КОНСУЛЬТАЦИИ

Г. А. Клековкин,
А. А. Максютин

ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ В УСЛОВИЯХ ЕГЭ

Предлагается модель построения многоуровневой системы задач, позволяющей успешно подготовить учащихся к ЕГЭ по математике.

I. Предметная учебная задача возникла как средство и особая форма передачи накопленного человечеством социального опыта, позволяющие транслировать знания в их деятельностном виде. Ее основные функции – обеспечивать реконструкцию и перевод теоретического опыта в процесс познавательной активности учащихся и содержание их умственной деятельности, быть средством развития. Поскольку известные факты и способы деятельности в предметной учебной задаче скрыты, свернуты, то чтобы стать обладателем новых знаний, учащийся должен задачу распредметить (решить), т. е. заново воспроизвести в собственной деятельности те действия, которые некогда были выполнены для их получения автором задачи. Поэтому наиболее естественно рассматривать учебную деятельность как деятельность по присвоению обобщенных способов действий (ее моделей) на основе решения специально поставленных учебных задач.

Роль и значение задач в обучении математике интуитивно осознавалось всегда, об этом свидетельствует поистине необозримое их многообразие. Как пишет Г. И. Саранцев, «в зависимости от уровня развития методической науки, целей обучения математике, содержания математического образования, педагогических концепций, функций обучения математике можно выделить ряд этапов, каждый из которых характеризуется определенными требованиями к использованию задач в обучении математике: 1) изучение математики с целью обучения решению задач; 2) изучение математики, сопровождающееся решением задач; 3) обучение математике через решение задач» [7, с. 3]. Естественно, что в связи с этим менялись и представления об учебной задаче, и сами учебные задачи.

Вероятно, одним из основоположников подхода к обучению математике через решение задач следует считать Диофанта Александрийского, в шести книгах которого содержатся 189 задач с решениями, расположенных так, что уже решенные задачи в дальнейшем распространяются на более общие, более трудные случаи [3, с. 41]. В трудах Б. Больцано появляется термин «целесообразная задача», который в последующем закрепляется в работах о преподавании математики. Он, в частности, говорит о том, что «при размышлениях весьма полезно исходить из определенной *целесообразной задачи*. Очевидно, что задача тем целесообразнее, чем (а) больше мы полагаем, что найдем истину и (б) чем больше польза от познания этой истины» [2, с. 328].

Видоизменяясь, идея целесообразных задач получает развитие в работах известного российского методиста С. И. Шохор-Троцкого. В цикле статей, опубликованных в 1891 г., он пишет: «Задача является могущественным орудием для выработки тех или иных представлений, первоначальных и даже производных... необходимы методически подобранные и сгруппированные для этой цели задачи и упражнения, решение которых должно не следовать, а предшествовать установлению тех или иных представлений и понятий» [10, с. 115]. Задачи, благодаря методически разумному распределению в задачнике, играют «роль возбудителей в уме учащихся тех именно представлений, которые должны быть на данной ступени выработаны, дабы дальнейшее движение в глубь учебного предмета стало возможным... должны служить точкой исхода преподавания, а не исключительно средством дрессировки учащихся в том или ином направлении...» [10, с. 117–118]. В этом, на его взгляд, суть *метода целесообразных задач*. Следует отметить, что с 60-х гг. XIX в. вопрос о месте и роли задач в обучении в отечественной методике преподавания математики становится весьма обсуждаемым и идея обучения через решение задач получает дальнейшее развитие. Задачный подход пропагандировали, например, известные в свое время методисты, авторы учебных пособий Н. А. Извольский, В. А. Латышев и др.

Мысли о развивающем обучении через решение задач получили наиболее яркое воплощение в книге Г. Полиа и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа», впервые вышедшей на немецком языке в 1925 г. и в 1937–1938 гг. переведенной на русский. В предисловии они отмечают: «Настоящая книга отнюдь не представляет собой простого собрания задач. Главное заключается в *расположении* материала: оно должно побуждать читателя к самостоятельной работе и прививать ему целесообразные навыки математического мышления» [6, с. 8]. Для этого, пишут авторы, «мы пытаемся все осмыслить: отдельные факты – сопоставлением с родственными фактами, новое – приведением в связь со старым, непривычное – по аналогии с обычным, частное – путем обобщения, общее – надлежащим специализированием, сложное – разложением на отдельные части, единичное – восхождением к общему» [6, с. 9]. Описывая практическую реализацию этих идей, Г. Полиа и Г. Сеге отмечают, что приведенные в книге задачи, как правило, объединены в длинные ряды, охватывающие целый параграф, что задачи группировались по различным признакам: по трудности, по применяемым средствам, по методу, по результату. В параграфах, посвященных некоторому методу, «вначале этот метод вкратце поясняется, затем применяется к решению как можно более разнообразных задач и при этом сам все более уточняется и совершенствуется» [6, с. 12]. По этому же принципу строятся параграфы, посвященные какой-либо теореме. «Третьи параграфы построены в «восходящем» порядке: общая теорема появляется лишь после ряда предпосылаемых ей частных случаев и отдельных кратких замечаний, подводящих к ее формулировке или же подготавливающих ее доказательство» [6, с. 12].

Подобные пособия, получившие распространение в высшей школе, позволяют реализовать один из возможных вариантов проблемного обучения, сущность которого состоит в специальном создании (конструировании) учебных проблемных ситуаций и их разрешении в процессе обучения. Учебная литература для средней школы таких ярких примеров пока не имеет, хотя в практике работы отдельных учителей само проблемное обучение – достаточно распространенное явление.

Как писал еще А. А. Столяр, «Обучение математике через задачи – давно известная ... проблема. Однако до сих пор она не получила удовлетворительного решения, которое предполагает разработку системы задач, соответствующей современной программе и приспособленной к обучению математической деятельности» [8, с. 61]. Он ставит методическую задачу – «построения педагогически целесообразной системы задач, с помощью которой можно было бы провести ученика последовательно через все аспекты математической деятельности (выявление проблемных ситуаций и задач, математизация конкретных ситуаций, решение задач, мотивирующих расширение теории и т. д.)» [8, с. 146]. По его мнению, «решение ее невозможно без уточнения понятий ситуации, задачи, без структурного анализа задачи, который позволил бы оценить сложность задачи и определить целесообразную последовательность их решения. В этой последовательности каждая задача должна нести определенную учебную нагрузку» [8, с. 146].

Математическое упражнение как педагогическое явление, соединяющее деятельность учителя и ученика, П. М. Эрдниев считает клеточкой методики обучения математике [11, с. 17]. По П. М. Эрдниеву, задача, по сути, служит единицей организации учебного процесса. Близкую позицию занимает пропагандист задачного подхода Г. А. Балл [1, с. 161].

II. Подведем некоторые итоги сказанного.

1. Решение задач наиболее адекватно отражает сущность учебно-математической деятельности, поэтому последовательности целесообразно подоб-

ранных задач позволяют естественным образом моделировать учебные ситуации, в которых могут быть реализованы заданные цели обучения математике.

2. Поскольку такие последовательности есть объединение задач в целостные образования на основе содержательных и/или дидактических оснований, то *метод целесообразно подобранных задач есть конкретная реализация системного подхода к обучению.*

3. Структурной единицей деятельности является действие, т. е. цель, заданная в определенных условиях, а реализация действия есть решение задачи (задач); поэтому *обучение через решение задач – наиболее естественная реализация деятельностного подхода в обучении.*

Системно-деятельностный подход в обучении, при котором учебная деятельность учащихся проектируется и реализуется через решение целесообразно подобранных задач, естественно и назвать *задачным подходом.*

В отечественной педагогической теории и практике конкретизация общих целей образования долгие годы шла через предметное содержание, фиксированное в образовательных программах и представленное в учебниках, а также через строго регламентированную деятельность учителя. Приверженцы развивающего обучения, видя в знаниях, умениях и навыках лишь средство развития учащегося, пытаются, по сути, строить иерархию целей образования через внутренние процессы интеллектуального, эмоционального и личностного развития ребенка. В действительности ни развитие личности, ни тем более развитие субъекта конкретной предметной деятельности невозможны вне предметных знаний и обусловленных ими умений.

В основе задачного подхода лежит предметная ситуация, в которой разворачивается деятельность субъекта учения. Важнейшими дидактическими средствами функционирования этого подхода являются целенаправленное создание учебной проблемной (задачной) ситуации и ее разрешение путем постановки и последующего решения соответствующей математической задачи. Структурной единицей задачного подхода к обучению математике выступает ситуация, возникающая при решении учебно-математической задачи. При этом любая задача является предметной (математической) задачей, в то же время с помощью нее в обучении достигаются определенные дидактические цели. Поэтому *задача является* как *единицей членения содержания обучения,* так и *единицей проектирования и реализации процессуальной стороны обучения.* Из этого, в частности, вытекает, что частью содержания обучения должно стать специальное обучение общим приемам действий в различных учебных ситуациях. В этом реализуется один из аспектов принципа единства содержательной и процессуальной сторон обучения.

Таким образом, структура системы учебных задач курса может быть задана предметной и дидактической составляющими: актуализированными разноуровневыми внутрипредметными содержательно-логическими взаимосвязями, существующими между понятиями, задачами и методами их решения, и интегрирующими дидактическими взаимосвязями, с помощью которых реализуются и достигаются заданные цели обучения.

Каждый автор учебника (задачника, УМК) строит свою методическую интерпретацию курса. Реализуя в учебных текстах (в частности, в задачах) предлагаемую им траекторию обучения, он обращен к идеализированному ученику. В реальном учебном процессе в системы задач, представленные в учебнике и/или задачнике, учитель вынужден вносить постоянные коррективы, обусловленные условиями обучения (состав класса, его общий уровень обученности на предыдущих этапах, уровень готовности отдельных учеников к использованию тех или иных методов и форм обучения и т. п.). Поэтому итоговые цели обучения достигаются с помощью разных систем учебных задач.

III. Введение единого государственного экзамена (ЕГЭ), включающего три части, которые различаются по назначению, а также по трудности включенных в них заданий, привело к очередной ревизии содержания школьного математического образования. Результатом этой работы стало введение кодификатора и разноуровневых контрольно-измерительных материалов (КИМ). Эти материалы заданы в деятельностной форме (через решение задач) и имеют задания базового – А, повышенного – В и высокого – С уровней трудности. Часть А содержит задания, в которых от учащихся требуется продемонстрировать применение полученных знаний и умений в знакомой ситуации. При решении заданий части В ученик должен применить знания и известные методы в видоизмененной ситуации, а в части С у экзаменующихся проверяется умение применять знания в новой незнакомой ситуации, комбинировать знания и методы из различных разделов математики. Примечательно, что в КИМах уровни трудности задач естественным образом связаны с соответствующими типами учебных ситуаций. Поэтому задачный подход при подготовке учащихся к ЕГЭ наиболее адаптивен предъявляемым на нем требованиям.

С *процессуальной стороны* важен характер той умственной деятельности, которая сопровождает решение задачи. Она может быть репродуктивной, предполагающей воспроизведение в знакомой ситуации рассмотренных ранее знаний и способов деятельности, а может быть творческой, требующей самостоятельного переноса наличных знаний и умений в новую незнакомую ситуацию. Важное промежуточное место занимают задачи, решение которых основывается на достаточно прозрачных аналогиях и вариациях рассмотренных образцов.

При описаниях задач с *предметно-содержательной* стороны их чаще всего делят на шаблонные (типовые, стандартные) и нешаблонные (нестандартные). К шаблонным относят задачи, алгоритм решения которых известен. Решение нешаблонных задач состоит в их сведении путем преобразования или переформулировок к шаблонным задачам или же в разбиении на шаблонные подзадачи. При этом типология нешаблонных задач во многом определяется характером внутрипредметных связей, объективно существующих между этими подзадачами. Значительная часть усилий учителя в обучении направлена на то, чтобы некоторое множество задач предметной области сделать для учащихся шаблонными. Поэтому с методической точки зрения крайне важно вскрыть предметную значимость задач и тем самым их определенным образом содержательно и логически упорядочить.

Попытки найти способы ориентирования в безграничном пространстве задач, структурировать его, вычленить в каком-то смысле «основные шаблонные задачи» предпринимались неоднократно. Так, И. Ф. Шарыгин выделяет подмножество задач, через которые вводятся факты и приемы, важные для решения остальных задач, и называет их *опорными*. Он делит их на две разновидности: *задача-факт* и *задача-метод* (очевидно, что в первых свернут результат, а во вторых – обобщенный способ деятельности) [9, с. 48]. Обобщая опыт Р. Г. Хазанкина, о *ключевых* задачах пишет Н. И. Зильберберг. Он также отмечает, что ключевые задачи – своеобразные опоры для решения других, в том числе и нестандартных математических задач [4]. Эти примеры можно продолжать и дальше.

Списки ключевых задач по одной и той же теме, предлагаемые разными авторами, могут быть различными. Непременное требование, характеризующее такой список, заключается в том, чтобы выделенная совокупность ключевых задач являлась системой. Поэтому при конструировании системы ключевых задач темы необходимо иметь четкое представление о составе ее основных и производных понятий, о связях между ними, о связях понятий темы с понятиями других тем, наконец, о направлениях применения введенных понятий и связей. Иными словами, необходимо сформировать тематический *перечень* элементов содержания образования (ЭСО). Цели изучения темы позволяют среди этих понятий, связей и применений выделить ведущие и актуализовать их с помощью соответствующих ключевых задач. *Система ключевых задач темы*, являясь подсистемой системы задач всего курса, служит своеобразным остовом, на котором при задачном подходе строится изучение темы. Такую систему удобно визуализировать в виде ориентированного графа [5].

Совокупность задач, решение которых непосредственно вытекает из ключевых задач первого уровня, естественно определить как подсистему задач первого уровня, а совокупность задач, для решения которых приходится дополнительно использовать результаты ключевых задач второго уровня, – подсистемой задач второго уровня. Подсистемы задач более высокого уровня определяются аналогично.

Как оптимальным образом наполнить подсистему задач каждого уровня? Коль скоро речь идет о качественной подготовке выпускника средней школы к итоговой аттестации в форме ЕГЭ, то будем ориентироваться на формат этого экзамена. На ЕГЭ у выпускника проверяется как общая сформированность умения ориентироваться в знакомой, несколько измененной и незнакомой ситуациях, так и способность продуктивно и результативно предметно-содержательно действовать в каждой из этих ситуаций. Требования к уровню обученности выпускников средней школы по алгебре и началам анализа можно гарантированно удовлетворить, если организовать их учебную деятельность на основе многоуровневой системы задач, адекватно отражающей эти требования.

Формирование многоуровневой системы задач темы можно осуществить с помощью ее матричного представления, основанного на выделении для каждого уровня перечня базовых ЭСО и соответствующих им ключевых задач, – с одной стороны, и уровней обученности, отражающих умения решать знакомые, модифицированные и незнакомые задачи, – с другой. При этом если ключевые задачи выполняют в конструируемой системе задач роль своеобразных интеграторов предметно-содержательной компоненты, то при проектировании и реализации процесса обучения аналогичную роль должны играть общие методы и приемы деятельности в выделенных ситуациях. Описанную матричную модель удобно представить следующим образом:

Уровни сформированности умения действовать в ситуации	Предметно-содержательные уровни (определяются уровнем ключевых задач)			
	I	II	...	N
I (знакомая)				
II (видоизмененная)				
III (незнакомая)				

Построенная таким образом матрица системы задач темы содержит три строки, соответствующие трем типам учебных ситуаций, возникающих при решении задач, и N столбцов, отражающих количество уровней в выделенной системе ключевых задач темы. Подобное табличное (матричное) представление системы задач темы помогает осуществить полноценное наполнение на каждом уровне ее предметного и дидактического компонентов и тем самым реализовать критерии *предметной* и *дидактической полноты* (относительно заданных целей) формируемой системы задач.

Деятельность при решении задач, входящих в первую строку матрицы, носит репродуктивный характер. Ученик идентифицирует знакомые задачи и воспроизводит изученные способы их решения, применяет усвоенные знания в практическом плане для некоторого класса задач или получает требуемую информацию на основе применения усвоенного образца деятельности. Поэтому задачи отличаются *явными связями* между данными и искомыми элементами.

При решении задач из второй строки репродуктивная деятельность сочетается с реконструктивной, известные образцы применяются в несколько видоизмененных условиях. При наполнении соответствующего блока матрицы ключевые задачи подвергаются варьированию по алгоритму, по технической сложности, по форме представления условия, по комплексному сочетанию этих преобразований. *Близость* включаемых в блок задач к ключевым определяется числом добавленных и видоизмененных ЭСО. Наличие перечня ЭСО позволит свести вычисление близости двух задач с интуитивно-философского уровня к простой операциональной процедуре.

При решении задач третьей строки деятельность носит вариативный творческий характер. Ученик должен уметь ориентироваться в новых ситуациях и вырабатывать принципиально новые программы действий. Решение задач соответствующего блока требует от учащегося обладания обширным фондом отработанных и быстро развертываемых алгоритмов; умения оперативно перекодировать информацию из знаково-символической формы в графическую и наоборот. Вместе с тем оно не просто предполагает использование старых алгоритмов в новых условиях и возрастание технической сложности, а отличается неочевидностью применения и комбинирования изученных алгоритмов. Задачи этого уровня имеют усложненную логическую структуру и характеризуются наличием *латентных связей* между данными и искомыми элементами. Такие задачи обычно предлагаются в качестве самых трудных на вступительных экзаменах в вузы с высокими требованиями к математической подготовке абитуриентов и в заданиях С 3, С 4, С 5 вариантов ЕГЭ. При их решении в максимальной степени выражены такие параметры трудности, как неочевидность разложения задачи в последовательность шаблонных подзадач, необходимость комплексного использования ЭСО нескольких тем, методов и приемов из разных тематических областей. Эти задачи требуют умения пользоваться общими эвристическими приемами, а зачастую и знания дополнительных специальных методов.

В основе методики обучения на базе предлагаемой системы задач лежит поэтапное освоение блоков ее матрицы. Основная особенность этой методики заключается в том, что на каждом уровне, т. е. при освоении соответствующего столбца матрицы, учащийся всякий раз сталкивается со всеми тремя видами учебных ситуаций, возникающих при решении задач. Работа с ключевыми задачами строится на постепенном переходе от совместных форм деятельности к индивидуальным (от фронтального разбора отдельных ключевых задач и проведения уроков решения ключевых задач темы на начальных этапах изучения курса к самостоятельному составлению системы ключевых задач темы на заключительных этапах). Апробация предлагаемой методики показала, что организация постоянного мониторинга и коррекционной деятельности позволяет с высокой степенью достоверности прогнозировать результаты класса и отдельных учащихся на ЕГЭ.

Литература

1. Балл Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогические аспекты. – М.: Педагогика, 1990. – 183 с.

2. Больцано Б. Учение о науке (избранное). – СПб.: Наука, 2003. – 604 с.

3. Диофант Александрийский. Арифметика. – М.: Наука, 1974. – 328 с.

4. Зильберберг Н. И. Урок математики: подготовка и проведение. – М.: Просвещение, 1996. – 176 с.

5. Клековкин Г. А., Максютин А. А. Представление системы учебных задач ориентированным мультиграфом / Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: Материалы XXV всероссийского семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов. – Киров; М.: ВятГПУ, МГПУ, 2006. – С. 15–18.

6. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

7. Саранцев Г. И. Упражнения в обучении математике. – 2-е изд., – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.

8. Столяр А. А. Педагогика математики. – Мн.: Вышейшая школа, 1986. – 382 с.

9. Шарыгин И. Ф. Рассуждения о концепции школьной геометрии. – М.: МЦНМО, 2000. – 56 с.

10. Шохор-Троцкий С. И. Цель и средства преподавания низшей математики // Русская школа. – 1891. – № 9. – С. 103–129.

11. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц. – М.: Столетие, 1996. – 320 с.