по заданным правилам. Можно решать задачи на уяснение различий между произвольным набором букв алфавита (в частности, русского) и словом из этих же букв, имеющим смысловое значение.

Наряду с тождественными преобразованиями «школьных» алгебраических выражений можно предложить студентам задачи на преобразования произвольных формул (слов) над заданным алфавитом по заданным формальным простейшим правилам, являющимся, например, тождествами коммутативности ($xy = yx$), идемпотентности ($xx = x$) и т. д. [155, 187]. Приведем примеры.

Задача. В слове «комбинатор» можно менять местами любые две соседние буквы и вместо двух одинаковых оказавшихся рядом букв можно записать одну такую же. Доказать, что в результате таких изменений получится слово «комбинаторика».

Целесообразно решение задач на подсчет числа всех одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

Задача. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв: *А*, *Б*, *В*. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырех букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

На основе различных упорядочений множеств «предметов» (сочетаний, перестановок, размещений таких множеств), биекций, операций пересечений и объединения этих множеств можно расширить круг возможных задач, предназначенных для изучения понятий алфавита и формулы (слова) формального языка. Дополнительно можно составить другие задачи, например, путем модифицикации некоторых задач, взятых из соответствующих книг [18, 30, 33, 117].

Вслед за этим целесообразно реализовать систематическую пропедевтику изучения понятий алфавита, формулы (слова), аксиомы, правила вывода, теоремы, доказательства, формальной теории, интерпретации формальной теории на основе привычных представлений студентов об аксиоматическом методе и тождественных преобразованиях алгебраических выражений, полученных при обучении курсам геометрии и алгебры в школе.

В этот период необходимо подготовить студентов к восприятию аксиом кольца – кольца остатков от деления на 4 и пятиэлементного поля (алгебры самосовмещений пятиугольника) [155, 164]. Затем следует приступить к изучению преобразований выражений (слов) алгебры высказываний.

В качестве произвольных слов над заданным алфавитом (больших латинских букв), естественно, рассматриваются простые высказывания [155]. После изучения таблиц истинности логических операций можно на основе примеров научить студентов составлять из простых высказываний (слов) более сложные. После доказательства переместительного, сочетательного и распределительного законов логических операций можно рассмотреть простейшие преобразования логических выражений. После того как студенты усвоят законы идемпотентности и операцию логического отрицания, целесообразно показать отличие законов алгебраических преобразований «школьных» алгебраических выражений (слов) от законов преобразований логических выражений (логических слов), различие в порядке выполнения операций [155]. В завершение изучения темы следует обсудить различие алфавитов, формул (слов), аксиом (таблиц истинности и законов арифметических действий), правил вывода (преобразований), теорем (доказываемых формул) алгебры буквенных числовых выражений и алгебры высказываний.

Далее можно осуществить интерпретацию аксиом кольца: в кольце целых чисел, в кольце многочленов, в кольце остатков от деления на 4, пятиэлементном поле (алгебре самосовмещений пятиугольника) [155]; следует показать невозможность интерпретации аксиом кольца в алгебре высказываний и алгебре векторов.

При углубленном обучении дискретной математике возможно изучение следующих, более общих тем: «Алгебра высказываний», «Алгебра самосовмещений пятиугольника», «Алгебра кольца остатков» [155, 164], «Классические алгебры» [187].

На основе пройденного можно перейти к изучению понятия формальной теории и ее интерпретации (с учетом профиля обучения).

При обучении по любому профилю целесообразно рассмотреть несколько простых примеров.

Пример. Формальная теория палиндромов в алфавите $\{a, b\}$.

Палиндромом является слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево. Такими словами в русском алфавите являются, например, слова «топот» и «потоп».

Аксиомы теории палиндромов – формулы $A_1 = a$, $A_2 = a$, $A_3 = aa$, $A_4 = bb$.

Правила вывода:

1) $A| -aAa$; 2) $A| -bAb$.

Легко убедиться, что теоремами этой теории являются любые непустые слова – палиндромы в алфавите.

Пример теоремы

Теорема: $abababa$.

Доказательство. Рассмотрим аксиому $A_2 = b$. На основании правила вывода $A| -aAa$ при $A = b$ получаем $B_1 = aba$. По правилу вывода $A| -bAb$ при $A = B_1$ получаем $B_2 = babab$. Из правила $A| -aAa$ при $A = B$ следует $abababa$.

Изменяя буквы алфавита и правила вывода, можно получить достаточное количество подобных примеров.

После этого следует дать представление об исчислении высказываний и аксиоматическом методе построения формальных теорий: геометрии Евклида, Лобачевского, векторного пространства, теории групп и полугрупп, колец, решеток. Изложение желательно сопровождать яркими историческими экскурсами (фактами из жизни Н. И. Лобачевского, К. Ф. Гаусса, Я. Больяй, Э. Галуа и др.).

При первоначальном обучении дискретной математике можно ограничиться только примерами «палиндромного» типа, выводом простейших свойств элементов произвольной коммутативной группы и ассоциативно-коммутативного кольца, рассмотрением аксиом произвольного векторного пространства (с последующими различными интерпретациями).

Важнейшим в изучении понятий алгоритма и алгоритмической разрешимости является «дискретный» подход, заключающийся в решении разнообразных алгоритмически разрешимых задач (из теории графов, комбинаторного анализа, булевых функций и других разделов ДМ). Напомним, что под алгоритмической разрешимостью понимается решение проблемы существования алгоритма (решения однотипных задач). При этом задача является алгоритмически разрешимой или неразрешимой, если существует или, соответственно, не существует алгоритм ее решения на используемом математическом языке. На основе понятия алгоритмически разрешимой задачи сформировалось понятие исполнителя, было уточнено само понятие алгоритма. В результате вошли в обиход понятия эквивалентных и эффективных алгоритмов, являющиеся ключевыми для понимания сути и корректности вычислений на компьютере.

Можно предложить следующую методическую схему изучения понятий алгоритма и алгоритмической разрешимости, пригодную также слабым студентам и учащимся физико-математических классов [155, 164].

Сначала на основе ряда занимательных, практических примеров и задач, рассмотрения вращений правильных многоугольников изучаются таблицы Кэли операций кольца Z_4 остатков от деления на 4, пятиэлементного поля P и таблицы истинности алгебры высказываний B. Вычисляются значения буквенных выражений алгебр Z_4, P, B и доказываются основные законы операций.

Далее предлагаются упражнения на доказательство тождеств и решение уравнений (в том числе с параметрами) в каждой из алгебр Z_4, P, B. Изучаются сходства и различия свойств операций, методов доказательства тождеств и решений уравнений.

Вводятся персонажи Ленивкин, Смекалкин и совсем не знающий математику Кнопкин [126, 155]. Рассматриваются различные алгоритмы решения этими персонажами одних и тех же практических задач в кольце целых чисел Z и поле рациональных чисел Q, алгоритмы вычислений и решения простых уравнений в алгебрах Z_4, P, B.

После этого предлагаются следующие виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и конечным числом действий (исполнителя). Осуществляются вычисления в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B на микрокалькуляторах, различающихся перечнем выполняемых операций и размером табло. Выясняется возможность вычисления точного ответа задачи. Определяется число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Приводятся примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина, алгоритмы решений квадратного уравнения в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B.

Далее рассматриваются устройство и команды машины Поста, виды и примеры программ, массивы и их объединения (программы сложения натуральных чисел и некоторые программы вычитания, умножения и деления натуральных чисел).

Затем предлагается составить алгоритмы построений циркулем и линейкой, нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, поиска эйлеровой цепи в графе.

После этого со студентами изучают следующие темы, которые также посильны для элективного обучения в классах физико-математического профиля (см. раздел программы для 11-го класса из п. 3.1.2):

1. Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

2. Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$, $xy + x + y + 1$ и др.

3. Устройство, команды и примеры программ машины Тьюринга. Программа сложения натуральных чисел. Понятие конечного автомата. Примеры конечных автоматов. Понятие исполнителя. Уточ-

нение понятия алгоритма. Эквивалентные и эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и Тьюринга к ЭВМ.

4. Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. Разрешимость уравнений в радикалах. Разрешимость уравнений в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B. Распознавание конечных изоморфных (равных) графов.

5. Проблема разрешимости. Разрешающие алгоритмы. Полиномиальное и экспоненциальное время работы алгоритма. Новые примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач.

Естественно, с учетом профиля обучения дискретной математике возможны сокращения или модификации предложенной методики.

В заключение изучения понятия алгоритмической разрешимости студентам следует дать классификацию видов задач, кратко представленную в п. 4.2. Вначале необходимо предложить задачи с неверно составленным условием, с ненайденным решением, не имеющие решения. Затем перейти к задачам, которые имеют решение на выбранном математическом языке, и к первоначальным задачам на понятие алгоритма. Из задач с уже найденным решением выделяются задачи с бесконечным и конечным числом действий (исполнителя). Благодаря таким задачам студенты впервые познакомятся с проблемой существования алгоритма решения. Здесь целесообразно отдельно обсудить проблему разрешимости уравнений в алгебрах Z, Q, Z_4, P, B. Далее нужно рассмотреть задачи на составление эффективного алгоритма. При этом в качестве исполнителя можно предложить различные виды микрокалькуляторов, машину Поста и т. д.

Напомним, что важную роль в «задачной» классификации играют занимательные, практические и теоретико-модельные задачи: задачи на проблему изоморфизма, проблему разрешимости (существования алгоритма решения на выбранном математическом языке); задачи на выразимость на языке первого порядка тех или иных понятий; задачи на составление алгоритмов по всем изученным ранее разделам как классической, так и дискретной математики (см. п. 4.2). Решение подобных задач важно с точки зрения развития общей культуры в приложениях математики.

Итак, основными особенностями методики обучения студентов педагогических направлений подготовки математическому языку, понятиям алгоритма и алгоритмической разрешимости являются следующие. Во-первых, рассматриваются понятия алфавита, формулы (слова), аксиомы, правила вывода, теоремы, доказательства, формальной теории, интерпретации формальной теории, метаязыка. Во-вторых, осуществляется поэтапное преемственное изучение перечисленных понятий. В-третьих, при изложении материала учитываются психологические особенности студентов. В-четвертых, устанавливаются внутриматематические связи изучаемого (с комбинаторикой, с тождественными преобразованиями «школьных» алгебраических выражений).

На основе изученного можно реализовать плавный переход к более глубокому профильному обучению студентов математическому языку, понятиям алгоритма и алгоритмической разрешимости, используя учебники и учебные пособия [108, 156, 157, 158, 159, 164, 224]

Содержательная часть этого раздела может быть использована при построении элективных курсов по математике и информатике для школьников, в которых предусмотрено обучение рассмотренных понятий и их свойств.

Заключение

В ходе проведенных методологического, теоретического и экспериментального исследований установлено, что проблема разработки методической системы обучения студентов педагогических направлений подготовки дискретной математике в аспекте интеграции образования является актуальной и требует всестороннего изучения. В данной работе обоснованы необходимость и возможность ее решения в рамках содержательного направления интеграции образования, выявлен и охарактеризован интеграционный потенциал современной ДМ в обучении математическим, естественнонаучным дисциплинам и дисциплинам профессионального цикла будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов, в реализации межпредметных связей математики, информатики и других, смежных с ними дисциплин, а также в оптимизации содержания обучения.

Решены задачи исследования, поставленные в соответствии с рассматриваемой проблемой, в результате разработана концепция методической системы обучения дискретной математике студентов педагогических направлений подготовки, основанная на использовании выявленного интеграционного потенциала.

В процессе разработки концепции охарактеризованы предмет и функции ДМ, существующие направления обучения в системе высшего образования, на основе этого выявлена роль дискретной математики в математическом моделировании и теории вычислительных процессов как наиболее ярких проявлениях современной математической культуры. Для студентов соответствующих профилей подготовки были разработаны различные модели реализации методической системы обучения, дана характеристика их компонентов.

Обосновано, что в разработке компонентов методической системы обучения дискретной математике и ее различных моделей в зависимости от направления подготовки фундаментальную роль играют следующие принципы:

- адекватность языка обучения, являющегося результатом гармоничного сочетания формального языка математики, неформального языка науки в соответствующей профессиональной научной области и уникальных возможностей современного компьютера;

- единство в обучении непрерывной и дискретной математике, что является основой интеграции содержания обучения математическому моделированию будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов;

- корректное использование систем компьютерной математики и компьютерных технологий в соответствии с профилем подготовки, что необходимо для выработки у студентов умения адаптироваться к постоянным изменениям в области информатики.

При этом установлено следующее:

1. Дискретная математика наряду с непрерывной математикой в силу их фундаментальной роли в математическом моделировании и вычислительных процессах лежит в основе методологии реализации существующих подходов в содержательном направлении интеграции математической, естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

2. Дискретная математика характеризуется как стержневая основа реализации межпредметных связей математики, информатики и смежных с ними дисциплин.

3. Доминирующие в дискретной математике алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы (средства, методы математического познания) лежат в основе отбора содержания обучения ДМ будущих учителей математики, информатики и инженеров-педагогов.

4. Обучение дискретной математике в магистратуре должно быть направлено на формирование у студентов умения обучать учащихся начальным элементам математического моделирования и разрабатывать алгоритмы вычислений с учетом профиля подготовки. Практическая реализация этого обучения основана на деятельностном подходе к изучению *определений* фундаментальных понятий и принципиальных *теорем* курса ДМ, имеющих прикладное значение, должна учитывать сложившуюся систему организации научно-исследовательской работы студентов.

5. Дискретная математика играет фундаментальную роль в формировании у инженеров-педагогов умений научной, дидактической и методической переработки содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки.

Переработка содержания учебного материала означает проведение структурно-логического анализа содержания дисциплины, в процессе которого выделяются опорные математические понятия и методы, составляющие математический аппарат изучаемой технической дисциплины, необходимый для обучения учащихся математическому моделированию технических объектов и разработке алгоритмов вычислительных процессов, на основе которых реализуется технология их функционирования в отрасли производства.

При переработке содержания осуществляется методическая редукция этих понятий, т. е. трансформация математических понятий технической дисциплины соответственно уровню понимания учащихся.

Разработана методическая схема реализации дискретной линии в переработке содержания учебного материала технических дисциплин с целью интеграции психолого-педагогического, отраслевого и производственно-технологического компонентов подготовки (профессионально-педагогической направленности подготовки) инженеров-педагогов на уровне бакалавриата.

В ходе исследования разработан доступный и рациональный подход к изучению дискретной математики в вариативной части дисциплин профессионального цикла обучения будущих учителей математики и информатики на уровне бакалавриата, основанный на систематическом применении основных классических комбинаторных конфигураций и их свойств, производящих функций и асимптотических оценок и приближений в решении перечислительных задач ДМ, а также в анализе эффективности алгоритмов решения задач математического моделирования.

Предложены направления методической специализации учителей математики, информатики и инженеров-педагогов на уровне магистратуры в зависимости от направлений обучения дискретной математике, существующих в системе высшего образования.

В соответствии с предложенной методической системой обучения разработано учебно-методическое обеспечение обучения дискретной математике студентов названных профилей подготовки, включающее в себя восемь учебных пособий, а также различные программы спецкурсов для магистров.

Исследована методика обучения студентов педагогических направлений подготовки основным понятиям и фактам ДМ, которая может быть использована учителями математики, информатики и инженерами-педагогами в общеобразовательных учебных заведениях, колледжах (техникумах) при изучении с учащимися предметной области «Математика и информатика».

Как уже отмечалось во введении, полученные результаты внедрены в учебный процесс высших учебных заведений, колледжей (техникумов) и школ Екатеринбурга, Кирова, Самары, Вологды и других городов, а также в вариативную подготовку аспирантов, используются при повышении квалификации преподавателей вузов и учителей школ и колледжей (техникумов).

Библиографический список

1. *Абдуразаков М. М.* Совершенствование содержания подготовки будущего учителя информатики в условиях информатизации образования: диссертация … доктора педагогических наук / М. М. Абдуразаков. Москва, 2007. 355 с.

2. *Александров П. С.* Введение в теорию групп / П. С. Александров. Москва: Учпедгиз, 1951. 125 с.

3. *Ананьев Б. Г.* Развитие психологических функций взрослых людей / Б. Г. Ананьев, Е. И. Степанова. Москва: Педагогика, 1977. 248 с.

4. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика: перевод с английского / Д. А. Андерсон. Москва: Вильямс, 2003. 960 с.

5. *Асанов М. О.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. 2-е изд., испр. и доп. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 362 с.

6. *Асеев Г. Г.* Дискретная математика: учебное пособие / Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. Ростов-на-Дону: Феникс; Харьков: Торсинг, 2003. 144 с.

7. *Балк М. Б.* Математика после уроков / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. Москва: Просвещение, 1971. 462 с.

8. *Балханов В. А.* Философско-методологические основы математизации знания / В. А. Балханов. Улан-Удэ: Бурят. кн. изд-во, 1986. 171 с.

9. *Безрукова В. С.* Интеграционные процессы в педагогической теории и практике / В. С. Безрукова. Екатеринбург: [Б. и.], 1994. 243 с.

10. *Белоусов А. И.* Дискретная математика: учебник для вузов / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев. Москва: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана, 2001. 744 с.

11. *Беран Л.* Упорядоченные множества и решетки: перевод с чешского / Л. Беран. Москва: Наука, 1981. 64 с.

12. *Бешенков С. А.* Решение типовых задач по моделированию / С. А. Бешенков, Е. А. Ракитина // Информатика в школе: приложение к журналу «Информатика и образование». 2005. № 1. С. 1–96.

13. *Биркгоф Г.* Современная прикладная алгебра: перевод с английского / Г. Биркгоф, Т. Барти. Москва: Мир, 1976. 400 с.

14. *Блох А. Я.* Алгебраические числовые кольца и поля: методическая разработка к спецкурсу «Факультативные занятия в старших классах средней школы» / А. Я. Блох, А. А. Бухштаб. Москва: Изд-во Моск. гос. пед. ин-та, 1973. 63 с.

15. *Бодрикова Г. Н.* Использование межпредметных связей при обучении иностранным языкам на младших курсах языкового вуза: автореферат диссертации … кандидата педагогических наук / Г. Н. Бодрикова. Москва, 1982. 16 с.

16. *Большая* советская энциклопедия: в 50 томах. 2-е изд. Москва: Советская энциклопедия, 1955. Т. 36. 672 с.

17. *Борн М.* Физика в жизни моего поколения: сборник статей / М. Борн. Москва: Иностранная литература, 1963. 142 с.

18. *Бороненко Т. А*. Компьютерная математика в педагогическом вузе / Т. А. Бороненко, Н. И. Рыжова // Информатика и образование. 2001. № 2. С. 7–10.

19. *Босова Л. Л.* Развивающие задачи по информатике: задачник / Л. Л. Босова. Москва: Образование и информатика, 2000. 87 с. (Информатика – школе.)

20. *Брунер Дж.* Торжество разнообразия: Пиаже и Выготский / Дж. Брунер // Вопросы психологии. 2001. № 4. С. 3–13.

21. *Бунимович Е. А.* Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики / Е. А. Бунимович // Математика в школе. 2002. № 6. С. 52–58.

22. *Веккер Л. М.* Психика и реальность: единая теория психических процессов / Л. М. Веккер. Москва: Смысл, 1998. 685 с.

23. *Вечтомов Е. М.* Философия математики: монография / Е. М. Вечтомов. Киров: Изд-во Вят. гос. ун-та, 2004. 192 с.

24. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и математический анализ: учебное пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. 5-е изд. Москва: Просвещение, 1996. 288 с.

25. *Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия: книга для учащихся 10–11-х классов общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. Москва: Просвещение: Учебная литература, 1996. 320 с.

26. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика / Н. Я. Виленкин. Москва: Наука, 1975. 208 с.

27. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. Москва: Наука, 1965. 128 с.

28. *Воробьев Н. Н.* Теория игр / Н. Н. Воробьев. Москва: Знание, 1976. 64 с.

29. *Ворожцов А. В.* Путь в современную математику / А. В. Ворожцов. Москва: Эдиториал УРСС, 2003. 144 с.

30. *Галкин Е. В.* Нестандартные задачи по математике: задачи логического характера: книга для учащихся 5–11-х классов / Е. В. Галкин. Москва: Просвещение: Учебная литература, 1996. 160 с.

31. *Гальперин Г. А.* Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. Москва: Просвещение, 1986. 303 с.

32. *Гейн А. Г.* Земля Информатика: пособие для учителей / А. Г. Гейн. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та: Изд-во Дома учителя, 1997. 206 с.

33. *Генкин С. А.* Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Киров: АСА, 1994. 272 с.

34. *Гладкий А. В.* Формальные грамматики и языки / А. В. Гладкий. Москва: Наука, 1973. 368 с.

35. *Гласс Р.* Факты и заблуждения профессионального программирования: перевод с английского / Р. Гласс. Санкт-Петербург: Символ-Плюс, 2007. 240 с.

36. *Глушков В. М.* Введение в АСУ / В. М. Глушков. Киев: Техника, 1974. 319 с.

37. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику / В. М. Глушков. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1964. 324 с.

38. *Глушков В. М.* Гносеологическая природа информационного моделирования / В. М. Глушков // Вопросы философии. 1963. № 10. С. 13–18.

39. *Глушков В. М.* Кибернетика: вопросы теории и практики / В. М. Глушков. Москва: Наука, 1986. 477 с.

40. *Глушков В. М.* Кибернетика, вычислительная техника, информатика. Избранные труды: в 3 томах / В. М. Глушков. Киев: Наукова думка, 1990. Т. 1. 264 с.; Т. 2. 266 с.; Т. 3. 224 с.

41. *Гнеденко Б. В.* О математике / Б. В. Гнеденко. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 207 с.

42. *Гнеденко Б. В.* Проблемы математизации современного естествознания / Б. В. Гнеденко // Диалектика и современное естествознание: сборник / ред. М. Э. Омельяновский [и др.]. Москва: Наука, 1970. С. 82–102.

43. *Голованов Я.* Незабываемый апрель / Я. Голованов // Новый мир. 1981. № 4. С. 4–8.

44. *Гончарова Г. А.* Элементы дискретной математики: учебное пособие / Г. А. Гончарова, А. А. Мочалин. Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2004. 128 с.

45. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики: учебное пособие для студентов вузов / В. А. Горбатов. Москва: Высшая школа, 1986. 311 с.

46. *Граф Ш.* Схемы поиска неисправностей: перевод с немецкого / Ш. Граф, М. Гессель. Москва: Энергоатомиздат, 1989. 144 с.

47. *Григорьев С. Г.* Информатизация образования. Фундаментальные основы: учебник для педагогических вузов и системы повышения квалификации / С. Г. Григорьев, В. В. Гриншкун. Томск: ТМЛ-Пресс, 2008. 286 с.

48. *Гринченко Т. О.* Машинный интеллект и новые информационные технологии / Т. О. Гринченко, А. О. Стогний. Киев: Манускрипт, 1993. 164 с.

49. *Грэхем Р.* Конкретная математика. Основания информатики: перевод с английского / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Москва: Мир, 1998. 703 с.

50. *Гусев В. А.* Внеклассная работа по математике в 6–8-х классах / В. А. Гусев, А. Н. Орлов, А. Л. Розенталь. Москва: Просвещение, 1984. 286 с.

51. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения / В. В. Давыдов. Москва: Интор, 1996. 544 с.

52. *Дальма А.* Эварист Галуа, революционер и математик: перевод с французского / А. Дальма. 2-е изд. Москва: Наука, 1984. 111 с.

53. *Данилюк А. Я.* Принцип культурогенеза в образовании / А. Я. Данилюк // Педагогика. 2008. № 10. С. 3–9.

54. *Данилюк А. Я.* Теория интеграции образования / А. Я. Данилюк. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. пед. ун-та, 2000. 440 с.

55. *Деза Е. И.* Индивидуальные траектории фундаментальной подготовки учителя математики в условиях вариативного образования: диссертация … доктора педагогических наук / Е. И. Деза. Москва, 2012. 367 с.

56. *Деза Е. И.* Основы дискретной математики: учебное пособие / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. 2-е изд., испр. и доп. Москва: URSS, 2010. 224 с.

57. *Деменчук В. В.* На пороге алгебры / В. В. Деменчук. Минск: Вышэйша школа, 1987. 144 с.

58. *Депман И. Я.* Первое знакомство с математической логикой / И. Я. Депман. Ленинград: [Б. и.], 1963. 56 с.

59. *Дорофеев Г. В.* Алгебра и начала анализа. 10-й класс: учебник для общеобразовательных учреждений: в 2 частях / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова. Москва: Дрофа, 2003. Ч. 1. 320 с.

60. *Дорофеев Г. В.* Алгебра и начала анализа. 10-й класс: задачник для общеобразовательных учреждений: в 2 частях / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова. Москва: Дрофа, 2004. Ч. 2. 304 с.

61. *Дьяконов В. П.* Mathematica 4: учебный курс / В. П. Дьяконов. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 656 с.

62. *Егорченко И. В.* Фундаментализация математического образования / И. В. Егорченко // Математика в образовании: сборник статей. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2006. Вып. 2. С. 8–20.

63. *Егорченко И. В.* Фундаментализация математического образования: аспекты, особенности трактовок, направления реализации / И. В. Егорченко // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: состояние, перспективы: материалы Всероссийской научной конференции, Саранск, 4–6 окт., 2005 г. Саранск: Изд-во Морд. гос. пед. ин-та, 2005. С. 7–10.

64. *Епишева О. Б.* Формирование профессиональной компетентности выпускника и преподавателя профессионального учебного заведения: вопросы теории и практики: учебное пособие / О. Б. Епишева. Тюмень: Изд-во Тюм. гос. нефтегазового ун-та, 2010. 300 с.

65. *Еремкин А. И.* Система межпредметных связей в высшей школе: (Аспект подготовки учителя) / А. И. Еремкин. Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1984. 152 с.

66. *Ершов А. П.* Избранные труды / А. П. Ершов. Новосибирск: Наука, 1994. 413 с.

67. *Жмурова И. Ю.* Интеграционные связи дискретной математики как средство повышения эффективности профессиональной подготовки бакалавров физико-математического образования: диссертация … кандидата педагогических наук / И. Ю. Жмурова. Ростов-на-Дону, 2005. 207 с.

68. *Жолков С. Ю.* Математика и информатика для гуманитариев: учебник / С. Ю. Жолков. Москва: Гардарики, 2002. 531 с.

69. *Замятин А. П.* Элементы математической теории информационных систем: выразимость и вычислимость: учебное пособие / А. П. Замятин, А. Б. Ливчак. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1996. 104 с.

70. *Иванов Б. Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы: учебное пособие / Б. Н. Иванов. Москва: Лаб. базовых знаний, 2002. 288 с.

71. *Иванюк М. Е.* Интеграция математического образования студентов факультета информатики педагогического вуза с применением систем компьютерной математики: диссертация … кандидата педагогических наук / М. Е. Иванюк. Самара, 2008. 199 с.

72. *Игошин В. И.* Математическая логика: учебное пособие / В. И. Игошин. Москва: ИНФРА-М, 2012. 399 с. (Высшее образование.)

73. *Игошин В. И.* Подготовка будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики в условиях бакалавриата и магистратуры / В. И. Игошин // Образование и наука. 2013. № 7 (106). С. 85–100.

74. *Игошин В. И.* Профессионально-ориентированная методическая система обучения основам математической логики и теории алгоритмов учителей математики в педагогических вузах: диссертация … доктора педагогических наук / В. И. Игошин. Саратов, 2002. 366 с.

75. *Избранные* вопросы математики. 9-й класс: факультативный курс / И. Н. Антипов [и др.]. Москва: Просвещение, 1979. 191 с.

76. *Избранные* вопросы школьного курса математики: материалы для учителей математики и учащихся 10–11-х классов естественно-математического направления. Самара: Изд-во Самар. обл. ин-та повышения квалификации работников образования, 2002. Вып. 7: Комбинаторика. Бином Ньютона. 59 с.

77. *Информатика,* 7–9 классы: Базовый курс. Теория: учебник для учащихся средней школы / под ред. Н. В. Макаровой. Санкт-Петербург: Питер, 2000. 328 с.

78. *Информатика.* 7–9 классы: учебное пособие / А. Г. Гейн [и др.]. Москва: Дрофа, 2003. 288 с.

79. *Информатика:* учебник для 8–9-х классов общеобразовательных учреждений / А. Г. Гейн [и др.]. 3-е изд. Москва: Просвещение, 1996. 246 с.

80. *Ительсон Л. Б.* Психологические основы обучения / Л. Б. Ительсон. Москва: Знание, 1978. 59 с.

81. *Калужнин К. А.* Преобразования и перестановки / К. А. Калужнин, В. И. Сущанский. Москва: Наука, 1985. 160 с.

82. *Каплунович И. Я.* Психологические закономерности генезиса математического мышления / И. Я. Каплунович // Математика в школе и вузе: обучение и развитие: тезисы 16-го Всероссийского семинара преподавателей математики и методики ее преподавания. Новгород: [Б. и.], 1997. С. 106–107.

83. *Капустина Т. В.* Методологические аспекты использования компьютерной системы Mathematica в обучении / Т. В. Капустина // Проблемы и перспективы информатизации математического образования: сборник научных работ Всероссийской научно-методической школы-семинара. Елабуга: Изд-во Елабуж. гос. пед. ун-та, 2004. С. 10–24.

84. *Каримов З. Ш.* Теория и практика институциональной интеграции высшего профессионального педагогического образования на основе синтеза внешнего и внутреннего компонентов: автореферат диссертации … доктора педагогических наук / З. Ш. Каримов. Уфа, 2009. 48 с.

85. *Кейслер Г.* Теория моделей: перевод с английского / Г. Кейслер, Ч. Чен. Москва: Мир, 1977. 614 с.

86. *Кемени Дж.* Введение в конечную математику: перевод с английского / Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон; предисл. И. М. Яглома. Москва: Иностранная литература, 1963. 486 с.

87. *Клековкин Г. А.* О различных подходах к постановке курса «Дискретная математика» для будущих учителей информатики // Г. А. Клековкин, М. Е. Надеждина // Естественнонаучное образование в вузе: проблемы и перспективы: сборник трудов Всероссийской научно-методической конференции. Самара: Изд-во Самар. гос. архитектурно-строит. ун-та, 2006. С. 192–194.

88. *Клековкин Г. А.* Преемственность в обучении: в поисках теоретических оснований / Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. обл. ин-та повышения квалификации работников образования, 2000. 328 с.

89. *Кодухов В. И.* Общее языкознание / В. И. Кодухов. Москва: Высшая школа, 1974. 303 с.

90. *Колмогоров А. Н.* Алгоритм, информация, сложность / А. Н. Колмогоров. Москва: Знание, 1991. 43 с.

91. *Колмогоров А. Н*. Научные основы школьного курса математики. Первая лекция / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. 1969. № 3. С. 12– 18.

92. *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов / А. Н. Колмогоров. Москва: Наука, 1987. 303 с.

93. *Коннов В. В*. Геометрическая теория графов / В. В. Коннов, Г. А. Клековкин, Л. П. Коннова. Москва: Народное образование, 1999. 240 с.

94. *Коннова Л. П.* Знакомьтесь, графы: учебное пособие для учащихся 5–6-х классов / Л. П. Коннова. Самара: Изд-во Самар. обл. ин-та повышения квалификации работников образования, 2001. 107 с.

95. *Концепция* долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года [Электронный ресурс]. Режим доступа: ofdocs/rus/rus006.pdf.

96. *Конышева Л. К.* Дискретная математика: учебное пособие / Л. К. Конышева. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2010. 205 с.

97. *Конышева Л. К.* Основы дискретной математики: учебное пособие / Л. К. Конышева, В. В. Мешков. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2001. 104 с.

98. *Конышева Л. К.* Основы теории нечетких множеств: учебное пособие / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. Санкт-Петербург: Питер, 2011. 192 с.

99. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. Санкт-Петербург: Манускрипт, 1994. 496 с.

100. *Коробков С. С.* Введение в теорию решеток: учебное пособие / С. С. Коробков. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. пед. ун-та, 1996. 64 с.

101. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств: перевод с французского / А. Кофман. Москва: Радио и связь, 1982. 432 с.

102. *Краевский В. В.* Основы обучения. Дидактика и методика: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В. В. Краевский, А. В. Хуторской. Москва: Академия, 2007. 352 с.

103. *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе / Н. Н. Красовский // Известия Уральского государственного университета. 1995. № 4. С. 12–24.

104. *Крейдлин Г. Е.* Математика помогает лингвистике / Г. Е. Крейдлин, А. Д. Шмелев. Москва: Просвещение, 1994. 174 с.

105. *Криницкий Н. А.* Алгоритмы вокруг нас / Н. А. Криницкий. 2-е изд. Москва: Наука, 1984. 224 с.

106. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. 2-е изд., доп. Москва: Наука, 1985. 176 с.

107. *Кузнецов А. А.* Современный курс информатики: от элементов к системе / А. А. Кузнецов, С. А. Бешенков, Е. А. Ракитина // Информатика и образование. 2004. № 1. С. 2–8.

108. *Кузнецов О. П.* Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Энергоатомиздат, 1988. 480 с.

109. *Кук Д.* Компьютерная математика: перевод с английского / Д. Кук, Г. Гейз. Москва: Наука, 1990. 384 с.

110. *Купцов В. И.* Математизация наук как предмет философского исследования / В. И. Купцов // Математизация современной науки:

предпосылки, проблемы, перспективы: сборник трудов. Москва: Центр совет. филос. семинаров при Президиуме Акад. наук СССР, 1986. С. 5–13.

111. *Кушниренко А. Г.* Основы информатики и вычислительной техники: учебник для 10–11-х классов общеобразовательных учреждений / А. Г. Кушниренко, Г. В. Лебедев, Р. А. Сворень. Москва: Просвещение, 1996. 224 с.

112. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения: перевод с английского / Ж. Лаллеман. Москва: Мир, 1985. 439 с.

113. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. 2-е изд., испр. Москва: Изд-во Моск. центра непрерыв. мат. образования, 2004. 144 с.

114. *Лапчик М. П.* Проблемы фундаментального и прикладного математического образования учителей информатики / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер // Математика и информатика: наука и образование: межвузовский сборник научных трудов. Омск: Изд-во Омск. гос. пед. ун-та, 2006. Вып. 5. С. 195–200.

115. *Леонтьев А. А.* Основы психолингвистики / А. А. Леонтьев. Москва: Смысл, 1997. 287 с.

116. *Липский В.* Комбинаторика для программистов: перевод с польского / В. Липский. Москва: Мир, 1988. 213 с.

117. *Лихтарников Л. М.* Занимательные логические задачи / Л. М. Лихтарников. Санкт-Петербург: Лань, 1996. 105 с.

118. *Лошкарева Н. А.* Место межпредметных связей в системе дидактических принципов советской дидактики / Н. А. Лошкарева // Межпредметные связи в процессе преподавания основ науки в средней школе: материалы Всесоюзной конференции: в 2 частях. Москва: [Б. и.], 1973. Ч. 1. С. 36–37.

119. *Луканкин Г. Л.* Об одном подходе к построению учебно-методического комплекта по математике / Г. Л. Луканкин, А. Н. Павлов // Актуальные проблемы преподавания математики в педагогических вузах и средней школе: тезисы докладов 23-го Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов, 13–15 окт., 2004 г. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та; Москва: Изд-во Моск. гос. пед. ун-та, 2004. С. 166–168.

120. *Лыскова В. Ю.* Логика в информатике / В. Ю. Лыскова, Е. А. Ракитина. Москва: Информатика и образование, 1999. 141 с.

121. *Майоров И. А.* Системный анализ педагогической компетенции / И. А. Майоров // Образование и саморазвитие. 2009. № 4 (14). С. 54–59.

122. *Максимова В. Н.* Межпредметные связи в процессе обучения / В. Н. Максимова. Москва: Просвещение, 1988. 191 с.

123. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы / А. И. Мальцев. Москва: Наука, 1970. 392 с.

124. *Мальцев А. И.* Избранные труды: в 2 томах / А. И. Мальцев. Москва: Наука, 1976. Т. 1. 485 с.; Т. 2. 388 с.

125. *Математизация* науки: социокультурные и методологические проблемы / А. Н. Нысанбаев [и др.]. Алма-Ата: Гылым, 1990. 230 с.

126. *Математика*: учебник-собеседник для 5–6-х классов средней школы / Л. Н. Шеврин [и др.]. Москва: Просвещение, 1989. 495 с.

127. *Математика* и информатика: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Н. Л. Стефанова [и др.]. Москва: Высшая школа, 2004. 349 с.

128. *Математическая* энциклопедия: в 5 томах / гл. ред. И. М. Виноградов. Москва: Советская энциклопедия, 1979. Т. 1. 1152 стб.; Т. 2. 1104 стб.; Т. 5. 1248 стб.

129. *Матросов В. Л.* Лекции по дискретной математике / В. Л. Матросов, В. А. Стеценко. Москва: Изд-во Моск. пед. гос. ун-та, 1997. 220 с.

130. *Машины* Тьюринга и рекурсивные функции: перевод с немецкого / Г.-Д. Эббинхауз [и др.]. Москва: Мир, 1972. 264 с.

131. *Мельников О. И.* Обучение дискретной математике / О. И. Мельников. Москва: URSS, 2008. 224 с.

132. *Монахов В. М.* Введение в теорию педагогических технологий / В. М. Монахов. Волгоград: Перемена, 2006. 319 с.

133. *Мониторинг* качества профессионально-педагогической подготовки будущего учителя в педагогическом вузе: учебно-методическое пособие / Л. В. Шкерина [и др.]. Красноярск: Изд-во Краснояр. гос. пед. ун-та им. В. П. Астафьева, 2004. 244 с.

134. *Мордкович А. Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: диссертация … доктора педагогических наук / А. Г. Мордкович. Москва, 1986. 355 с.

135. *Морозов К. Е.* Математическое моделирование в научном познании / К. Е. Морозов. Москва: Мысль, 1969. 212 с.

136. *Москинова Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: учебное пособие / Г. И. Москинова. Москва: Логос, 2002. 240 с.

137. *Неуймин Я. Г.* Модели в науке и технике / Я. Г. Неуймин. Москва: Наука, 1984. 189 с.

138. *Нефедов В. Н.* Курс дискретной математики: учебное пособие / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. Москва: Изд-во Моск. авиац. ин-та, 1992. 262 с.

139. *Новиков П. П.* Исследование особенностей межпредметных связей в средних профессионально-технических училищах: автореферат диссертации … кандидата педагогических наук / П. П. Новиков. Москва, 1975. 26 с.

140. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 304 с.

141. *Норман Д.* Память и научение: перевод с английского / Д. Норман. Москва: Мир, 1985. 159 с.

142. *Нугмонов М.* Теоретико-методологические основы методики обучения математике: диссертация … доктора педагогических наук / М. Нугмонов. Душанбе, 1999. 306 с.

143. *Общая* психология: учебник для студентов педагогических институтов / под ред. А. В. Петровского. Москва: Просвещение, 1976. 479 с.

144. *Оганесян В. А.* Научные принципы отбора основного содержания обучения математике в средней школе: диссертация … доктора педагогических наук / В. А. Оганесян. Ереван, 1984. 352 с.

145. *Ожегов С. И.* Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. 4-е изд., доп. Москва: Азбуковник, 1999. 944 с.

146. *Окулов С. М.* Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие / С. М. Окулов. Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2008. 422 с.

147. *Окулов С. М.* О стандартизации курса «Дискретная математика» / С. М. Окулов, А. В. Козвонина // Стандарты и мониторинг в образовании. 2005. № 2. С. 24–27.

148. *Ольшанский А. Ю.* Групповые исчисления / А. Ю. Ольшанский // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах / гл. ред. В. Н. Сойфер. Москва: Магистр-пресс, 2000. Т. 3. С. 12–16.

149. *Ольшанский А. Ю.* Умножение симметрий и преобразований / А. Ю. Ольшанский // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах / гл. ред. В. Н. Сойфер. Москва: Магистр-пресс, 2000. Т. 3. С. 7–11.

150. *Основы* общей теории и методики обучения информатике: учебное пособие / под ред. А. А. Кузнецова. 3-е изд. Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2015. 210 с.

151. *Папи Ф.* Дети и графы. Обучение детей шестилетнего возраста математическим понятиям: перевод с французского / Ф. Папи, Ж. Папи. Москва: Педагогика, 1974. 192 с.

152. *Паун Г.* ДНК-компьютер. Новая парадигма вычислений: перевод с английского / Г. Паун, Г. Розенберг, А. Саломаа. Москва: Мир, 2004. 307 с.

153. *Перминов Е. А.* Введение в дискретную математику / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Свердл. инж.-пед. ин-та, 1993. 46 с.

154. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: рабочая программа дисциплины / Е. А. Перминов; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2011. 11 с.

155. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Ин-та развития образования, 2004. 206 с.

156. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск.

гос. пед. ун-та, 2005. Ч. 1: Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа. 112 с.

157. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск. гос. пед. ун-та, 2005. Ч. 2: Рекуррентные соотношения и производящие функции. 110 с.

158. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск. гос. пед. ун-та, 2005. Ч. 3: Графы. 194 с.

159. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск. гос. пед. ун-та, 2005. Ч. 4: Асимптотические оценки и приближения. 50 с.

160. *Перминов Е. А.* Задания и методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Дискретная математика» / Е. А. Перминов; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2012. 22 с.

161. *Перминов Е. А.* Математическое моделирование в профессиональном образовании: рабочая программа дисциплины / Е. А. Перминов; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2011. 8 с.

162. *Перминов Е. А.* Математическое моделирование в профессиональном образовании: учебное пособие / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. 116 с.

163. *Перминов Е. А.* Математическое моделирование в психологии: рабочая программа для студентов всех форм обучения направления подготовки 030300 Психология, магистерской программы профиля 030300.68 Организационная психология / Е. А. Перминов; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2012. 11 с.

164. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений: учебное пособие / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. 256 с.

165. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте инте-

грации образования / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2013. 286 с.

166. *Перминов Е. А.* Методические основы обучения дискретной математике в системе «школа – вуз» / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2006. 237 с.

167. *Перминов Е. А.* О концептуальной роли дискретной математики в формировании общей культуры специалиста / Е. А. Перминов // Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской академии образования. Приложение. 2006. № 2 (2). С. 37–40.

168. *Перминов Е. А.* О концепции, содержании и методике обучения дискретной математике в классах физико-математического профиля / Е. А. Перминов // Труды 4-х Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: Изд-во Яросл. гос. пед. ун-та, 2006. С. 264–270.

169. *Перминов Е. А.* О методике изучения понятия математической модели / Е. А. Перминов // Информатика и образование. 2006. № 7. С. 40–43.

170. *Перминов Е. А.* О методологии реализации дискретной линии в содержании профильного обучения математике в школе / Е. А. Перминов // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. 2012. № 6. С. 69–79.

171. *Перминов Е. А.* О методологических аспектах реализации культурологического подхода в математическом образовании / Е. А. Перминов // Педагогика. 2011. № 9. С. 49–55.

172. *Перминов Е. А.* О методологических основах обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей / Е. А. Перминов // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 3 (3). С. 80–82.

173. *Перминов Е. А.* О проблемах и методике обучения дискретной математике в средней профессиональной школе / Е. А. Перминов // Среднее профессиональное образование. 2006. № 3. С. 15–18.

174. *Перминов Е. А.* О реализации дискретной линии в модернизации математического образования / Е. А. Перминов // Инновации в образовании. 2011. № 10. С. 82–90.

175. *Перминов Е. А.* О реализации дискретной линии в развитии методической компетентности учителя математики / Е. А. Перминов // Вестник Красноярского государственного педагогического университета. 2012. № 1 (19). С. 101–104.

176. *Перминов Е. А.* О роли дискретной математики в обучении стохастическому моделированию в школе и вузе / Е. А. Перминов // Математика в современном мире: материалы 2-й Российской конференции. Калуга: Изд-во Калуж. гос. ун-та, 2004. С. 244–249.

177. *Перминов Е. А.* О роли современной математической культуры в подготовке будущих педагогов / Е. А. Перминов // Казанский педагогический журнал. 2011. № 4. С. 52–57.

178. *Перминов Е. А.* О фундаментальной роли дискретной математики в обучении алгоритмизации в школе и вузе / Е. А. Перминов // Педагогическая информатика. 2006. № 2. С. 30–32.

179. *Перминов Е. А*. Основные аспекты обучения дискретной математике студентов педагогических специальностей / Е. А. Перминов // Современные проблемы математического образования: вопросы теории и практики / под ред. И. Г. Липатниковой. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. пед. ун-та, 2010. С. 176–190.

180. *Перминов Е. А.* Понятие математической модели на факультативных занятиях в школе / Е. А. Перминов // Педагогический процесс как культурная деятельность: материалы и тезисы докладов 4-й Международной научно-практической конференции. Самара: Изд-во Самар. ин-та повышения квалификации работников образования, 2002. С. 351–353.

181. *Перминов Е. А*. Понятия кольца и поля на факультативных занятиях в школе / Е. А. Перминов // Проблемы качества подготовки учителя математики и информатики: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. пед. ун-та, 2002. С. 135–136.

182. *Перминов Е. А*. Сборник задач по дискретной математике / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск. гос. пед. ун-та, 2008. Ч. 1: Комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа. 134 с.

183. *Перминов Е. А.* Теоретические аспекты обучения будущих учителей дискретной математике / Е. А. Перминов // Ярославский педагогический вестник. 2011. Т. 2, № 2. С. 154–157.

184. *Перминов Е. А.* Теоретические основы обучения дискретной математике студентов профессионально-педагогических специальностей (по отраслям) / Е. А. Перминов // Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской академии образования. 2012. № 3 (92). С. 25–34.

185. *Перминов Е. А.* Чистовик экзаменационной работы абитуриента по математике / Е. А. Перминов. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. пед. ун-та, 2001. 75 с.

186. *Перминов Е. А.* Элементы абстрактной и компьютерной алгебры: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск. гос. пед. ун-та, 2006. Ч. 1: Алгебры. Алгебраические системы. 73 с.

187. *Перминов Е. А.* Элементы абстрактной и компьютерной алгебры: учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов: в 4 частях / Е. А. Перминов, Г. А. Клековкин. Самара: Изд-во Самар. фил. Моск. гос. пед. ун-та, 2006. Ч. 2: Группы. Кольца. 91 с.

188. *Перспективы* развития предметной подготовки учителей информатики [Электронный ресурс] / В. Л. Матросов [и др.] // Преподавание информационных технологий в России: открытая Всероссийская конференция. Режим доступа: http://www.it-education.ru/2006/reports/ Karakozov.htm.

189. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды: перевод с французского / Ж. Пиаже. Москва: Междунар. пед. акад., 1994. 675 с.

190. *Пиаже Ж.* Структуры математические и операторные структуры мышления / Ж. Пиаже // Преподавание математики: пособие для учителей / Ж. Пиаже [и др.]; пер. с фр. А. И. Фетисова. Москва: Учпедгиз, 1960. 163 с.

191. *Писарев Д. И.* Сочинения: в 4 томах / Д. И. Писарев. Москва: Гослитиздат, 1955. Т. 2. 431 с.

192. *Полуянов В. Б.* Организация и управление в сфере образования: учебное пособие для вузов / В. Б. Полуянов. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф.-пед. ун-та, 2000. 137 с.

193. *Полуянов В. Б.* Теоретические основы маркетинга образовательных услуг / В. Б. Полуянов. Москва: Акад. проф. образования, 2000. 284 с.

194. *Пономарев Я. А.* Психология творения: Избранные психологические труды / Я. А. Пономарев. Москва: Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та; Воронеж: Модэк, 1999. 480 с.

195. *Пышкало А. М.* Средства обучения – один из важнейших компонентов методики обучения математике / А. М. Пышкало // Средства обучения математике: сборник статей / сост. А. М. Пышкало. Москва: Просвещение, 1980. С. 3–11.

196. *Пятницын Б. Н.* Философские проблемы вероятностных и статистических методов / Б. Н. Пятницын. Москва: Наука, 1976. 335 с.

197. *Растригин А. А.* Кибернетические модели познания / А. А. Растригин, В. А. Марков. Рига: Зинатне, 1976. 236 с.

198. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ: перевод с английского / Дж. Риордан. Москва: Иностранная литература, 1963. 287 с.

199. *Родионов М. А.* Теория и методика формирования мотивации учебной деятельности школьников в процессе обучения математике: диссертация … доктора педагогических наук / М. А. Родионов. Саранск, 2001. 381 с.

200. *Розанова С. А.* Математическая культура студентов технических вузов / С. А. Розанова. Москва: Физматлит, 2004. 176 с.

201. *Розов Н. Х.* Гуманитарная математика / Н. Х. Розов // Вестник Московского университета. Сер. Педагогическое образование. 2004. № 2. С. 3–13.

202. *Романовский И. В.* Дискретный анализ: учебное пособие / И. В. Романовский. 3-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург: Невский диалект, 2004. 320 с.

203. *Российская* педагогическая энциклопедия: в 2 томах / гл. ред. В. В. Давыдов. Москва: Большая Российская энциклопедия, 1993. Т. 1. 608 с.; Т. 2. 671 с.

204. *Рузавин Г. И.* Математизация научного знания / Г. И. Рузавин. Москва: Мысль, 1984. 207 с.

205. *Румянцева Э. А.* Инженерно-математический стиль мышления в современной науке / Э. А. Румянцева. Москва: Высшая школа, 1978. 148 с.

206. *Рыбников К. К.* Элементы численного дискретного анализа в подготовке преподавателей математики. Связь непрерывного и дискретного / К. К. Рыбников // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: материалы Всероссийской научной конференции: в 2 частях. Саранск: Изд-во Морд. гос. пед. ин-та, 2002. Ч. 2. С. 132–135.

207. *Рыжова Н. И.* Развитие методической системы фундаментальной подготовки будущих учителей информатики в предметной области: диссертация … доктора педагогических наук / Н. И. Рыжова. Санкт-Петербург, 2000. 429 с.

208. *Садовников Н. В.* Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования / Н. В. Садовников. Пенза: Изд-во Пенз. гос. пед. ун-та, 2005. 283 с.

209. *Садовничий В. А.* Математическое образование: настоящее и будущее / В. А. Садовничий // Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков: сборник докладов Всероссийской конференции, Дубна, 18–22 сент., 2000 г. Москва: Изд-во Моск. центра непрерывного мат. образования, 2000. С. 17–23.

210. *Садовничий В. А.* Традиции и современность / В. А. Садовничий // Высшее образование в России. 2003. № 1. С. 11–18.

211. *Сазонова З. С.* Интеграция образования, науки и производства как методологическое основание подготовки современного инженера: автореферат диссертации … доктора педагогических наук / З. С. Сазонова. Казань, 2008. 39 с.

212. *Самарин Ю. А.* Очерки психологии ума / Ю. А. Самарин. Москва: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1962. 504 с.

213. *Самсонов Б. Б.* Компьютерная математика (Основание информатики) / Б. Б. Самсонов, Е. М. Плохов, А. И. Филоненков. Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. 512 с.

214. *Саранцев Г. И.* Методическое мышление: взгляд из прошлого и настоящего / Г. И. Саранцев // Методическая подготовка студентов математических специальностей педвуза в условиях фунда-

ментализации образования: материалы Всероссийской научной конференции, Саранск, 7–9 окт., 2009 г.: в 2 частях. Саранск: Изд-во Морд. гос. пед. ин-та, 2009. Ч. 1. С. 3–7.

215. *Саранцев Г. И.* Методологические основы школьного учебника математики / Г. И. Саранцев // Педагогика. 2003. № 10. С. 25–35.

216. *Саранцев Г. И.* Методология методики обучения математике / Г. И. Саранцев. Саранск: Красный Октябрь, 2001. 144 с.

217. *Саранцев Г. И.* Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. Москва: Просвещение, 1995. 240 с. (Библиотека учителя математики.)

218. *Сборник* задач по математике: пособие для педучилищ / А. М. Пышкало [и др.]. Москва: Просвещение, 1979. 208 с.

219. *Система* обучения информатике в современной общеобразовательной школе. Компьютерные инструменты в образовании / А. А. Кузнецов [и др.] // Информатизация образования. 1999. № 6. С. 3–6.

220. *Скаткин М. Н.* Принципы обучения // Дидактика средней школы: учебное пособие / под ред. М. Н. Скаткина. Москва: Просвещение, 1982. С. 48–89.

221. *Сластенин В. А.* Педагогика: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; под ред. В. А. Сластенина. Москва: Академия, 2002. 576 с.

222. *Современные* основы школьного курса математики / Н. Я. Виленкин [и др.]. Москва: Просвещение, 1980. 239 с.

223. *Сойер У.* Путь в современную математику: перевод с английского / У. Сойер. Москва: Мир, 1972. 200 с.

224. *Спирина М. С.* Дискретная математика: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования / М. С. Спирина, П. А. Спирин. Москва: Академия, 2004. 368 с.

225. *Справочная* книга по математической логике: в 4 частях: перевод с английского. Москва: Наука, 1982. Ч. 1: Теория моделей. 392 с.

226. *Справочная* книга по математической логике: в 4 частях: перевод с английского. Москва: Наука, 1983. Ч. 4: Теория доказательств и конструктивная математика. 392 с.

227. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории: перевод с английского / Р. Столл. Москва: Просвещение, 1968. 231 с.

228. *Столяр А. А.* Педагогика математики / А. А. Столяр. Минск: Вышэйшая школа, 1969. 414 с.

229. *Столяр А. А.* Элементарное введение в математическую логику: пособие для учителей / А. А. Столяр. Москва: Просвещение, 1965. 163 с.

230. *Стратилатов П. В.* Дополнительные главы по курсу математики: учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9-х классов / П. В. Стратилатов. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Просвещение, 1974. 144 с.

231. *Судоплатов С. В.* Элементы дискретной математики: учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. Москва: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2003. 280 с.

232. *Талызина Н. Ф.* Педагогическая психология: учебник для студентов средних педагогических учебных заведений / Н. Ф. Талызина. 3-е изд., стер. Москва: Академия, 1999. 288 с.

233. *Тейз А.* Логический подход к искусственному интеллекту: (От модальной логики к логике баз данных): перевод с французского / А. Тейз. Москва: Мир, 1998. 249 с.

234. *Тестов В. А.* «Жесткие» и «мягкие» модели обучения математике / В. А. Тестов // Актуальные проблемы преподавания математики в педагогических вузах и средней школе: тезисы докладов 23-го Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов, 13–15 окт., 2004 г. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та; Москва: Изд-во Моск. гос. пед. ун-та, 2004. С. 76–78.

235. *Тестов В. А.* О проблеме обновления содержания обучения математике в школе / В. А. Тестов // Преподавание математики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Всероссийской научно-практической конференции, Глазов, 16–17 дек., 2009 г. Глазов: Изд-во Глазов. гос. пед. ин-та, 2009. С. 106–111.

236. *Тестов В. А.* Стратегия обучения математике / В. А. Тестов. Москва: Технологическая школа бизнеса, 1999. 304 с.

237. *Тестов В. А.* Фундаментальность математического образования в условиях перехода к профильному обучению / В. А. Тестов // Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: материалы 25-го Всероссийского семинара препо-

давателей математики университетов и педагогических вузов, 20–22 сент., 2006 г. Киров: Изд-во Вят. гос. гуманит. ун-та; Москва: Изд-во Моск. гос. пед. ун-та, 2006. С. 26–27.

238. *Тестов В. А.* Фундаментальность образования: современные подходы / В. А. Тестов // Педагогика. 2006. № 4. С. 3–9.

239. *Тимковский В. Г.* Дискретная математика в мире станков и деталей / В. Г. Тимковский. Москва: Наука, 2002. 144 с.

240. *Тихомиров В. М.* О некоторых проблемах математического образования / В. М. Тихомиров // Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков: сборник докладов Всероссийской конференции, Дубна, 18–22 сент., 2000 г. Москва: Изд-во Моск. центра непрерыв. мат. образования, 2000. С. 3–15.

241. *Тумашева О. В.* О методической компетентности учителя / О. В. Тумашева // Вестник Красноярского педагогического университета. 2009. № 1. С. 65–70.

242. *Турецкий В. Я.* Математика и информатика: учебное пособие / В. Я. Турецкий. 3-е изд., испр. и доп. Москва: ИНФРА-М, 2002. 560 с.

243. *Тырыгина Г. А.* Ведущая идея курса дискретного анализа для математиков-программистов / Г. А. Тырыгина // Проблемы математического образования и культуры: тезисы докладов Международной научной конференции, Тольятти, 22–24 окт., 2003 г. Тольятти: Изд-во Тольят. гос. ун-та, 2003. С. 73–75.

244. *Тырыгина Г. А.* О различных подходах к формированию курса дискретной математики в высшем профессиональном образовании / Г. А. Тырыгина, М. А. Тренина // Проблемы математического образования и культуры: тезисы докладов Международной научной конференции, Тольятти, 22–24 окт., 2003 г. Тольятти: Изд-во Тольят. гос. ун-та, 2003. С. 102–105.

245. *Уемов А. И.* Логические основы моделирования / А. И. Уемов. Москва: Наука, 1971. 311 с.

246. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов: перевод с английского / Р. Уилсон. Москва: Мир, 1977. 208 с.

247. *Успенский В. А.* Арифметика вычетов и криптография // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах / гл. ред. В. Н. Сойфер. Москва: Магистр-пресс, 2000. Т. 3. С. 27–32.

248. *Успенский В. А.* Машина Поста / В. А. Успенский. Москва: Наука, 1979. 95 с. (Популярные лекции по математике.)

249. *Факультативный* курс. Избранные вопросы математики (7–8-й кл.) / Н. Я. Виленкин [и др.]. Москва: Просвещение, 1978. 192 с.

250. *Федеральный* базисный учебный план и примерные учебные планы для образовательных учреждений Российской Федерации [Электронный ресурс]. Режим доступа: minobr.gov-murman.ru›files/Pr_1312.pdf.

251. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/28.

252. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/28.

253. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/94.

254. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование. Квалификация «магистр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/93/91/5/117.

255. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/28.

256. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/28.

257. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.03.04 Профес-

сиональное обучение (по отраслям). Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/94.

258. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям). Квалификация «магистр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/93/91/5/117.

259. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/29.

260. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230100 Информатика и вычислительная техника. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

261. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 081800 Механика и математическое моделирование. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

262. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.fgosvo.ru.

263. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230700 Прикладная информатика. Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

264. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 051000 Профессиональное обучение (по отраслям). Квалификация «бакалавр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

265. *Федеральный* государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 051000 Профессиональное обучение (по отраслям). Квалификация «магистр» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_new.htm.

266. *Федеральный* государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365.

267. *Федоров В. А.* Профессионально-педагогическое образование в изменяющихся социально-экономических условиях: научное обеспечение развития / В. А. Федоров // Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской академии образования. 2008. № 9 (57). С. 127–134.

268. *Федорова В. Н.* Межпредметные связи / В. Н. Федорова, Д. М. Кирюшкин. Москва: Педагогика, 1972. 152 с.

269. *Федосеев В. Н.* Элементы теории вероятностей для 7–8-х классов средней школы / В. Н. Федосеев // Математика в школе. 2002. № 6. С. 58–66.

270. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру: перевод с венгерского / Э. Фрид. Москва: Мир, 1979. 260 с.

271. *Хаггарти Р.* Дискретная математика для программистов: перевод с английского / Р. Хаггарти. Москва: Техносфера, 2003. 315 с.

272. *Хамов Г. Г.* Алгебра и теория чисел в школьной математике / Г. Г. Хамов. Мурманск: Изд-во Мурм. гос. пед. ин-та, 1991. 119 с.

273. *Холодная М. А.* Психология интеллекта. Парадоксы исследования / М. А. Холодная. 2-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 272 с.

274. *Хуторской А. В.* Развитие одаренности школьников: методика продуктивного обучения: пособие для учителя / А. В. Хуторской. Москва: Владос, 2000. 320 с.

275. *Чапаев Н. К.* Теоретико-методологические основы педагогической интеграции: диссертация … доктора педагогических наук / Н. К. Чапаев. Екатеринбург, 1998. 462 с.

276. *Чуйко Л. В.* Математические методы в педагогике как условие совершенствования качества образования: автореферат диссертации … кандидата педагогических наук / Л. В. Чуйко. Смоленск, 2006. 19 с.

277. *Чуприкова Н. И.* Умственное развитие и обучение / Н. И. Чуприкова. Москва: Столетие, 1995. 189 с. (Психологические основы развивающего обучения.)

278. *Шадриков В. Д.* Ментальное развитие человека / В. Д. Шадриков. Москва: Аспект Пресс, 2007. 328 с.

279. *Шеврин Л. Н.* Тождества в алгебре / Л. Н. Шеврин // Современное естествознание: энциклопедия: в 10 томах / гл. ред. В. Н. Сойфер. Москва: Магистр-пресс, 2000. Т. 3. С. 17–22.

280. *Эрганова Н. Е.* Методика профессионального обучения: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Н. Е. Эрганова. 2-е изд. Москва: Академия, 2008. 160 с.

281. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов / С. В. Яблонский. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, 1986. 384 с.

282. *Grimaldi R. P.* Discrete and Combinatorial mathematics. An Applied Introductions / R. P. Grimaldi. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. 891 p.

283. *Piage J.* Structuralism / J. Piage. Paris: Paris University Press, 1968. 289 p.

Научное издание

Перминов Евгений Александрович

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА
ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ
СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ
В АСПЕКТЕ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Монография

2-е издание, переработанное и дополненное

Редактор Е. В. Суворова
Компьютерная верстка Н. А. Ушениной

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 25.06.19. Формат 60×84/16. Бумага для множ. аппаратов. Печать плоская. Усл. печ. л. 17,4. Уч.-изд. л. 17,5. Тираж 500 экз. Заказ № ____.
Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.