КОНСУЛЬТАЦИИ

УДК 378; 373.1

В. П. Кочнев

ПРОБЛЕМНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ

Аннотация. В статье рассматриваются особенности понятия проблемной математической задачи как средства развития творческих способностей учащихся. Предложена методика поиска решения проблемных задач.

Ключевые слова: проблемная задача, математические методы, культура мышления, олимпиада, внутренний эксперимент знаний.

Abstract. The paper deals with special features of the problem mathematical task as a means of developing students'creative abilities; a method of search for doing problem tasks being proposed.

Index terms: problem task, mathematical methods, culture of thinking, a contest, internal experiment of knowledge.

Современные условия развития естествознания, техники, экономики и применения в различных сферах жизнедеятельности новых технологий требуют все более широкого и интенсивного использования в них математических методов. В связи с этим вносятся существенные изменения в программы школьного и вузовского математического образования, актуализируется проблема активного включения психофизиологических механизмов восприятия естественнонаучной и математической информации учащимися, развития их математических способностей и культуры мышления [4].

Выпускники средних школ должны не только овладевать материалом школьных программ, но и уметь творчески применить его, находить решение любой проблемы. Такой результат может быть достигнут благодаря педагогической деятельности, создающей условия для творческого развития учащихся. Эта задача, справиться с которой можно посредством эвристического метода обучения, является одной из наиболее актуальных, в особенности для профильных классов.

Понятия творчества и творческого мышления многозначны. Творчество – это деятельность, результатом которой является создание новых материальных и духовных ценностей. Творчество учащихся предполагает наличие у них способностей, мотивов и умений, благодаря которым создается предмет, отличающийся от аналогичных новизной и оригинальностью [9]. Г. А. Балл отмечает, что под творческим мышлением понимаются те компоненты мышления личности, которые для нее оказываются носителями новых качеств [1]. Признаком творческого мышления является объективный или субъективный творческий результат как внутреннего характера (субъективно или объективно новый способ мыслительной деятельности), так и внешнего (субъективно или объективно новый материальный объект, а также объективированный, т. е. оформленный в реальной практике способ деятельности с материальными или идеальными объектами) [6, с. 13]. Уровень развития творческого мышления характеризуется глубиной и разносторонностью комбинирования, включения образа-идеи и связанных с ним объектов во всё новые и новые связи и отношения. Чем выше уровень сложности подобных комбинаторных операций, определяемый органичностью, гармоничностью и своеобразием протекающих мыслительных процессов, тем более оригинальным и обобщенным получается результат. Особенности творческого мышления учащихся отмечает в своей работе Л. Т. Охитина: «творческое мышление – основной компонент в построении исследовательского понимания процесса решения проблемы, когда ученик сам открывает, сам находит неизвестный до этого путь к ответу, к разрешению проблемы. Это необходимое условие для творческой деятельности» [7].

В процессе обучения математике важную роль играют задачи и упражнения. Посредством их решения учащиеся не только активно приобретают математические знания, но и приобщаются к творческой работе. Проявление творческих способностей при изучении математики было предметом специального исследования В. А. Крутецкого [5]. В отличие от многих предшественников, он приступил к анализу математических способностей школьников, основываясь на аргументированной гипотезе об их основных компонентах – математического и логического мышления. В соответствии с исходной гипотетической схемой исследователем была разработана система тестовых математических задач, взятых из самых разных отечественных и зарубежных источников. Все они предусматривают применение и развитие базисной математической способности – способности мыслить логико-математическими структурами, схемами логико-математических отношений, отвлеченными от конкретного «чувственно-наглядного» воплощения чистыми структурами отношений.

Особое место среди математических задач занимают проблемные задачи, для решения которых у учащихся нет готового алгоритма. Их наиболее часто применяют для развития творческих способностей учащихся в известных формах дополнительного образования: конкурсах, олимпиадах, проектах, викторинах, математических играх и т. д.

Проблемные математические задачи, в отличие от традиционных (школьных), не могут быть непосредственно (в предъявленной форме) решены по какому-либо алгоритму. В методической литературе уточняется, что в курсе математики для них «не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [12].

Творческая активность учащихся при решении проблемных математических задач проявляется в таких действиях, как сопоставление и комбинирование данных, поиск путей решения, сведение решаемой задачи к ранее решенным, вспомогательные построения, введение вспомогательных элементов, замена одних элементов другими и т. д. При этом она выражается прежде всего в форме интеллектуальной активности. Этот феномен проанализировала в своих работах Д. Б. Богоявленская [2].

Безусловно, решение проблемной задачи – очень сложный процесс, для успешного осуществления которого учащийся должен обладать смекалкой, хорошо знать изученный и изучаемый материал, владеть общими подходами к решению задач и конкретными примерами решения.

С процессуальной точки зрения важен характер той умственной деятельности, которая сопровождает решение проблемных задач. Задача может быть репродуктивной, предполагающей воспроизведение в знаковой ситуации представленных ранее знаний и способов деятельности, а может быть творческой, требующей самостоятельного переноса наличных знаний и умений в новую незнакомую ситуацию. Поэтому решение проблемных задач состоит в их сведении путем преобразования или переформулировки к предметным (программным) задачам.

Деятельность учащегося в этом процессе носит вариативный творческий характер – он должен уметь ориентироваться в новых ситуациях и вырабатывать принципиально новые программы действий. Последовательность целесообразно подобранных задач позволяет естественным образом моделировать учебные ситуации, реализующие заданные цели обучения математике.

Проблемную математическую задачу можно показать в виде некоторой математической модели, которая может представлять собой описание с использованием математического аппарата проблемной ситуации, относящейся, например, к сфере естествознания. Для проведения соответствующего обучения решению проблемных задач учитель должен выполнить вспомогательную работу: анализ текстов проблемных задач, проведенных решений, создание блоков задач по трудности, по времени решения.

С точки зрения теории моделирования, текст проблемной задачи можно рассматривать как модель преобразования исходной алфавитноцифровой, графической и условно-звуковой информации в комплексную модель текста. Комплексная модель может быть представлена как результат применения операций алгебры к различным моделям текста: смысловой, эмоциональной, эстетической, стилевой и др.

Преобразование исходной информации в комплексную модель текста можно рассматривать также как активную деятельность по составлению контрольно-измерительных материалов (КИМов) для проведения единого государственного экзамена (ЕГЭ). При выполнении заданий части С в процессе сдачи ЕГЭ у экзаменующегося проверяются умения применять знания в новой, незнакомой ситуации, комбинировать задания и методы из различных разделов математики, т. е. умение решать проблемные задачи.

Эффективность использования проблемных математических задач для формирования у учащихся творческих способностей обусловлена рядом обстоятельств. Решение таких задач – это сложная комплексная деятельность, в которой актуализируются, преобразуются и комбинируются полученные ранее математические знания и соответствующие им специальные умения и навыки, обогащается опыт применения знаний, совершенствуется определенная совокупность сформированных свойств мышления и мыслительных умений.

Развитие творческой деятельности учащегося в процессе решения проблемной задачи предусматривает включение его в процесс осмысления и уточнения целевой установки и осуществление выбора способа преобразования объектов деятельности. Уточнение целевой установки предполагает, определение объема и вариантов применения содержания (материала) исходной ситуации, возможностей использования прошлого опыта для раскрытия образа, темы, решения задач и т. д. Это направляет процесс творческого преобразования в нужное русло, ограничивая его определенными рамками.

Известный математик и методист Д. Пойа пишет: «Что значит владеть математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности» [8, с. 16]. Он выделил в процессе решения задачи четыре этапа: а) понимание постановки задачи; б) составление плана решения; в) осуществление плана; г) изучение найденного решения (критический анализ ответа: прикидка и проверка, поиск путей решения и новых решений; выявление существенного в решениях, потенциально полезного при решении других задач [8, с. 16].

Для учащихся решенная проблемная задача, или так называемая задача повышенной трудности, является серьезным открытием, творческим достижением, они могут увлечься заинтересовавшими их вопросами и темами курса математики, участвуя в математических соревнованиях, олимпиадах, проектах и т. д.

Мы провели классификацию проблемных задач в соответствии со структурами математического мышления учащихся. В качестве основы принята схема математического мышления, предложенная В. А. Тестовым [11], в соответствии с которой названное мышление содержит не только математические структуры (алгебраическую, порядковую, топологическую), являющиеся моделями реальных явлений, но и когнитивные структуры (алгоритмическую, комбинаторную, логическую, образно-геометрическую, стохастическую). Как и любая система, математическое мышление должно обладать интегративной характеристикой, в качестве которой может выступать понятие уровня развития математического мышления. В связи с этим в проблемных математических задачах выделены следующие его компоненты:

- абстрактный: владение процедурами абстрагирования, конкретизации и интерпретации;
- логический: рациональное использование законов логики в процессе проведения различных мыслительных операций;
- образный: выполнение умственных действий на основе ассоциаций абстрактных понятий с реальными объектами окружающего мира;
- систематизирующий: сознательное или интуитивное осуществление мыслительных операций в соответствии с идеалами и принципами системного подхода к анализу объектов и процессов окружающего мира [9].

Исходя из этого, мы предложили методику развития творческих способностей учащихся на уроках математики. Она включает в себя организацию сотворческой (учитель – учащиеся) деятельности по разработке и решению проблемных математических задач естественнонаучного содержания. В качестве содержательного базиса учебно-творческой деятельности на уроках математики предложено использовать составленный учителем и непрерывно пополняемый учащимися учебно-методический комплекс проблемных ситуаций естественнонаучного содержания и их математических моделей.

Как продуктивная модель обучения решению проблемных задач, направленная на формирование познавательного интереса, была выбрана предложенная Х. Ж. Ганеевым модель информационно-развивающего обучения [3]. В соответствии с нею учащийся сам овладевает новыми понятиями, связями и отношениями между ними и ранее известными. Доказано, что приемы решения проблемных задач ограничены. В каждом случае необходимо составить план, сформировать прямую и обратную задачи, провести разбиение данной задачи на простые, уточнить требования задачи, ввести вспомогательные элементы, придать задаче определенность [12]. Схема поиска решения проблемной задачи представлена на рисунке.

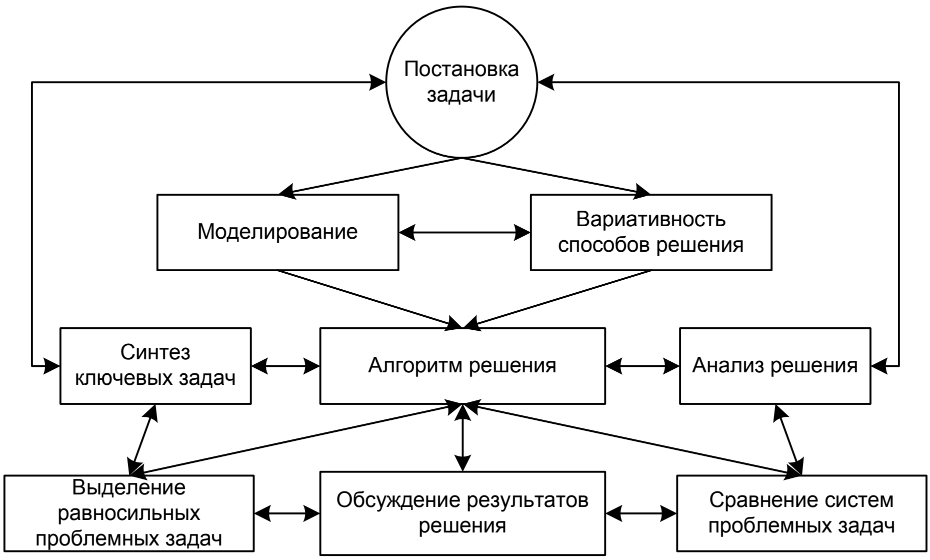

Схема поиска решения проблемной задачи

Опыт реализации описанной выше методики развития творчества посредством обращения к проблемным математическим задачам доказал ее эффективность, необходимость формирования у учащихся знаний об их сущности и методах решения, повышения степени осознанности собственной самостоятельной деятельности по их поиску, моделированию и решению, выделению в них общих подходов и методов, их творческому осмыслению и обоснованию.

Проблемные задачи требуют от учителя мобилизации внимания к процессу формирования у учеников системных теоретических знаний, умений находить решение задачи, анализировать систему справочных материалов, строить математическую модель задачи, логически грамотно аргументировать правильное выполнение действий.

Наиболее благоприятные условия для этого могут быть созданы посредством интеграции основного и дополнительного образования, например, в процессе подготовки к математическим олимпиадам. Для этого учителю необходимо вести предметный кружок, проводить большую подготовительную работу, подбирать и решать различные проблемные задачи, детально знакомиться с различными вопросами математики, с новинками математической литературы.

Автором статьи разработан и апробирован комплекс проблемных математических задач, обеспечивающий развитие творческих способностей на уроках математики. Апробация прошла в классах естественнонаучного профиля в лицее № 130 г. Екатеринбурга.

В этот комплекс входят:

1. Геометрические задачи, связанные с движением фигуры и с преобразованием ее структуры.
2. Задачи на построение и доказательство.
3. Обратные задачи.
4. Задачи с параметрами и задачи-модели.
5. Задачи-кроссворды и задачи-ребусы и т. д.

На основе этих задач разрабатываются задачи для государственной аттестации (раздел С).

В качестве примера приведем геометрическую задачу и задачу с параметрами [10].

Задача 1.

Треугольная пирамида АВСД имеет прямой трехгранный угол А. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из вершины А на плоскость ВСД, проходит через ортоцентр треугольника ВСД.

Доказательство. Пусть АЕ – перпендикуляр, опущенный из вершины А на плоскость ВСД. Проведем плоскость через прямые АД и АЕ. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости АВС, так как она проходит через перпендикуляр АЕ к плоскости ВСД. Линия пересечения ВС плоскостей АВС и ВСД перпендикулярна к линиям их пересечения с плоскостью, к которой они обе перпендикулярны, т. е. к линиям AF и ДF. Из перпендикулярности ДF и ВС следует, что ДF есть высота треугольника ВСД. Таким образом, мы доказали, что одна из высот треугольника ВСД проходит через точку Е. Подобным же образом можно доказать, что и другие две высоты треугольника ВСД проходят через точку Е.

Задача 2.

Определить k так, чтобы система уравнений:

$$\begin{cases} x+(1+k)y=0 \\ (1-k)x+ky=1+k \\ (1+k)x+(12-k)y=-(1+k) \end{cases}$$

была совместной.

Решение. При $k = -1$ система совместна (она имеет решение $x = y = 0$). При $k = 0$ система несовместна (исходя из первых двух уравнений, значения $x = 1$, $y = -1$, не удовлетворяющие третьему уравнению). Пусть теперь $k \neq 1$,

$k \neq 0$. Из первого уравнения системы находим:

$$y = -\frac{x}{1+k}, \qquad (1)$$

а из второго получаем

$$y = \frac{1+k-(1-k)x}{k}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $-\frac{x}{1+k} = \frac{1+k-(1-k)x}{k}$, откуда $x = -\frac{(k+1)^2}{k^2+k-1}$.

Подставляя это значение x в (1), получим:

$$y = -\frac{k+1}{k^2+k-1}.$$

Подставляя найденные значения x и y в третье уравнение системы, получим:

$$\frac{-(k+1)^3}{k^2+k-1} + \frac{(12-k)(k+1)}{k^2+k-1} = -(k+1).$$

Поскольку $k = -1$ уже рассматривалось, получаем $k = 5$.

Таким образом, данная система уравнений совместна или при $k = -1$, или при $k = 5$.

Комментарии к задачам 1 и 2.

При решении задачи 1 у учащихся вызывает трудности пространственное представление треугольной пирамиды, а также дополнительное построение искомых элементов.

В задаче 2 выделяется влияние параметра k, его многозначность и соответствующая проверка системы.

Как показала наша опытно-поисковая работа по развитию творческих способностей учащихся на уроках математики, применение описанной методики и предложенного комплекса проблемных задач способно обеспечить все основные дидактические функции: обучающую, развивающую, воспитывающую, контролирующую. Использование свойства полифункциональности проблемных математических задач позволяет учителю организовать работу учащихся по усвоению обобщенных способов учебной деятельности, самостоятельному открытию субъективно новых знаний, что способствует активизации их творческого потенциала.

Литература

1. Балл Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогические аспекты. М: Педагогика, 1990. 183 с.

2. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей. М.: Академия, 2002. 318 с.

3. Ганеев Х. Ж. Теоретические основы развивающего обучения математике. Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 1997. 160 с.

4. Иванюк М. Е. Проблемы подготовки будущих учителей математики // Проблемы преемственности в обучении математике на уровне общего и профессионального образования: материалы XXVIII Всерос. семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. Екатеринбург, 2009.

5. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / под ред. Н. И. Чуприковой. М.: Воронеж, 1998. 431 с.

6. Новоселов С. А. Педагогическая система развития технического творчества в учреждении профессионального образования: дис. … д-ра пед. наук. Екатеринбург: Урал. гос. проф.-пед. ун-т, 1997. 350 с.

7. Охитина Л. Т. Психологические основы урока: В помощь учителю. М.: Просвещение, 1977. 47 с.

8. Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. С. 16.

9. Психологический словарь / под общ. ред. А. В. Петровского, М. Г. Ярошевской. М.: Политиздат, 1990. 393 с.

10. Сивашинский Н. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9–10 классы). М.: Просвещение. 1968. 312 с.

11. Тестов В. А. Стратегия обучения математике. М.: Технолог. шк. бизнеса, 1999. 304 с.

12. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1984. 175 с.

УДК 372.85+373.51

Л. Ю. Ерохина

О ГОТОВНОСТИ ПОДРОСТКОВ К ЦЕЛЕПОЛАГАНИЮ В УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Аннотация. В статье рассмотрена структура целеполагания учащихся как процесса, осуществление которого обеспечивает субъектную активность и успешность в учении и повседневной жизни. Представлены результаты исследования готовности подростков к целеполаганию в учебной деятельности.