

Рис.6. Зависимости поверхностных напряжений от потенциала при температуре 295 K и стационарном потенциале $\phi_{sp} \approx 0.68 B$ границ раздела Pt/Ag₄RbI₅ (1) и Au/Ag₄RbI₅ (2): γ – суммарные поверхностные напряжения в ТЭЛ, γ_s – напряжения в приповерхностном слое ТЭЛ и γ_v – напряжения в диффузном слое ТЭЛ.

А.А. Меленцов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАМЕНОЙ ЯДРА НА ВЫРОЖДЕННОЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ*

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00409.

Задача приближения функции двух переменных билинейными функциями рассматривалась многими авторами [1-6, 8-12]. В работе [5] предложен конструктивный метод построения аппроксимирующих билинейных функций,

обеспечивающих наилучший порядок уклонения в метрике L_q функций $f(x_1, x_2)$, принадлежащих соболевскому классу W_p^α , от билинейных функций $g_M(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^M \varphi_s(x_1) \psi_s(x_2)$ и даны оценки этого уклонения.

Благодаря конструктивному способу получения оценки, этот метод может быть использован при решении интегральных уравнений.

Настоящая работа и посвящена применению этого метода к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода в случае, когда оно разрешимо. Тогда при достаточно высокой степени аппроксимации ядра уравнение с вырожденным ядром также будет разрешимо.

Решение интегральных уравнений с помощью аппроксимации ядра $k(x, s)$ вырожденным — прием известный. Наиболее распространен способ аппроксимации ядра сплайнами двух переменных, в частности, способ кусочно-полиномиальной аппроксимации.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = \int k(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (1)$$

где функция $k(x, s)$ принадлежит соболевскому классу $W_p^\alpha(I^2)$, где $\alpha = 2$, $1 \leq p < \infty$, $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$,

Для замены ядра на вырожденное воспользуемся результатами работ [5], [6], в которых показано, что наилучшее по порядку приближение функции $k(x, s)$ класса $W_p^\alpha(I^2)$ билинейными функциями

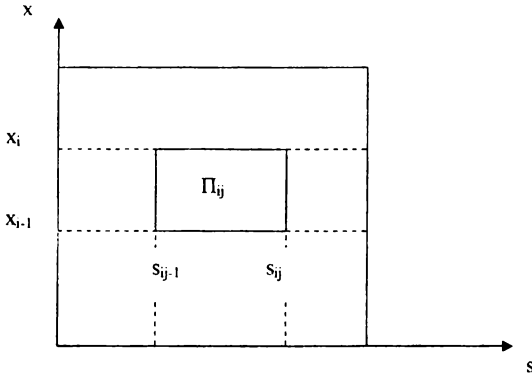
$$g_M(x, s) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(x) \psi_i(s), \quad (2)$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(s) \in L_q[0, 1]$, $1 \leq q < \infty$, в метрике пространства L_q достигается с помощью кусочно-полиномиальной аппроксимации $k(x, s)$ на специальном разбиении квадрата I^2 на прямоугольники Π_{ij} ($I^2 = \bigcup_i \bigcup_j \Pi_{ij}$) многочленами степени $\alpha - 1$ или более. В частности, в случае $k(x, s) \in W_p^2(I^2)$ можно ограничиться кусочно-линейной аппроксимацией.

Аппроксимирующую функцию обозначим $T(x, s)$. Рассмотрим, как она получается.

Разобьем квадрат I^2 на N полос прямыми $x = x_i, i = 1, \dots, N$ ($x_i < x_{i+1}, x_N = 1$).
 Затем каждую полосу разобьем на прямоугольники прямыми $s = s_{ij}, j = 1, \dots, N_i$.
 Через Π_{ij} обозначим прямоугольник,

Рис. 1.



полученный при $x \in (x_{i-1}, x_i], s \in (s_{i,j-1}, s_{ij}]$ (см. рис.1).

Через $P_{ij}(x, s)$ обозначим многочлен, определенный на прямоугольнике Π_{ij} :

$$P_{ij}(x, s) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} x + \gamma_{ij} s.$$

Пусть $\chi_{\Pi_{ij}}$ — характеристическая функция прямоугольника Π_{ij} , определенная на квадрате I^2 :

$$\chi_{\Pi_{ij}} = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{ij} \\ 0, & x \in I^2 \setminus \Pi_{ij} \end{cases}$$

Тогда функцию $T(x, s)$ можно представить в следующем виде:

$$T(x, s) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} \chi_{\Pi_{ij}} P_{ij}(x, s). \quad (3)$$

В работе [5] было доказано, что $T(x, s)$, определяемое формулой (3), имеет вид (2) при $M = \alpha N$. В частности, при $\alpha = 2$ $T(x, s)$ имеет вид (2) для $M = 2N$ и

$$T(x, s) = \sum_{i=1}^N (\varphi_{0i}(s) \psi_{0i}(x) + \varphi_{1i}(s) \psi_{1i}(x)), \quad (4)$$

где

$$\psi_{0i}(x) = \chi_{[x_{i-1}, x_i]} 1, \quad \psi_{1i}(x) = \chi_{[x_{i-1}, x_i]} x, \quad (5)$$

$$\varphi_{0i}(s) = \sum_{j=1}^{N_i} \chi_{[s_{i,j-1}, s_{ij}]} (\alpha_{ij} + \gamma_{ij} s), \quad \varphi_{1i}(s) = \sum_{j=1}^{N_i} \chi_{[s_{i,j-1}, s_{ij}]} \beta_{ij} \quad (6)$$

При этом в работе [5] предлагается конкретный конструктивный алгоритм отыскания оптимального разбиения квадрата I^2 на прямоугольники Π_{ij} , обеспечивающий наилучший возможный порядок $O(M^{-2})$ аппроксимации для функций $k(x,s)$ класса $W_p^2(I^2)$.

В дальнейшем будем предполагать, что $p = q$. Тогда, согласно [5], x_i определяется рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1})^{2p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_0^1 \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial s} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \right|^p \right) ds = \\ = \frac{1}{N^{1+2p}} \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial s} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \right|^p \right) ds \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_0 = 0.$$

Для отыскания каждого x_i , $i=1, \dots, N-1$, нужно решить нелинейное уравнение (7).

Точки s_{ij} , согласно [5], следует отыскивать следующим образом. Рассматриваются два рекуррентных соотношения.

$$\begin{aligned} 1. \quad (\bar{s}_{ij} - \bar{s}_{ij-1})^{-1+p} \int_{\bar{s}_{ij-1}}^{\bar{s}_{ij}} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial s} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \right|^p \right) dx = \\ = (x_i - x_{i-1})^p \int_0^1 ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial s} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \right|^p \right) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (\underline{s}_{ij} - \underline{s}_{ij-1})^{-1+2p} \int_{\underline{s}_{ij-1}}^{\underline{s}_{ij}} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial s} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \right|^p \right) dx = \\ = (x_i - x_{i-1})^{2p} \int_0^1 ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial s} \right|^p + \left| \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \right|^p \right) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{s}_{i0} = \underline{s}_{i0} = 0.$$

При каждом i нелинейные уравнения (8) и (9) решаются численно, найденные точки \bar{s}_{ij} и \underline{s}_{ij} упорядочиваются по возрастанию и образуют последовательность s_{ij} , $j = 1, \dots, N_i$.

После этого прямоугольники Π_{ij} определены.

Коэффициенты α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} определяются из разложения ядра $k(x,s)$ по формуле Тейлора с точностью до линейных членов в точке (s_{ij}^0, x_{ij}^0) , являющейся серединой прямоугольника Π_{ij} .

Итак, $k(x,s) \approx k(x_{ij}^0, s_{ij}^0) + k'_x(x_{ij}^0, s_{ij}^0)(x - x_{ij}^0) + k'_s(x_{ij}^0, s_{ij}^0)(s - s_{ij}^0)$. Следовательно, в (6)

$$\alpha_{ij} = k(x_{ij}^u, s_{ij}^u) - k_i(x_{ij}^u, s_{ij}^u)x_{ij}^u - k_j(x_{ij}^u, s_{ij}^u)s_{ij}^u, \quad \beta_{ij} = k_i(x_{ij}^u, s_{ij}^u), \quad \gamma_{ij} = k_j(x_{ij}^u, s_{ij}^u). \quad (10)$$

Таким образом, замена ядра на оптимальное по порядку аппроксимации вырожденное ядро проведена.

Методика решения интегрального уравнения с вырожденным ядром (4) хорошо известна. Интегральное уравнение с ядром $T(x, s)$ имеет вид

$$y(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^N (\varphi_{0i}(s)\psi_{0i}(x) + \varphi_{1i}(s)\psi_{1i}(x)) \right) y(s) ds + f(x),$$

или, после некоторых преобразований, вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^N \left(\left(\int_0^1 \varphi_{0i}(s) y(s) ds \right) \psi_{0i}(x) + \left(\int_0^1 \varphi_{1i}(s) y(s) ds \right) \psi_{1i}(x) \right) + f(x).$$

Отсюда и из (5) видно, что при $x \in (x_{i-1}, x_i]$ решение имеет вид

$$y(x) = f(x) + A_i x + B_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

где $A_i = \int_0^1 \varphi_{1i}(s) y(s) ds$, $B_i = \int_0^1 \varphi_{0i}(s) y(s) ds$ – неизвестные, т. к. $y(s)$ пока не най-

дено. Таким образом, функция $y(x)$ будет непрерывной всюду, за исключением, быть может, точек x_i , $i = 1, \dots, N-1$.

Итак, $y(x) = \sum_{i=1}^N (B_i \psi_{0i}(x) + A_i \psi_{1i}(x)) + f(x)$. Подставляя его в интегральное уравнение с вырожденным ядром (4), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (A_i \psi_{1i}(x) + B_i \psi_{0i}(x)) = \\ & = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^N (\varphi_{0i}(s)\psi_{0i}(x) + \varphi_{1i}(s)\psi_{1i}(x)) \right) \left(\sum_{L=1}^N (A_L \psi_{1L}(s) + B_L \psi_{0L}(s)) + f(s) \right) ds \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при $\psi_{0i}(x)$ и $\psi_{1i}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), получим следующую систему линейных уравнений для A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{L=1}^N \left(A_L \int_0^1 \varphi_{1i}(s)\psi_{1L}(s) ds + B_L \int_0^1 \varphi_{1i}(s)\psi_{0L}(s) ds \right) + \int_0^1 \varphi_{1i}(s)f(s) ds, \\ B_i &= \sum_{L=1}^N \left(A_L \int_0^1 \varphi_{0i}(s)\psi_{1L}(s) ds + B_L \int_0^1 \varphi_{0i}(s)\psi_{0L}(s) ds \right) + \int_0^1 \varphi_{0i}(s)f(s) ds. \end{aligned}$$

Отметим, что несмотря на то, что квадрат I^2 разбит на большое число прямоугольников $-\sum_{i=1}^N N_i$, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром (4) свелось к системе $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными.

Учитывая вид функций $\psi_{0i}(s)$ и $\psi_{1i}(s)$, определяемый формулой (5), получим, что

$$\int_0^1 \varphi_{ri}(s) \psi_{0L}(s) ds = \int_{x_{L-1}}^{x_L} \varphi_{ri}(s) ds, \quad r = 0, 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \varphi_{ri}(s) \psi_{1L}(s) ds = \int_{x_L}^{x_{L+1}} \varphi_{ri}(s) ds, \quad r = 0, 1.$$

Наконец, вспомним вид (6) функций $\varphi_{0i}(s)$ и $\varphi_{1i}(s)$. Рассмотрим i -ую полосу. Через m_L обозначим количество точек s_{ij} , принадлежащих L -ому полуинтервалу $(x_{L-1}, x_L]$. Предположим, что $m_L > 0$. Через j_L обозначим наименьший из индексов j , соответствующих точкам s_{ij} , принадлежащим L -ому полуинтервалу $(x_{L-1}, x_L]$. Далее для каждого отрезка $[x_{L-1}, x_L]$ введем новое разбиение s_{ij}^L ($j_L - 1 \leq j \leq j_L + m_L$), где $x_{L-1} = s_{i, j_L - 1}^L$,

$x_L = s_{i, j_L + m_L}^L$ и $s_{ij}^L = s_{ij}$ ($j_L \leq j \leq j_L + m_L - 1$). Тогда каждый интеграл вида

$\int_{x_{L-1}}^{x_L} g(s) ds$ разбивается на сумму

$$\int_{x_{L-1}}^{x_L} g(s) ds = \int_{s_{i, j_L - 1}^L}^{s_{i, j_L}^L} g(s) ds + \int_{s_{i, j_L}^L}^{s_{i, j_L + 1}^L} g(s) ds + \dots + \int_{s_{i, j_L + m_L - 1}^L}^{s_{i, j_L + m_L}^L} g(s) ds = \sum_{j = j_L}^{j_L + m_L} \int_{s_{i, j}^L}^{s_{i, j+1}^L} g(s) ds.$$

При $m_L = 0$ положим $\sum_{j = j_L}^{j_L} \int_{s_{i, j}^L}^{s_{i, j+1}^L} g(s) ds = \int_{x_{L-1}}^{x_L} g(s) ds$.

Рассмотрим это на примере. Пусть квадрат разбит на 3 полосы. Пусть первая полоса разбита на 4 прямоугольника так, как показано на рис.2. При $L=1$ $[x_{L-1}, x_L] = [x_0, x_1]$, т. е. рассматривается интеграл $\int_{x_0}^{x_1} g(s) ds$. В ситуации, изобра-

женной на рис.2, $m_1 = 0$, $j_1 = 1$, $s_{1, j_1 - 1} = s_{1, 0} = 0$, $j_1 + m_1 = 1$. Тогда $\int_{x_0}^{x_1} g(s) ds$ не разбивается на сумму интегралов, а

$$\int_{x_1}^{x_2} g(s) ds = \int_{s_1}^{s_{11}} g(s) ds + \int_{s_{11}}^{s_{12}} g(s) ds + \int_{s_{12}}^{s_{13}} g(s) ds = \int_{s_{10}}^{s_{11}} g(s) ds + \int_{s_{11}}^{s_{12}} g(s) ds + \int_{s_{12}}^{s_{13}} g(s) ds,$$

$$\int_{x_2}^{x_3} g(s) ds = \int_{s_2}^{s_{13}} g(s) ds + \int_{s_{13}}^{s_{14}} g(s) ds = \int_{s_{12}}^{s_{13}} g(s) ds + \int_{s_{13}}^{s_{14}} g(s) ds.$$

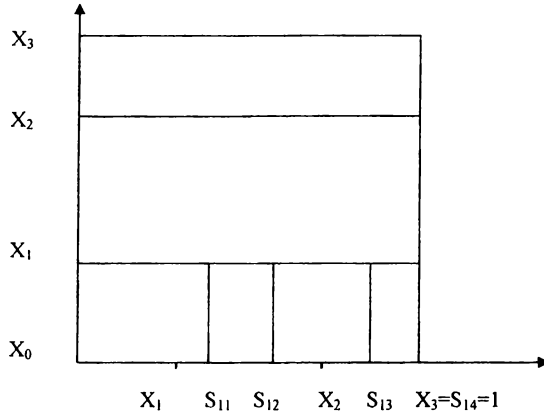


Рис. 2.

Таким образом

$$\int_0^1 \varphi_{i,r}(s) \psi_{r,L}(s) ds = \int_{s_{L-1}}^{s_L} \varphi_{i,r}(s) s^r ds = \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} \beta_{ij} s^r ds, \quad r=0,1, \quad ,$$

$$\int_0^1 \varphi_{0i}(s) \psi_{r,L}(s) ds = \int_{s_{L-1}}^{s_L} \varphi_{0i}(s) s^r ds = \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} (\alpha_{ij} + \gamma_{ij} s) s^r ds, \quad r=0,1.$$

Получим

$$A_i = \sum_{L=1}^N \left[A_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} \beta_{ij} s ds + B_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} \beta_{ij} ds \right] + \sum_{j=1}^{N_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \beta_{ij} f(s) ds, \quad (12)$$

$$B_i = \sum_{L=1}^N \left[A_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} (\alpha_{ij} + \gamma_{ij} s) s ds + B_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} (\alpha_{ij} + \gamma_{ij} s) ds \right] + \sum_{j=1}^{N_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} (\alpha_{ij} + \gamma_{ij} s) f(s) ds,$$

$i=1, \dots, N.$

Итак, получена система линейных уравнений относительно

$A_i, B_i, \quad i=1, \dots, N.$

$$A_i = \sum_{L=1}^N \left[A_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \beta_{ij} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} s ds + B_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \beta_{ij} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} ds \right] + \sum_{j=1}^{N_i} \beta_{ij} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s) ds$$

$$B_i = \sum_{L=1}^N \left[A_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \left(\alpha_{ij} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} s ds + \gamma_{ij} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} s^2 ds \right) + B_L \sum_{j=j_L}^{j_L+m_L} \left(\alpha_{ij} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} ds + \gamma_{ij} \int_{s_{j-1}^L}^{s_j^L} s ds \right) \right] + \quad (13)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_i} \left(\alpha_{ij} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s) ds + \gamma_{ij} \int_{s_{j-1}}^{s_j} s f(s) ds \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты при неизвестных легко вычисляются. Для вычисления свободных членов системы можно использовать методы численного интегрирования, например, составную формулу трапеций. Таким образом, задача решения интегрального уравнения с вырожденным ядром (4), (10) свелась к решению линейной системы вида

$$\begin{cases} A_i = \sum_{L=1}^N (\mu_{iL} A_L + \nu_{iL} B_L) + \eta_i \\ B_i = \sum_{L=1}^N (\delta_{iL} A_L + \rho_{iL} B_L) + \tau_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

порядка $2N$, где N — количество полос, на которые разбит квадрат I^2 .

Обозначим через $y(x)$ точное решение интегрального уравнения (1), через $\bar{y}(x)$ — решение, найденное при замене ядра на вырожденное по формулам (4)-(6), (10). В работе [6] показано, что погрешность решения интегрального уравнения при рассмотренной замене ядра на вырожденное в метрике пространства L_q удовлетворяет условию

$$\|y - \bar{y}\|_q \leq \frac{C}{N^2}. \quad (14)$$

Таким образом, можно сформулировать алгоритм решения интегрального уравнения (1) с точностью (14), который реализован на ЭВМ:

1. Найти точки $x_i, i = 1, \dots, N$, по формулам (7), решая нелинейное уравнение приближенно с заданной степенью точности и используя для вычисления двойного интеграла составную формулу численного интегрирования (например, трапеций).
2. При каждом i найти точки $s_{ij}, j = 1, \dots, N_i$, по формулам (8), (9).
3. Вычислить коэффициенты линейной системы порядка $2N$ (13).
4. Решить систему (13), тем самым определить вид приближенного решения $\bar{y}(x)$ интегрального уравнения Фредгольма (1) — кусочно-непрерывной функции (11).

При этом норма разности между точным решением уравнения (1) $y(x)$ и приближенным решением $\bar{y}(x)$, найденным заменой ядра на вырожденное с помощью описанной выше билинейной функции $T(x, s)$, определенной формулами (4)-(6), (10), удовлетворяет оценке (14).

Алгоритм устроен так, что его можно запрограммировать для любого заранее заданного числа полос. Но конкретная реализация, связанная с выделенным объемом памяти, предполагает разбиение квадрата не более, чем на 10 по-

лос. Далее при отыскании приближенных решений полагаем $p = 2, q = 2$. Интегралы считаются с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. С такой же точностью решаются нелинейные уравнения.

Рассмотрим в качестве примера интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$y(x) = \int_0^1 (1 + xs)y(s)ds + x^2.$$

Его точное решение $y(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{25}{18}$.

При разбиении квадрата на 2 полосы решение, найденное с использованием авторской билинейной функции, имеет вид

$$\bar{y}_2 = -0.67351x - 1.38706 + x^2, \quad x \in [0, 0.50]$$

$$\bar{y}_2 = -0.67355x - 1.38363 + x^2, \quad x \in (0.50, 1]$$

Приведем таблицу значений точного решения y , приближенного решения \bar{y}_2 , полученного при разбиении квадрата на 2 полосы и приближенного решения \bar{y}_4 , полученного при разбиении квадрата на 4 полосы.

x	\bar{y}_2	\bar{y}_4	y
0	-1.38706	-1.38880	-1.38889
0.1	-1.44441	-1.44565	-1.44556
0.2	-1.48176	-1.48249	-1.48222
0.3	-1.49911	-1.49890	-1.49889
0.4	-1.49646	-1.49575	-1.49556
0.5	-1.47381	-1.47259	-1.47222
0.6	-1.42776	-1.42901	-1.42889
0.7	-1.36512	-1.36585	-1.36556
0.8	-1.28247	-1.28226	-1.28222
0.9	-1.17982	-1.17911	-1.17889
1	-1.05718	-1.05596	-1.05556

Теперь рассмотрим интегральное уравнение, ядро которого не является вырожденным.

$$y(x) = \int_0^1 x^2 \cos(xs)y(s)ds + x - x \sin x - \cos x + 1.$$

Нетрудно проверить, что $y = x$ является решением этого уравнения.

Функция $f(x)$ в данном примере имеет вид $f(x) = x - x \sin x - \cos x + 1$.

Можно аналитически найти приближенное решение \bar{y} этого уравнения, которое получится при замене ядра на вырожденное с использованием традиционного разложения $\cos(xs)$ по формуле Тейлора $k(x,s) \approx x^2 - \frac{x^4 s^2}{2}$.

Решив линейную систему второго порядка, можно найти $\bar{y} = 0.498683x^2 - 0.124524x^4 + f(x)$.

При разбиении квадрата на 4 полосы решение \bar{y}_4 , найденное с использованием сплайна, имеет вид

$$\bar{y}_4 = 0.12357x - 0.00769 + f(x), \quad x \in [0, 0.25]$$

$$\bar{y}_4 = 0.35225x - 0.06449 + f(x), \quad x \in (0.25, 0.51]$$

$$\bar{y}_4 = 0.51702x - 0.14718 + f(x), \quad x \in (0.51, 0.78]$$

$$\bar{y}_4 = 0.56446x - 0.18227 + f(x), \quad x \in (0.78, 1]$$

Приведем таблицу значений точного решения y , приближенного решения \bar{y}_2 , полученного при разбиении квадрата на 2 полосы, приближенного решения \bar{y}_4 , полученного при разбиении квадрата на 4 полосы, приближенного решения \bar{y}_{10} , полученного при разбиении квадрата на 10 полос и приближенного решения \bar{y} .

y	\bar{y}_2	\bar{y}_4	\bar{y}_{10}	\bar{y}
0	0.02957	0.00769	0.00125	0
0.1	0.08940	0.09968	0.09876	0.09999
0.2	0.19855	0.19722	0.19879	0.19995
0.3	0.29832	0.29719	0.29886	0.29988
0.4	0.38944	0.39958	0.39915	0.39977
0.5	0.47294	0.49434	0.49953	0.49959
0.6	0.59190	0.59892	0.59976	0.59927
0.7	0.69651	0.69894	0.69987	0.69866
0.8	0.79799	0.79871	0.79988	0.79756
0.9	0.89826	0.89914	0.89984	0.89563
1	0.99937	1.00042	0.99984	0.99239

Видно, что точность решений \bar{y}_{10} и \bar{y} сравнима, однако формулой Тейлора можно пользоваться только для гладких функций $k(x,s)$. Предложенный в работе метод можно использовать и в случае, когда ядро $k(x,s)$ разрывно или когда известны значения ядра $k(x,s)$ только на (достаточно густой) сетке точек $(x_i, s_j) \in I^2$.

Отметим, что программа допускает любые $1 \leq p < \infty$ и любые $1 \leq q < \infty$. Алгоритм вычислений не меняется по сравнению с приведенным выше, меняется

только вид формул (7), (8), (9). Ядро $k(x,s)$ может быть задано любой дважды дифференцируемой функцией. Универсальность предложенного метода является основным и существенным его преимуществом.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Н.И.Черных за постановку задачи и большую помощь в работе и доценту Ю.А. Меленцовой за написание программы, реализующей алгоритм.

Библиографический список

1. Бабаев М.-Б.А. О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в L_p при $1 \leq q \leq p \leq 2$ // Матем. сб. 1991. Т.182, № 1. С.122 – 129.
2. Бабаев М.-Б.А. О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейными формами в L_p при $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$ // Тр. МИРАН. 1992. Т.198. С.21 – 40.
3. Бабаев М.-Б.А. Приближение соболевских классов W_q^r функций многих переменных билинейными формами в L_p при $2 \leq q \leq p \leq \infty$ // Матем. заметки. 1997. Т.62, вып. 1. С.18 – 34.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Матем. сборник. 1967. Т.73 (115). С.331 – 355.
5. Меленцов А.А. Приближения функций класса $W_p^\alpha([0,1]^2)$ билинейными функциями // Изв. Уральского университета. 2004. № 30. Математика и механика. Вып.6. С.90 – 116.
6. Меленцов А.А. О точности оценок приближения функций соболевского класса $W_p^\alpha([0,1]^2)$ билинейными функциями // Сборник научных трудов. Проблемы электроэнергетики, машиностроения и образования. Изд.РГППУ. Екатеринбург. 2005. С. 102-110.
7. Меленцов А.А. Оценка приближенного решения интегрального уравнения, полученного заменой ядра класса W_p^α билинейной функцией // Сборник научных трудов. Проблемы электроэнергетики, машиностроения и образования. Изд.РГППУ. Екатеринбург. 2005. вып. 2. С. 14-21.
8. Мирошин Н.В., Хромов В.В. Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Матем. заметки. 1982. Т.32, № 5. С.721 – 727.
9. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. 1906/07. Vol. 63. P.433 – 476.
10. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т.178. С.1 – 112.

11. Темляков В.Н. О наилучших билинейных приближениях периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1986. Т.286, № 2. С.301 – 304.

12. Темляков В.Н. Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. МИАН. 1989. Т.187. С.191 – 215.

Клюшников О.И., Смолин Г.К.,
Шабалдин Е.Д., Степанов А.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕХИОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ СПОСОБОМ БЕЗ СТАНДАРТА

Широкий класс соединений (соли, неметаллические включения, жидкости, газы и т.д.) представляют материалы, состоящие из двух компонент, А и В (соединения $A_m B_n$). В работе [2] рассмотрен вариант определения стехиометрического состава двухкомпонентных систем.

Для двухкомпонентных систем (сплавы, химические соединения) справедливо соотношение

$$C_A^x + C_B^x = 1 \quad (1)$$

Чтобы исключить измерения от реперного образца I_{FIS} , вводят отношения концентраций C_A^x/C_B^x , выраженные через экспериментальные значения интенсивностей I_A^x и I_B^x от элементов А и В в соединении, и используют табличные значения коэффициентов чувствительности S_A и S_B

$$C_A^x/C_B^x = I_A^x/I_B^x \cdot (S_B/S_A) \quad (2)$$

Если обозначить $C_A^x/C_B^x = k_A$, то в молярных единицах концентрация C_A^x определяется по формуле

$$C_A^x = k_A / (1 + k_A) \quad (3)$$

При решении системы уравнений (1) и (2) определяют формулы для расчета концентраций каждого элемента соединения, с учетом коррекции на присутствие другого элемента соединения

$$C_A^x = (I_A^x S_B) / (I_B^x S_A + I_A^x S_B);$$

$$C_B^x = (I_B^x S_A) / (I_B^x S_A + I_A^x S_B) \quad (4)$$

Для определения стехиометрического состава использованы молярные соотношения

$$M_{AB}^m = m(M_A^A) + n(M_B^B); \quad (5)$$

$$C_A^x = m(M_A^A)/M_{AB}^m; \quad (6)$$

$$C_B^x = n(M_B^B)/M_{AB}^m \quad (7)$$

где: M_{AB}^m – вес грамм-моля соединения; (M_A^A) и (M_B^B) – грамм-атомные веса