УДК 519.6, 004.9
DOI:10.17853/2587-6910-2020-03-87-91

ОБУЧЕНИЕ И НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ НА ПЛАТФОРМЕ ЯЗЫКА JULIA

TRAINING AND SCIENTIFIC RESEARCH IN THE FIELD OF MATHEMATICS AND INFORMATICS ON A JULIA LANGUAGE PLATFORM

Александр Викторович Рожков
доктор физико-математических наук, профессор
great.ros.marine2@gmail.com

Евгения Александровна Оконешникова
студентка 4-го курса факультета математики и компьютерных наук
owljaneok@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар

Alexander Viktorovich Rozhkov

Evgenia Aleksandrovna Okoneshnikova

Kuban State University, Russia, Krasnodar

Аннотация. *Проведены вычисления, занявшие более трех лет, получено не улучшаемое уточнение теоремы Мертенса о среднем значении функции Эйлера.*

Ключевые слова: *Теория чисел, операционная система Debian, язык программирования Julia, функция Эйлера.*

Abstract. *The calculations which borrowed more than three years are carried out, not improved specification of the theorem of Mertens of mean value of function Euler is received.*

Keywords: *Number theory, Debian OS, Julia programming language, Euler's function.*

Проект «DeJu-стратегия» задумывался несколько лет назад как средство обучения математике и информатике одновременно. Он реализует ту же идею, что и проект GeoGebra и более масштабный образовательный проект STEM (Science, technology, engineering and mathematics). Однако, данный проект подходит для индивидуального применения и не требует практически никаких ресурсов, кроме грамотности преподавателя и его энтузиазма.

Проект отличают следующие моменты:

1. Выбор операционной системы (ОС). Мы остановились на ОС Debian (Debra Lynn + Ian Murdock), которая, по мнению многих, идеально подходит для научных и образовательных целей (здесь следует отметить, что существует дистрибутив, ориентированный на учебные цели, а ОС Debian имеет около 60 тыс. дополнительных пакетов).

2. Выбор языка программирования — универсального и достаточно простого для непрофессионалов. Первоначально был выбран Python — язык, по мнению многих, доступный для всех. Этот язык стремительно развивается, буквально каждый день выходит новая книга о нем. Однако в сентябре 2018 г. Python отошел

на второй план, в нашем понимании, уступив первое место новому языку программирования Julia (текущая версия Julia 1.3.1).

Julia с февраля 2012 г. разрабатывается в Массачусетстком технологическом институте. В августе 2018 г. вышла стабильная версия Julia 1.0 и язык стал стремительно развиваться.

Julia не сложнее Python, но работает на три порядка быстрее чего, и примерно в 100 раз быстрее GAP система компьютерной алгебры.

Julia позволяет довольно просто (даже для непрофессионала-программиста) подключать модули на C/C++, Fortran, Python, а также на уровне базовых возможностей работать с суперкомпьютерами и многопроцессорными системами.

3. Выбор пакета компьютерной алгебры для научного программирования. Первоначально планировался Sage, объединивший в себе около 90 проектов на открытом коде, с внутренним языком программирования Python. Фактически Sage (текущая версия 9.0) является расширением языка Python.

В тоже время Julia очень быстро наращивает свои возможности, вместе с добавлением новых пакетов. Официально принятых пакетов около 2500, а неофициальных – примерно 10 тыс. Последний год новый пакет добавляется практически каждые 1–2 часа. В области алгебры и теории чисел важны пакеты Nemo, Hecke, LinearAlgebra, SymPy.

4. Содержательные цели нашего проекта, условно названного «*DeJu-стратегия*», заключаются в проведении обширных вычислений в области алгебры и теории чисел (проблема Гольдбаха, задача Коллатца, проблемы нахождения простых чисел и их локального распределения, уточнение известных теорем теории чисел и т. д. (подобных задач в наивной теории чисел, понятных даже школьникам, тысячи, при этом данные задачи легко программируются и, поэтому они хороши при первоначальном изучении как математики, так и информатики)).

Первоначально проект реализовывался средствами пакета компьютерной алгебры GAP4.8.X. После перехода на платформу языка Julia скорость вычисления возросла примерно в 100 раз и неожиданно получилось *не улучшаемое уточнение теоремы Мертенса о среднем значении функции Эйлера.*

Речь идет о классической теореме Мертенса [1] о сумме значений функции Эйлера:

$$\Phi(\mathrm{n}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathrm{i}) = \frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}^2 + O(\mathrm{n}\cdot\ln(\mathrm{n})) \quad (1)$$

Вычисления в Julia велись до 78-го знака после запятой, а не до 18-го, как было, например, в GAP. Поскольку скорость работы увеличилась примерно в 100 раз, то за 11 месяцев удалось произвести вычисления до 1800 млрд, а не до 36 млрд, как в том же GAP за 2 года. Вычисления велись на intel core i5–4430, 3 Ggz, 16 Gb оперативной памяти.

Опишем расчеты, проведенные нами.

Теорема 1. Уточнение формулы Мертенса. Имеет место равенство

$$\Phi(\mathrm{n}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathrm{i}) = \frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) + \mathrm{n}\cdot S(\mathrm{n})$$

где для всех $n<1.8\cdot10^{12}$ выполняется неравенство $|S(n)|<0.45$. Более того, с вероятностью, не меньшей, чем $1-10^{-10}$ имеет место неравенство $|S(n)|<0.43$.

Дальнейшее уточнение теоремы невозможно по той простой причине, что остаточный член S(n) является знакопеременной функцией, меняющей знак через 1–2 значения.

Кроме того, теорема Мертенса (1) описывает $\Phi(n)$ как функцию, т. е. определяет ее поведение на бесконечности. Однако формула (1) абсолютно ничего не может нам предложить по поводу значения $\Phi(n)$ при конкретных n. Наше же уточнение означает, что значение $\Phi(n)$ отличается от $\frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$ не более, чем на 0.45·n в ту или другую сторону, т. е. отклонение составляет не более чем $\frac{1.5}{\mathrm{n}+1}$ долю значения $\frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$.

Теорема 2. Свойства функции S(n).

1. Функция S(n) знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно 1.4136 ($\sqrt{2}\approx1.4142$).

Самый протяженный найденный участок знакопостоянства имеет длину 11.

2. Среднее положительное значение функции S(n) примерно равно 0.1189, отрицательное – 0.1189.

3. До $n<1.8\cdot10^{12}$ в интервал (–0.44, 0.44) не попало всего 7 чисел:

n = *131353478796*
S(n) =*–0.4465686302391053411582970831915269155;*

n = *592801137563*
S(n) = *0.44132421312431747524316680998217634 31;*
n = *634758317213*
S(n) = *0.44208765553467997762548769765197282;*
n = *1310112480983*
S(n) = *0.44558793783377972526757776430884561 8;*
n = *1458241418093*
S(n) = *0.44760605409207516772920973641664912 9;*
n = *1470314757276*
S(n) = *–0.,44495094843978803813905259366799 79;*
n = *1655529924683*
S(n) = *0.44578101314097370882123259631237 2.*

Теорема 3. Вероятностные свойства функции S(n).

1. Матожидание значения функции *S*(n) для $n<1.8\cdot10^{12}$ по модулю не превосходит 10^{-7}.

2. Дисперсия с точностью до 6-го знака равна 0.01986, поэтому σ =0.1409; σ =0.423.

Правило трех сигм выполняется с большим запасом, за 3-ю сигму попадает не более, чем одно миллиардное значение функции *S*(n).

3. Плотность распределения вероятностей случайной величины S(n) с шагом 0.001 до 5 млрд приведена на рис. 1. Тут же приведен график нормального распределения для матожидания 0 и дисперсии 0.01986.

4. Вычислены функции $S(\mathrm{n})=\sum_{i=1}^{n}S(\mathrm{i})$ (рис. 2), и $SS(\mathrm{n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S(\mathrm{i})$ (рис. 3).

Поведение функции сумы S(n) на рис. 2 при всей ее хаотичности имеет важную качественную характеристику: она схожа с синусоидой, у которой возрастает не только амплитуда, но и длина периода.

Можно оценить, как растут максимумы суммы *S*(n). Они хорошо описываются линейной функцией

$$y=\frac{1}{6}\cdot10^{-7}\cdot x+18\cdot10^{3},$$

и минимумы описываются этой же функцией, но со знаком минус.

На рис. 4 приведен график изменения матожидания функции S(n) на промежутке от 10 млрд до 1800 млрд. Видно, что оно стремиться к 0.

По оси абсцисс шаг равен 10^8, по оси ординат 10^{-8}, различие масштабов составляет 10^{16}.

Функция SS(n) ведет себя так же, как и S(n), но амплитуда на порядок меньше. Видимо, и шаг и амплитуда у обеих функций растут неограниченно.

Графики 2–4 (см. рис. 2–4) выполнены в Julia (пакет Plots), а график 1 (см. рис. 1) нарисован программой SciDAVis.

Приведем фрагмент программы, который вычисляет значение разности S(n). Для этого подключаем пакет Nemo.

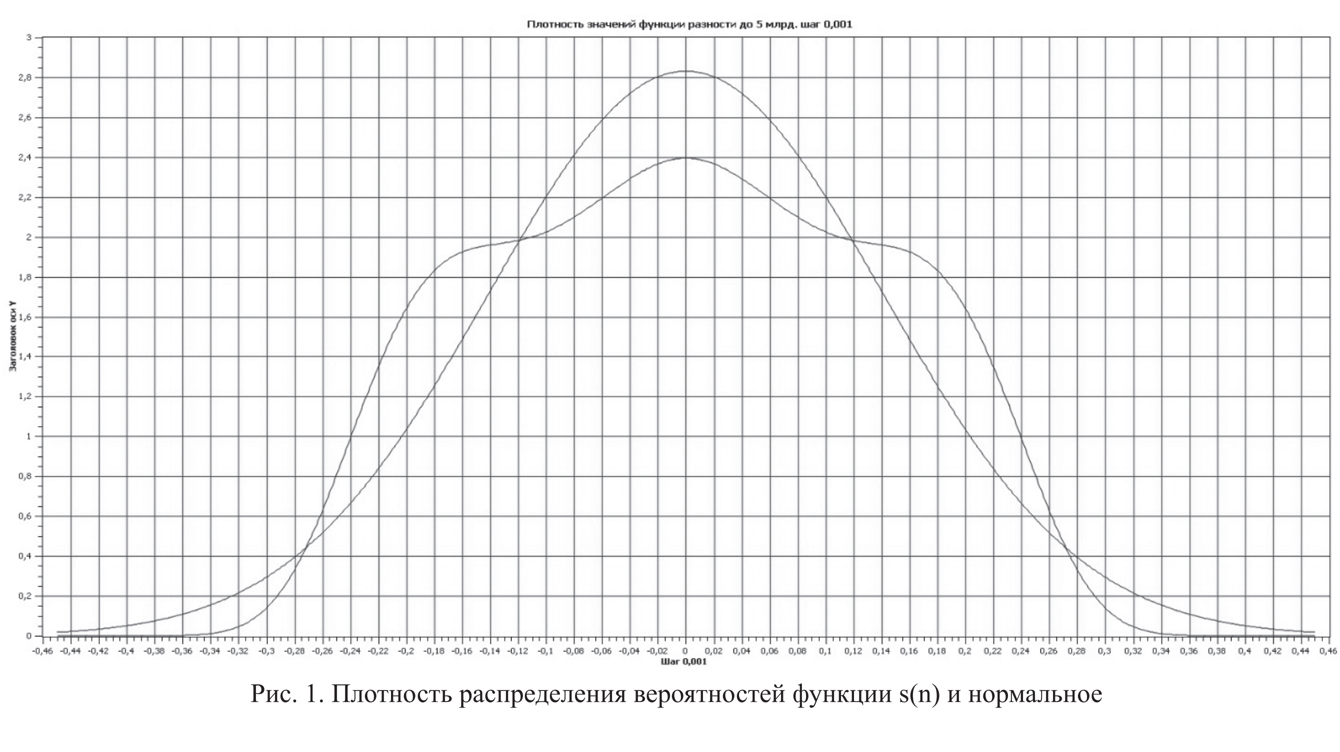

Рис. 1. Плотность распределения вероятностей функции s(n) и нормальное

```
using Nemo
function ros(m,n)
p = BigFloat("0.303963550927013314331638389629182916713076324016739646536827095682519362886706 2")
S = BigInt(0); t = BigFloat(0.0); T = 0.0;
for i::BigInt = m:n
S += euler_phi(ZZ(i));   t = BigInt(S)/i-p*(i+1); T += t;
end; end
```

На выходе мы получили число $S=\Phi(n)$ — сумму значений функции Эйлера от 1 до n. Это натуральное число, оно вычисляется точно, без погрешностей. Поэтому достоверность теоремы 1 не вызывает сомнений, ошибка при вычислении функции s(n) не накапливается.

При вычислении функций S(n) и SS(n) ошибка может накапливаться, но до 100 трлн она не превосходит $10^{14} \cdot 10^{-78}=10^{-64}$ и $10^{28} \cdot 10^{-78}=10^{-50}$ соответственно.

Функция Эйлера жестко связана с разложением на простые множители. График, изобра-

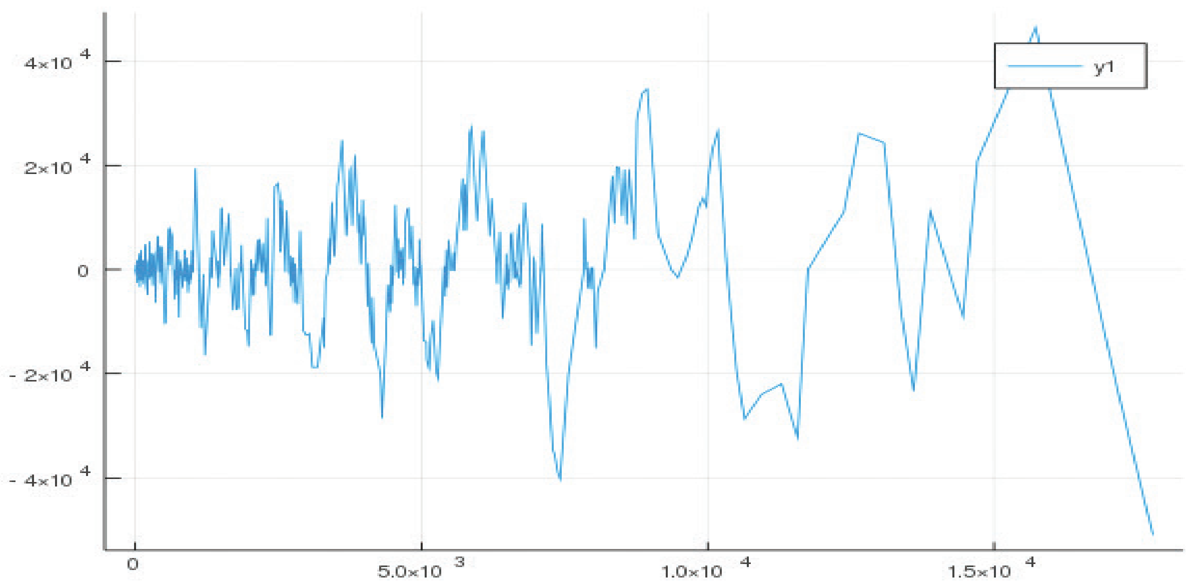

Рис. 2. Суммы S(n) на интервале от 1 до 1800 млрд, шаг по оси ординат равен 100 млн, по оси абсцисс шаг равен 1

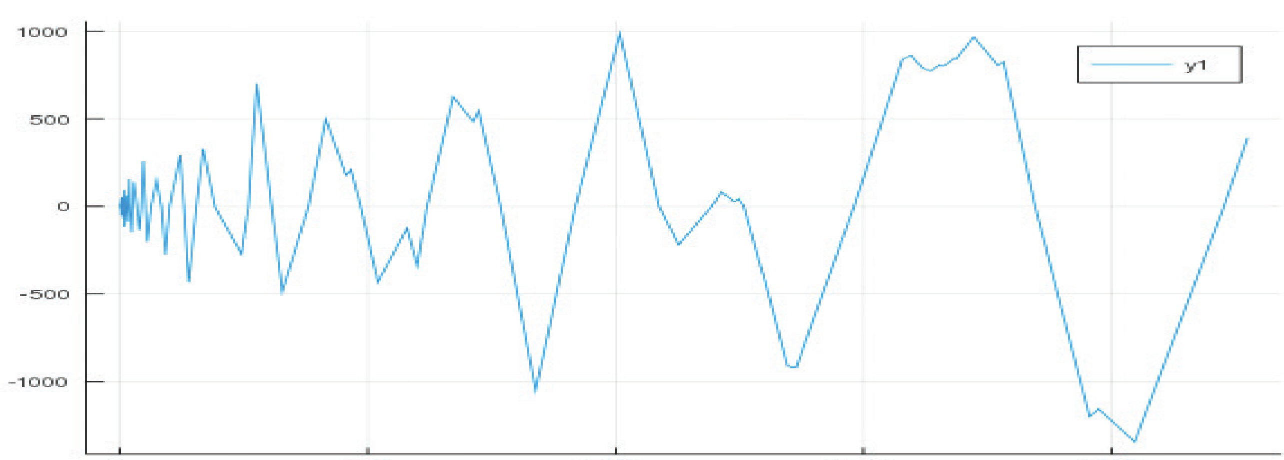

Рис. 3. Суммы SS(n) на интервале от 1 до 910 млрд, по оси абсцисс шаг равен 100 млн, по оси ординат шаг равен 1

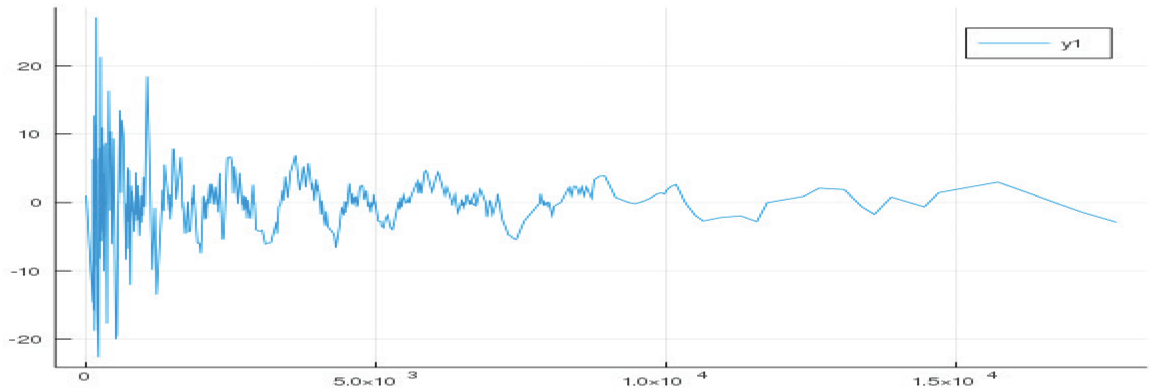

Рис. 4. Матожидание значения функции s(n) от 10 млрд до 1800 млрд

женный на рис. 1, говорит о том, что локально простые числа распределены случайно.

Если говорить о формуле Мертенса, то возможно, что на бесконечности логарифм в оценке остаточного в ней все же есть.

В связи с проведенными вычислениями возникает определенная гипотеза.

Гипотеза. О поведении функции s(n) теоремы 1 на бесконечности.

При $n>10^9$ имеет место неравенство

$$|S(\mathrm{n})|<\frac{1}{3}\left(1+\frac{\ln(\mathrm{n})}{100}\right),$$

при этом значение большее по модулю, чем $0.42+0.01\cdot m$ функция $S(\mathrm{n})$ принимает не чаще, чем для одного числа из 10^{9+m}, где m — натуральное число.

Возможно, что первое $|S(\mathrm{n})| = 0.45\ldots$ появится в районе n = 7–10 трл.

Предварительные результаты опубликованы в работе «Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера» [2].

Список литературы

1. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. Москва: Мир, 1974. 178 с. Текст: непосредственный.

2. *Рожков А. В.* Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера / А. В. Рожков, М. В. Рожкова. Текст: непосредственный // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы 2-й Международной научной конференции. Майкоп: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2017. С. 198–203.