

# ПРОБЛЕМЫ МЕТОДОЛОГИИ

УДК 37.1

М. Г. Гапонцева,  
В. А. Федоров,  
В. Л. Гапонцев

## ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ ФРАКТАЛОВ КАК ЯЗЫК ОБЪЕКТОВ ПЕДАГОГИКИ И ТЕОРИИ НАУЧНОГО ЗНАНИЯ

В статье на основе представлений современной геометрии о структуре проанализирована структура интегративных связей как составной части содержания естественнонаучного образования.

*Ключевые слова:* интегративные связи, тезаурус, содержание образования, деятельностный подход, структура, фрактал

A structure of integrative links was analyzed as a constituent part of natural-science education content on the base of conception of modern geometry about structure.

*Key words:* Integrative connections, thesaurus, substance of education, function approach, structure, fractal.

### 1. Анализ проблем интеграции<sup>1</sup>

Планирование процесса обучения и формирование обеспечивающих его организационных форм требует правильного формально-математического описания структуры содержания образования. Этой проблеме в педагогической литературе не уделено должного внимания. В работах, представленных в научно-педагогической литературе, основное внимание сосредоточено на вопросах определения понятия содержания образования, связи содержания образования с характеристикой различных сторон личности, объяснения исторически сложившегося содержания образования и разработке методов формирования содержания образования. Характер структуры содержания образования при этом подразумевался простейшим, опирающимся на множества, обладающие топологией, для которых можно использовать привычные понятия: окрестность выделенного элемента, граница множества, внутренняя часть множества, степень близости элементов и т. п. Некоторое разнообразие в язык описания привносит допущение о многомерности пространства параметров, харак-

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РГНФ № 07-06-00638А от 2 марта 2007 г. «Разработка подхода к построению структуры содержания непрерывного естественнонаучного образования».

теризующих личность, деятельность личности, содержание образования и другие объекты, которыми оперирует педагогика. Наиболее определено это выражено в книге «Содержание образования» видного отечественного исследователя В. С. Леднева. В разделе 3.2. «Основные типы структур» сказано: «Типов структур существует, как известно, много, и классифицируются они по различным признакам, но это тема философско-математического исследования» [17, с. 77–79]. Далее В. С. Леднев дает на нескольких примерах эмпирическую характеристику структур, встречающихся в педагогике. При этом он не пользуется языком описания структур, разработанным в математике, поскольку обоснованно видит свои задачи лежащими в иной плоскости.

Математика в настоящее время разработала аппарат, использующий другие виды множеств, отличные от упомянутых выше привычных нам множеств. Множества этого нового типа называются фрактальными, их отличительная особенность в том, что размерность Хаусдорфа – Безиковича<sup>1</sup> у них не совпадает с топологической размерностью и, как правило, выражается не целым, а дробным числом. Эти множества уже нашли успешное применение при описании сложных явлений природы, таких, например, как турбулентность, которой посвящено большое число работ и ряд монографий (в частности [5, 19, 30]). Понятийный аппарат и геометрические образы, которые есть в исследованиях фракталов, позволяют формулировать идеи, не имеющие смысла на языке множеств с привычной топологией. Так, возможным становится утверждение об одновременном наличии у некоторого объекта различных и даже противоположных качеств. Если не принимать во внимание существование фракталов, то нельзя даже сформулировать вопрос о том, какой тип структуры, известный из математики, наиболее адекватно передает характер объектов, рассматриваемых педагогикой. Обычно неявно предполагается, что для передачи существенных сторон этих объектов достаточно наиболее простых и привычных образов геометрии. До определенной степени это верно, что и создавало необходимый ресурс для исследования содержания образования, его детерминант, личности, деятельности личности. Но к настоящему времени этот ресурс, по нашему представлению, исчерпан, что приводит к трудностям как на уровне формирования понятийного аппарата педагогики, так и на уровне создания моделей ее объектов и описания их функционирования. Поэтому нами была предпринята попытка анализа структуры содержания непрерывного естественнонаучного образования (точнее, содержания общего образования) и его детерминанты – научного знания, рассмотренного в аспекте эволюции его структуры [11].

Для изучения эволюции структуры было естественно опереться на представления, сформированные синергетикой. Было установлено, что в первом приближении структуру научного знания и содержания общего образования можно представить древовидным графом, но более деталь-

---

<sup>1</sup> В конце статьи приведен словарь специальных терминов.

ный анализ показывает, что точки ветвления графа имеют собственную внутреннюю структуру. Этот факт позволяет предположить, что структура описываемых объектов имеет фрактальный характер. Такой вывод требует всесторонней проверки на материале объектов, традиционно исследуемых педагогикой и тесно связанных с предметом нашего исследования – содержанием непрерывного естественнонаучного образования, а также его детерминантой – научным знанием. В качестве такого объекта наиболее приемлема система интегративных связей.

Действительно, одна из сторон образования – обучение, составными частями которого являются предметные циклы, курсы, предметы (учебные дисциплины), их разделы и подразделы, это разбиение формирует содержание образования. Между различными элементами содержания образования реализуются связи различного уровня: межцикловые, межпредметные, внутривидовые и т. п. Нас будет интересовать только формальная сторона этого явления, и потому мы будем пользоваться общим термином «интегративные связи».

С формальной точки зрения интегративные связи являются одной из характеристик структуры содержания образования. По определению структура – это состав, строение, внутреннее устройство [12, 22]. Согласно этому определению структура содержания образования – перечень его относительно автономных частей, таких, как сквозные отрасли, предметные циклы, курсы, предметы, как это и понимает В. С. Леднев [17]. Но уточняет приведенное определение следующее дополнение: структура – «...совокупность устойчивых связей объекта, обеспечивающих его целостность и тождественность самому себе, т. е. сохранение основных свойств, при различных внешних и внутренних изменениях» [6]. Это уточнение требует рассматривать интегративные связи, формирующие наряду с логическими связями целостность и тождественность самому себе содержания образования, как элементы, характеризующие структуру содержания образования. Таким образом, интегративные связи неразрывно связаны с интересующим нас объектом – структурой содержания образования. Эта связь не выпала из внимания исследователей, так, например, проблемой интеграции образования как составной частью процесса формирования содержания образования занимался П. Ф. Кубрушко [16]. Но внимание было сосредоточено на собственно педагогических аспектах, а формально-математический характер структуры содержания образования и интегративных связей выпал из поля зрения. В данной работе мы сосредоточимся на проблеме характеристики структуры интегративных связей, учитывая, что эта характеристика переносится и на структуру содержания образования. Исследование собственно структуры содержания образования требует учета дополнительных соображений и оставлено вне рамок этой работы.

Исследованию интеграции в педагогике и близких к ней областях посвящено огромное количество трудов. Теорией интеграции образования в нашей стране занимались М. Н. Берулава, Н. В. Василенко, В. А. Игнатова, Б. М. Кедров, А. С. Кравец, С. В. Рябова, Ю. Н. Семин, О. М. Сичевича, Н. Р. Ставская, С. А. Старченко, Н. К. Чапаев и др. [2–4, 7, 13–15, 23–29, 31].

Особый раздел теории интеграции составляют исследования межпредметных связей различного уровня [1, 18, 20, 21 и др.], содержащие большой эмпирический материал, характеризующий и описывающий интегративные связи прямо и в опосредованной форме. В рамках обобщающей характеристики данных исследований следует признать наличие существенного рассогласования в характеристике структуры интегративных связей, свидетельствующее о существовании внутренних противоречий. Это проявляется, например, в существенном различии результатов классификации видов интеграции.

Б. М. Кедров различает три типа интеграции наук: цементацию, фундаментацию и стержнизацию. Под цементацией понимается процесс объединения наук, различающихся предметами исследования (например, объединение физики и химии в физическую химию). Фундаментация – тип интеграции, при которой методы исследования, присущие одной науке применяются при изучении объектов другой. Стержнизацией ученый называет процесс пронизывания частных наук более общими (например, математикой) [14].

А. С. Кравец выделяет 11 типов интеграции наук: экспансионистскую, генерализующую, экстенсивную, комплементарную, структурную, методологическую, концептуальную, метанаучную, комплексирующую, социокультурную, менеджментную. Они отличаются между собой объектами приложения, способами и целями [15].

Н. Р. Ставская различает теоретический и эмпирический уровни интеграции научного знания, а также «горизонтальную» (внутри каждой отдельно взятой отрасли знания) и «вертикальную» (между отраслями) интеграцию [28].

О. М. Сичивица рассматривает два основных типа интеграции научного знания: по предмету и по объекту исследования. Первая означает описание и объяснение явлений самой разной природы с некоторых общих позиций в рамках общих (междисциплинарных) теорий. Вторая осуществляется в рамках комплексных наук (например, металловедения, почвоведения и т. д.) [27].

Н. В. Василенко вводит системный, модульный и фрагментарно-понятийный уровни интеграции. Системный предполагает развитие теоретического мышления до понимания целостной информационной картины мира. Модульный – развитие навыков обобщения отдельных предметных областей по какому-либо критерию (время, пространство, морально-нравственные ценности, общеучебный инструментарий). Фрагментарно-понятийный уровень «ограничен умениями интеграции отдельных понятий» [7].

С. В. Рябова говорит о двух формах интеграции: комплексе и системе. «Комплекс представляет собой интегративную форму, в которой происходит соединение однородных по качеству или функциям элементов вокруг главного центра – интегранта... При этом каждый элемент представляет собой самостоятельное и автономное звено, способное существовать отдельно от комплекса». Система характеризуется «взаимосвязью и иерархией разнородных элементов относительно центра, выполняющих

различные функции и обладающих разным качественным статусом. При этом удаление хотя бы одного из компонентов приводит к изменению работы системы в целом» [23].

Неопределенность формальной характеристики системы интегративных связей проявляется и в других случаях, например, при анализе механизмов интеграции. Так, В. А. Игнатова вводит стадии взаимодействия элементов в процессе интеграции, которые характеризует следующим образом:

- начальный этап (первая стадия) – конвергенция, «сближение разнородных элементов, имеющих какие-то общие свойства»;
- вторая стадия – взаимодействие элементов интеграции, в результате которого «рождается некая целостность»;
- третья стадия – синтез, «высшая форма интеграции».

В результате «происходит ... интерференция – глубокое слияние и неразрывное единение элементов, образующих новое качественное состояние, устойчивую целостную динамическую систему, в которой все связано со всем посредством множества прямых и обратных связей». Автор отмечает, что не каждая интеграция заканчивается синтезом, для этого необходимы специальные условия, по-видимому, описываемые синергетикой для открытых самоорганизующихся систем. Пояснение, что интерференция – это глубокое слияние и неразрывное единение элементов не дает ответа на вопрос о природе такого слияния и критериях оценки степени его реализации. Очевидно, что затруднение, которое испытывает автор, связано с отсутствием формальной характеристики степени взаимодействия интегрируемых элементов, то есть с отсутствием описания структуры исследуемого объекта в рамках известных математических моделей. Именно это не позволяет конкретно охарактеризовать процесс интеграции, который В. А. Игнатова рассматривает как эволюцию структуры и на этом основании справедливо применяет для его интерпретации подходы, развитые синергетикой. Для интеграции научного знания в содержании обучения предлагается использовать основные понятия синергетики: «Основные понятия синергетики формулируют понятия – инварианты интеграции научного знания в содержании обучения: система, процесс, вероятность, флуктуация, энтропия, информация, обратная связь, кооперативное взаимодействие, внешнее резонансное воздействие, точка бифуркации, поле путей развития, фрактальность, устойчивость, аттрактор, диссипативная структура, самоорганизация, организация». Далее утверждается, что эти понятия «представляют естественную основу для понимания родства систем разной природы (физические, химические, геологические, биологические, социальные, языковые, научные и др.), общности механизмов их развития и взаимодействия с другими системами, являются стержневыми, выступают в качестве интеграторов в процессе объединения разных предметных полей, что, как показывает наш опыт, позволяет учащимся более глубоко осмыслить такие понятия, как: взаимодействие, взаимосвязь, развитие, периодичность и аперидичность, симметрия и асимметрия, эволюция и коэволюция, отбор, конкуренция и др.». Недостатком своего подхода автор считает то, что «... не

всегда можно найти те основания, которые бы объединяли такие межцикловые знания, как естественнонаучные и научные гуманитарные. ...Найти какие-то общие основания для их интеграции ... в настоящее время затруднительно, в поле межциклового интегрирования на теоретическом уровне ... используется принцип аддитивности и дополнительности» [13].

Последнее заключение фактически признает эмпирический характер интеграции в отношении межцикловых знаний. В основном эмпирическими остаются и методы установления межпредметных и внутрипредметных связей, поскольку только ограниченная часть этих связей, реализованных в педагогической практике, раскрывается через понятие эволюции и другие понятия, связанные с синергетикой.

Этот вывод переключается с мнением М. Н. Берулавы, который полагает, что существенным недостатком является интеграция различных предметов без учета их родства на общетеоретическом уровне. Подобный учет дает возможность синтезировать учебный предмет с новым содержанием, которое не является простой суммой содержаний интегрируемых дисциплин. И как новое целое меньше суммы составляющих его частей [2–4].

Наиболее последовательный анализ интеграции, учитывающий степень близости элементов даже количественно, проведен Ю. Н. Семиным [26] с опорой на тезаурусный метод [24] и метод групповых экспертных оценок, описанный В. С. Черепановым [33]. Конкретность этого анализа позволяет выявить основную проблему характеристики структуры. Поэтому опишем подход Ю. Н. Семина подробнее.

Поле установления интегративных связей являлся круг инженерных дисциплин, примыкающих к теоретической механике. В качестве экспертов привлекались преподаватели кафедр теоретической механики (ТМ) и сопротивления материалов (СМ) высших учебных заведений. К ним предъявлялись определенные требования по профессиональной компетенции. Были сформированы три экспертные группы для проведения педагогической экспертизы информационно-семантической, логической и временной структур систем дескрипторов теоретической механики (ТМ), теории машин и механизмов (ТММ) и сопротивления материалов (СМ). Экспертиза проводилась в два тура. По итогам работы с экспертами были сформированы перечни литературных источников для отбора дескрипторов, определена система их классификации и т. д. В результате экспертизы произведено ранжирование классов дескрипторов ТМ, ТММ и СМ, принята система «уровней усвоения» дескрипторов (феноменологический, операционно-алгоритмический, аналитико-синтетический), составлены таблицы основных параметров учебных тезаурусов отдельно ТМ, ТММ и СМ.

Педагогическая интеграция дисциплин ТМ, ТММ и СМ начата с их сопоставительных характеристик по признакам, характеризующим уровень фундаментальности дисциплин. Признаки определялись по частотному показателю. В результате проведенной работы составлены дидактические паспорта, которые совместно с учебными тезаурусами и структур-

но-иерархическими схемами научных теорий составляют объектную основу для дополнительного сопоставления ТМ, ТММ и СМ и их педагогической интеграции.

Для каждой из дисциплин были рассчитаны внутридисциплинарные связанности научных теорий с помощью относительного показателя связанности теорий, что позволило реализовать интеграцию трех дисциплин общепрофессионального типа.

Процедура «наложения» тезаурусов включает оценку пересекаемости множеств дескрипторов и междисциплинарной связанности теорий интегрируемых монодисциплин (рис. 1). Далее из учебных тезаурусов монодисциплин, взятых попарно, выделяются одинаковые или близкие по смыслу дескрипторы.

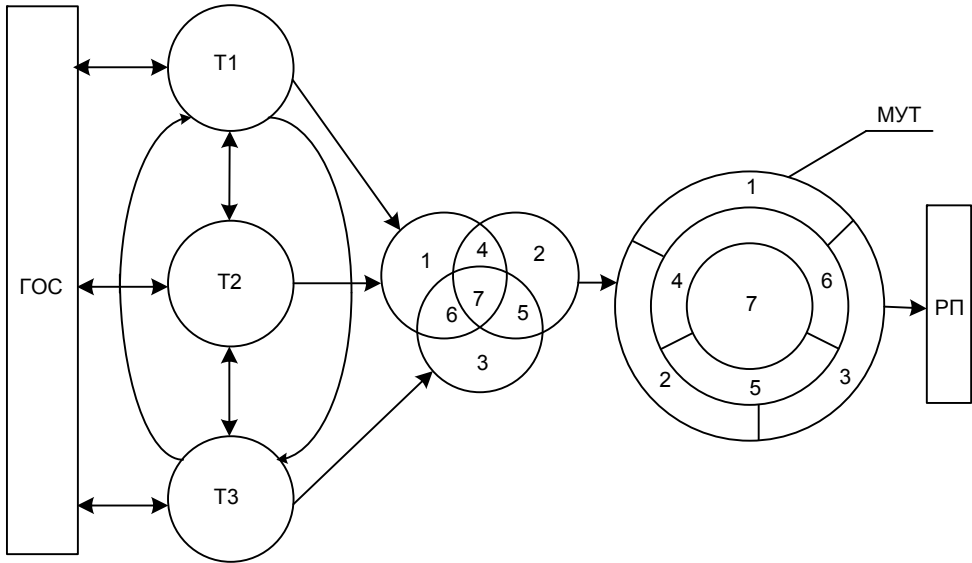


Рис. 1. Схема построения междисциплинарного тезауруса (МУТ):  
Т1, Т2, Т3, – учебные тезаурусы монодисциплин; 4, 5, 6, 7 – области  
«пересечения» тезаурусов; РП – рабочая программа [24]

Квантификация междисциплинарных связей осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом. Теснота связей двух дисциплин оценивается с помощью комплексного показателя междисциплинарной связанности, учитывающего «пересекаемость» дескрипторов, а также количество и «качество» указанных теорий [24].

По эмпирическим формулам рассчитывается комплексный показатель междисциплинарной связанности для пары дисциплин для выяснения того, какая пара связана теснее.

«Следуя общей схеме построения междисциплинарного учебного тезауруса (МУТ), с учетом полученных показателей внутри, и междисципли-

нарной связанности, формируется интегративное «ядро», содержащее дескрипторы и области «пересечения» тезаурусов всех дисциплин интегрируемой группы. Вокруг «ядра» «располагаются» дескрипторы из областей попарных «пересечений» тезаурусов. Наконец, на периферии МУТ формируются множества дескрипторов из «не пересекающихся» областей тезаурусов монодисциплины.

Полученная таким образом модель МУТ является основой для составления рабочей программы и разработки других составляющих междисциплинарного учебного комплекса (МУК) [26].

Таким образом, тезаурусный метод базируется на методе экспертных оценок, квалиметрических формулах эмпирического характера, методе наложения тезаурусов монодисциплин для выделения ядра (область 7 пересечения тезаурусов на рис. 1), являющегося основой рабочей программы междисциплинарного учебного комплекса.

Ю. Н. Семин применял метод экспертных оценок к учебным дисциплинам «Теоретическая механика», «Теория машин и механизмов» и «Сопротивление материалов». Квалиметрические формулы, являющиеся основой тезаурусного метода, представляют собой аналог эмпирических критериальных уравнений, опирающихся на физическую теорию подобия и хорошо известных специалистам, работающим в области общепромышленных дисциплин, базирующихся в свою очередь на теории механики сплошных сред. Эти критериальные уравнения хорошо работают при описании линейных или слабонелинейных процессов, как, например, критерий Рейнольдса в аэро- и гидродинамике, то есть процессов, предполагающих отсутствие резких качественных скачков свойств системы. Если процесс выраженно нелинейный, то критериальные формулы не применяются для его описания, так как свойства нелинейной системы резко меняются даже при малых изменениях параметров системы. Проводя аналогию, можно утверждать, что применение квалиметрических формул оправдано для близкородственных, генетически связанных объектов, какими являются дескрипторы учебных дисциплин «Теоретическая механика», «Теория машин и механизмов» и «Сопротивление материалов».

В случае применения этого подхода к циклу естественнонаучных и математических дисциплин ситуация усложняется, т. к. полем установления интегративных связей являются математика, физика, химия, биология и т. д. Переход от одной такой дисциплины к другой аналогичен переходу от одной части нелинейной системы к другой, это ситуация, когда применение критериальных уравнения не дает значимых результатов. Подход Ю. Н. Семин безусловно позволяет решить поставленные задачи, но для анализа интегративных связей фундаментальных дисциплин он представляется неэффективным из-за нецелесообразности применения квалиметрических формул и трудности использования метода экспертных оценок для ранжирования дескрипторов. Действительно, для этих дисциплин в роли экспертов фактически выступают многие поколения ученых, формировавшие их тезаурусы в течение всей истории существова-



ния каждой этих дисциплин. При этом (также исторически) сложилась иерархия дескрипторов, составляющих тезаурус той или иной научной, а значит, и учебной дисциплины. Казалось бы, это упрощает ситуацию, поскольку на первый взгляд представляется достаточным использовать сформированные исторически тезаурусы фундаментальных дисциплин (включая математические), взяв их из энциклопедий и других общепризнанных всем научным сообществом источников. Но более пристальное внимание к проблеме интеграции фундаментальных дисциплин на основе их тезаурусов обнаруживает принципиальные трудности.

На промежуточном этапе построения междисциплинарного тезауруса строится «пересечение» тезаурусов интегрируемых дисциплин, которое позволяет выделить области попарного «пересечения» 4–6 и ядро 7 – область наложения всех частных тезаурусов (см. рис. 1). Возможность такого построения кажется очевидной, но она зависит от природы множеств элементов тезаурусов. Она реализуется в том случае, когда можно оперировать такими понятиями, как граница множества и внутренность множества. Такое построение, безусловно, можно выполнить, если это множества элементов тезаурусов определенного типа и их топологическая размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа – Безиковича. В других случаях не исключена ситуация, когда построение тезауруса окажется неоднозначным, поскольку связь элементов множества (в нашем случае понятий, которые включены в тезаурусы), степень их близости могут быть неопределенными, если соответствующие множества имеют фрактальную природу.

Построение, аналогичное в плане идеологии подходу Ю. Н. Семина, было предложено нами для определения характера междисциплинарного тезауруса в случае точных наук (математики и естественнонаучных дисциплин) [10]. Но в случае фундаментальных научных дисциплин сомнение в природе множеств понятий, которыми они оперируют, становится обоснованным, что не было учтено в упомянутой работе. Считается, что фундаментальные дисциплины образуют иерархическую систему, причем дисциплины более высокого уровня не требуют использования понятий дисциплин более низкого уровня. Так биологию можно строить на основе понятий химии и физики, а химию на основе понятий физики. Как выяснилось при создании квантовой механики и теории относительности, сказанное верно только при некотором огрублении. В этих научных дисциплинах выяснилось нетривиальное значение того обстоятельства, что результаты определения состояния исследуемых объектов (микрообъектов и тел, движущихся с большими скоростями) должны выражаться в терминах состояния макроскопических систем, при помощи которых производится измерение. Макроскопические системы – это системы, соразмерные привычным для нас масштабам и без большой натяжки их масштаб можно отождествить с масштабом биологических объектов.

Альберт Эйнштейн свои лекции об основах теории относительности, прочитанные в 1921 г. в Принстонском университете, начинает с утверждения, так же связанного с проблемой измерения (точнее, с проблемой

фиксации состояний окружающего мира): «Всякая наука, будь то наука о природе или психология, стремится систематизировать наши переживания и уложить их в логическую схему»; «Понятия и системы понятий ценны для нас лишь постольку, поскольку они облегчают нам обозрение комплексов наших переживаний; другого оправдания они не имеют» [34]. Этим признано, что любое измерение состояния физической или химической системы сводится к фиксации состояний биологической системы и что понятия физики и химии не могут быть исчерпывающе определены без опоры на понятия биологии и психологии. Фактически об этом говорит А. Эйнштейн: «На мой взгляд, величайшее преступление философов состоит именно в том, что они перемещают некоторые основные понятия наук о природе из доступной контролю области эмпирически целесообразного на недоступные высоты мысленно-необходимого (априорного); ибо если и показано, что мир понятий не может быть построен при помощи логики или каким-либо иным путем из наших переживаний, но представляется в известном смысле свободное творение человеческого духа, тем не менее, он столь же мало независим от наших переживаний, как, например, платье от формы человеческого тела. В особенности это верно по отношению к нашим понятиям времени и пространства...» [Там же].

Если следовать логике Эйнштейна, основные понятия фундаментальных наук детерминированы нашими психологическими и биологическими свойствами, хотя выразить эту связь логически затруднительно. Это затруднение, по-видимому, связано с тем, что, в свою очередь, понятия биологии и психологии невозможно исчерпывающе определить, не опираясь на понятия физики и химии.

Наиболее фундаментальное выражение этой проблемы дает знаменитая теорема Геделя «О неполноте аксиоматической системы». Ее смысл в том, что невозможно в рамках любой аксиоматической системы дать критерии истинности всех ее суждений, т. е. неизбежным становится выход за пределы всякой аксиоматической системы. Другой стороной той же проблемы является использование индуктивных понятий в рамках формальной логики. Всякое индуктивное понятие определяется объемом и содержанием [32]. Определение логического понятия строится на основе указания его связей с другими понятиями, которые фигурируют в качестве существенных признаков данного понятия, т. е. формируют содержание определяемого понятия. При этом нет однозначного критерия, согласно которому выбранные признаки относятся к существенным. В пределе исчерпывающее определение логического понятия требует установления его связей со всеми остальными понятиями.

В этом пределе элементы любого тезауруса связаны между собой, поскольку основой всех тезаурусов являются индуктивные понятия. Разумеется, в реальной практике любое понятие определяется с некоторым огрублением. Практически это огрубление производится на основе некоторого произвола при отборе существенных признаков логического понятия. Обычно их отбор диктуется сложившейся традицией, то есть не поддается строгому контролю

и допускает произвол. Степень этого произвола можно признать низкой при рассмотрении близких инженерных дисциплин, что и демонстрирует эффективность построения междисциплинарного тезауруса Ю. Н. Семиным. Но история появления квантовой механики и теории относительности показывает, что приложение этого подхода к фундаментальным естественнонаучным дисциплинам требует более тщательного определения связей элементов и характеристики их множеств. Для более ясной формулировки возникающей проблемы допустим, что в качестве монодисциплин на рис. 1 взяты физика, химия и биология. Но для определения любого понятия каждой из этих дисциплин используются представления о пространстве и времени. Это делает невозможным строгое отнесение какого-либо понятия только к области биологии (или только к области физики или химии), что означает: все дескрипторы в явной или скрытой форме, с большим или меньшим «весом» присутствуют во всех частях множеств 1–7, показанных в центральной части рис. 1. Возникает, следовательно, не просто проблема отнесения данного дескриптора к той или иной части объединения множеств 1–7, а проблема разработки подхода, позволяющего характеризовать «вес» присутствия данного дескриптора (понятия) в другом дескрипторе (понятии). Такой подход требует отождествления дескриптора (понятия) не с элементом, который можно изобразить точкой, локализованной в некотором пространстве, а с множеством элементов, распределенных в пространстве с переменной плотностью. Степень связи дескрипторов (понятий) можно выразить с помощью «перекрывтия» множеств элементов, соответствующих двум дескрипторам (понятиям), причем, возможны такие способы введения этой связи, при которых рост степени «перекрывтия» множеств приводит к росту взаимной связи, но «вес» первого понятия во втором и вес второго в первом не одинаковы. Например, «вес» понятия можно отождествить со средней вероятностью попадания элементов множества, изображающего это понятие между элементами множества, изображающего второе понятие.

Исходя из принципа соответствия, предлагаемый подход к построению тезаурусов в общем случае должен опираться на множества, которые в одном пределе имеют размерность Хаусдорфа – Безиковича, равную топологической размерности (т. е. множества того типа, которые положены в основу методики Ю. Н. Семина), а в другом пределе они должны иметь свойства, при которых в произвольной окрестности элемента с определенной характеристикой находятся элементы с другими характеристиками (что лучше соответствует потребностям анализа интеграции фундаментальных дисциплин). Поясним, о чем идет речь во втором случае, используя «коврик Серпинского». При построении коврика вначале вырезают среднюю часть базового квадрата, разделенного на девять равных квадратов со сторонами в три раза меньше, чем у исходного [8, 19]. Затем так же поступают с каждым из восьми квадратов, лежащих по краям исходного квадрата (см. рис. 2). При следующем шаге соответственно поступают с маленькими квадратиками, лежащими на периферии каждого из восьми упомянутых выше квадратов. Эта процедура про-

должается до бесконечности. Оставшееся множество изолированных точек является фракталом и называется ковриком Серпинского. Оно расположено на площади исходного квадрата, но его собственная площадь равна нулю. Это вызывает удивление, поскольку на каждом шаге из каждого квадратика вырезается площадь, равная одной девятой его площади, и при любом конечном числе шагов остаток представляется значительным фрагментом исходного квадрата, что подтверждает вид результата пятой итерации, представленной на рис. 3. Тем не менее, легко показать, что при бесконечном повторении процедуры вырезанная площадь в точности равна площади исходного квадрата, то есть площадь остатка (им является коврик Серпинского) равна нулю. С формальной точки зрения это связано с тем, что размерность Хаусдорфа – Безиковича квадратного коврика Серпинского  $D(\text{Серп.}) = \ln 8 / \ln 3 = 1,8928$  меньше размерности вмещающего квадрата  $D(\text{Кв}) = 2^1$ . С точки зрения нашего обсуждения эти обстоятельства важны, потому что в соответствии с ними в пределах площади исходного квадрата можно разместить и другой фрактал, и даже бесконечное множество фракталов. Создать в пределах той же площади другие фракталы можно разными способами, например, просто совмещая в пространстве коврик Серпинского и салфетку Серпинского (в ее основе лежит треугольник), или любой другой фрактал со значением размерности, лежащим в пределах от единицы до двух ( $1 < D < 2$ ). Другая возможность связана с тем, что, в силу построения, элементы множества коврика Серпинского определенным образом локализованы относительно исходного квадрата. Если допустить их смещение, то возникнет другой фрактал на той же площади. Если считать, что элементы каждого фрактала обладают своей особой характеристикой, например цветом, то нетрудно сконструировать объект, являющийся наложением множества фракталов, у которого в любой окрестности элемента данного фрактала находятся элементы других фракталов<sup>2</sup>. Это решает проблему взаимной включенности понятий фундаментальных дисциплин друг в друга.



Рис. 2. Первые два шага при построении квадратного коврика Серпинского [5]

<sup>1</sup> Множество точек квадрата имеет привычный характер, и для него топологическая размерность и размерность Хаусдорфа – Безиковича имеют равные значения:  $D_t(\text{Кв}) = D(\text{Кв}) = 2$ .

<sup>2</sup> Отметим, что здесь понятие окрестности построено на основе исходного множества (например, множества точек первичного квадрата), а не множества, для элементов которого строятся окрестности.

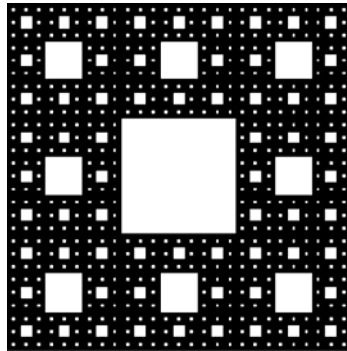
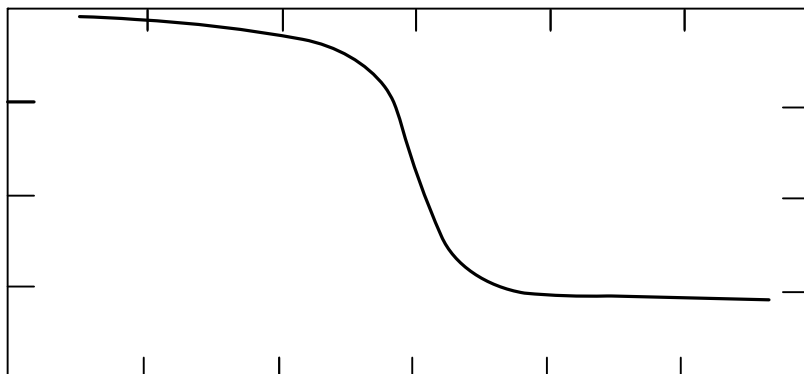


Рис. 3. Результат пяти итераций при построении квадратного коврика Серпинского [5]

Остается смоделировать на языке фракталов возможность перехода к ситуации, когда понятия рассматриваются как элементы множеств или замкнутые подмножества множеств с обычной топологией. В этом случае понятиями можно оперировать в рамках подхода, развитого Ю. Н. Семиным. Для создания такой возможности целесообразно использовать понятие неоднородного фрактала или мультифрактала. Эти математические объекты были сконструированы для описания систем с распределенными в пространстве свойствами. Об этом сказано, например, в монографии Е. Федера «Фракталы»: «С исследованием распределения физических, или каких-нибудь других величин на геометрическом носителе связаны *мультифрактальные меры*» [30, с. 73]. Сущность этого объекта в наложении друг на друга фракталов с различными фрактальными размерностями, как это следует из той же монографии: «Мера  $M(x)$  популяции, распределенной по единичному отрезку, полностью характеризуется объединением фрактальных множеств. Каждое слагаемое в объединении фрактально и имеет свою фрактальную размерность. Это одна из причин обусловивших выбор термина – *мультифрактал*» [30, с. 80]. Наложение фракталов позволяет сформировать объект, характеризующийся не единственным значением, а целым спектром фрактальных размерностей. Такой спектр показан на рис. 4. Геометрической основой канторовской пыли является отрезок прямой. Топологическая размерность отрезка прямой равна единице. На рисунке видно, что в пределе фрактальная размерность данного мультифрактала стремится к единице, т. е. стремится к топологической размерности геометрического объекта (отрезка), на котором размещен мультифрактал. Следовательно в этом пределе свойства мультифрактала приближаются к свойствам геометрического объекта с обычной топологией.



$D_q$  1,0

Рис. 4. Спектр фрактальных размерностей  $D_q$  как функция порядка  $q$  момента для триадной канторовской пыли [30]

Если принять во внимание, что в общем случае фрактальная размерность может быть различной в различных частях мультифрактала, т. е. может зависеть от положения участка мультифрактала на геометрической основе, то в нашем распоряжении оказываются геометрические объекты, в одной части которых их свойства близки к свойствам привычных нам геометрических фигур, а в другой части эти свойства аналогичны свойствам однородного фрактала. На возможность этого указывает способ определения фрактальной размерности, как отмечено Е. Федером: «Заметим, что в приведенном выше определении размерность Хаусдорфа – Безиковича фигурирует как *локальное* свойство в том смысле, что эта размерность характеризует множество точек в пределе при исчезающе малом диаметре, или размере,  $\delta$  пробной функции, используемой для покрытия множества. Следовательно, фрактальная размерность  $D$  может также быть локальной характеристикой множества» [30, с. 22]<sup>1</sup>. Еще более отчетливо такая возможность указана в монографии Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», в которой «обсуждаются нитевидные фрактальные деревья и другие почти масштабно-инвариантные фракталы... Эти фракталы оказываются неоднородными в том смысле, что для разных частей таких множеств размерности  $D$  и/или/  $D_T$  принимают различные значения» [19]. Пример неоднородного фрактала (мультифрактала) показан на рис. 5.

<sup>1</sup> В других источниках фрактальная размерность называется размерностью Хаусдорфа – Безиковича или размерностью Хаусдорфа. В приведенной цитате выделение курсивом принадлежит автору цитируемого текста.

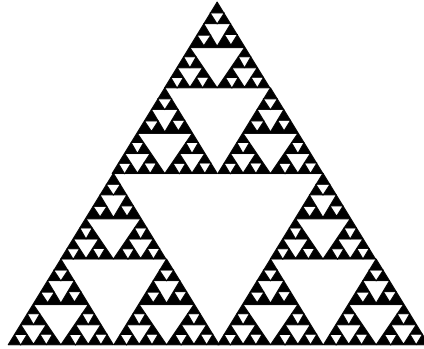


Рис. 5. Неоднородный фрактал (мультифрактал), построенный методом случайной генерации положений точек при построении треугольной салфетки Серпинского [5]

Таким образом, отождествляя понятия (дескрипторы) не с элементами множеств, а с мультифракталами, мы приобретаем возможность перевести на язык геометрических образов представление о связи понятий (дескрипторов), оперировать представлением о различной степени связи понятий (дескрипторов) и даже рассматривать возможность взаимной связи всех понятий (дескрипторов) между собой. С другой стороны, в пределе обычной топологии<sup>1</sup> сохраняется возможность оперировать понятиями (дескрипторами) как элементами множеств или замкнутыми подмножествами. Реализация представленной идеи может помочь придать формальный смысл таким пока неопределенным понятиям педагогической теории интеграции, как конвергенция (сближение) элементов, взаимодействие элементов и интерференция (синтез) элементов характеризующим три стадии процесса интеграции в его описании В. А. Игнатовой [13]. В определенном смысле степень интеграции элементов, распределенных в пространстве, – это вопрос выбора масштаба. На индуктивном этапе развития научного знания, т. е. до отделения от общего ствола знания математики (и логики)<sup>2</sup>, безусловно, существовали элементы математических, физических, химических и др. знаний, но они сливались в одно целое. Это слитное существование можно трактовать различными способами, например, так: один и тот же человек в процессе своей деятельности свободно переходил от одних фрагментов знания к другим, т. е. отсутствовала специализация. Поэтому с точки зрения «большого масштаба»,

---

<sup>1</sup> Интуитивно этот предел можно связать со степенью строгости (детальности) определения понятия, т.е. с масштабом области учитываемых связей. В случае фракталов фактор масштаба играет важную роль.

<sup>2</sup> Их отделение можно связать с доказательством Фалесом из Милета (~600 г. до н. э.) первых теорем геометрии.

заданного временем профессиональной деятельности, все эти фрагменты знания сливались просто в знание. Аналогичная ситуация имеет место и сейчас, когда воспитатель в старшей группе детского сада или учитель младших классов школы свободно чередует в процессе занятий элементы арифметики с элементами физических и биологических представлений. Вследствие дифференциации научного знания (дедуктивный этап развития, после Фалеса) происходил быстрый рост числа понятий в каждой отделившейся области, или, говоря другими словами, ее собственный масштаб рос и в конце концов превзошел масштаб (прежде всего временной) профессиональной деятельности личности. Это, по-видимому, произошло в период исчезновения энциклопедистов. И снова аналогию описанному выше нетрудно отыскать в области педагогики. Но с позиций другого масштаба, характеризующего, например, деятельность определенного социального института или всего общества, собственные масштабы элементов научного знания могут рассматриваться как малые, и в этом смысле можно говорить о естественнонаучном знании, или о точном знании, или о научном знании в целом.

Для всего сказанного аналогом может быть картина, состоящая из множества отдельных фресок. Рассматривая ее с различных расстояний, мы можем видеть на малом удалении одну фреску в деталях, а на большем расстоянии перед нами предстанет картина в целом. Фракталы (и порожденные ими мультифракталы) являются очень удобными объектами с точки зрения формализации рассмотренных выше явлений. Это связано с тем, что фракталы имеют самоподобную структуру, характерной особенностью которой является циклическая зависимость средних параметров от плавно изменяющегося масштаба выделенной области. Обратно говоря, собственный масштаб «вшит» в природу фракталов в процессе построения. Поэтому имея дело уже с одним мультифракталом, можно говорить о зависимости вклада составляющих его фракталов от выбора масштаба и положения выделенной области. В одном случае основной вклад даст один фрактал, в другом – второй, а в третьем случае их вклады окажутся равны. Переходя к наложению мультифракталов, те же представления можно перенести на их взаимный вклад, т. е. на степень связи понятий, если принять отождествление понятий с мультифракталами. С этих позиций процесс сближения интегрируемых объектов, их взаимодействия и интерференции (синтеза), о которых говорит В. А. Игнатова, можно трактовать как поиск области в пространстве распределения «понятий», где они сочетаются наилучшим образом. В результате можно рассчитывать на формирование критериев, разделяющих стадии интеграции, что создает возможность управления процессом интеграции и его оптимизации.

В заключение необходимо отметить неподготовленность базы педагогики к немедленному переходу на новый язык описания и отсутствие соответствующих математических моделей. Так в случае уже ставшего привычным применения фракталов в географии, физике и т. п., например, при



изучении свойств береговой линии, установление свойств геометрического носителя фрактала или мультифрактала не вызывает проблем. В случае же объектов теории научного знания и педагогики (логические понятия, личность, деятельность личности и их характеристики) неясно, что является пространством, в которое они вложены. Это приводит к необходимости при интерпретации наблюдаемых в этих областях явлений ставить задачу не только поиска подходящих фракталов, но и одновременную задачу поиска подходящего геометрического носителя. Тем не менее, неизбежный этап качественного описания явлений педагогики и научного знания на уровне применения новых математических понятий необходим и продуктивен, так как: 1) прежде полномасштабного построения моделей необходимо получить подтверждение действенности предлагаемого подхода на доступном уровне описания, 2) должна произойти взаимная притирка (аккомодация) современных математических методов и способов описания, применяемых в педагогике (теории содержания естественнонаучного образования и ее эмпирической основы), 3) уже на этом этапе можно рассчитывать получить полезные для педагогики результаты. Эта надежда связана с тем, что математически точные высказывания типа: «в любой окрестности данного элемента присутствуют элементы, обладающие как признаком А, так и признаком Б», «объекты имеют самоподобную структуру» – присутствуют при описании эмпирического материала педагогики (интегративные связи, содержание образования и т. п.)

Задачей данной работы была только постановка проблемы описания объектов педагогики<sup>1</sup> на языке фракталов и использования их характеристик для уточнения понятийного аппарата педагогики. Количественное описание требует длительной и тщательной подготовки.

*(продолжение следует)*

### **Словарь специальных терминов**

*Объем индуктивного понятия* – все объекты, описываемые понятием.

*Содержание индуктивного понятия* – перечень существенных признаков понятия.

*Топология* – раздел математики, изучающий взаимное расположение геометрических объектов (нестрогое определение).

*Размерность топологическая* – число измерений (целое число) геометрического объекта.

*Размерность Хаусдорфа – Безиковича* – число, полученное при построении системы покрытий геометрического объекта (обычно дробное, не совпадающее со значением топологической размерности «основы», вмещающей данный объект).

---

<sup>1</sup> Здесь объекты педагогики, включая ее теоретические конструкции, рассматриваются как эмпирический уровень описания по отношению к теоретическому уровню, роль которого играет язык формально-математических (топологических) моделей.

*Фрактал* – геометрический объект с размерностью Хаусдорфа – Безиковича, не равной топологической размерности (представляет собой набор изолированных точек).

*Масштабно-инвариантные (однородные) фракталы* – объекты свойства которых меняются периодически при изменении линейного масштаба, выделенной области.

*Мультифрактал* – неоднородный фрактал образованный совмещением однородных фракталов.

*Канторовская пыль* – фрактал, построенный итерациями на основе процедуры извлечения средней части отрезка (набор изолированных точек, расположенных на отрезке).

*Фрактальные деревья* – ломанные линии, образованные бесконечным ветвлением.

*Критерий Рейнольдса* – физический параметр значения которого определяют характер течения жидкости.

*Принцип соответствия* – требование получения одинаковых результатов двух теорий в области их совместного действия. Пример: классическая механика и специальная теория относительности дают одинаковые результаты при значениях скорости тела малых по сравнению со скоростью света.

### Литература

1. Беляева А. П. Научные основы межпредметных связей в средних профтехучилищах. Л.: ВНИИ профтехобразования, 1986. 112 с.
2. Берулава М. Н. Интеграция содержания образования. М.: Педагогика, 1993. 172 с.
3. Берулава М. Н. Интеграция содержания общего и профессионального обучения в профтехучилищах: теоретическо-методологический аспект. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. 221 с.
4. Берулава М. Н. Теоретические основы интеграции образования. М.: Совершенство, 1998. 192 с.
5. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы: учеб. пособие. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.
6. Большой энциклопедический словарь: в 2-х т., Т. 2: Н – Я / гл. ред. А. М. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1991. 768 с.
7. Василенко Н. В. Интеграция знаний на основе использования новых информационных технологий в общеобразовательной школе: автореф. дис. ... канд. пед. наук. СПб., 2001. 17 с.
8. Гапонцева М. Г. Геометрия фракталов: метод. разработка по НИРС. 4054. Екатеринбург: Рос. гос. проф.-пед. ун-т, 2005. 34 с.
9. Гапонцева М. Г. Интегративный подход в содержании непрерывного естественнонаучного образования: дис. ... канд. пед. наук. Екатеринбург, 2002. 145 с.

10. Гапонцева М. Г., Гапонцев В. А., Ткаченко Е. В., Федоров В. А. Курс «Естествознание» как интегрирующий фактор непрерывного образования // Образование и наука: Изв. Урал. отд. РАО. 2001. № 3(9). С. 3–17.
11. Гапонцева М. Г., Федоров В. А., Гапонцев В. А. Эволюция научного знания – детерминанта содержания образования с позиций синергетического подхода // Актуальные проблемы управления качеством образования: сб. науч. ст. / под ред. Е. В. Яковлева. Вып. 12. Челябинск: Изд-во ЧГИ, 2007. С. 27–33.
12. Даль В. И. Толковый словарь русского языка: в 4-х т. М.: Рус. яз., 2000.
13. Игнатова В. А. Интегрированные учебные курсы как средство формирования экологической культуры учащихся: автореф. дис. ... д-р пед. наук. Тюмень, 1999. 46 с.
14. Кедров Б. М. О синтезе наук // Вопр. философии, 1973. № 3. С. 4–7.
15. Кравец А. С. Типы интеграционных процессов в науке // Материалы 3-го Всесоюз. совещания по философ. вопросам. соврем. естествознания. Вып. 1. М.: 1981. С. 176–179.
16. Кубрушко П. Ф. Содержание профессионально-педагогического образования. М.: Высш. шк., 2001. 236 с.
17. Леднев В. С. Содержание образования: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1989. 360 с.
18. Максимова В. Н. Межпредметные связи в учебно-воспитательном процессе современной школы: учеб. пособие по спецкурсу для студентов пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1987. 160 с.
19. Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 656 с.
20. Махмутов М. И., Шакирзянов А. З. Учебный процесс с использованием межпредметных связей в ПТУ: метод. пособ. М.: Высш. шк., 1985. 207 с.
21. Межпредметные связи естественно-математических дисциплин: пособие для учителей / под ред. В. Н. Федоровой. М.: Просвещение, 1980. 208 с.
22. Ожегов С. И. Словарь русского языка / под ред. чл.-корр. АН СССР Н. Ю. Шведовой. М.: Рус. яз., 1989. 750 с.
23. Рябова С. В. Интегративный подход к преподаванию мировой художественной культуры в средней школе: дис. ... канд. пед. наук. Уфа, 2001. 164 с.
24. Семин Ю. Н. Теория и технология содержания общепрофессиональной подготовки в техническом вузе: автореф. дис. ... докт. пед. наук. Екатеринбург, 2001. 42 с.
25. Семин Ю. Н. Квалитативная технология междисциплинарной интеграции содержания общепрофессиональной подготовки // Образование и наука: Изв. Урал. отд. РАО, 2001. № 3(9). С. 76–80.

26. Семин Ю. Н. Теория и технология интеграции содержания общепрофессиональной подготовки в техническом вузе. дис. ... докт. пед. наук. Ижевск, 2001. 402 с.

27. Сичивица О. М. Сложные формы интеграции науки: многр. М.: Высш. шк., 1983. 152 с.

28. Ставская Н. Р. Философские вопросы развития современной науки (Социологические и методологические проблемы интеграции науки): учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1974. 231 с.

29. Старченко С. А. Интеграция содержания естественнонаучного образования в лицее (теоретико-практический аспект). М.: Издат. дом «Подмосковье», 2000. 280 с.

30. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.

31. Чапаев Н. К. Категориальное поле органической парадигмы интеграции: персоналистски-педагогический аспект // Понятийный аппарат педагогики и образования: сб. науч. тр. / отв. ред. Е. В. Ткаченко. Вып. 1. Екатеринбург, 1995. С. 61–77.

32. Челпанов Г. И. Учебник логики. М.: Издат. группа «Прогресс», 1994. 248 с.

33. Черепанов В. С. Экспертные оценки в педагогических исследованиях. М.: Педагогика, 1989. 152 с.

34. Эйнштейн А. Основы теории относительности. М.; Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР; Глав. редакция общетехн. лит. и номотехники. 1935. 106 с.

УДК 510.6(091)

И. А. Иванов

## ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРИМЕНЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

В статье рассматриваются исторический аспект, состояние и перспективы развития вопроса привлечения логики прикладной математики для построения математических моделей и использования ее в обучении математике как в школе, так и в вузе.

*Ключевые слова:* прикладная математика, рациональная логика, рационализм, конструктивизм, формальная логика.

The article is devoted to the historical aspect, current state and perspectives of the issue on applied mathematics logic usage in simulators patterning and its further application both in secondary and high school teaching.

*Key words:* applied mathematics, rational logic, rationalism, constructivism, formal logic.