2. Fadley C.S.,Bergstrom S.A.L. // Phys/Lett. 1971.V.35A, N5. P.375 -378.
3. Fraser W.A., Florino J.V.,Deglass W.N., Robertson W.D. // Surf. Sci. 1973.V.36, N3. P.662-664.
4. Henke ., phys.Rev. 1972. V.A6, N1. P.94-97.
5. Madey T.E., Yates J.T., Erickson N.E.// Chem.Phys.Lett. 1973. N19. P.487-489.
6. Manson S.T. // J.Electr.Spectr. 1972. V.1, N.5. P.413 -415.

А.А. Меленцов

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЕДИНИЧНЫХ КВАДРАТЕ И КУБЕ

В работе [1, §1] была рассмотрена задача о представлении кусочно-полиномиальной функции двух переменных, связанной с разбиением единичного кбадрата на прямоугольники (см. рис.1) в виде билинейной функции, принадлежащей классу G_M. Через G_M было обозначено множество всех билинейных функций вида

$$g_M(x)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_1)\psi_s(x_2), \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2)$, $\varphi_s(x_1),\psi_s(x_2)\in L_q[0,1]$, следовательно $G_M\subset L_q(I^2)\,(I=[0,1])$.

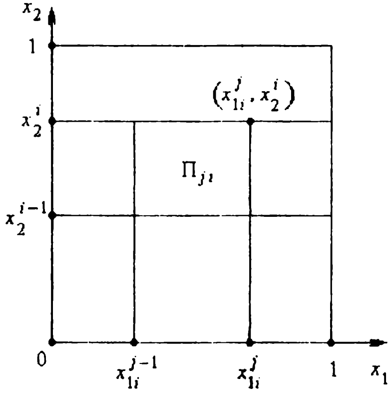

Рис.1

Квадрат $[0,1]\times[0,1]$ разбивали на прямоугольники следующим образом. Сначала отрезок $[0,1]$.на оси Ox_2 разобьем точками $\{x_2^i\}_{i=0}^N$ на промежутки. По определению полагаем $x_2^0=0, x_2^N=1$,

$$\Delta x_2^i=\left(x_2^{i-1},x_2^i\right] \quad (i=2,3,\ldots,N) \text{ и } \Delta x_2^1=\left[x_2^0,x_2^1\right].$$

Длину каждого промежутка обозначим, как обычно, $\left|\Delta x_2^i\right|=x_2^i-x_2^{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,N)$. Пусть $R_N^{(2)}=\left\{\Delta x_2^i\right\}_{i=1}^N$ – совокупность всех промежутков. Здесь каждой точке множества $\left\{x_2^i\right\}_{i=1}^N$ поставим в соответствие разбиение промежутка $0\le x_1\le 1$ точками $\left\{x_{1i}^j\right\}_{j=0}^{N_i}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ на N_i промежутков Δx_{1i}^j. Причем $x_{1i}^0=0, x_{1i}^{N_i}=1$ при $i=1,\ldots,N$. Кроме того, полагаем $\Delta x_{1i}^1=\left[x_{1i}^0,x_{1i}^1\right]$, $\Delta x_{1i}^j=\left(x_{1i}^{j-1},x_{1i}^j\right]$ для $j=2,3,\ldots,N_i$ и $\left|\Delta x_{1i}^j\right|=x_{1i}^j-x_{1i}^{j-1}$ $(j=1,\ldots,N_i)$. Обозначим через Π_i прямоугольник

$$\Pi_i=\left\{(x_1,x_2)\middle|\ 0\le x_1\le 1, x_2\in\Delta x_2^i\right\},$$

а через Π_{ji} – прямоугольник

$$\Pi_{ji}=\left\{(x_1,x_2)\middle|\ x_1\in\Delta x_{1i}^j, x_2\in\Delta x_2^i\right\}.$$

Ясно, что

$$\bigcup_{j=1}^{N_i}\Pi_{ji}=\Pi_i \quad (i=1,2,\ldots,N), \quad \bigcup_{i=1}^{N}\Pi_i=I^2.$$

Кроме того, отметим, что

$$\Pi_{ji}\cap\Pi_{j'i'}=\begin{cases}\Pi_{ji} \text{ при } j=j' \text{ и } i=i'\\ \varnothing \text{ при } j\ne j' \text{ или } i\ne i'\end{cases}.$$

Отсюда следует, что множество прямоугольников $\{\Pi_{ji}\}$ является разбиением основного квадрата I^2. Легко видеть, что число элементов разбиения равно сумме $K=\sum_{i=1}^N N_i$. Обозначим построенное разбиение через R_K^N:

$$R_K^N=\left\{\Pi_{ji}\right\}_{j=1,i=1}^{N_i,N}. \tag{2}$$

Зададим теперь на каждом прямоугольнике Π_{ji} фиксированный многочлен степени $l=\alpha-1$ по совокупности переменных:

$$P_{\Pi_{ji}}(x)=\sum_{k||k|\le l} C_k^{ji}x^k ,$$

где для мультииндекса $k=(k_1,k_2)\in Z_+^2$ под нормой $|k|$ понимается величина $|k|=k_1+k_2$ и полагается $x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}$. Таким образом, в развернутом виде $P_{\Pi_{ji}}(x)$ можно записать так:

$$P_{\Pi_{ji}}(x)=\sum_{0\le k_1+k_2\le l} C_{k_1k_2}^{ji}x_1^{k_1}x_2^{k_2} . \tag{3}$$

Зададим на квадрате I^2 кусочно-полиномиальную функцию $T_K(x)$, совпадающую на каждом прямоугольнике Π_{ji} с выбранным многочленом (3).

Сформулированная и доказанная затем в работе [1, § 1] лемма 1.1 сыграла, как оказалось в последствии, решающую роль в построении конструктивного и эффективного аппарата аппроксимации функций двух переменных соболевского класса

$$f(x)=f(x_1,x_2)\in W_p^{\alpha}(I^2),$$

где $1\le p\le\infty;\alpha$ - натуральное число; $x=(x_1,x_2)$.

Приведем формулировку этой леммы.

Лемма 1. *Пусть R_K^N разбиение квадрата I^2 на N полос Π_i прямыми, параллельными оси Ox_1, с последующим разбиением каждой полосы на произвольное число N_i прямоугольников Π_{ji} $(j=1,\dots,N_i)$, $K=\sum_{i=1}^{N}N_i$. Пусть $T_K(x)$ – кусочно-полиномиальная функция, заданная на разбиении R_K^N, на каждом прямоугольнике Π_{ji}, совпадающая с некоторым многочленом $P_{\Pi_{ji}}(x)$ (3) степени $l=\alpha-1$ по совокупности переменных. Тогда $T_K(x)$ принадлежит классу G_M билинейных функций вида* (1), *где $M=N(l+1)$.*

Тот факт, что количество слагаемых M в сумме (1) зависит только от N - числа полос и не зависит от K и сыграло важную роль для последующей аппроксимации.

В данной работе показано, что аналогичный результат можно получить для кусочно-полиномиальных функций трех переменных, заданных на единичном трехмерном кубе и связанных с разбиением R_K^N единичного куба I^3 на элементарные объемы – параллелепипеды Π_{ijk}. Через Π_k обозначим k-тый слой при разбиении единичного куба по оси OZ, через Π_{jk} обозначим j-тый параллелепипед, возникающий при разбиении слоя Π_k на параллелепипеды по оси OY. Через Π_{ijk} обозначим элементарный объем, возникающий при разбиении Π_{jk} по оси OX (см. рис.2). Здесь N^z – количество слоев после разбиения куба по оси OZ и N_k^y – количество параллелепипедов единичной длины, возникающих в k-ом слое после разбиения его по оси OY, K – общее число параллелепипедов Π_{ijk}, $N = \sum_{k=1}^{N^z} N_k^y$. Разбиение R_K^N единичного куба I^3 выполняется аналогично тому, как выполнялось в работе [1] разбиение R_K^N единичного квадрата I^2. Отметим лишь, что $\Pi_{ijk} \cap \Pi_{i'j'k'} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда выполняются все равенства $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$. Объединение всех Π_{ijk} совпадает с единичным кубом

$$\bigcup_{k=1}^{N}\bigcup_{j=1}^{N_k}\bigcup_{i=1}^{N_{kj}}\Pi_{ijk} = I^3 .$$

На каждом параллелепипеде $\Pi_{ijk} = \Delta x_i^{kj} \times \Delta y_j^k \times \Delta z_k$, где $|\Delta z_k| = z_k - z_{k-1}$, $|\Delta y_j^k| = y_j^k - y_{j-1}^k$, $|\Delta x_i^{kj}| = x_i^{kj} - x_{i-1}^{kj}$, зададим свой многочлен степени l по совокупности трех переменных

$$P_{\Pi_{ijk}}(x,y,z) = \sum_{0 \le r_1 + r_2 + r_3 \le l} C_{r_1 r_2 r_3}^{ijk} x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3}$$

и полученную кусочно-полиномиальную функцию на I^3 представим с помощью характеристических функций

$$\chi_{\Pi_{ijk}}(x,y,z) = \begin{cases} 1, & (x,y,z) \in \Pi_{ijk} \\ 0, & (x,y,z) \notin \Pi_{ijk} \end{cases},$$

$$\chi_{\Pi_{ijk}}(x,y,z) = \chi_{\Delta z_k}(z)\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x),$$

где

$$\chi_{\Delta z_k}(z)=\begin{cases}1, & z\in\Delta z_k\\ 0, & z\notin\Delta z_k\end{cases},\qquad \chi_{\Delta y_j^k}(y)=\begin{cases}1, & y\in\Delta y_j^k\\ 0, & y\notin\Delta y_j^k\end{cases},$$

$$\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)=\begin{cases}1, & x\in\Delta x_i^{kj}\\ 0, & x\notin\Delta x_i^{kj}\end{cases}.$$

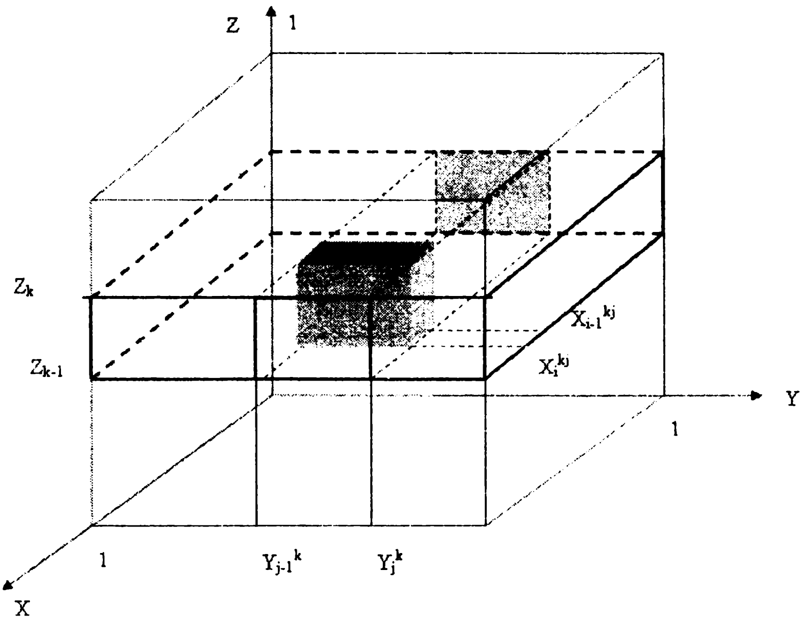

Рис.2

Пусть $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ - мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами и $|\tau|=\tau_1+\tau_2+\tau_3$. В итоге кусочно-полиномиальную функцию $T_K(x,y,z)$, где $K=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{j=1}^{N_k^y}N_{kj}^x$, т.е. K – число элементов разбиения единичного 3-мерного куба I^3, представим в виде суммы произведений функций отдельно двух переменных x,y и переменной z с минимальным числом слагаемых:

$$T_K(x,y,z)=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\sum_{0\le|\tau|\le l}\chi_{\Pi_{ijk}}(x,y,z)C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}z^{\tau_3}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta z_k}(z)\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{0\le|\tau|\le l}C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}z^{\tau_3}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta z_k}(z)\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{\tau_3=0}^{l}\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}z^{\tau_3}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta z_k}(z)\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{\tau_3=0}^{l}z^{\tau_3}\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N^z}\chi_{\Delta z_k}(z)\sum_{\tau_3=0}^{l}z^{\tau_3}\left[\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{\tau_3=0}^{l}\chi_{\Delta z_k}(z)z^{\tau_3}\left[\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}\right]. \qquad (4)$$

Результат (4), являясь промежуточным, позволяет сформулировать лемму 2, аналогичную лемме 1. Для этого обозначим

$$\varphi_{\tau_3,k}(z)=\chi_{\Delta z_k}(z)z^{\tau_3},$$

$$\psi_{\tau_3,k}(x,y)=\left[\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{0\le\tau_1+\tau_2\le l-\tau_3}C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}y^{\tau_2}\right].$$

Тогда

$$T_K(x,y,z)==\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{\tau_3=0}^{l}\varphi_{\tau_3,k}(z)\psi_{\tau_3,k}(x,y). \qquad (5)$$

Следовательно, $T_K(x,y,z)$ принадлежит классу G_M билинейных функций вида (1). Особенностью данного представления является то, что $\varphi_{\tau_3,k}(z)$ – функция одной переменной, а $\psi_{\tau_3,k}(x,y)$ – функция двух переменных. При этом число слагаемых в этой сумме $M=N^z(l+1)$ зависит только от числа слоев, на которые разбит единичный куб I^3.

Лемма 2. *Пусть* R_K^N *– разбиение куба* I^3 *на* N^z *слоев* Π_k *с последующим разбиением каждого слоя* Π_k *на произвольное число* N_k^y *параллелепипедов*

Π_{jk} $\left(N=\sum_{k=1}^{N^z} N_k^y\right)$, *каждый из которых в свою очередь разбивается на произвольное число параллелепипедов* Π_{ijk} *по оси* OX *(см. рис.2). Общее число которых равно* K. *Пусть* $T_K(x,y,z)$ *– кусочно-полиномиальная функция, заданная на разбиении* R_K^N, *на каждом параллелепипеде* Π_{ijk}, *совпадающая с некоторым многочленом* $P_{\Pi_{ijk}}(x,y,z)$ *степени* $l=\alpha-1$ *по совокупности переменных. Тогда* $T_K(x,y,z)$ *принадлежит классу* G_M *билинейных функций вида* (5), *где*

$$M=N^z(l+1).$$

Далее найдем представление $T_k(x,y,z)$ в виде суммы произведений функций одной переменной с минимальным числом слагаемых.

Представим

$$\sum_{0\le \tau_1+\tau_2\le l-\tau_3} C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}y^{\tau_2}=\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_3}\sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_3-\tau_2} C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}y^{\tau_2}.$$

Обозначим $l-\tau_3=t$ и тогда последнее выражение примет вид

$$\sum_{\tau_2=0}^{t}\sum_{\tau_1=0}^{t-\tau_2} C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}y^{\tau_2}$$

и выражение, стоящее в скобках в (4) примет вид

$$T^*_{t,k}(x,y)=\left[\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)\sum_{\tau_2=0}^{t}\sum_{\tau_1=0}^{t-\tau_2} C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}y^{\tau_2}\right].$$

Проведем для этой суммы преобразования, аналогичные ранее проделанным в работе [1] в лемме 1.1. Меняя порядок суммирования по переменным i и τ_2, получим

$$T^*_K(t,k)=\left[\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{\tau_2=0}^{t}\sum_{i=1}^{N_{kj}}\sum_{\tau_1=0}^{t-\tau_2}\chi_{\Delta y_j^k}(y)\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}y^{\tau_2}\right]=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{\tau_2=0}^{t}\chi_{\Delta y_j^k}(y)y^{\tau_2}\sum_{i=1}^{N_{kj}}\sum_{\tau_1=0}^{t-\tau_2}\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}\right],$$

подставляя полученное выражение вместо квадратной скобки в (4) и $l-\tau_3$ – вместо t, окончательно получим

$$T_K(x,y,z)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\tau_3=0}^{l}\chi_{\Delta z_k}(z)z^{\tau_3}\left[\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_3}\chi_{\Delta y_j^k}(y)y^{\tau_2}\sum_{i=1}^{N_{kj}}\sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_3-\tau_2}\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)C^{ijk}_{\tau_1\tau_2\tau_3}x^{\tau_1}\right]$$

или

$$T_K(x,y,z)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\tau_3=0}^{l}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_3}\chi_{\Delta z_k}(z)z^{\tau_3}\chi_{\Delta y_j^k}(y)y^{\tau_2}\sum_{i=1}^{N_{kj}}\sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_3-\tau_2}\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}.$$

Пусть

$$f_{1,\tau_3,k}(z)=\chi_{\Delta z_k}(z)z^{\tau_3},$$

$$f_{2,\tau_2,j,k}(y)=\chi_{\Delta y_j^k}(y)y^{\tau_2},$$

$$f_{3,\tau_2,\tau_3,j,k}(x)=\sum_{i=1}^{N_{kj}^x}\sum_{\tau_1=0}^{l-\tau_3-\tau_2}\chi_{\Delta x_i^{kj}}(x)C_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{ijk}x^{\tau_1}.$$

Тогда

$$T_K(x,y,z)=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{\tau_3=0}^{l}\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_3}f_{1,\tau_3,k}(z)f_{2,\tau_2,j,k}(y)f_{3,\tau_2,\tau_3,j,k}(x),$$

$$T_K(x,y,z)=\sum_{k=1}^{N^z}\sum_{j=1}^{N_k^y}\sum_{\tau_3=0}^{l}\sum_{\tau_2=0}^{l-\tau_3}f_{1,\tau_3,k}(z)f_{2,\tau_2,j,k}(y)f_{3,\tau_2,\tau_3,j,k}(x).$$

Число слагаемых в этой сумме равно

$$\left(\sum_{k=1}^{N^z}N_k^y\right)\frac{(l+2)(l+1)}{2}=M.$$

Если функцию

$$g_M(x,y,z)=\sum_{s=1}^{M}f_{1s}(x)f_{2s}(y)f_{3s}(z) \tag{6}$$

называть трилинейной (по аналогии с билинейной), то $T_K(x,y,z)$ представляет собой трилинейную функцию порядка $M=\left(\sum_{k=1}^{N^z}N_k^y\right)\frac{(l+2)(l+1)}{2}$, т.е. с числом слагаемых равным M. Отметим, что здесь порядок функции g_M не зависит от частоты разбиений по переменной x.

Теперь можно сформулировать следующую лемму

Лемма 3. *Пусть R_K^N – разбиение куба I^3 на N^z слоев Π_k с последующим разбиением каждого слоя Π_k на произвольное число N_k^y параллелепипедов $\Pi_{jk}\left(N=\sum_{k=1}^{N^z}N_k^y\right)$, каждый из которых в свою очередь разбивается на произвольное число параллелепипедов Π_{ijk} (см. рис.2). Общее число которых равно*

K. *Пусть* $T_K(x,y,z)$ – *кусочно-полиномиальная функция, заданная на разбиении* R_K^N, *на каждом параллелепипеде* Π_{ijk}, *совпадающая с некоторым многочленом* $P_{ijk}(x,y,z)$ *степени* $l=\alpha-1$ *по совокупности переменных. Тогда* $T_K(x,y,z)$ *принадлежит классу* G_M *трилинейных функций вида* (6), *где* M – *количество слагаемых в трилинейной функции имеет вид*

$$M=\left(\sum_{k=1}^{N^z} N_k^y\right)\frac{(l+2)(l+1)}{2}.$$

Очевидно, что аналогичные леммы могут быть сформулированы и для случая n переменных (см. в статье Меленцов А.А. Приближения функций класса $W_p^\alpha([0,1]^2)$ билинейными функциями // Изв. Уральского университета. 2004. № 30. Математика и механика. Вып.6. С.90–116.

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора Черных Н.И. за полезные замечания.