ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 37.013.75

Н. И. Попов

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В статье предложена модель технологии обучения на основе текстовых алгебраических задач. Модель построена с использованием разработанной автором классификации задач на составление уравнений.

Ключевые слова: текстовые алгебраические задачи, схематическая модель.

The article presents the model of pedagogical teaching technology based on textual algebraic problems. The above-mentioned model was created by means of using problem classification for equations making.

Key words: textual algebraic problems, schematic model.

Проблеме логико-психологического анализа задач в научно-методической литературе посвящено немало работ [1, 3, 9]. В методике обучения математике многие годы была распространена следующая классификация: а) задачи на доказательство; б) задачи на построение; в) задачи на вычисление. Данная классификация в какой-то степени предопределяла метод решения каждого типа заданий. Однако в связи с расширением целей обучения в школьном курсе математики стали появляться задачи, не укладывающиеся в традиционную типологию. К. И. Нешковым и А. Д. Семушиным была предложена иная классификация: а) задачи с дидактическими функциями; б) задачи с познавательными функциями; в) задачи с развивающими функциями [5].

По мнению Г. И. Саранцева, следует группировать примеры и упражнения по методам их решения: задания на геометрические преобразования, задания на векторы и т. д. В зависимости от числа объектов, имеющихся в условии, и связей между ними задачи делятся на сложные и простые. Кроме того, выделяются задачи стандартные и нестандартные, теоретические и практические. Автор отмечает, что многие классификации относительны, так как они не удовлетворяют логическим требованиям, предъявляемым к классификации объектов, поэтому правильнее было бы говорить об объединении заданий и упражнений в группы (типологии задач) [8].

Впервые методика решения задач в достаточно общем виде была разработана Д. Пойа и представлена в известной книге «Как решать задачу» [6]. Важнейший компонент умения анализировать задание – навык преобразования требования задачи в равносильное ему. Проблема формирования этого умения непосредственно связана с вооружением обучаемых как можно большим числом признаков и свойств понятий. Осуществление анализа задания предполагает наличие ассоциаций: осознание термина, обозначающего понятие, осознание его характеристических свойств. Очевидно, что одним из важных исследовательских компонентов является умение составлять вспомогательные задачи и находить различные методы решения. При поиске способа решения существенны следующие моменты: распознавание объектов, умение соотносить с условием и требованием задания свои мыслительные действия и работу с чертежом, оценивание своих действий с точки зрения целесообразности, распознавание ситуаций, удовлетворяющих условию задачи. В отдельных случаях достичь успеха помогает знание специальных эвристик, применение методов научного познания, в частности анализа и обобщения.

Задачи на составление уравнений представляют собой традиционный раздел элементарной математики, их решение способствует развитию логического мышления и умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования, формированию навыков моделирования реальных объектов и явлений, повышает вычислительную математическую культуру. Кроме того, условия текстовых задач возникают не абстрактно и тесно связаны с реальными жизненными ситуациями. Следовательно, выработка умений и навыков решения задач на составление уравнений непосредственно приводит к практическому применению теоретических знаний.

В методике преподавания математики, как правило, используются следующие этапы решения задач на составление уравнений:

1) анализ текста задачи;
2) поиск способа и составление плана решения;
3) осуществление составленного плана;
4) анализ полученного решения.

Однако в реальности процесс выполнения задания не обязательно включает все указанные этапы. Это зависит от того, насколько обучаемому известен метод решения текстовой задачи. Все же следует иметь в виду, что выделенные этапы служат той ориентировочной основой, опираясь на которую преподаватель управляет действиями обучаемых по формированию способов решения рассматриваемых задач. Каждый этап имеет свои признаки, руководствуясь которыми педагог-предметник формирует у учащихся компоненты общего умения выполнять задания и упражнения [4].

На *первом этапе* цель преподавателя – усвоение обучаемыми текста задачи. Исходным является выделение в задании условия, т. е. данных и отношений между ними, и требования задачи. Дальнейшее сопоставление условия и требования позволяет выявить в задаче основное соотношение, непосредственно связанное с решением; как правило, оно имеет вид функциональной зависимости. Важное значение придается краткой записи текста задания, составлению схем, рисунков.

Схемы и рисунки дают наглядное представление о содержании задачи и зависимостях величин, входящих в нее. Еще большую роль играет схема в виде модели, выявляющей скрытые зависимости между величинами. Поэтому составлению кратких записей и схем по тексту задачи необходимо специально обучать.

Соотнесение условия и требования задания позволяет выяснить, достаточно ли информации для ответа на вопрос задачи, не содержит ли она противоречивых или лишних данных. На начальном этапе решения необходимо также актуализировать теоретическую и практическую основу выполнения рассматриваемого задания, определить, не принадлежит ли задача к ранее изученному (известному) типу.

На *втором этапе* выполнения задания выясняется стратегия решения:

- устанавливается, будет ли неизвестным, относительно которого составляется уравнение, искомая величина или же промежуточная; если сначала определяется промежуточная величина, то искомая выражается через нее;
- определяется: по какому компоненту основного соотношения будет составлено уравнение, или же оно будет получено с использованием всех его компонентов (т. е. для каких величин соответствующие выражения будут приравниваться).

Далее осуществляется аналитико-синтетический поиск метода решения задачи, который завершается получением уравнения.

На *третьем этапе* процесса решения реализуется составленный план, выполняется проверка соответствия действительности полученного утверждения на вопрос задания, после чего записывается ответ.

Четвертый этап – анализ полученного решения, имеющий целью выделение главной идеи решения и ключевых моментов выполнения задания. При этом выясняются недостатки и производится поиск другого, более рационального метода решения задачи, выявляются и закрепляются в памяти обучаемых подходы, использованные в ходе выполнения задания. В психолого-дидактических исследованиях отмечается, что данный этап способствует закреплению знаний и служит средством более эффективного обучения решению задач [9].

В учебном пособии «Задачи на составление уравнений» нами был предложен вариант обучающей технологии: разработана методическая схема (необходимая теория, типовые методики, задачи для самостоятельного решения с ответами), описаны характерные особенности и специфика методов решения с подробным разбором каждого типа заданий, тщательно проведена классификация задач [7]. Среди задач, восходящих к стандартным постановкам, выделены:

- задачи на «отношения», «пропорции» и «проценты»;
- задачи на «сложные проценты» и «банковские задачи»;
- задачи на «работу»;
- задачи на «движение»;
- задачи на «прогрессии»;
- задачи на «числа».

Нами также предпринята попытка выработки единого подхода к задачам с нестандартными постановками и к заданиям, допускающим пересечение обоих циклов задач, т. е. стандартных и нестандартных. Это дает возможность по-новому взглянуть на указанные текстовые алгебраические задачи и высветить особенности методики их решения. Например, при решении задач на «сплавы», «смеси» и «концентрации» для определения концентрации соли в растворе после n переливаний имеем, с одной стороны, соотношение $C_n = \frac{p}{100}(1 - \frac{a}{V_0})^n$ представляющее собой формулу для убывающей геометрической прогрессии. Множитель $(1 - \frac{a}{V_0})$, где $0 < \frac{a}{V_0} < 1$, являющийся знаменателем этой прогрессии, показывает, во сколько раз убывает концентрация соли после очередного переливания. С другой стороны, эта формула тесно связана с известным правилом начисления «сложных процентов».

Иногда решение текстовых задач приводит к тому, что число уравнений в системе оказывается меньше числа неизвестных. Если выбирать переменные для составления уравнений, руководствуясь тем, чтобы получить удобное и простое математическое оформление условий задачи, то та величина, которую необходимо найти, может не войти в их число. Как правило, эта величина представляется некоторой комбинацией введенных неизвестных. Поэтому может случиться так, что однозначное определение всех переменных из системы уравнений невозможно, однако искомая комбинация этих неизвестных тем не менее находится однозначно.

В отдельную группу можно объединить те задачи, для решения которых необходимо найти экстремум той или иной функции, т. е. определить, при каких значениях неизвестного эта функция достигает наибольшего или наименьшего значений. В некоторых случаях удобно решать такие задачи без привлечения понятия производной. При выполнении заданий указанного типа может оказаться полезным исследование на экстремум класса функций вида

$$y(x) = bx + \frac{a}{x}. \qquad (1)$$

Если числа a и b имеют одинаковые знаки, то эти функции обладают точками локальных минимумов и максимумов (рис. 1). Наибольшее и наименьшее значения этой функции находятся с помощью неравенства:

$$\frac{A + B}{2} \geqslant \sqrt{A \cdot B} \ (A \geqslant 0,\ B \geqslant 0). \qquad (2)$$

В (2) равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A = B$. Применяя (2) для исследования функции (1) при $a > 0$ и $b > 0$, получаем $\frac{a}{x} + bx \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x}bx} = 2\sqrt{ab}$, если $x > 0$. При этом равенство достигается в случае, если $\frac{a}{x} = bx$, т. е. $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Значит, локальный минимум рассматриваемой функции (1) равен $2\sqrt{ab}$ и достигается при $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Аналогично при $x < 0$ функция $y(x)$ имеет локальный максимум. Действительно, при $x < 0$ значение $y = -2\sqrt{ab}$, максимум достигается при $x = -\sqrt{\frac{a}{b}}$и равен $-2\sqrt{ab}$.

Для частного случая $a = b = 1$ имеем известное неравенство $|x + \frac{1}{x}| \geqslant 2$.

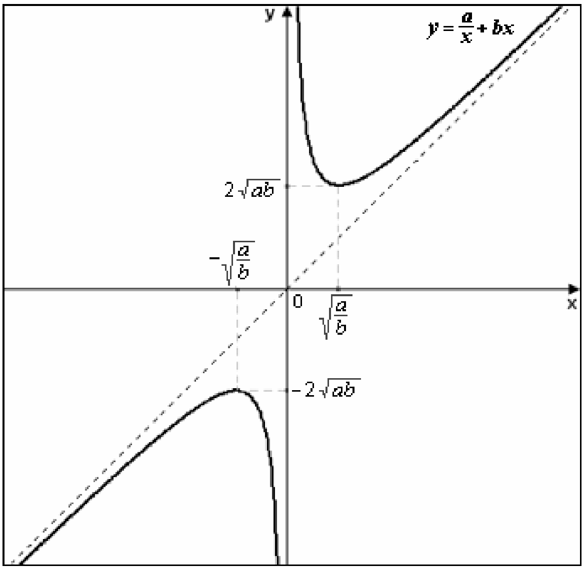

Рис. 1. График функции $y(x) = bx + \frac{a}{x}$

В сравнительно широком классе текстовых задач система уравнений, составленная по условию задачи, задает помимо истинного значения искомой величины также одно или несколько ложных значений, которые не удовлетворяют некоторым оценкам, вытекающим из физического смысла задачи. Обычно учащиеся рассматривают такие значения отдельно и приводят их к противоречию с тем или иным условием задачи. Нам представляется более удобным в тех случаях, когда это возможно, отбрасывать ложные значения в процессе решения системы, а не на последнем его этапе.

Может сложиться впечатление, что в текстовой задаче обязательно содержится информация, которая порождает некое уравнение, а неравенствам отводится лишь второстепенная роль. На самом деле это не всегда так. Наибольшие трудности у учащихся вызывают текстовые задачи, в которых приходится решать неравенства с несколькими неизвестными. Для исследования подобных систем можно применять метод исключения неизвестных. Несмотря на то, что из неравенства не всегда удается выразить одну неизвестную через остальные, оценить ее с использованием остальных иногда удается, причем оценить с двух сторон: снизу и сверху. Если это возможно, то в силу транзитивности неравенств следует, что выражение, осуществляющее оценку снизу, не превосходит выражения, осуществляющего оценку сверху. Полученное неравенство уже не будет содержать ту неизвестную, которая оценивалась.

Часто в текстовых задачах рассматриваются условия, в которых речь идет о количествах карандашей, марок, деталей и т. п., т. е. неизвестные, обозначающие эти количества, являются натуральными числами. Как правило, эти задания составляются таким образом, что их однозначное решение находится только при условии существенного использования этого обстоятельства. Следует отметить, что при выполнении заданий, имеющих целочисленные решения, нередко возникают ограничения в виде неравенств.

Наконец, остановимся на задачах, для решения которых необходимо рассматривать несколько возможных вариантов. В некоторых разделах элементарной математики задания, при выполнении которых исследуются несколько случаев, встречаются весьма часто. Например, при решении задач, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, приходится рассматривать альтернативы: когда выражение, стоящее под знаком модуля, положительно и когда оно отрицательно. При решении логарифмических неравенств исследуются случаи, когда основания входящих в задачу логарифмов больше единицы и когда эти основания меньше единицы. Задачи такого типа требуют учета всех альтернативных случаев, и решение находится после того, как все эти варианты будут исследованы. Альтернативные условия нередко встречаются в задачах на составление уравнений.

В свете сказанного нами предложен единый подход к следующим типам алгебраических задач:

- в которых число неизвестных превышает число уравнений;
- которые решаются при помощи неравенств;
- с целочисленными решениями;
- на «сплавы», «смеси» и «концентрации»;
- на нахождение наибольшего и наименьшего значений некоторых величин;
- с альтернативным условием [7].

Классификация задач на составление уравнений использовалась при построении модели технологии обучения школьников и студентов решению текстовых алгебраических задач (рис. 2). Предложенный вариант обучающей технологии апробировался автором при проведении факультативных занятий по углубленному изучению предмета и на занятиях по спецкурсу «Математика» в классах физико-математического профиля в МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 2» пос. Советский Республики Марий Эл в 1995–2007 гг. Кроме того, технология применялась при изучении некоторых дисциплин педагогического цикла в ГОУ ВПО «Марийский государственный университет» студентами специальности 01.01.00 Математика, а также при выполнении курсовых и дипломных работ студентами педагогической специализации.

При проведении практических занятий для школьников, на семинарах со студентами использовались объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, частично-поисковый, исследовательский методы обучения. В качестве средств обучения применялись учебники и учебные пособия, комплексы задач и упражнений, специальные конспект-схемы, карточки-инструкции.

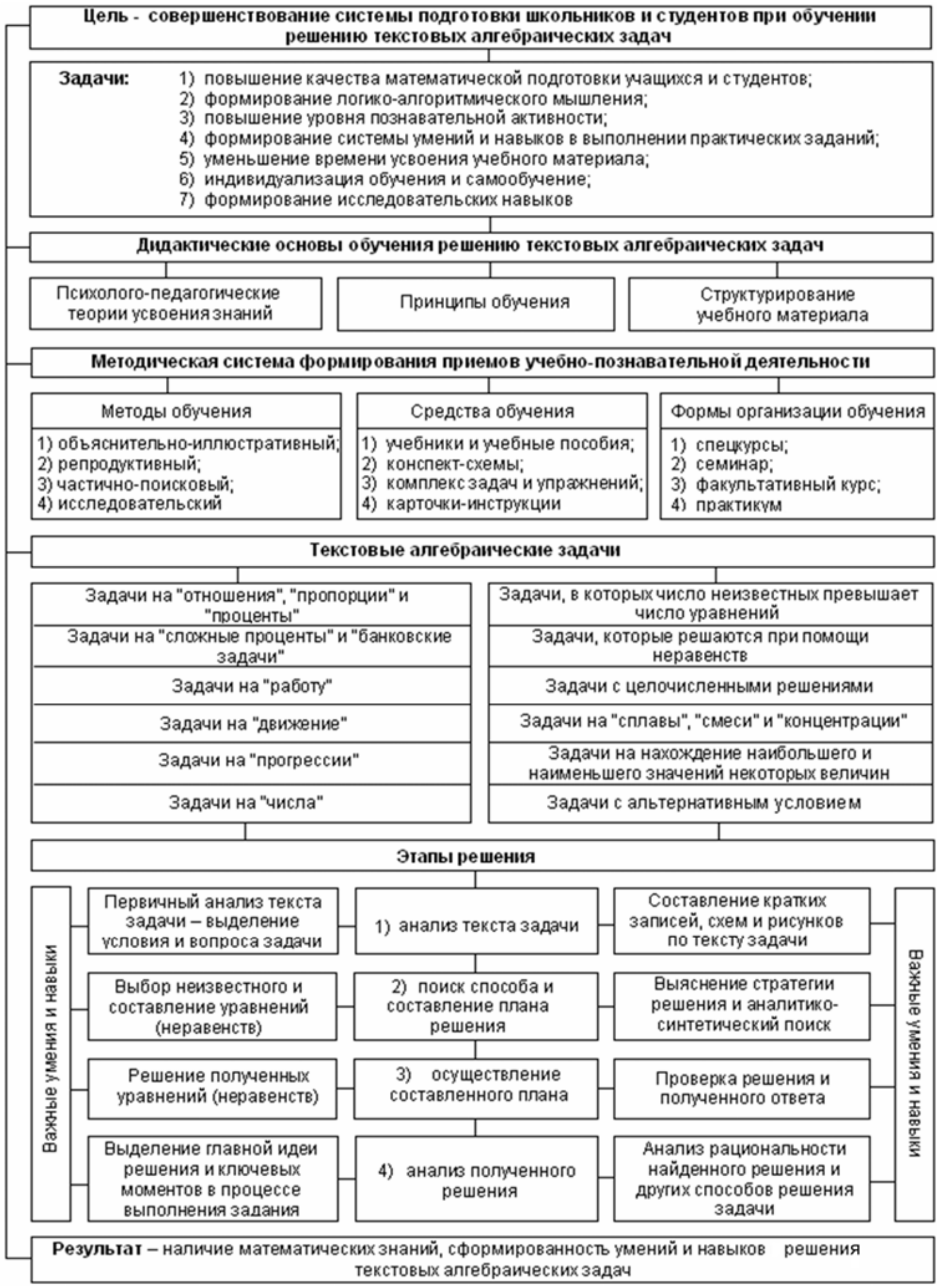

Рис. 2. Модель технологии обучения школьников и студентов решению текстовых алгебраических задач

Эффективное усвоение знаний, формирование навыков и умений, развитие интеллектуальных качеств зависят не только от познавательной активности обучаемых, но и от накопления ими конкретных приемов и способов выполнения практических заданий и упражнений. В этом плане при построении приведенной модели технологии обучения мы опирались на теорию поэтапного формирования умственных действий [2]. Ее достоинствами при обучении школьников и студентов решению задач на составление уравнений являются:

- создание условий для работы обучаемого в индивидуальном темпе;
- сокращение времени формирования умений и навыков за счет показа образцового выполнения разучиваемых математических действий;
- достижение высокой автоматизации выполняемых действий в связи с их алгоритмизацией;
- обеспечение доступного контроля качества выполнения как математического действия в целом, так и его отдельных операций;
- возможность оперативной коррекции методики обучения с целью ее оптимизации, что позволяет жестко управлять процессом овладения знаниями.

Теория поэтапного формирования умственных действий имеет и некоторые недостатки: ограничение возможностей усвоения теоретических знаний, сложность разработки методического обеспечения, формирование у обучаемых стереотипных мыслительных и моторных действий в ущерб развитию их творческого потенциала. Для устранения отмеченных недостатков построенной модели технологии обучения решению текстовых алгебраических задач автор статьи опирался на теоретическое и методическое обеспечение учебных пособий [4, 7, 8].

Теория, ее приложения и технология обучения математике отражают различные уровни анализа учебно-педагогического процесса. Каждый последующий уровень не отвергает предыдущий, он обусловлен им, и степень его развития зависит от уровня развития предыдущего.

Предложенная модель технологии обучения на основе текстовых алгебраических задач позволяет оптимальным способом выстраивать учебный процесс, управлять им, получать результаты в соответствии с запланированными целями; она эффективна также и в случае выполнения заданий, приводящих к уравнениям достаточно сложного вида. Естественно, что при последовательном формировании умений в решении задач на составление уравнений методика обучения претерпевает определенные изменения: отпадает необходимость применять табличную форму записи текста задачи, сокращается число выявленных этапов процесса ее решения, сам этот процесс становится более свернутым.

Литература

1. Балл Г. А. О психологическом содержании понятия «задача» // Вопр. психологии. 1970. № 6. С. 81.

2. Гальперин П. Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий». М.: МГУ, 1976. 52 с.

3. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. М.: Просвещение, 1977. Ч. I, II.

4. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др. М.: Просвещение, 1987. 416 с.

5. Нешков К. И., Семушин А. Д. Функции задач в обучении // Математика в шк. 1971. № 3. С. 4.

6. Пойа Д. Как решать задачу: пер. с англ. М.: Учпедгиз, 1959.

7. Попов Н. И., Марасанов А. Н. Задачи на составление уравнений: учеб. пособие. Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2003. 109 с.

8. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

9. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Просвещение, 1977.