URL: https://mogilev.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/publications/public_compilation/index_15298/.

6. Информационное общество в Республике Беларусь / Национальный статистический комитет Республики Беларусь. Минск, 2019. – URL: https://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/makroekonomika-i-okruzhayushchaya-sreda/informatsionno-telekommunikatsionnye-tekhnologii/.

УДК 519.86:004.92

Петров Ю. А., Петрова Г. И.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОПИСАНИИ СВОЙСТВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Юрий Александрович Петров
кандидат химических наук, доцент
youri1054@gmail.com
Галина Ивановна Петрова
кандидат философских наук, доцент
galinapetrova477@gmail.com
ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», Россия, Екатеринбург

LINEARIZATION OF APPROXIMATING FUNCTIONS DURING DESCRIPTION OF PROPERTIES OF ECONOMIC SYSTEMS

Iurii Aleksandrovich Petrov
Galina Ivanovna Petrova
Russian State Vocation Pedagogical University, Russia, Yekaterinburg

Аннотация. *В статье рассматривается способ линеаризации аппроксимирующих функций, который даёт возможность описывать и прогнозировать свойства сложных экономических систем с помощью простых функций, интегрированных в стандартный пакет программ Microsoft Excel.*

Abstract *The article discusses a method of linearizing approximating functions, which makes it possible to describe and predict the properties of complex economic systems using simple functions integrated into the standard Microsoft Excel software package.*

Ключевые слова: *линеаризация, аппроксимация, аппроксимирующая функция, линия тренда, экономическая система, цена, спрос, объём продаж.*

Keywords: *linearization, approximation, approximating function, trend line, economic system, price, demand, sales.*

Экономические системы относятся к сложным искусственным системам [1], обладающим огромным количеством показателей, свойств и прочих характеристик, часть из которых относятся к данным, другие же относятся к расчётным показателям, полученным на основе этих данных. При этом часто встаёт задача построения различного рода прогнозов этих показателей, как на временную перспективу, так и на текущий момент, но при изменении тех или иных воздействий на систему. Набор экспериментальных данных обычно достаточно ограничен и не охватывает всей совокупности интересующих исследователя характеристик. В этом случае нередко используются модели, в которых используются взаимосвязи «свойство — свойство». Идеология и теоретические основы такого подхода, в частности, были разработаны и апробированы на обширном экспериментальном материале в работах [2,3]. Развитием этих представлений явились их приложения к описанию и прогнозированию некоторых характеристик и свойств социально-экономических систем: взаимосвязи показателей качества жизни [4]; иерархическая матричная модель уровней компетентности [5] и образовательная функция, количественно описывающая траектории формирования и развития компетентностей [6]; демографическое прогнозирование контингента студентов вузов РФ [7].

В настоящей работе на основе выше названных представлений рассматривается один из наиболее важных вопросов, встающих перед хозяйствующими субъектами рынка при реализации ими продуктов или услуг: как изменится спрос (объём продаж) при изменении цены в ту или в иную сторону? И хотя спрос может меняться и при неизменных ценах, тем не менее, цена остаётся одним из самых важных факторов, оказывающих влияние на спрос. Пример, который будет рассмотрен ниже, построен на практическом опыте авторов и имеет реальную основу, хотя конкретный продукт и не называется.

Пусть данные по ценам и по количеству товара, реализованного по этим ценам за определённый период времени, заданы таблично (таблица 1).

Таблица 1 — Спрос (объём продаж) при различном уровне цен

Цена, тыс. руб.	X	4,3	4,5	4,8	5	5,2	5,5	5,8
Спрос, ед., шт.	Y	1000	600	375	300	250	200	165

Как видно из таблицы 1, цена оказывает заметное влияние на уровень спроса. Иными словами, спрос на данный товар достаточно эластичен по цене. При этом, как видно из рис. 1, несмотря на очевидное снижение объёма продаж при росте цен, эта зависимость имеет, вообще говоря, явно нелинейный характер. И поскольку нас интересует вопрос, как может измениться объём продаж, если цены и дальше продолжат расти, либо, наоборот, если нам удастся снизить цены, то насколько может возрасти спрос на этот товар, то возникает потребность каким-то образом описать эти данные какой-либо из функций уравнение которой можно будет использовать в дальнейшем, прогнозируя объёмы продаж. Такую возможность, как известно, даёт пользователям программа Microsoft Excel, в современных версиях которой, наряду с визуализацией данных в виде диаграмм и графиков, можно также построить к этим данным линию тренда, получив одновременно и уравнение функции, описывающей эту линию. Причём этих функций предложено несколько, и пользователь может выбрать ту из них, которая наиболее адекватно и достоверно описывает данные. И хотя набор этих функций относительно невелик (линейная, логарифмическая, экспоненциальная, степенная и полиномиальная, причём степени на выбор от 2 до 6), он достаточно удобен и универсален. На рис. 1 и рис. 2 приведены различные линии тренда, построенные в программе Excel к данным табл. 1.

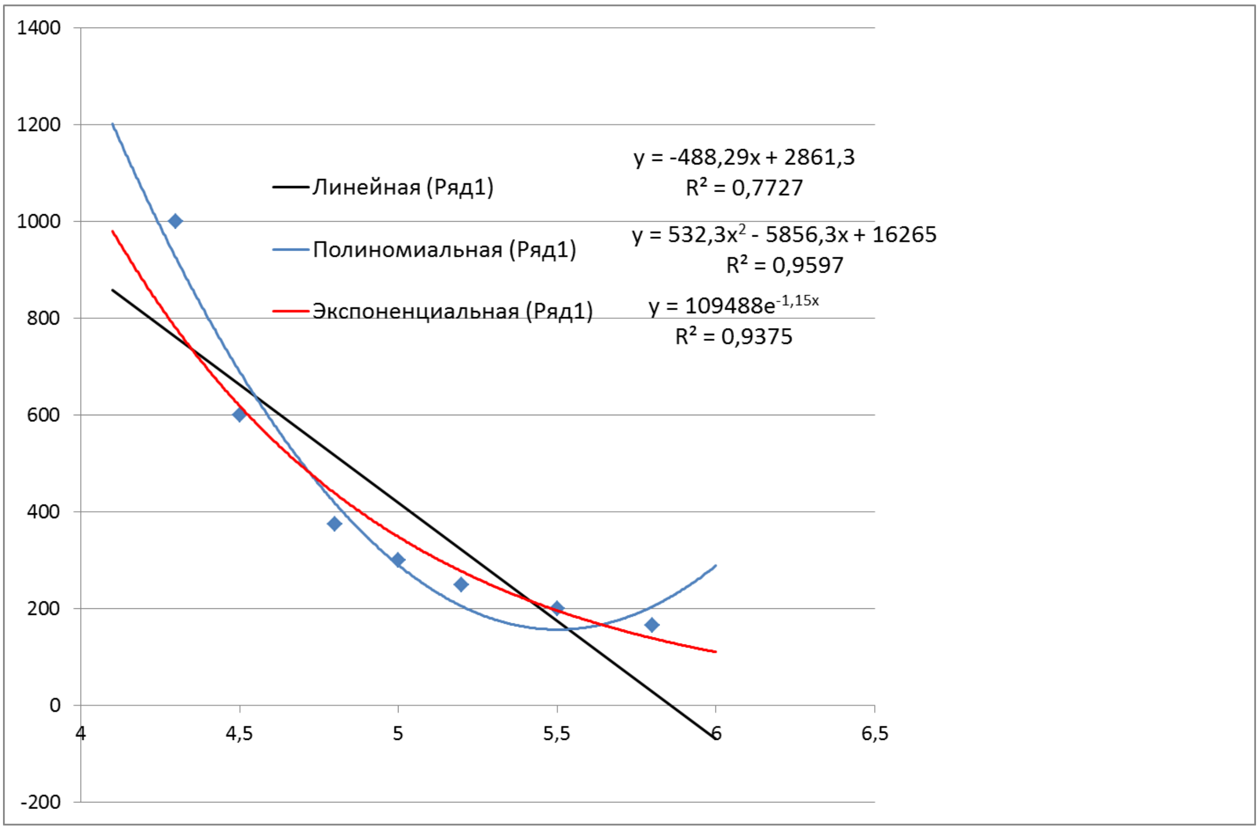

Рисунок 1 — Аппроксимация данных линейной, полиномиальной (n = 2) и экспоненциальной функциями

Из рис. 1 видно, что хотя линейная функция имеет наименьшую величину параметра достоверности R^2 по сравнению с экспонентой и параболой, но точность линейной аппроксимации не такая уж плохая (отклонение экспериментальных точек от расчетных в пределах 20–25%). Для таких трудно предсказуемых систем как экономические, такая погрешность в прогнозах вполне допустима. Другое дело, что линейную аппроксимацию можно рекомендовать использовать лишь для интерполяции и лишь с большой осторожностью и не слишком «далеко» — для экстраполяции. В последнем случае мы видим, что при продолжении этой прямой она может перейти и в область отрицательных значений, которые с математической точки зрения никак не исключаются, но с экономической точки зрения не имеют никакого смысла, поскольку количество проданного товара не может быть отрицательным. Точно так же и полином степени 2, хотя он и имеет самое высокое значение R^2 из этих трёх функций, не может использоваться для прогнозирования в области более высоких цен, так как на этой кривой вообще обнаруживается минимум, после которого должен начаться непрерывный рост объёма продаж, невзирая на рост цен. Такая ситуация не только маловероятна, но и ничем не объяснима.

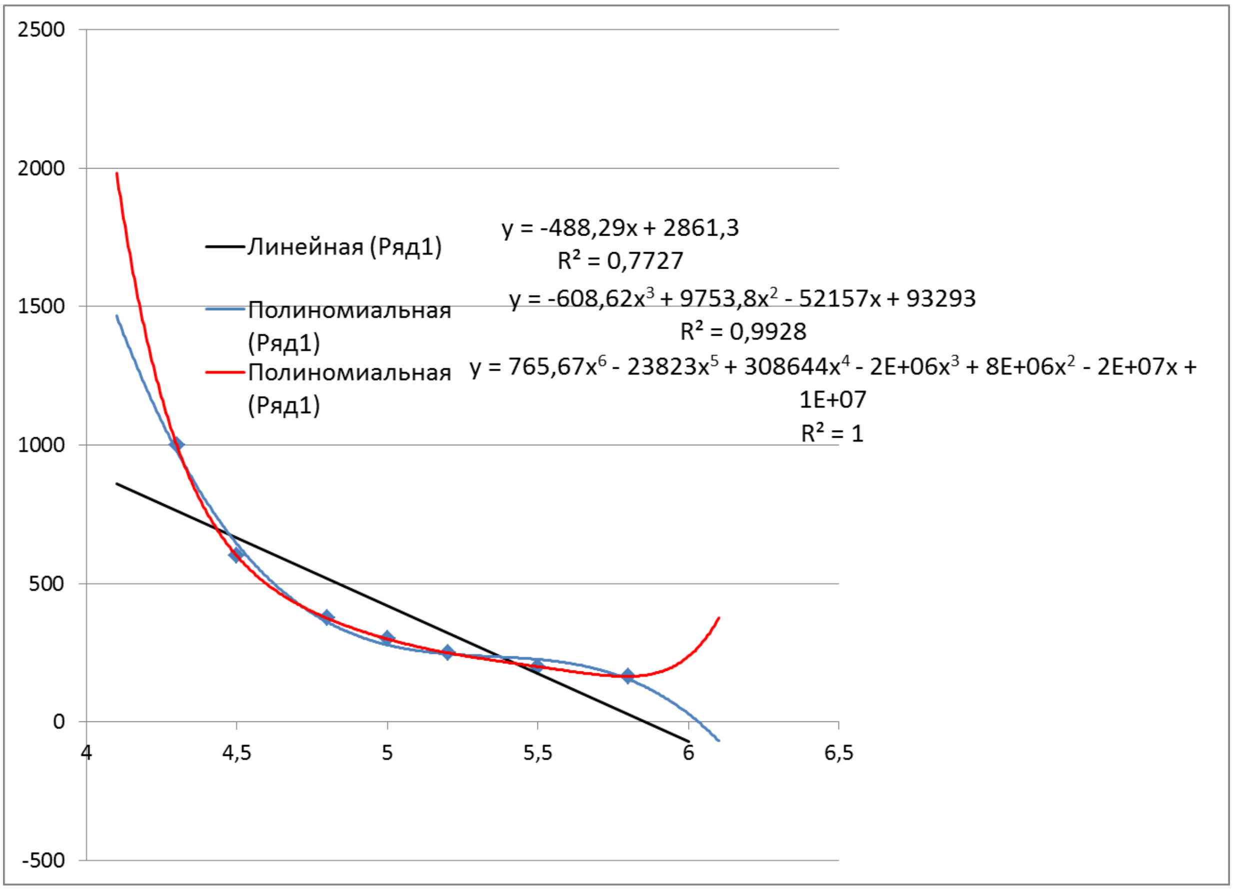

Рисунок 2 — Аппроксимация данных линейной и полиномиальными функциями ($n = 3$ и $n = 6$)

Из рис. 2 можно видеть, что уже полином степени 3 описывает наши данные с достоверностью почти равной 1 ($R^2 > 0,99$), а полином степени 6 имеет $R^2 = 1$ и все наши экспериментальные точки лежат строго на кривой, описываемой этой функцией. И это не удивительно, поскольку известно, что любая совокупность из n-точек может быть однозначно описана полиномом ($n–1$) степени. Но, несмотря на такие высокие значения параметра достоверности, точно так же, как и функциями, представленными на рис. 1, ни один из этих полиномов не годится для экстраполяции, поскольку один ($n = 3$) ведёт, как и линейная функция, в область отрицательного объёма продаж, а другой (n = 6) «предсказывает» рост продаж при дальнейшем повышении цен. При таких, по сути, противоположных прогнозах оба полинома дают максимально возможную величину параметра достоверности. И, кроме того, ни одна из обсуждаемых функций — ни линейная, ни степенная, ни логарифмическая, ни экспоненциальная и ни одна из полиномиальных — никак не следует ни из одной теории или модели, в которых предлагаются какие-либо соотношения взаимосвязи объёмов продаж и цены.

Так, например, если вспомнить, что выручка от продажи товара (V) связана с его ценой (S) и его количеством (N) соотношением вида

$$V = S*N, \tag{1}$$

то из (1) следует, что объём продаж обратно пропорционален цене

$$N = V/S \tag{2}$$

Соотношение (2) можно использовать в качестве теоретической аппроксимирующей функции, но лишь для очень ограниченного круга товаров и услуг, цены на которые могут начинаться «от нуля». Но это могут быть, например, некоторые из услуг, производство которых не требует никаких материальных затрат, а временные и трудовые затраты исполнителя целиком возмещаются ценой и полученной выручкой. Это - консультационные, репетиторские, юридические, бухгалтерские и некоторые другие «интеллектуальные» услуги. Однако для подавляющего числа товаров и услуг цена не может начинаться с нуля, как и не может снижаться до нуля, поскольку в каждой единице реализуемого товара и предоставляемой услуге есть некоторая сумма затрат, которые безусловно должны быть возмещены продажей товара, и, кроме того, от продажи должна быть получена прибыль. Поэтому для таких товаров и услуг вместо формулы (2) следует использовать соотношение, учитывающее наличие затрат или издержек — как постоянных, так и переменных. В общем виде такое соотношение может быть представлено так:

$$N = (P + a)/(S – k), \tag{3}$$

где P — прибыль, a — постоянные издержки, k — переменные издержки на единицу товара (услуги).

Соотношение (3) это та же обратно пропорциональная зависимость, что и (2), но только у гиперболы, описываемой формулой (2) асимптотами являются оси координат, то у гиперболы (3) только одна асимптота совпадает с осью координат (ось цен, или ось X), а другая асимптота — перпендикуляр, опущенный в точку k на оси цен.

Соотношения (2) и (3) достаточно простые, но, тем не менее, такого вида функций не предлагается в качестве линий тренда в программе Excel. В этом случае поступить можно двумя способами. Первый (наиболее общий, пригодный теоретически почти для любого вида функций и, в том числе, для функций нескольких переменных) — это метод наименьших квадратов, требует определённых навыков и даже в простых случаях может оказаться достаточно трудоёмким. Второй (частный, пригодный лишь для некоторых функций) — это метод линеаризации, то есть преобразование нелинейной функции к линейному виду.

Воспользуемся методом линеаризации и преобразуем нелинейную функцию (3) к линейному виду. Сделать это можно просто, обратив левую и правую части в уравнении (3), то есть равенство не изменится, если формулу записать в виде:

$$1/N = (S - k)/(P + a) \quad (4)$$

Таким образом, если за функцию принять не объём продаж N, а величину, обратную ему 1/N, то эта функция будет линейно зависеть от цены. В этом случае можно использовать в качестве линии тренда линейную функцию в Excel. Потом, используя вычисленные в Excel коэффициенты и параметры линейной функции, вычислить и теоретические значения искомой функции объёма продаж. Результаты таких преобразований и вычислений представлены на рис. 3 и рис. 4.

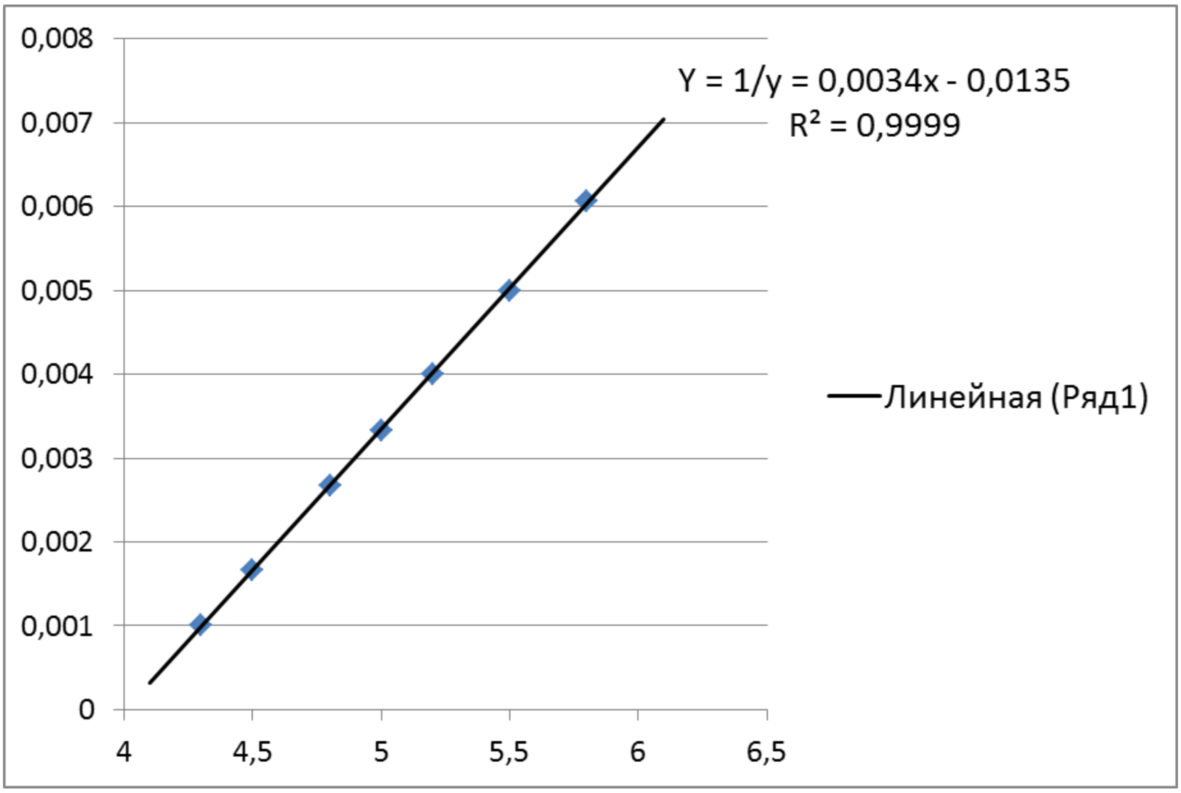

Рисунок 3 — Зависимость величины, обратной объёму продаж, от цены

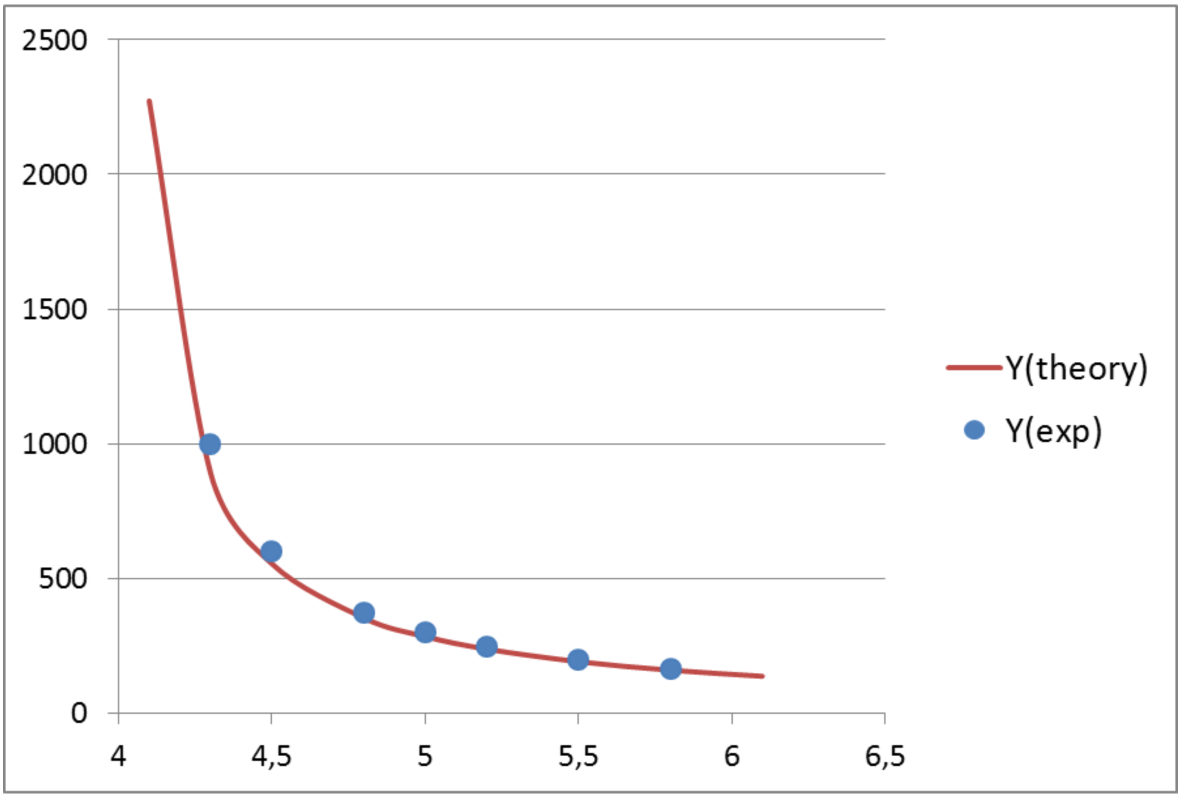

Рисунок 4 — Линия тренда, построенная после линеаризации теоретической зависимости «цена — объём продаж»

Таким образом, как показано на рис. 3, параметр достоверности такой аппроксимации не только не уступает полиномиальному приближению, но и сама линия тренда находится вся в пределах допустимых изменений, как аргумента (цены), так и функции (объёма продаж). И, кроме того, в заключение следует ещё раз отметить, что:

1) если есть возможность выбора, то лучше для построения линии тренда использовать не ту функцию, которая формально лучше описывает экспериментальные данные, а ту, которая следует из теории или модельных представлений о взаимосвязи исследуемых показателей;

2) если есть возможность преобразовать теоретическое соотношение к линейному виду, либо к виду другой функции, предлагаемой в качестве линий тренда, то можно, не используя метод наименьших квадратов, достаточно просто и при этом теоретически обоснованно воспользоваться стандартным пакетом Excel.

Список литературы

1. Губарев, А. В. Семантические, аксиоматические и методологические основы феноменологической теории развития искусственных систем / А. В. Губарев, Ю. А. Петров, Г. И. Петрова // Наука. Информатизация. Технологии. Образование: материалы XI международной научно-практической конференции, г. Екатеринбург, 26 февраля – 2 марта 2018 г. – Екатеринбург, 2018. – С. 49–63.

2. О взаимосвязи свойств, описываемых методом кластерных компонентов / Ю. А. Петров, А. Ю. Попков, А. Н. Мень, В. М. Камышов, Г. И. Чуфаров // Доклады Академии наук СССР. – 1983. – Т. 272. – № 4. – С. 906.

3. Петров, Ю. А. Исследование кристаллохимических и магнитных свойств замещенных железоиттриевых гранатов: диссертация на соискание ученой степени кандидата химических наукю. Свердловск, 1984. – 163 с.

4. Петров, Ю. А. Качество жизни: о взаимосвязи некоторых из основных показателей / Ю. А. Петров, Г. И. Петрова // Академическая наука — проблемы и достижения: материалы VI международной научно-практической конференции. н.-и. ц. «Академический». North Charleston, SC, USA, 2015. – С. 36–40.

5. Петров, Ю. А. Уровни компетентности: модель, классификация, иерархия / Ю. А. Петров, Г. И. Петрова // Образовательные технологии. – 2014. – № 4. – С. 65–70.

6. Петров, Ю. А. Образовательная функция в матричной модели уровней компетентности / Ю. А. Петров, Г. И. Петрова // Новые информационные технологии в образовании: материалы IX международной научно-практической конференции. Екатеринбург, 2016. – С. 305–311.

7. Петров, Ю. А. Демографическое прогнозирование контингента студентов в вузах российской федерации / Ю. А. Петров, Г. И. Петрова // Демографический потенциал стран ЕАЭС: сборник статей VIII Уральского демографического форума. Институт экономики Уральского отделения РАН. Екатеринбург, 2017. – С. 186–190.