УДК 37.022; 004.922
DOI:10.17853/2587-6910-2021-04-55-60

РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СРЕДСТВАМИ ИКТ

SOLVING PLANIMETRIC TASKS USING AFFINE TRANSFORMATIONS BY ICT MEANS

Ольга Максимовна Корчажкина

кандидат технических наук,
старший научный сотрудник

olgakomax@gmail.com

Институт кибернетики и образовательной информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

Olga Maksimovna Korchazhkina

Candidate of Technical Sciences,
Senior Research Fellow

Institute for Cybernetics and Informatics in Education of Federal Research Centre "Computer Science and Control" of The Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Аннотация. *На координатной плоскости виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия» рассматриваются аффинные преобразования: сдвиг (параллельный перенос), поворот, осевая симметрия, подобие, масштабирование и искажение (сжатие/растяжение). Приводятся примеры решения планиметрических задач, выполненных с помощью аффинных преобразований «искажение», «гомотетия», «осевая симметрия» и «поворот».*

Ключевые слова: *аффинные преобразования, сдвиг, масштабирование, поворот, отражение, искажение, виртуальные лаборатории, планиметрические задачи.*

Abstract. *The article considers affine transformations — translation/shearing, rotation, reflection, similarity, transformation/scalling, and skew (compression/stretching) made in the virtual laboratory "1C: Planimetry". The paper also demonstrates a few examples of solving planimetric tasks performed with the use of the skew, homothety, reflection and rotation affine transformations.*

Keywords: *affine transformations, translation/shearing, scalling, rotation, reflection, skew, virtual laboratories, planimetric tasks.*

Аффинным преобразованием называется взаимно однозначное отображение одного множества в другое, когда единственному элементу исходного множества соответствует единственный элемент итогового множества, и наоборот. Аффинным преобразованиям могут подвергаться как алгебраические, так и геометрические объекты, причем с помощью последних можно удачно проиллюстрировать различные типы аффинных преобразований через свойства геометрических фигур на плоскости или тел в пространстве, когда неизменными остаются либо все элементы, либо часть из них [1].

Виды аффинных преобразований в геометрии состоят из трех основных групп: группы движений, группы подобий и группы искажений, которые объединяются общим свойством сохранять виды фигур, тел и их элементов. Это означает, что в евклидовом пространстве точка не может преобразоваться, например, в прямую или плоскость, окружность — в прямоугольник, а угол — в пару параллельных прямых.

Однако в группе искажений отображения геометрических фигур по типу «параллелограмм — ромб, прямоугольник или квадрат», «эллипс — окружность» или изменение вида треугольника (например, из произвольного в равнобедренный, равносторонний или прямоугольный) допускаются.

В группе движений неизменными остаются вид, размеры фигур и элементов, а их положение относительно исходных объектов изменяется. К группе движений относятся, например, параллельный перенос, осевая симметрия и поворот объекта.

В группе подобий в результате преобразований по типу гомотетии (преобразований подобия относительно центра), происходящих с фиксированным коэффициентом гомотетии (коэффициентом подобия), сохраняются равенства внутренних и внешних углов фигур, взаимная параллельность или перпендикулярность прямых и отрезков, пропорциональных соотношений между углами, длинами, площадями и объемами; а изменяются только размеры объектов в соответствии с коэффициентом гомотетии и их положение по длине лучей гомотетии относительно исходных элементов в направлении преобразования. Когда преобразование подобия происходит не по типу гомотетии, т. е. в отсутствие центра преобразования, то при сохранении коэффициента подобия возможны дополнительные повороты фигур и элементов, а также их произвольное расположение на плоскости согласно выбранным траекториям движения.

Группа искажений (сжатий/растяжений), или аффинное искажение, работает преимущественно с фигурами: неизменными остаются вид фигуры и взаимное положение ее элементов, т. е. сохраняются самые общие свойства фигур и элементов, а некоторые их величины синхронно меняются либо в соответствии с коэффициентами искажения, либо произвольным образом.

С помощью метода аффинных преобразований можно значительно упростить решение тех геометрических задач, для которых искомые величины, численные соотношения или качественные отношения между элементами задачи остаются либо неизменными, либо изменяются в соответствии с определенными законами или правилами. Это означает, что аффинные преобразования целесообразны тогда, когда в задачах требуется определить отношение длин, площадей или объемов, доказать параллельность прямых, принадлежность точек одной прямой или плоскости, наличие общих точек у тех или иных элементов фигуры и пр.

К аффинным преобразованиям, которые можно применять для решения планиметрических задач, относятся:

- движение (обобщенная группа движений) — каждая точка фигуры отображается в себе подобную так, что фигура преобразуется в саму себя, однако ее расположение на плоскости меняется заданным или произвольным образом;
- параллельный перенос (группа движений) — каждая точка фигуры перемещается на одно и то же расстояние в одном и том же направлении, определяемом вектором переноса;
- поворот (группа движений) — каждая точка фигуры поворачивается на один и тот же угол вокруг заданного центра;
- осевая симметрия (группа движений) — каждая точка фигуры переходит в симметричную ей точку относительно заданной оси симметрии;
- гомотетия (частная группа подобий: преобразование подобия, центральное подобие, масштабирование) — каждая точка фигуры преобразуется в себе подобную относительно фиксированного центра гомотетии и отстоит от исходной точки на некоторое расстояние в соответствии с коэффициентом гомотетии, определяющим размер фигуры;
- подобие (объединенная группа подобий и движений, или гомотетия в движении) — преобразование подобия с заданным коэффициентом подобия, направлением движения или углом поворота;
- линейное преобразование (группа искажений) — сжатие/растяжение фигуры с сохранением ее класса.

В интерактивном пространстве «1С: Математический конструктор» с помощью виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия» есть возможность осуществлять следующие аффинные преобразования на плоскости: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, гомотетия, подобие и движение в общем виде и линейное

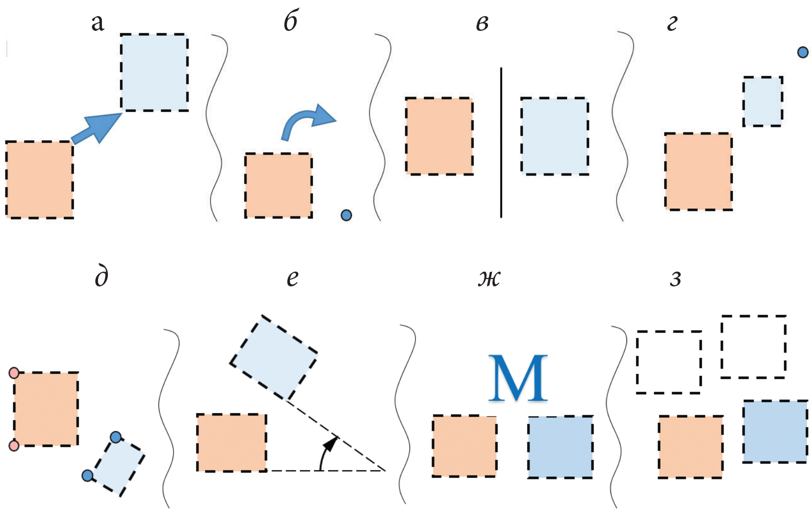

Рис. 1. Инфографика инструментов аффинных преобразований в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»: *а* – параллельный перенос; *б* – поворот; *в* – осевая симметрия; *г* – гомотетия; *д* – подобие; *е* – движение; *ж* – линейное преобразование;*з* – обозначение операции повтора ранее сделанного аффинного преобразования

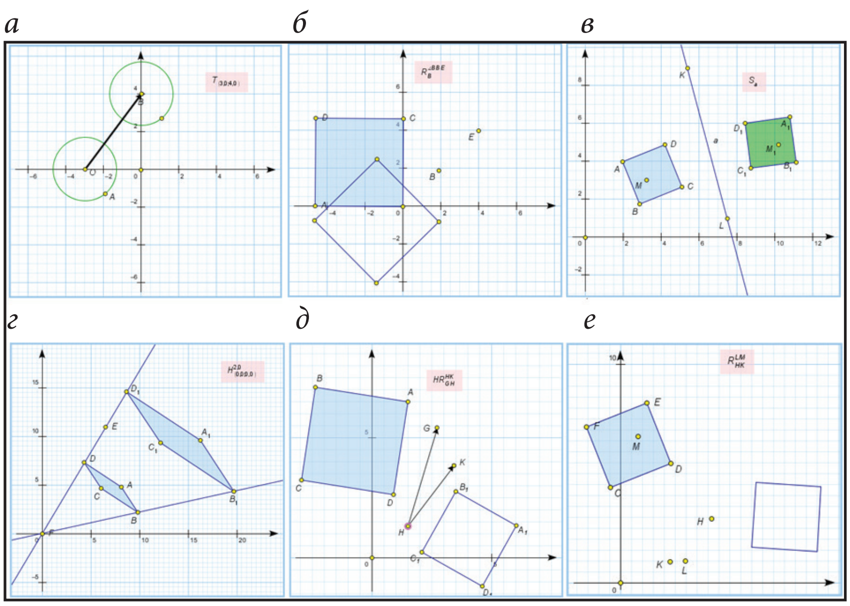

Рис. 2. Выполнение аффинных преобразований в интерактивном пространстве виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»: *а* – параллельный перенос; *б* – поворот; *в* – осевая симметрия; *г* – гомотетия; *д* – подобие; *е* – движение

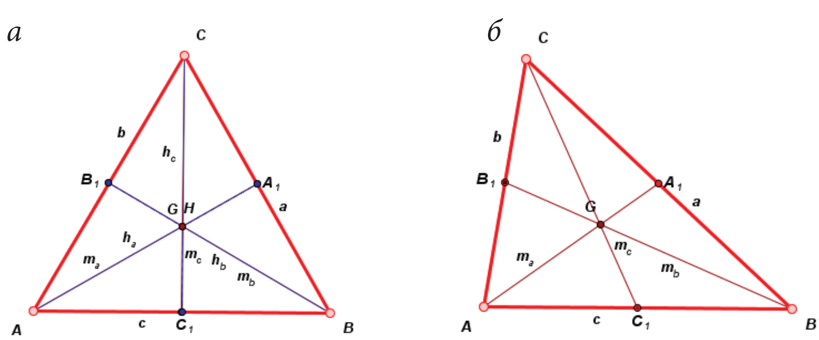

Рис. 3. Представление задачи 1 в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»: *а* – условие задачи; *б* – решение на основе аффинного преобразования «искажение»

преобразование (рис. 1, а – ж) [2]. Кроме того, в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия» можно осуществить повтор ранее сделанного аффинного преобразования (рис. 1, з).

Примеры реализации некоторых аффинных преобразований в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия» представлены на рис. 2.

Продемонстрируем практику применения аффинных преобразований для решения нескольких планиметрических задач с помощью инструментов «1С: Планиметрия».

Задача 1 (на доказательство — «искажение»)

Условие задачи [3]. Доказать, что медианы m_a, m_b и m_c произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке G и делятся в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины: $AG{:}GA_1 = BG : GB_1 = CG : GC_1 = 2 : 1$ (рис. 3, а).

Анализ условия задачи. Задача может быть решена тригонометрическим способом через соотношение углов и сторон соответствующих треугольников. Однако, если данный треугольник трансформировать с помощью аффинного преобразования «искажение» в равносторонний, то соотношение между искомыми отрезками медиан не изменится, тогда как само решение значительно упростится за счет известных свойств равносторонних треугольников.

Доказательство (рис. 3, б).

1. Построим произвольный треугольник ABC и с помощью кнопки «Показать/скрыть медианы» проведем медианы AA_1, BB_1 и CC_1, точку пересечения которых обозначим буквой G.

2. Для преобразования произвольного треугольника в рав-

носторонний воспользуемся аффинным преобразованием «искажение». Для этого нажмем кнопку «Показать/скрыть высоты» и движением т. C с помощью курсора добьемся полного совпадения высот треугольника с его медианами, что свидетельствует о преобразовании исходного треугольника в равносторонний (см. рис. 3, б).

3. В полученном равностороннем треугольнике ABC медианы, совпадающие с высотами и биссектрисами, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины.

4. Действительно, поскольку $AG = BG = CG$ и $GA_1 = GB_1 = GC_1$, то внутри треугольника ABC имеем шесть равных прямоугольных треугольников: AGC_1, BGC_1, BGA_1, CGA_1, CGB_1 и AGB_1. В этих треугольниках внутренние углы, прилежащие к гипотенузе, равны 30° и 60°. Поэтому отношение длины гипотенузы к длине катета, составляющего с ней угол 60°, равно 2 : 1.

5. Следовательно, отношение $AG : GA_1 = BG : GB_1 = CG : GC_1 = 2 : 1$, что соответствует отношению отрезков, на которые точка пересечения медиан G делит каждую медиану $\Delta\ ABC$.

6. Применим обратное аффинное преобразование «искажение» для перехода от равностороннего треугольника к исходному.

Задача 2 (на построение – «гомотетия»)

Условие задачи [4, с. 118]. В данный треугольник ABC (рис. 4) требуется вписать прямоугольник $PQSR$ с заданным соотношением сторон $m/n = PQ/PR$ так, чтобы две вершины прямоугольника (например, точки R и S) лежали на стороне AB треугольника, а каждая из двух других вершин прямоугольника — на одной из двух других сторонах треугольника (т. P — на стороне AC, а т. Q — на стороне BC).

Анализ условия задачи. Очевидно, что при решении задачи следует воспользоваться свойством подобия фигур, т. е. на продолжении стороны AB построить произвольный вспомогательный прямоугольник с заданным соотношением сторон, а затем вписать («вдвинуть») его уменьшенный вариант в исходный треугольник с помощью аффинного преобразования «гомотетия» с центром в т. A. Однако, если решать задачу с помощью циркуля и линейки, то построение окажется весьма громоздким [4, с. 118–119], тогда как интерактивные свойства

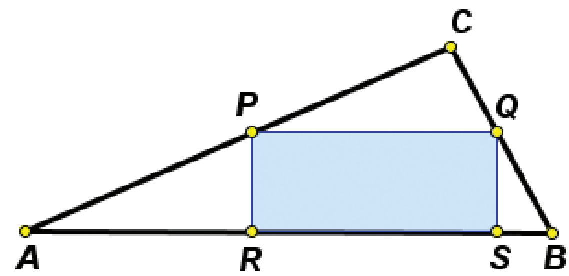

Рис. 4. Представление условия задачи 2 в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»

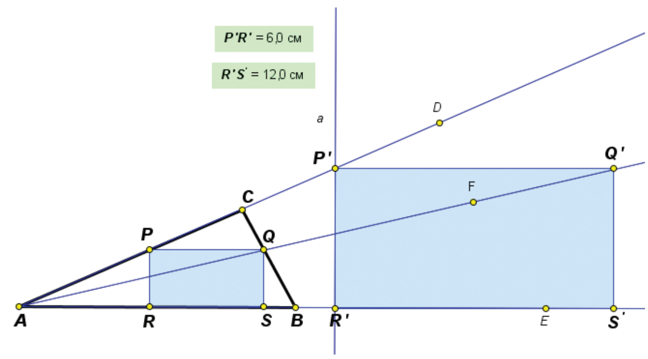

Рис. 5. Решение задачи 2 в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия» на основе аффинного преобразования «гомотетия»:P′R′ = 6,0 см; R′S′ = 12,0 см

виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия» позволяют произвести все необходимые построения быстро и наглядно.

Построение (рис. 5).

1. Зададим для определенности соотношение между сторонами прямоугольника $m/n = PQ/PR = 2$.

2. Примем вершину треугольника A за центр гомотетии и проведем из него два луча AD и AE как продолжение сторон треугольника.

3. Проведем прямую a, перпендикулярную лучу AE, и, обозначив точки ее пересечения с лучами AD и AE через P' и R' соответственно, добиваемся расстояния между этими точками равным, допустим, 6 см, пользуясь для этого инструментом «Измерить длину отрезка».

4. На луче AE строим прямоугольник $P'Q'S'R'$ со стороной $R'S' = 12$ см.

5. Через точки A и Q' проводим вспомогательный луч гомотетии AF и обозначаем точку его пересечения со стороной BC исходного треугольника через Q.

6. Точка Q является вершиной искомого вписанного прямоугольника, который достраивается с помощью инструмента «Прямоугольник с горизонтальной стороной».

Задача 3 (на построение — «осевая симметрия»)

Условие задачи [4, с. 103]. Дана прямая *a* и два треугольника *ABC* и *KLM* (рис. 6, а). Требуется на сторонах данных треугольников найти пары точек, симметрично расположенных относительно прямой *a*.

Анализ условия задачи. Если оба треугольника находятся в одной части плоскости относительно прямой *a*, то точки пересечения их сторон отстоят на одинаковое расстояние от этой прямой. Если этим точкам построить симметричные пары относительно прямой *a*, то они будут отстоять от нее на то же расстояние, что и точки пересечения сторон треугольников. Если через эти симметричные точки построить один из треугольников (когда оба треугольника будут находиться по разные стороны от оси симметрии *a*), то мы придем к исходному условию задачи. Это означает, что точки пересечения сторон треугольников являются искомыми точками.

Построение (рис. 6, б).

1. С помощью инструмента «Осевая симметрия» преобразуем треугольник *ABC* в симметричный треугольник $A'B'C'$ относительно оси симметрии *a*.

2. Найдем точки пересечения этого треугольника с треугольником *KLM*: X', Y', Z' и U'.

3. Найдем на сторонах треугольника *ABC* точки *X*, *Y*, *Z* и *U*, симметричные точкам X', Y', Z' и U'.

4. Полученные пары *X* и X', *Y* и Y', *Z* и Z', *U* и U' являются искомыми парами точек, удовлетворяющими условию задачи.

Задача 4 (на построение — «поворот»)

Условие задачи [4, с. 106–107] (рис. 7).

В данный квадрат *ABCD* вписать равносторонний треугольник *PQR*, одна из вершин которого, *R*, дана и расположена на строне квадрата *AD*.

Анализ условия задачи (рис. 7, б и 8, а). Пусть вершины вписанного в квадрат *ABCD* равностороннего треугольника *PQR* лежат на сторонах квадрата: т. *R* — на стороне *AD* (согласно условию задачи), т. *Q* — на стороне *CD*, а т. *P* — на стороне *AB*. Все углы равностороннего треугольника равны 60^0, поэтому при повороте треугольника вокруг т. *R* на 60° по часовой стрелке его вершина *P* совпадет с т. *Q*. Если и квадрат *ABCD* повернуть на 60° по часовой стрелке, то его сторона *AB* трансформируется в $A'B'$ и пересечет сторону *CD* также в т. *Q*, совпадающей с вершиной *P* треугольника *PQR*. Поэтому для построения вписанного в квадрат равностороннего треугольника достаточно определить местоположение т. *Q*, а затем построить искомый треугольник по двум известным точкам *R* и *Q*, задающим одну сторону треугольника, и прилежащим углам в 60°.

Построение (рис. 8, б).

1. Для нахождения т. *Q* применим к квадрату *ABCD* аффинное преобразование «поворот» вокруг центра *R*.

2. Точное значение угла поворота в 60° определим с помощью инструмента «Измерение величины угла».

3. Получим т. *Q* пересечением сторон квадратов $A'B'$ и *CD*.

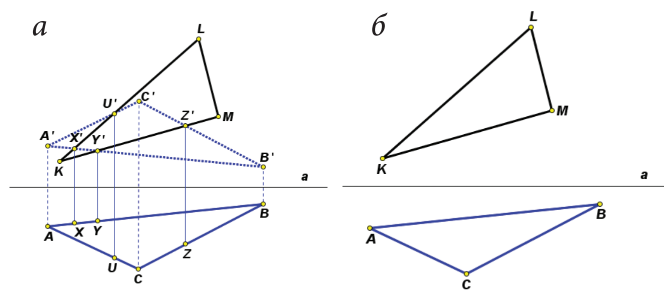

Рис. 6. Представление задачи 3 в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»:
а – условие задачи; *б* – решение на основе аффинного преобразования «осевая симметрия»

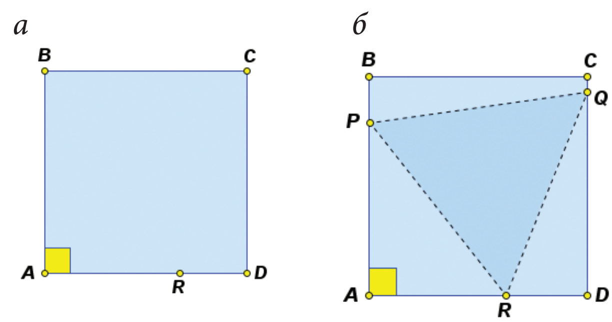

Рис. 7. Представление условия задачи 4 в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»: *AB* = 8,3 см

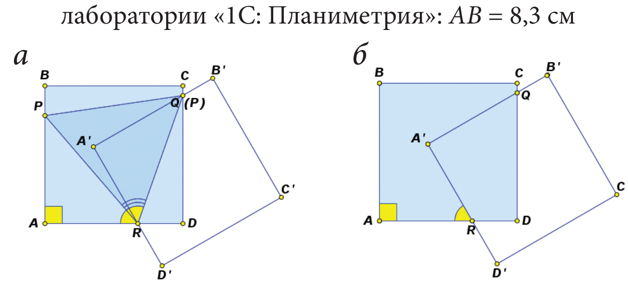

Рис. 8. Решение задачи 4 в виртуальной лаборатории «1С: Планиметрия»: а – анализ условия задачи; б – построение на основе аффинного преобразования «поворот»; AB = 8,3 см; A′B′ = 8,3 см; ∠A′RA = 60,1; ∠PRQ (P) = 60,1

4. С помощью инструмента «Построить многоугольник» (а не «Построить равносторонний треугольник»!) строим треугольник *PQR*, попутно проверяя по углам или длине сторон, получился ли он равносторонним.

В заключение отметим, что решение задач с помощью аффинных преобразований, дополненное средствами ИКТ, развивает логическое мышление учащихся, позволяет находить более простое решение задачи, служит целям интеграции различных разделов математики, а также способствует освоению конвергентной предметной области «Математика и информатика».

Список литературы

1. *Спевакова, Н. Ю.* Аффинные преобразования плоскости. Теоретические основы: учебно-методическое пособие / Н. Ю. Спевакова, М. А. Мозговая. Армавир. 2018. 28 с. URL: http://www.agpu.net/fakult/ipimif/fizmat/kaf_algebr/metod _materials/bm_mat/Affin_preobr_plosk_Theory.pdf. Текст: электронный.
2. *1С:* Математический конструктор 8.0. Интерактивная творческая среда для создания математических моделей. URL: https://obr.1c.ru/mathkit/. Текст: электронный.
3. *Подушкина, О. Ю.* Решение задач с помощью аффинных преобразований / О. Ю. Подушкина. URL: https://urok.1sept.ru/articles/ 590802. Текст: электронный.
4. *Четверухин, Н. Ф.* Методы геометрических построений: учебное пособие / Н. Ф. Четверухин. Москва: ЛЕНАНД, 2018. 152 с. Текст: непосредственный.