Ю.А. Меленцова

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ МЕЙЕРА ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В работе [1] рассматривается приближенное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и 1- периодической правой частью $f(t)$ методом Бубнова-Галеркина, которое строится с помощью всплесков Мейера.

В настоящей работе предложенный метод иллюстрируется на примерах, разработан алгоритм численной реализации метода, написана программа на языке Pascal в среде Delphi, проведено сравнение методов.

Приведем результаты работы [1] более подробно.

Пусть $L[y] \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$ — дифференциальный оператор.

Требуется приближенно найти 1- периодическое решение линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и 1- периодической правой частью $f(t)$

$$L[y] = f(t) \qquad (1)$$

методом Бубнова-Галеркина.

Пусть $\{u_k(t)\}$ и $\{v_k(t)\}$ две системы 1- периодических функций, полные в норме пространства $L_2[0;1]$. Приближенное решение $y_n(t)$ строится как линейная комбинация функций $u_k(t)$: $y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t)$, где коэффициенты c_k находятся из условий $(L[y_n] - f(t), v_m(t)) = 0,\ m = 1,\ldots,n$, которые в силу линейности оператора $L[y]$ приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (L[u_k], v_m) = (f, v_m), \quad m = 1,\ldots,n. \qquad (2)$$

Здесь скалярное произведение рассматривается в пространстве $L_2[0;1]$: $(\alpha, \beta) = \int_0^1 \alpha(t)\beta(t)dt$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-00014-а

Известно, что последовательность $y_n(t)$ сходится к точному решению уравнения в смысле пространства $L_2[0;1]$.

§1. Выбор системы $\{u_k(t)\}$

В работе [1] в качестве системы $\{u_k(t)\}$ предлагается рассматривать ортонормированный базис Мейера пространства V_j. Познакомиться с построением базиса пространства V_j с помощью всплесков Мейера можно, например, в работах [2], [4].

Посмотрим, как можно построить этот базис.

Всплески Мейера строятся с помощью сопряженных зеркальных фильтров $\hat{h}(\omega)$. Потребуем, чтобы $\hat{h}(\omega)$ было непрерывным и удовлетворяло условию

$$\hat{h}(\omega)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{если} \quad \omega\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]\\ \sqrt{2}\cos(\alpha+\beta\omega), & \text{если} \ |\omega|\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\\ 0, & \text{если} \ |\omega|\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}.$$

Из условия непрерывности функции $\hat{h}(\omega)$ следует, что

$$\hat{h}(\omega)=\begin{cases}0, & \text{если} \ \omega\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]\\ -\sqrt{2}\sin\frac{3\omega}{2}, & \text{если} \ \omega\in\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]\\ \sqrt{2}, & \text{если} \quad \omega\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]\\ \sqrt{2}\sin\frac{3\omega}{2}, & \text{если} \ \omega\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\\ 0, & \text{если} \ \omega\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}$$

Такая функция удовлетворяет условию $\left|\hat{h}(\omega)\right|^2+\left|\hat{h}(\omega+\pi)\right|^2=2$ при $\omega\in\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.

Преобразование Фурье для масштабирующей функции $\varphi(t)$ равно $\hat{\varphi}(\omega)=\prod_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2^p}\right)$. В данном случае оно имеет вид

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right), & если \quad |\omega|\le\frac{4\pi}{3}\\ 0, & если \quad |\omega|\ge\frac{4\pi}{3}\end{cases}.$$

Подробнее

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}0, & если \quad \omega\le-\frac{4\pi}{3}\\ -\sin\frac{3\omega}{4}, & если \quad -\frac{4\pi}{3}\le\omega\le-\frac{2\pi}{3}\\ 1, & если \quad -\frac{2\pi}{3}\le\omega\le\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{3\omega}{4}, & если \quad \frac{2\pi}{3}\le\omega\le\frac{4\pi}{3}\\ 0, & если \quad \omega\ge\frac{4\pi}{3}\end{cases}.$$

Найдем масштабирующую функцию $\varphi(t):\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$.

Сделаем замену $\xi=\frac{\omega}{2\pi}$. Тогда

$$\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(2\pi\xi)e^{i2\pi\xi t}d\xi=\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}}-\sin\left(\frac{3}{2}\pi\xi\right)e^{i2\pi\xi t}d\xi+\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}e^{i2\pi\xi t}d\xi+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\xi\right)e^{i2\pi\xi t}d\xi=$$

$$=\left.\frac{e^{i2\pi\xi t}}{i2\pi t}\right|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\xi\right)e^{-i2\pi\xi t}d\xi+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\xi\right)e^{i2\pi\xi t}d\xi=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}+2\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\xi\right)\cos(2\pi\xi t)d\xi=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi t\right)\xi+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi t\right)\xi\right)d\xi=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}-\left(\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi t\right)\xi}{\pi\left(\frac{3}{2}+2t\right)}+\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi t\right)\xi}{\pi\left(\frac{3}{2}-2t\right)}\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}-$$

$$-\frac{\frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi t\right)\xi+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi t\right)\xi\right)+2t\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi t\right)\xi-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi t\right)\xi\right)}{\pi\left(\frac{9}{4}-4t^2\right)}\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}+\frac{3\cos\frac{3}{2}\pi\xi\cos 2\pi t\xi+4t\sin\frac{3}{2}\pi\xi\sin 2\pi t\xi}{\pi\left(4t^2-\frac{9}{4}\right)}\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}-\frac{3\cos\frac{4\pi t}{3}+4t\sin\frac{2\pi t}{3}}{\pi\left(4t^2-\frac{9}{4}\right)}.$$

Итак,

$$\varphi(t)=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}{\pi t}-\frac{3\cos\frac{4\pi t}{3}+4t\sin\frac{2\pi t}{3}}{\pi\left(4t^2-\frac{9}{4}\right)}=\frac{9\sin\frac{2\pi t}{3}+12t\cos\frac{4\pi t}{3}}{\pi t\left(9-16t^2\right)}.$$

В точках t=0, $t=\pm\frac{3}{4}$ устранимая особенность.

Можно провести построение масштабирующей функции $\varphi(t)$ для отрезка $[0,1]$, сделав замену $v=\frac{\omega}{2\pi}$. Тогда

$$\hat{h}(v)=\begin{cases}0, & \textit{если } v\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]\\ -\sqrt{2}\sin 3\pi v, & \textit{если } v\in\left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right]\\ \sqrt{2}, & \textit{если } v\in\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]\\ \sqrt{2}\sin 3\pi v, & \textit{если } v\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]\\ 0, & \textit{если} \in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\end{cases}$$

Преобразование Фурье для масштабирующей функции $\varphi(t)$ равно

$$\hat{\varphi}(\nu)=\begin{cases}0, & если \quad \nu\le-\frac{2}{3}\\ -\sin\frac{3\pi\nu}{2}, & если \quad -\frac{2}{3}\le\nu\le-\frac{1}{3}\\ 1, & если \quad -\frac{1}{3}\le\nu\le\frac{1}{3}\\ \sin\frac{3\pi\nu}{2}, & если \quad \frac{1}{3}\le\nu\le\frac{2}{3}\\ 0, & если \quad \nu\ge\frac{2}{3}\end{cases}.$$

Тогда $\varphi(t)$ определяется так: $\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$. После интегрирования, очевидно, получим для представления $\varphi(t)$ ту же формулу, что выписана как итог на стр.4.

Кратномасштабный ортонормированный базис $\{\varphi_{jn}(t)\}_{n\in Z}$ пространства V_j при всех $j\in Z$ получается сдвигом и сжатием функции $\varphi(t):\varphi_{jn}(t)=\sqrt{2^j}\varphi(2^j t-n)$.

Периодический базис пространства V_j с периодом 1 $\{\Phi_{jn}(t)\}$ получается так (см. [2]):

$\Phi_{jn}(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_{jn}(t+k)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\sqrt{2^j}\varphi(2^j(t+k)-n)$. Очевидно, что такая функция 1-периоди32ческая. При фиксированном j различных функций $\Phi_{jn}(t)$ 2^j штук: $\Phi_{j0}(t),\Phi_{j1}(t),...,\Phi_{j2^j-1}(t)$. Действительно,

$$\Phi_{j2^j}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_{j2^j}(t+k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sqrt{2^j}\varphi(2^j(t+k)-2^j)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sqrt{2^j}\varphi(2^j(t+k-1))=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_{j0}(t+k-1)=\Phi_{j0}(t).$$

Известно, что $\Phi_{jn}(t)$ можно найти так:

$$\Phi_{jn}(t)=\frac{1}{\sqrt{2^j}}\sum_{-\frac{2}{3}2^j<\nu<\frac{2}{3}2^j}\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)e^{\frac{2\pi i\nu n}{2^j}}e^{-2\pi i\nu t}.$$

Очевидно, $\Phi_{jn}^{(m)}(0)=\Phi_{jn}^{(m)}(1)$ для любого m.

Таким образом, в качестве системы $\{u_k(t)\}$ выбираются функции

$\Phi_{j0}(t), \Phi_{j1}(t),...,\Phi_{j2^j-1}(t)$. Тогда приближенное решение имеет вид

$$\tilde{y} = c_0\Phi_{j0}(t) + c_1\Phi_{j1}(t) + ... + c_{2^j-1}\Phi_{j2^j-1}(t).$$

Воспользуемся тем, что функция $\hat{\varphi}(v)$ является четной, $\hat{\varphi}(0) = 1$ и выпишем $\Phi_{j0}(t)$.

$\Phi_{j0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\left(1 + 2\sum_{v=1}^{v<\frac{2^{j+1}}{3}} \hat{\varphi}\left(\frac{v}{2^j}\right)\cos 2\pi vt\right)$. Функции $\Phi_{jn}(t)$ получаются из $\Phi_{j0}(t)$ сдвигом на $\frac{n}{2^j}$ вправо.

§2. Выбор системы $\{v_k(t)\}$

Систему $\{v_k(t)\}$ в работе [1] предлагается выбирать так.

Пусть $L^*[z]$— оператор, сопряженный к дифференциальному оператору $L[y]$: $(L[y], z) = (y, L^*[z])$. Известно (см., например, [3]), что

$$L^*[y] = (-1)^n \frac{d^n(a_0 y)}{dx^n} + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(a_1 y)}{dx^{n-1}} + ... + (-1)\frac{d(a_{n-1}y)}{dx} + a_n y.$$

Для уравнения с постоянными коэффициентами $L^*[y] \equiv (-1)^n a_0 y^{(n)} + ... - a_{n-1}y' + a_n y$.

Обозначим через $\Psi_{jm}(t)$ 1- периодическое решение уравнения

$$L^*[y] = \Phi_{jm}(t) \qquad (3)$$

и примем $\Psi_{jm}(t), m = 0,...,2^j - 1$ в качестве системы $\{v_k(t)\}$. Тогда, согласно методу Бубнова-Галеркина, из условия (2) получится

$\sum_{k=0}^{2^j-1} c_k\left(L[\Phi_{jk}], \Psi_{jm}\right) = (f, \Psi_{jm}), \quad m = 0,...,2^j - 1$. Отсюда, так как $\left(L[\Phi_{jk}], \Psi_{jm}\right) = \left(\Phi_{jk}, L^*[\Psi_{jm}]\right) = \left(\Phi_{jk}, \Phi_{jm}\right) = \delta_{km}$, следует, что $c_k = (f, \Psi_{jk})$, $k = 0,...,2^j - 1$.

Очевидно, таким выбором систем $\{u_k(t)\}$ и $\{v_k(t)\}$ удобно пользоваться, если дифференциальное уравнение (1) решается многократно при одном и том же операторе $L[y]$ и различных правых частях $f(t)$. Но при этом необходимо решить задачу отыскания решений $\Psi_{jm}(t)$.

Рассмотрим подробнее, как выглядят функции $\Phi_{jk}(t)$. Так как $\Phi_{jk}(t)=\Phi_{j0}\left(t-\frac{k}{2^j}\right)$, то $\Phi_{jk}(t)=\frac{1}{\sqrt{2^j}}\left(1+2\sum_{\nu=1}^{\nu<\frac{2^{j+1}}{3}}\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{k}{2^j}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^j}}+\sum_{\nu=1}^{\nu<\frac{2^{j+1}}{3}}\left(2\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\sin\left(\frac{2\pi\nu k}{2^j}\right)\frac{1}{\sqrt{2^j}}\sin 2\pi\nu t+2\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu k}{2^j}\right)\frac{1}{\sqrt{2^j}}\cos 2\pi\nu t\right).$$

Введем обозначения $N_0=\frac{1}{\sqrt{2^j}}$, $M_\nu=2\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\sin\left(\frac{2\pi\nu k}{2^j}\right)\frac{1}{\sqrt{2^j}}$, $N_\nu=2\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu k}{2^j}\right)\frac{1}{\sqrt{2^j}}$, $\nu=1,2,\ldots$. Понятно, что функции $\Phi_{jk}(t)$ представляют собой линейные комбинации 1, $\sin(2\pi\nu t)$, $\cos(2\pi\nu t)$, $\nu=1,2,\ldots$

Для уравнения (3) задача отыскания решений $\Psi_{jk}(t)$ легко решается, так как это уравнение с постоянными коэффициентами и его правая часть представляет собой линейную комбинацию синусов, косинусов и единицы.

Следовательно, $\Psi_{jk}=A_0+\sum_{\nu=1}^{\nu<\frac{2^{j+1}}{3}}\left(A_\nu\sin 2\pi\nu t+B_\nu\cos 2\pi\nu t\right)$, $k=0,\ldots,2^j-1$.

§3. Периодическое решение уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида $f(t)=\sum_{s=1}^{r}\left(M_s\sin(k_s 2\pi t)+N_s\cos(k_s 2\pi t)\right)$

Для уравнения n-ого порядка

$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=\sum_{s=1}^{r}\left(M_s\sin(k_s 2\pi t)+N_s\cos(k_s 2\pi t)\right)$ точное решение представляет собой сумму r слагаемых вида

$$A_s\sin(k_s 2\pi t)+B_s\cos(k_s 2\pi t). \qquad (4)$$

Чтобы найти коэффициенты A_s, B_s решения (4), нужно подставить (4) в уравнение $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=M_s\sin(k_s 2\pi t)+N_s\cos(k_s 2\pi t)$.

Нетрудно убедиться, что A_s, B_s являются решением системы

$\begin{cases}b_{11}A_s+b_{12}B_s=M_s\\ b_{21}A_s+b_{22}B_s=N_s\end{cases}$, где

$$b_{11}=b_{22}=a_n-a_{n-2}(2\pi k_s)^2+a_{n-4}(2\pi k_s)^4-\ldots,\quad b_{12}=-b_{21}=-a_{n-1}2\pi k_s+a_{n-3}(2\pi k_s)^3-\ldots.$$

§4. Метод Бубнова-Галеркина с тригонометрическим базисом

Сравним метод, предложенный в работе [1], с методом Бубнова-Галеркина с тригонометрическим базисом.

Рассмотрим построение приближенного решения $\tilde{\tilde{y}}$ с использованием тригонометрического базиса. Приближенное решение имеет вид $\tilde{\tilde{y}} = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(B_k \sin 2\pi kt + A_k \cos 2\pi kt)$. Периодическую функцию $f(t)$, стоящую в правой части уравнения, будем рассматривать на отрезке [-0.5, 0.5]. Для написания программы введено переобозначение для коэффициентов: $u_i = a_{n-i}$, $i = 0,\ldots,n$, т.е. $L[y] = u_n y^{(n)} + u_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + u_1 y' + u_0 y$.

$$L[\tilde{\tilde{y}}] = u_0\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(B_k \sin 2\pi kt + A_k \cos 2\pi kt)\right) + u_1\sum_{k=1}^{m}(B_k \cos 2\pi kt - A_k \sin 2\pi kt)2\pi k +$$

$$u_2\sum_{k=1}^{m}(B_k \sin 2\pi kt + A_k \cos 2\pi kt)(-4\pi^2 k^2) + u_3\sum_{k=1}^{m}(B_k \cos 2\pi kt - A_k \sin 2\pi kt)(-8\pi^3 k^3) + \ldots$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина $(L[\tilde{\tilde{y}}] - f, 1) = 0$, $(L[\tilde{\tilde{y}}] - f, \sin 2\pi t) = 0$, $(L[\tilde{\tilde{y}}] - f, \cos 2\pi t) = 0, \ldots$

$(L[\tilde{\tilde{y}}], 1) = u_0\frac{A_0}{2}$. Предположим, что коэффициент при у в исходном уравнении (1) отличен от нуля. Предположение оправдано, так как в противном случае при $f(t)$, равном константе, уравнение периодического решения не имеет. Тогда

$$A_0 = \frac{2}{u_0}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt.$$

$$(L[\tilde{\tilde{y}}], \sin 2\pi t) = \frac{1}{2}(B_1 u_0 - A_1 u_1 2\pi - B_1 u_2 4\pi^2 + A_1 u_3 8\pi^3 + B_1 u_4 16\pi^4 - \ldots)$$

$$(L[\tilde{\tilde{y}}], \cos 2\pi t) = \frac{1}{2}(A_1 u_0 + B_1 u_1 2\pi - A_1 u_2 4\pi^2 - B_1 u_3 8\pi^3 + A_1 u_4 16\pi^4 - \ldots)$$

Отсюда

$$B_1(u_0 - u_2 4\pi^2 + u_4 16\pi^4 - u_6 64\pi^6 + \ldots) + A_1(-u_1 2\pi + u_3 8\pi^3 - u_5 32\pi^5 + \ldots) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin 2\pi t dt$$

$$A_1(u_0 - u_2 4\pi^2 + u_4 16\pi^4 - u_6 64\pi^6 + \ldots) + B_1(u_1 2\pi - u_3 8\pi^3 + u_5 32\pi^5 - \ldots) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos 2\pi t dt$$

Коэффициенты A_k, B_k , k=1,...,m удовлетворяют системе

$$B_k\left(u_0 - u_2 4\pi^2k^2 + u_4 16\pi^4k^4 - u_6 64\pi^6k^6 + \ldots\right) +$$

$$A_k\left(-u_1 2\pi k + u_3 8\pi^3k^3 - u_5 32\pi^5k^5 + \ldots\right) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin 2\pi k t dt$$

$$A_k\left(u_0 - u_2 4\pi^2k^2 + u_4 16\pi^4k^4 - u_6 64\pi^6k^6 + \ldots\right) +$$

$$B_k\left(u_1 2\pi k - u_3 8\pi^3k^3 + u_5 32\pi^5k^5 - \ldots\right) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos 2\pi k t dt$$

Проиллюстрируем рассмотренные методы.

§5. Пример 1

Рассмотрим уравнение

$$y'' + 2y' + y = \sin(2\pi t) + 5\cos(2\pi t) + 2\cos(4\pi t). \qquad (5)$$

Для него нетрудно найти точное 1-периодическое решение

$$y = A_1\sin(2\pi t) + B_1\cos(2\pi t) + A_2\sin(4\pi t) + B_2\cos(4\pi t),$$

$$A_1 = \frac{1 - 4\pi^2 + 20\pi}{\left(1+4\pi^2\right)^2} = 0.01486323, \quad B_1 = \frac{\left(1-4\pi^2\right)5 - 4\pi}{\left(1+4\pi^2\right)^2} = -0.1250889,$$

$$A_2 = \frac{16\pi}{\left(1+16\pi^2\right)^2} = 0.0019904, \quad B_2 = \frac{\left(1-16\pi^2\right)2}{\left(1+16\pi^2\right)^2} = -0.0124271$$

Методом Бубнова-Галеркина найдем приближенное решение для j=1.

Выпишем вид функций $\Phi_{10}(t), \Phi_{11}(t)$.

$$\Phi_{10}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + 2\hat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2\pi t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t,$$

$$\Phi_{11}(t) = \Phi_{10}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi\left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2\pi t.$$

Приближенное решение имеет вид $\tilde{y} = c_0\Phi_{10}(t) + c_1\Phi_{11}(t)$.

Для уравнения (5) $L^*[y] = y'' - 2y' + y$.

Для отыскания Ψ_{10} нужно найти 1- периодическое решение уравнения $y'' - 2y' + y = \Phi_{10}(t)$, т.е. уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t$.

Это решение представляет собой сумму $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1- периодического решения уравнения $y'' - 2y' + y = \cos 2\pi t$, которое имеет вид $A\sin 2\pi t + B\cos 2\pi t$. A, B являются решением системы

$$\begin{cases} A(1-4\pi^2)+B4\pi=0 \\ -A4\pi+B(1-4\pi^2)=1 \end{cases}$$. Отсюда $A=-\frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}$, $B=\frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}$. Поэтому

$$\Psi_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\sin 2\pi t+\frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}\cos 2\pi t.$$

Нетрудно увидеть, что $\Psi_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\sin 2\pi t-\frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}\cos 2\pi t$.

В рассматриваемом примере $c_0=(f(t),\Psi_{10})$, $c_1=(f(t),\Psi_{11})$, т. е.

$$c_0=-\frac{2\pi}{(1+4\pi^2)^2}+\frac{2{,}5(1-4\pi^2)}{(1+4\pi^2)^2}=-0{,}062544, \qquad c_1=0{,}062544,$$

$$\tilde{y}=c_0\Phi_{10}(t)+c_1\Phi_{11}(t)=-0{,}062544(\Phi_{10}(t)-\Phi_{11}(t))=-0{,}125088\cos 2\pi t.$$

Найдем приближенное решение методом Бубнова-Галеркина с тригонометрическим базисом. Тогда $\tilde{\tilde{y}}=\frac{A_0}{2}+B_1\sin 2\pi t+A_1\cos 2\pi t$.

$$\frac{A_0}{2}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\sin 2\pi t+5\cos 2\pi t+2\cos 4\pi t)dt=0$$

Коэффициенты A_1, B_1 являются решением системы

$$B_1(1-4\pi^2)+A_1(-4\pi)=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\sin 2\pi t+5\cos 2\pi t+2\cos 4\pi t)\sin 2\pi t\,dt$$

$$A_1(1-4\pi^2)+B_1(4\pi)=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\sin 2\pi t+5\cos 2\pi t+2\cos 4\pi t)\cos 2\pi t\,dt.$$

Пользуясь тем, что тригонометрическая система функций является ортонормированной, найдем, что правые части уравнений равны соответственно 1 и 5. Решив линейную систему, получим $A_1=\frac{5-4\pi-20\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}=-0.1250889$, $B_1=\frac{1+20\pi-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}=0.01486323$, т.е.

$$\tilde{\tilde{y}}=0.01486323\sin 2\pi t-0.1250889\cos 2\pi t.$$

Понятно, что при j=1 $\tilde{y}$ плохо приближает точное решение. Программа, написанная на языке Delphi, демонстрирует, что при j=2 $\tilde{y}$ отражает характер точного решения, а при j=3 $\tilde{y}$ является хорошим приближением.

Сравним результаты, полученные двумя способами, с точным решением. При J=2

t	$\tilde{y}$	$\tilde{\tilde{y}}$	точное
0	-0.137516	-0.137516	-0.137516
0.1	-0.096303	-0.094410	-0.094410
0.2	-0.014465	-0.013295	-0.013295
0.3	0.062844	0.061674	0.061674
0.4	0.106095	0.104202	0.104202
0.5	0.112662	0.112662	0.112662
0.6	0.088622	0.090516	0.090516
0.7	0.034573	0.035742	0.035742
0.8	-0.042737	-0.043907	-0.043907
0.9	-0.113776	-0.115669	-0.115669
1	-0.137516	-0.137516	-0.137516

При J=3

t	$\tilde{y}$	$\tilde{\tilde{y}}$	точное
0	-0.137516	-0.137516	-0.137516
0.1	-0.094410	-0.094410	-0.094410
0.2	-0.013295	-0.013295	-0.013295
0.3	0.061674	0.061674	0.061674
0.4	0.104202	0.104202	0.104202
0.5	0.112662	0.112662	0.112662
0.6	0.090516	0.090516	0.090516
0.7	0.035742	0.035742	0.035742
0.8	-0.043907	-0.043907	-0.043907
0.9	-0.115669	-0.115669	-0.115669
1	-0.137516	-0.137516	-0.137516

Понятно, что если правая часть уравнения является гармонической функцией, то при достаточно большом m приближенное решение совпадет с точным.

§6. Пример 2

Рассмотрим такой пример, когда правая часть уравнения не является гармонической функцией.

Рассмотрим уравнение $y'' + 2y' + y = \begin{cases} (1-36\pi^2)\sin 6\pi t + 12\pi\cos 6\pi t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (3-12\pi^2)\sin 2\pi t + 12\pi\cos 6\pi t, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$.

Нетрудно проверить, что его точное решение $y = \begin{cases} \sin 6\pi t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 3\sin 2\pi t, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$.

$$c_0 = (f(t), \Psi_{10}(t)) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left((1-36\pi^2)\sin 6\pi t + 12\pi\cos 6\pi t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\sin 2\pi t + \frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}\cos 2\pi t\right)dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left((3-12\pi^2)\sin 2\pi t + 12\pi\cos 2\pi t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\sin 2\pi t + \frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}\cos 2\pi t\right)dt =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-36\pi^2)\frac{1}{6\pi}\cos 6\pi t\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(3-12\pi^2)\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{(3-12\pi^2)4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{6\pi(1-4\pi^2)}{(1+4\pi^2)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} =$$

$$-\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} = -0{,}600211,$$

$$c_1 = (f(t), \Psi_{11}(t)) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left((1-36\pi^2)\sin 6\pi t + 12\pi\cos 6\pi t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\sin 2\pi t - \frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}\cos 2\pi t\right)dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left((3-12\pi^2)\sin 2\pi t + 12\pi\cos 2\pi t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\sin 2\pi t - \frac{1-4\pi^2}{(1+4\pi^2)^2}\cos 2\pi t\right)dt =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-36\pi^2)\frac{1}{6\pi}\cos 6\pi t\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(3-12\pi^2)\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{(3-12\pi^2)4\pi}{(1+4\pi^2)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{6\pi(1-4\pi^2)}{(1+4\pi^2)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} =$$

$$-\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} = -0{,}600211.$$

Тогда $\tilde{y} = c_0\Phi_{10}(t) + c_1\Phi_{11}(t) = -0{,}600211(\Phi_{10}(t) + \Phi_{11}(t)) = -0{,}600211\sqrt{2} =$ -0,8488265.

Сравним результаты, полученные двумя способами, с точным решением.

При j=2

t	$\tilde{y}$	$\tilde{\tilde{y}}$	точное
0.00	0.169765	0.169765	0.000000
0.10	0.347614	0.347614	0.951057
0.20	-0.246300	-0.246300	-0.587785
0.30	-0.246300	-0.246300	-0.587785
0.40	0.347614	0.347614	0.951057
0.50	0.169765	0.169765	0.000000
0.60	-1.415742	-1.415742	-1.763356
0.70	-3.099469	-3.099469	-2.853170
0.80	-3.099469	-3.099469	-2.853170
0.90	-1.415742	-1.415742	-1.763356
1.00	0.169765	0.169765	-0.000000

Здесь $\tilde{y}$— приближенное решение, полученное при использовании базисов $\Phi_{j0}(t), \Phi_{j1}(t),...,\Phi_{j2^j-1}(t)$ и $\Psi_{j0}(t), \Psi_{j1}(t),...,\Psi_{j2^j-1}(t)$, $\tilde{\tilde{y}}$— приближенное решение, полученное при использовании тригонометрического базиса $1, \sin 2\pi t, \cos 2\pi t, \sin 4\pi t, \cos 4\pi t,...$

При j=3 получим

t	$\tilde{y}$	$\tilde{\tilde{y}}$	точное
0.00	0.024252	0.024252	0.000000
0.10	0.922766	0.940864	0.951057
0.20	-0.573973	-0.585158	-0.587785
0.30	-0.573973	-0.585158	-0.587785
0.40	0.922766	0.940864	0.951057
0.50	0.024252	0.024252	0.000000
0.60	-1.755449	-1.773548	-1.763356
0.70	-2.861728	-2.850542	-2.853170
0.80	-2.861728	-2.850542	-2.853170
0.90	-1.755449	-1.773548	-1.763356
1.00	0.024252	0.024252	-0.000000

При j=4 получим

t	$\tilde{y}$	$\tilde{\tilde{y}}$	точное
0.00	0.000807	0.003675	0.000000
0.10	0.949189	0.952582	0.951057
0.20	-0.589655	-0.586587	-0.587785
0.30	-0.589655	-0.586587	-0.587785
0.40	0.949189	0.952582	0.951057
0.50	0.000807	0.003675	0.000000
0.60	-1.765224	-1.761830	-1.763356
0.70	-2.855040	-2.851971	-2.853170
0.80	-2.855040	-2.851971	-2.853170
0.90	-1.765224	-1.761830	-1.763356
1.00	0.000807	0.003675	-0.000000

При решении уравнений с переменными 1-периодическими коэффициентами возникает проблема отыскания $\Psi_{jk}(t)$. Будем искать их методом Бубнова-Галеркина в виде $\Psi_{jk}(t)=\sum\limits_{i=0}^{2^j-1}\beta_{ki}\Phi_{ji}(t)$, $k=0,\ldots,2^j-1$, используя базисные системы $\{\Phi_{jk}(t)\}$ и $\{\Phi_{jm}(t)\}$.

Коэффициенты β_{ki} — решения систем линейных алгебраических уравнений порядка 2^j

$$\sum_{i=0}^{2^j-1}\beta_{ki}\left(L^*[\Phi_{ji}(t)],\Phi_{jm}\right)=\delta_{km},\quad k=0,\ldots,2^j-1,\text{ где}$$

$$L^*[y]=(-1)^n\frac{d^n(a_0y)}{dx^n}+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(a_1y)}{dx^{n-1}}+\ldots+(-1)\frac{d(a_{n-1}y)}{dx}+a_ny.$$

Таким образом, будут найдены функции $\Psi_{jk}(t)$, $k=0,\ldots,2^j-1$. Теперь можно построить приближенное решение $\tilde{y}=\sum\limits_{k=0}^{2^j-1}c_k\Phi_{jk}(t)$, где $c_k=\left(f,\Psi_{jk}(t)\right)$.

Но при этом возникает проблема отыскания производных $\frac{d^q(a_{n-q}(t)\Phi_{jk})}{dt^q}$, $q=1,\ldots,n$, которая, в принципе, разрешима, но трудоемка и требует знания производных от коэффициентов $a_{n-q}(t)$ либо использования численных методов, которое внесет дополнительную погрешность и потребует дополнительных оценок.

Поэтому в работе был рассмотрен еще один метод.

§7. Метод Бубнова-Галеркина с одинаковыми базисными системами $\{\Phi_{jk}(t)\}$

Будем решать линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и 1- периодической правой частью $f(t)$ $L[y]=f(t)$ методом Галеркина, выбрав в качестве базисных функций $\Phi_{j0}(t),\Phi_{j1}(t),...,\Phi_{j2^j-1}(t)$. Тогда приближенное решение имеет вид

$$\tilde{\tilde{y}}=c_0\Phi_{j0}(t)+c_1\Phi_{j1}(t)+...+c_{2^j-1}\Phi_{j2^j-1}(t).$$

Чтобы найти коэффициенты $c_k, k=0,...,2^j-1$, нужно, согласно методу Бубнова-Галер-кина, воспользоваться условием $\left(L\left[\tilde{\tilde{y}}\right]-f,\Phi_{ji}(t)\right)=0$, $i=0,...,2^j-1$. Таким образом, для отыскания $c_k, k=0,...,2^j-1$ нужно решить систему линейных алгебраических уравнений $Bc=g$ с коэффициентами $b_{ik}=\left(L[\Phi_{jk}(t)],\Phi_{ji}(t)\right)$, $i=0,...,2^j-1, k=0,...,2^j-1$, и правыми частями $g_i=\left(f(t),\Phi_{ji}(t)\right)$, $i=0,...,2^j-1$, где скалярное произведение определено в смысле L_2. Для отыскания $\left(L[\Phi_{jk}(t)],\Phi_{ji}(t)\right)$ нужно вычислять $\left(a_{n-q}(t)\Phi_{jk}^{(q)}(t),\Phi_{ji}(t)\right)$. Для уравнения с постоянными коэффициентами задача упрощается и сводится к отысканию скалярных произведений вида $\left(\Phi_{jk}(t)^{(q)},\Phi_{ji}(t)\right)$.

Запишем, как вычисляется q-я производная функции $\Phi_{j0}(t)$:

$$\Phi_{j0}^{(q)}(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2^j}}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu<\frac{2^{j+1}}{3}}(-1)^{\frac{q}{2}}(2\pi\nu)^q\hat{\varphi}\left(\dfrac{\nu}{2^j}\right)\cos 2\pi\nu t, & \textit{если } q \textit{ четное}\\ \dfrac{2}{\sqrt{2^j}}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu<\frac{2^{j+1}}{3}}(-1)^{\frac{q-1}{2}+1}(2\pi\nu)^q\hat{\varphi}\left(\dfrac{\nu}{2^j}\right)\sin 2\pi\nu t, & \textit{если } q \textit{ нечетное}\end{cases}$$

Остальные производные нетрудно найти, вспомнив, что функции $\Phi_{jk}(t)$ получаются из $\Phi_{j0}(t)$ сдвигом на $\dfrac{k}{2^j}$ вправо.

Итак, для реализации этого метода необходимо решить 2^j систем линейных алгебраических уравнений $Bc=g$ с одной и той же матрицей B и различными правыми частями.

§8. Пример 3

Снова рассмотрим уравнение $y'' + 2y' + y = \sin(2\pi t) + 5\cos(2\pi t) + 2\cos(4\pi t)$.

Найдем приближенное решение для j=1.

$$\Phi_{10}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + 2\hat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2\pi t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t,\ \Phi_{10}'(t) = -2\pi \sin 2\pi t,$$

$\Phi_{10}''(t) = -4\pi^2 \cos 2\pi t$.

$$\Phi_{11}(t) = \Phi_{10}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi\left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2\pi t,\ \Phi_{11}'(t) = 2\pi \sin 2\pi t,$$

$\Phi_{11}''(t) = 4\pi^2 \cos 2\pi t$.

Приближенное решение имеет вид $\tilde{\tilde{\tilde{y}}} = c_0\Phi_{10}(t) + c_1\Phi_{11}(t)$. Для отыскания c_0, c_1 нужно решить систему

$$\begin{cases} b_{00}c_0 + b_{01}c_1 = g_0 \\ b_{10}c_0 + b_{11}c_1 = g_1 \end{cases},$$

$$b_{00} = (L[\Phi_{10}(t)], \Phi_{10}(t)) = (\Phi_{10}''(t), \Phi_{10}(t)) + 2(\Phi_{10}'(t), \Phi_{10}(t)) + (\Phi_{10}(t), \Phi_{10}(t)),\ \text{где}$$

$$(\Phi_{10}''(t), \Phi_{10}(t)) = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t\right)(-4\pi^2\cos 2\pi t)dt = -2\pi^2\int_0^1(2\cos^2 2\pi t)dt = -2\pi^2,$$

$$(\Phi_{10}'(t), \Phi_{10}(t)) = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t\right)(-2\pi\sin 2\pi t)dt = 0, \qquad (\Phi_{10}(t), \Phi_{10}(t)) = 1.$$

Поэтому $b_{00} = (-2\pi^2) + 1$.

$$b_{01} = (L[\Phi_{11}(t)], \Phi_{10}(t)) = (\Phi_{11}''(t), \Phi_{10}(t)) + 2(\Phi_{11}'(t), \Phi_{10}(t)) + (\Phi_{11}(t), \Phi_{10}(t)),\ \text{где}$$

$$(\Phi_{11}''(t), \Phi_{10}(t)) = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t\right)(4\pi^2\cos 2\pi t)dt = 2\pi^2,$$

$$(\Phi_{11}'(t), \Phi_{10}(t)) = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t\right)(2\pi\sin 2\pi t)dt = 0, \qquad (\Phi_{11}(t), \Phi_{10}(t)) = 0.$$

Поэтому $b_{01} = 2\pi^2$.

$$b_{11} = (L[\Phi_{10}(t)], \Phi_{11}(t)) = (\Phi_{10}''(t), \Phi_{11}(t)) + 2(\Phi_{10}'(t), \Phi_{11}(t)) + (\Phi_{10}(t), \Phi_{11}(t)),\ \text{где}$$

$$(\Phi_{10}''(t), \Phi_{11}(t)) = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2\pi t\right)(-4\pi^2\cos 2\pi t)dt = 2\pi^2,\ (\Phi_{10}'(t), \Phi_{11}(t)) = 0.$$

Поэтому $b_{10} = 2\pi^2$.

$b_{11} = \left(L[\Phi_{11}(t)], \Phi_{11}(t)\right) = \left(\Phi_{11}''(t), \Phi_{11}(t)\right) + 2\left(\Phi_{11}'(t), \Phi_{11}(t)\right) + \left(\Phi_{11}(t), \Phi_{11}(t)\right)$, где

$\left(\Phi_{11}''(t), \Phi_{11}(t)\right) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2\pi t\right)\left(4\pi^2 \cos 2\pi t\right) dt = -2\pi^2$, $\left(\Phi_{11}'(t), \Phi_{11}(t)\right) = 0$,

$\left(\Phi_{11}(t), \Phi_{11}(t)\right) = 1$. Поэтому $b_{11} = \left(-2\pi^2\right) + 1$.

$g_0 = \left(\sin(2\pi t) + 5\cos(2\pi t) + 2\cos(4\pi t), \Phi_{10}(t)\right) = 2{,}5$

$g_1 = \left(\sin(2\pi t) + 5\cos(2\pi t) + 2\cos(4\pi t), \Phi_{11}(t)\right) = -2{,}5$

Выполнив вычисления, получим систему

$$\begin{cases} -18{,}73921 c_0 + 19{,}73921 c_1 = 2{,}5 \\ 19{,}73921 c_0 - 18{,}73921 c_1 = -2{,}5 \end{cases}$$

Легко проверить, что $c_0 = -0{,}64971$, $c_1 = 0{,}64971$. Тогда

$$\tilde{\tilde{\tilde{y}}} = -0{,}64971\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\pi t\right) + 0{,}64971\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2\pi t\right) = -1{,}29942 \cos 2\pi t$$

Сравним значения приближенного и точного решения.

t	$\tilde{\tilde{\tilde{y}}}$	точное
0.00	-0.129943	-0.137516
0.10	-0.105126	-0.094410
0.20	-0.040155	-0.013295
0.30	0.040155	0.061674
0.40	0.105126	0.104202
0.50	0.129943	0.112662
0.60	0.105126	0.090516
0.70	0.040155	0.035742
0.80	-0.040155	-0.043907
0.90	-0.105126	-0.115669
1.00	-0.129943	-0.137516

§9. О программе

Написана программа на языке Pascal в среде Delphi, позволяющая для любого уравнения с постоянными коэффициентами порядка n ($2 \le n \le 10$) и 1-периодической правой частью $f(t)$ найти приближенные решения $\tilde{y}$, $\tilde{\tilde{y}}$ и $\tilde{\tilde{\tilde{y}}}$ для j ($1 \le j \le 8$) и $m = 2^{j-1}$ (для $\tilde{\tilde{\tilde{y}}}$ $j \le 7$, так как для больших j написанная программа требует много времени).

Пользователь задает порядок уравнения n, его коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ (коэффициент a_n при y должен быть отличен от нуля) и j.

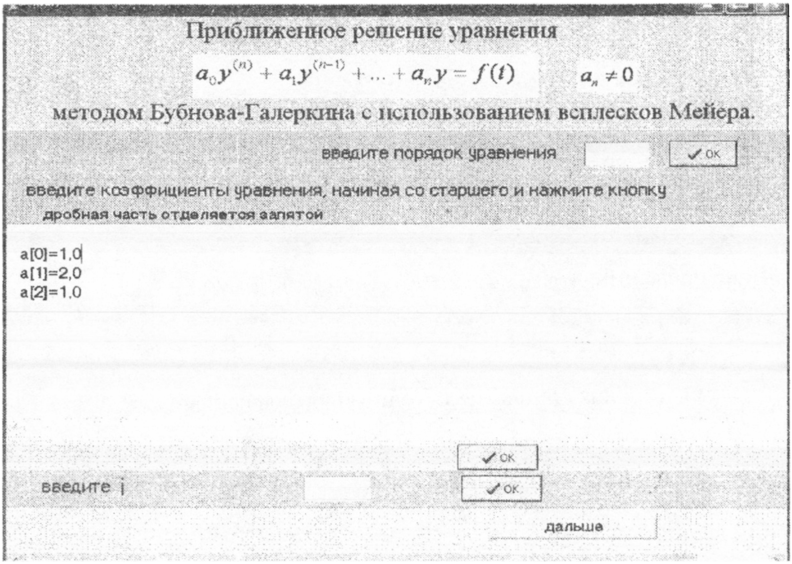

Рис. 1

Функция $f(t)$ может быть задана либо аналитически, либо таблично. В первом случае она должна быть задана на отрезке [-0.5; 1] в модуле UN_F_PR.PAS. Во втором случае в файле NITABL.TXT задаются количество значений сеточной функции и сами значения в равноотстоящих точках отрезка [0;1].

Пользователь может выбрать любой из трех методов и получить информацию о времени, затраченном на реализацию метода и о времени, затраченном на пересчет, связанный с правой частью уравнения $f(t)$ (время i =...).

На рис.2 приведен вид экрана, когда приближенные решения $\tilde{y}$, $\tilde{\tilde{y}}$ были получены при j=2.

$$\tilde{y} = d[0]\Phi_{20} + d[1]\Phi_{21} + d[2]\Phi_{22} + d[3]\Phi_{23},$$

$$\tilde{\tilde{y}} = ka[0] + kb[1]\sin 2\pi t + ka[1]\cos 2\pi t + kb[2]\sin 4\pi t + ka[2]\cos 4\pi t$$

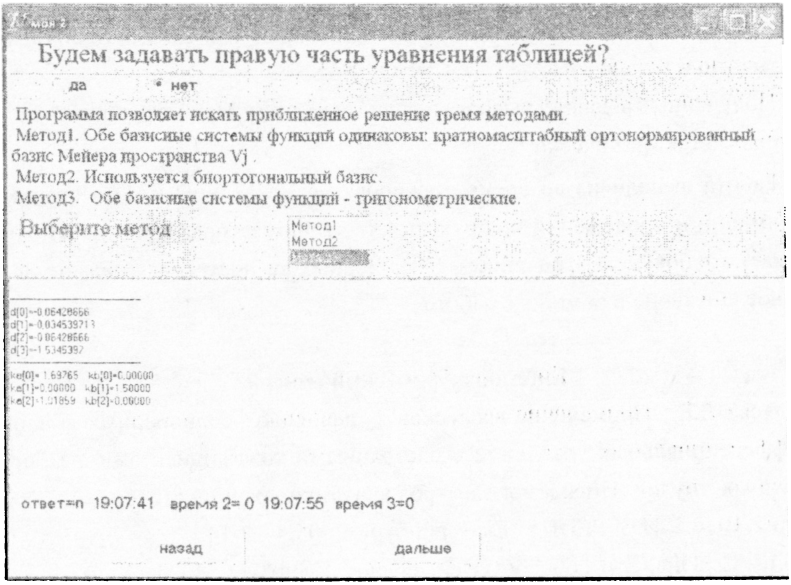
Будем задавать правую часть уравнения таблицей?
да
нет
Программа позволяет искать приближенное решение тремя методами.
Метод1. Обе базисные системы функций одинаковы: кратномасштабный ортонормированный базис Мейера пространства Vj .
Метод2. Используется биортогональный базис.
Метод3. Обе базисные системы функций - тригонометрические.
Выберите метод
Метод1
Метод2
ответ=n 19:07:41 время 2= 0 19:07:55 время 3=0
назад
дальше

Рис. 2

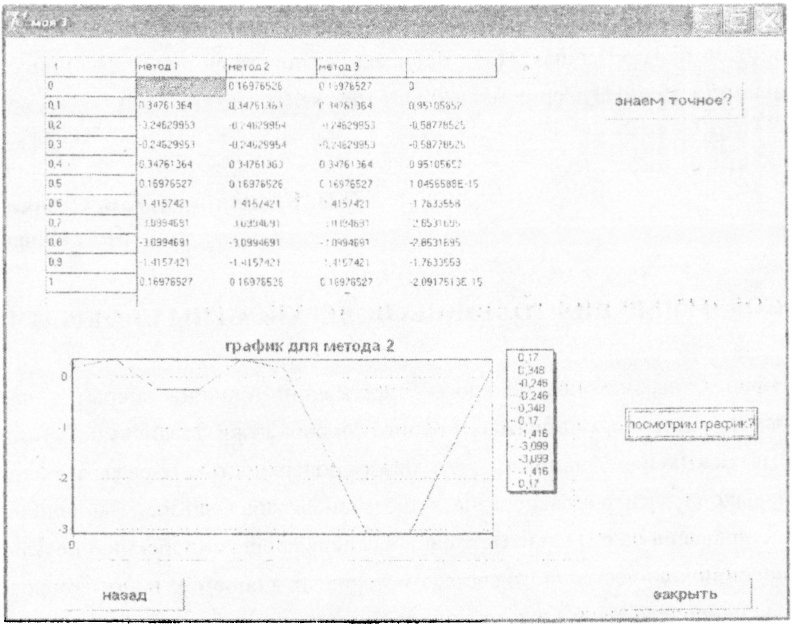
метод 1
метод 2
метод 3
знаем точное?
график для метода 2
посмотрим график?
назад
закрыть

Рис. 3

Программа позволяет сравнить приближенные решения с точным, если оно известно и задано в файле UTOCHNOE.PAS.

Полученные решения выводятся в виде таблицы. Приближенное решение $\tilde{y}$ изображается графически.

Работа выполнена во время стажировки в ИММ УрО РАН в отделе аппроксимации и приложений под руководством профессора Черных Н.И. Автор выражает глубокую благодарность Н.И. Черных за постановку задачи, за постоянное внимание и помощь в работе.

Библиографический список

1. Гуляева Л.Е. Применение всплесков к решению неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сборник научных трудов. Проблемы электроэнергетики, машиностроения и образования. Вып.2. Изд. РГППУ. Екатеринбург, 2005. С. 7-14.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов // "Мир", М., 2005.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1 // Изд. Иностранной литературы, М., 1953.
4. Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Всплески в пространствах гармонических функций// Изд. РАН. Серия мат. 2000. Т. 64. № 1. С. 145-174.

О.И. Клюшников, А.В. Степанов,
М.Г. Нечаева

СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОКРЫТИЙ

В работе рассматривается способ определения толщины покрытия, находящегося на поверхности образца. В основе способа лежит зависимость интенсивности спектральной линии от угла между поверхностью образца и направлением выхода электронов образца в щель энергоанализатора. Выполненная работа направлена на создание методик, обеспечивающих коррекцию результатов измерений количественного состава материалов в объемах наноразмеров.

Важнейшей задачей по созданию наноматериалов является умение создавать, знать и конструировать свойства поверхности и приповерхностных слоев; прецизионно контролировать структуру; осуществлять качественный и количе-