КОНСУЛЬТАЦИИ

Т. А. Безусова

О РОЛИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В РАЗВИТИИ КУЛЬТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

В статье рассматриваются особенности понятия культуры математического мышления и компонентов, ее составляющих. Предложен подход, в рамках которого некорректные задачи выступают в роли средства развития культуры математического мышления.

The article deals with the special features of the term culture of mathematical thinking and its components. The author suggests an approach within which the tasks with or excessive data serve as the means of developing the culture of mathematical thinking.

Проблема поиска средств и методов обучения, позволяющих развивать основы культуры математического мышления учащихся и эффективно управлять их учебно-познавательной деятельностью, является одной из актуальных в методике преподавания математики.

На сегодняшний день приходится констатировать, что у большинства учащихся общеобразовательных школ уровень культуры математического мышления весьма низкий, что проявляется в неумении полноценно аргументировать свою позицию, доказывать, логично выстраивать рассуждение и т. д.

Универсальным дидактическим средством развития культуры математического мышления являются задачи. В школьном курсе традиционно используются задачи, которые направлены на стимулирование мотивации учебной деятельности, на иллюстрирование и конкретизацию изучаемого учебного материла, на приобретение определенных знаний, умений, навыков, на контроль и оценку работы учащихся [8], на развитие конвергентного (логического, последовательного, однонаправленного) математического мышления. Но такого рода задачи не могут оказать значительного влияния на осознание учащимися логики заданных в задаче отношений и зависимостей, на овладение процедурами абстрагирования, на гибкость, критичность и креативность мышления. Большие возможности для развития таких характеристик математического мышления представляет решение задач с избыточными (недостающими) данными [3] – некорректных задач. Такие задачи формируют преимущественно дивергентное (многовариантное, альтернативное) математическое мышление.

В психолого-педагогической литературе отсутствует единое определение культуры математического мышления, позволяющее всесторонне ее изучать. Культуру математического мышления связывают с развитием логического мышления (А. Я. Хинчин, А. А. Столяр), с формированием общих интеллектуальных умений (Г. В. Краснослабоцкая), с развитием творческих способностей (Т. А. Иванова). В перечисленных трактовках раскрываются определенные аспекты данного понятия, интеграция которых представляется важной для выявления механизмов протекания мыслительных процессов.

Структура культуры математического мышления должна отражать специфику предмета математики. В качестве основы примем схему математического мышления, предложенную В. А. Тестовым [7], в соответствии с которой математическое мышление содержит не только математические структуры (топологическую, порядковую, алгебраическую), являющиеся моделями реальных явлений, но и когнитивные структуры (логическую, алгоритмическую, комбинаторную, образно-геометрическую, стохастическую). Математические структуры представляют собой «системы хранения знаний», а когнитивные – результат их схематизации. В данном аспекте под математическим мышлением будем рассматривать *процесс отображения объективной действительности, который предполагает формирование когнитивных структур как гомоморфных образов математических структур*. Образ объекта изучения представляет собой не только присвоение учеником нового знания, но и его приобретение. «Если ученик осуществляет конструирование структур математического объекта, дополнительных к уже имеющимся, то в процессе этого он развивается, расширяются его познавательные возможности» [5, с. 49]. Построенная модель должна представлять собой гомоморфный образ объекта изучения. Другими словами, она должна сохранять основные операции и свойства оригинала. Отображение моделью основных свойств оригинала может быть изоморфным при тождественности структур модели и оригинала.

Как и любая система, математическое мышление должно обладать интегративной характеристикой, в качестве которой может выступать понятие культуры. Под культурой математического мышления будем понимать *интегративную характеристику уровня развития математического мышления*. Представим структуру математического мышления в виде трехуровневой иерархии.

Низший уровень требует копирования математических структур объекта изучения, описанного с указанием типов связи его элементов: алгебраическая структура задает связи посредством операций, топологическая – предельных процессов, порядковая – отношений порядка [2]. При этом топологическая структура служит фундаментом моделирования, так как в ее основе лежит понятие непрерывности, на которое необходимо опираться при выборе математической модели и исследовании с точки зрения ее адекватности соответствующему процессу или явлению. Порядковая структура необходима в процессе формализации объекта изучения, выявления и упорядочивания характеристик структуры [5]. Алгебраическая структура необходима при композиции различных элементов объекта изучения.

Средний уровень, предполагающий комбинирование элементов низшего уровня или их выбор, основан на более богатом спектре познавательных возможностей личности – логической, комбинаторной, стохастической, образно-геометрической структурах – и связан с образным, логическим и абстрактным компонентами культуры математического мышления.

Образный компонент культуры математического мышления предполагает выполнение умственных действий на основе ассоциаций абстрактных понятий с реальными объектами окружающего мира и заключается в сформированности следующих умений: выполнения анализа структуры образа, являющегося моделью реального явления или объекта; использования аналогий структур образа и реального объекта при изучении свойств последнего; наличия представлений о возможностях измерения качеств реального объекта на основе структуры его образа; оценки возможностей анализа количественных отношений между свойствами реального объекта и свойствами образа; осуществления мыслительных преобразований плоскости и пространства в связи с изменениями расположения объектов и количественных соотношений между ними [4].

Логический компонент предполагает рациональное использование законов логики в процессе проведения различных мыслительных операций или их комбинаций (анализа, синтеза, аналогии и др.) и наличие следующих навыков: проведения анализа и синтеза структуры объекта, упорядочения его свойств и признаков; построения рассуждений в соответствии с правилами формальной логики; выполнения логических операций над высказываниями [4].

Абстрактный компонент – владение процедурами абстрагирования, конкретизации и интерпретации. В результате выполнения этих процедур происходит конструирование идеальных моделей явлений и процессов реального мира, а также наполнение этих моделей разнообразным качественным содержанием. Компонент представляют следующие сформированные умения: использование буквенно-знаковой символики при проведении рассуждений; выделение существенных свойств и признаков абстрактных объектов или их совокупностей; формулирование и проверку гипотез [4].

Для выхода на высший иерархический уровень требуется владение методологическим содержанием (универсальными схемами рассуждений, рациональными методами осуществления сложной познавательной деятельности) – алгоритмической структурой. Данному уровню соответствует *систематизирующий компонент* культуры математического мышления, предполагающий сознательное или интуитивное осуществление мыслительных операций в соответствии с идеями и принципами системного подхода к анализу объектов и процессов окружающего мира. Этот компонент культуры математического мышления предполагает сформированность следующих умений: выявления связей и отношений, существующих как в структуре исследуемого объекта, так и в его взаимоотношениях с внешним окружением; проведения иерархически упорядоченных классификаций объектов и их свойств по составным критериям; выделения из общего набора свойств объекта существенных свойств в связи с конкретной задачей анализа объекта; определения системных свойств объекта (или совокупности объектов), возникающих в результате его рассмотрения как целостности (системы) [4]. Заметим, что некоторые проявления этой составляющей культуры математического мышления возможны и на втором уровне иерархии.

Компоненты культуры математического мышления будем соотносить с эмпирическим и теоретическим уровнями функционирования математического мышления. Средством «движения» от эмпирического (реально-конкретного) знания через формирование системы абстракций к теоретическому (мысленно-конкретному) знанию считаем математическое моделирование [5].

Прежде чем рассматривать особенности использования некорректных задач в качестве средства развития культуры математического мышления, остановимся на понятии некорректной задачи. Задачу будем называть корректной (или корректно поставленной), если выполнены следующие требования корректности: 1) есть решение при любых допустимых исходных данных (существование решения); 2) исходным данным соответствует только одно решение (однозначность задачи). Смысл первого требования корректности заключается в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу, что исключало бы возможность решения задачи. Второе требование означает, что исходных данных достаточно для однозначной определенности решения задачи (здесь исходные данные следует понимать как условия задачи). Эти два требования обычно называют требованиями математической определенности задачи.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному требованию корректности, называются некорректными (или некорректно поставленными).

Исследуемые нами задачи, следует понимать как «математически неопределенные» или «неправильно поставленные» задачи. Кроме того, те задачи, которые исследуются нами в качестве некорректных не будут таковыми являться с точки зрения, например, математической физики [6].

Некорректные задачи в той или иной степени встречаются при различных подходах к обучению математике. В одних случаях они являются необходимой составляющей процесса обучения, в других – результатом трансформации корректных задач посредством добавления (или удаления) данных в ее условии.

Объем данного нами понятия в контексте указанного определения достаточно велик, поэтому ограничимся теми видами некорректных задач, которые являются наиболее приемлемыми с позиции развития культуры математического мышления. Можно выделить четыре основные группы некорректных задач:

1. Задачи с недостающими данными, с неоднозначно описанной в условии ситуацией. Решение таких задач предусматривает рассмотрение нескольких вариантов, удовлетворяющих условию, каждый из которых будет представлять собой стандартную (традиционную) задачу, имеющую одно решение.

2. Задачи с недостающими данными, не имеющие однозначного решения без существенных дополнительных условий. В условии такой задачи отсутствуют необходимые элементы для отыскания ответа на вопрос задачи, поэтому без дополнительных элементов задачу решить невозможно.

3. Задачи с избыточными данными в условии, не противоречащими друг другу. Необходимо выявить при анализе условия (или на другом этапе работы) лишние данные и не учитывать их при поиске решения. После того как решение будет найдено, необходимо установить, не противоречит ли оно тому, что было исключено из рассмотрения.

4. Задачи с избыточными данными, имеющие противоречивое условие, содержащее в себе несовместные элементы (не существует никакого объекта, удовлетворяющего взаимно исключающим друг друга частям условия). Задача такого типа не имеет решения.

Мыслительный процесс при решении некорректных задач, как отмечалось ранее, является преимущественно дивергентным. Дивергентное мышление можно рассматривать как взаимодействие когнитивных структур мышления (комбинаторной и стохастической), способствующих нахождению оригинальных и нестандартных решений и активной личностной позиции учащихся по отношению к познанию. К основным характеристикам дивергентного мышления, развивающимся посредством решения некорректных задач, можно отнести целостность и системность, рефлексивность, инновационность, критичность, способность к самоопределению в ситуации неопределенности, гибкость, продуктивность [1], абстрактность и отвлеченность в сочетании с умением устанавливать взаимосвязи между идеальной моделью и реальным процессом, доказательность и аргументированность в сочетании с готовностью рассматривать альтернативную позицию, разносторонность (подход к проблеме с разных сторон), логическую строгость в сочетании с нелинейностью мышления, дополнительность (единство сознательного, разумного и интуитивного, рационального и иррационального) [9] и др. Остановимся на некоторых особенностях такого мыслительного процесса.

Решение некорректных *задач с недостающими данными* проходит чрез ряд этапов.

1. Выявление недостающих данных. Если недостающие данные удается восполнить (при помощи справочной литературы, чтения «между строк»), то задача решается посредством рассмотрения различных случаев, отвечающих условию задачи.

2. Принятие упрощенной модели задачи, для которой достаточно имеющихся данных; организация решения полученной задачи.

3. Модель решения задачи, когда предполагается, что недостающие данные известны. Полученное решение будет функцией от недостающих данных.

При решении *задач с избыточными данными* берется любой набор данных, приводящий к решению (при различных способах решения наборы отличны). Нерассмотренные данные следует использовать для проверки полученного решения. В случае противоречия можно получить несколько вариантов решения задачи – с каждым из противоречивых данных в отдельности, а затем проверить согласованность решения с практическими наблюдениями. Иногда полезно отбросить оба противоречивых условия и решать задачу как с недостающими данных.

Процесс решения некорректной задачи связан преимущественно с комбинаторной структурой математического мышления, позволяющей организовать целенаправленный перебор определенным образом ограниченного круга возможностей, что создает условия для развития дивергентного мышления. Кроме того, немалая роль в решении некорректных задач принадлежит топологической, проективной, алгебраической, логической, стохастической структурам математического мышления. Некорректные задачи имеют достаточные потенциальные возможности для развития всех характеристик дивергентного мышления, но особому влиянию подвергаются многовариантность мышления и «самоопределение в ситуации неопределенности» [1].

К развивающей функции некорректных задач следует отнести

- на эмпирическом уровне математического мышления – формирование осознанности мыслительной деятельности (анализ содержания задачи с позиции полноты и непротиворечивости, рефлексия деятельности по работе с некорректной задачей, соотнесение отброшенных данных и полученного ответа и др.);
- на теоретическом – формирование качеств дивергентного мышления (создание упрощенной модели задачи, получение решения задачи как функции от недостающих данных, обучение выдвижению гипотез и их проверке и др.).

Некорректные задачи требуют от ученика мобилизации внимания, системных теоретических знаний, умения находить данные задачи между строк условия, строить математическую модель, логически грамотно и аргументировать выполнять действия. Часто одной специально подобранной (составленной) задачей этого типа можно проверить знания ученика по целой теме. Для решения некорректных задач новых знаний не требуется, но требуется новый подход к ним, новые мыслительные приемы.

Анализируя задачный материал по математике, мы пришли к выводу, что некорректных задач практически нет в учебниках. Поэтому возникает необходимость в конструировании подобного типа задач учителем.

Проиллюстрируем возможность конструирования различных видов некорректных задач из исходной корректной задачи по теме «Биссектриса треугольника» (8 класс). Например, корректной задачей является следующая: «Отрезок AA_1 является биссектрисой треугольника ABC. Найдите $\cos \angle A$, если $AC=30$, $AB=19$, $AA_1=16$». Рассмотрим варианты ее видоизменения, которые для наглядности представим в виде таблицы.

Прием конструирования	Текст задачи	Особенности решения
Изменение условия	В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами 20 и $20\sqrt{3}$ и биссектрисой одного из углов $10\sqrt{3}$. Найдите Cos $\angle A$	В процессе решения задачи необходимо рассмотреть четыре случая: 1) AB=BC=20, AC=$20\sqrt{3}$, $AA_1=10\sqrt{3}$ ($CC_1=10$); 2) AB=BC=20, AC=$20\sqrt{3}$, $BB_1=10\sqrt{3}$; 3) AB=BC=$20\sqrt{3}$, AC=20, $AA_1=10\sqrt{3}$ ($CC_1=10\sqrt{3}$); 4) AB=BC=$20\sqrt{3}$, AC=20, $BB_1=10\sqrt{3}$
Изменение условия и требования	В треугольнике ABC биссектриса AA_1 продолжается за основание на отрезок A_1E и т. E соединяется с т. C. Найдите $\angle ACE$, если $\angle ACB=47^\circ$, $\angle BAC=62$	В процессе решения задачи получаем $\angle ACE=149^\circ-\angle AEC$. Задача имеет недостаточный набор данных. Для того чтобы задача имела однозначное решение, достаточно было бы того, что $AA_1=A_1E$
Изменение условия и требования	Отрезок AA_1 является биссектрисой треугольника ABC. Найдите AC, если AB=9, $BA_1=4{,}5$, $CA_1=7{,}5$, а периметр треугольника равен 36	Фиксируя любой набор данных, получаем один ответ
Изменение условия и требования	Отрезок AA_1 является биссектрисой треугольника ABC. Найдите A_1B, если AC=30, $AA_1=16$, $CA_1=20$ и $\angle AA_1B=\angle B$	Задачу можно решить двумя способами: *Способ 1.* $\frac{CA_1}{CA}=\frac{A_1B}{BA}$; $\frac{CA_1}{CA}=\frac{A_1B}{A_1A}\Rightarrow$ A_1B = $\frac{20\cdot 16}{30}=10\frac{2}{3}$. *Способ 2.* Проведем в треугольнике ABC высоту AE, обозначим длину отрезка A_1E через x. Так как $AC^2-CE^2=AA_1^2-A_1E^2$, то x = 6,1. $A_1B=2x=12{,}2$, что не соответствует решению первым способом. Выясним вопрос о противоречивости данного о том, что AA_1 является биссектрисой. По свойству биссектрисы должно выполняться $\frac{CA_1}{CA}=\frac{A_1B}{BA}\Rightarrow\frac{20}{30}=\frac{12,22}{16}$ (неверно)

Очевидно, что представленный набор некорректных задач не является единственно возможным.

Соотнесем решение некорректной задачи с иерархическими уровнями культуры математического мышления.

Низший уровень иерархии (копирование математических структур) характеризуется установлением соотношения исходных данных и требования задачи, определением составных частей математической модели задачи.

Средний уровень связан с упорядочиванием исходных данных по значимости, с логическим анализом возможностей условия, выявлением связей и отношений как между элементами задачи, так и с теоретическим материалом, с конструированием математической модели задачи по отобранному из условия содержанию.

При решении задачи с недостающими данными, решение которой предусматривает рассмотрение нескольких случаев, необходимо различать, когда найденные в условии варианты исчерпывают все возможности и когда они являются только примерами. Анализ условия и поиск решения задачи такого типа базируется на переборе различных комбинаций и частных случаев, удовлетворяющих задаче (комбинаторные структуры). Выделение различных случаев, отвечающих условию задачи, подчиняется принципу полной дизъюнкции (логический компонент культуры математического мышления). Группирование найденных альтернатив условия задачи, в рамках выявленных связей и отношений между данными, и отыскание закономерностей в их решениях развивают систематизирующий компонент культуры математического мышления. Основа решения – анализ структуры созданного образа (модели), установление зависимости результата и хода решения задачи от параметров и начальных условий, от расположения объектов и количественных соотношений между ними (образный компонент).

Задачи с недостающими данными, не имеющие однозначного решения без существенных дополнительных условий, требуют обширных знаний об объекте задачи, о связях его с другими объектами, которые могут оказаться полезными при получении ограниченного некими рамками ответа (систематизирующий компонент). Решение задач с недостающими данными нередко требует привлечения справочных величин, что формирует умение работать с литературой. При решении таких задач ученик сам определяет, какие данные ему еще необходимы и в каком справочнике он их может найти. Кроме того, такие задачи требуют от учащихся указания отношений математических величин, необходимых для решения задачи, умение выводить логические следствия из данных задачи, видеть данные между строк (логический компонент). Решение задач с недостающими данными посредством анализа различных вариантов решения и определения диапазона возможных ответов развивает прогностические способности (абстрактный компонент).

Задачи с избыточными данными, не противоречащими друг другу требуют умения анализировать условие задачи и строить модель задачи при помощи минимального числа данных. Построенная модель задачи должна содержать только те данные, которые необходимы для решения (абстрактный компонент).

Решение задач с избыточными данными, имеющих противоречивое условие, предполагает выдвижение гипотез (абстрактный компонент), способность генерировать идеи, ассоциативность мышления, способность видеть противоречия и проблемы в их единстве (логический компонент). Выявленное противоречие необходимо полноценно аргументировать (логический компонент).

Высший уровень иерархии культуры математического мышления связан с рефлексией деятельности, обобщением и систематизацией методов решения некорректной задачи.

Подводя итог, можно отметить, что структура некорректных задач выступает в качестве определяющего фактора в специфике их решения. Условие некорректной задачи содержит в себе потенциальную многовариантость (в зависимости от того, какие исходные данные используются при построении модели условия, меняется способ решения). Возможность противоречия условий приучает учащихся к осознанной рефлексии мыслительной деятельности. Некорректные задачи могут иметь более одного ответа, а могут не иметь вообще, что способствуют абстрагированию от количественных составляющих задачи и оперированию качественными. Кроме того, работа с некорректными задачами развивает исследовательский интерес, активизирует способность оценивать, сравнивать, строить гипотезы, анализировать и классифицировать полученный материал.

Литература

1. Дрязгунов К. В. Формирование дивергентного мышления старшеклассников на уроках обществознания // Образование и общество. – 2003. – № 1. – С. 40–49.

2. Каазик Ю. Я. Математический словарь. – Таллин: Валгус, 1985. – 296 с.

3. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. – 305 с.

4. Лебедева И. П. Структура взаимодействия систем «ученик» и «объект изучения». Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 200 с.

5. Лебедева И. П. Математическое моделирование в педагогическом исследовании: Монография /Акад. акмеол. наук, Перм. гос. пед. ун-т. – СПб.; Пермь: 2003. – 122 с.

6. Математический Энциклопедический Словарь./Гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М.: «Советская энциклопедия», 1988. – 847 с.

7. Тестов В. А. Стратегия обучения математике. – М.: Технолог. шк. бизнеса, 1999. – 303 с.

8. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов и пед. высш. учеб. заведений. – М.: Флинта, 1998. – 224 с.

9. Шестакова Л. Г. Идеи синергетики в современном школьном образовании // Право и образование. – 2006. – № 3. – С. 97–103.