УДК [378.16:69.04]: 378.147.88
DOI:10.17853/2587-6910-2021-04-118-123

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ПОПЕРЕЧНУЮ НАГРУЗКУ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЭВМ

CALCULATION OF A RECTANGULAR PLATE FOR TRANSVERSE LOAD AND ITS IMPLEMENTATION ON A COMPUTER

Дмитрий Евгеньевич Черногубов
кандидат технических наук, доцент
d.e.chernogubov@urfu.ru
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия

Светлана Евгеньевна Селезнева
старший преподаватель
s.e.selezneva@urfu.ru
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия

Dmitrii Evgenevich Chernogubov
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

Svetlana Evgenevna Selezneva
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

Аннотация. *Рассматриваются вопросы по разработке и внедрению в учебный процесс программы для ЭВМ по решению одной из наиболее распространенных задач теории упругости — расчету тонкой прямоугольной пластины на поперечную нагрузку.*

Ключевые слова: *теория упругости, сопротивление материалов, пластинка, изгиб, напряжение, метод конечных разностей.*

Abstract. *The article deals with the development and implementation of a computer program in the educational process to solve one of the most common problems in the theory of elasticity – the calculation of a thin rectangular plate for a transverse load.*

Keywords: *theory of elasticity, strength of materials, plate, bending, stress, finite difference method.*

Современные темпы развития различных отраслей машиностроения и строительства выдвигают необходимость в подготовке молодых специалистов-инженеров, владеющих практическими навыками инженерных расчетов конструкций и сооружений и хорошо понимающих динамические явления, происходящие в машинах и механизмах. Для повышения интереса студентов к инженерному делу и быстрой адаптации на начальных этапах инженерной деятельности необходима подготовка к практической работе. Эта подготовка подразумевает использование самых современных методов расчета и средств проведения испытаний с последующей обработкой результатов измерений и правильного принятия решения по выбору оптимального варианта конструкции [1]. В то же время необходимо более активно развивать у студентов творческий подход и самостоятельное мышление при моделировании процессов упругих систем и деформирования тел [2].

В курсе прикладной теории упругости (основы инженерных расчетов) в Строительном институте Уральского федерального университета (УрФУ) рассматривается расчет двух основных распространенных элементов строительных конструкций: балки-стенки [3, 4] и прямоугольной плиты (пластины). В расчетно-графической работе (РГР) студенты выполняют расчет данных элементов конструкций численным методом конечных разностей.

Расчет тонких пластин на поперечную нагрузку (рис. 1) сводится к решению дифференциального уравнение изгиба пластины Софи Жермен и Лагранжа [5], которое имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}, \qquad (1)$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины;

$w(x, y)$ — функция прогибов срединной плоскости;

q — внешняя нагрузка;

E — модуль упругости материала (модуль Юнга);

μ — коэффициент Пуассона;

h — толщина.

Данное дифференциальное уравнение (1) дополняется граничными условиями на контуре:

- для шарнирно опертого края:

$$1)\ w_{\hat{e}}=0; \quad 2)\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right|_{\hat{e}}=0;$$

- для защемленного края:

$$1)\ w_{\hat{e}}=0; \quad 2)\ \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\hat{e}}=0;$$

где n — нормаль к контуру пластины.

Для решения дифференциального уравнения (1) применяется численный метод конечных разностей. На расчетную схему пластины (серединную плоскость) наносится сетка с размерами ячеек Δx и Δy, а значения функции прогибов w(x, y) определяются только в узлах этой сетки.

На рис. 2 показана сетка с квадратными ячейками $\Delta x = \Delta y$ и нумерацией узлов. Дифференциальное уравнение (1) в конечных разностях для сетки с квадратными ячейками, записанное для центрального узла с номером 0, имеет вид [5]

$$20w_0-8(w_1+w_2+w_3+w_4)+2(w_5+w_6+w_7+w_8)+$$
$$+w_9+w_{10}+w_{11}+w_{12}=k_0\frac{q}{D}\Delta x^4+\frac{P_0}{D}\Delta x^2, \qquad (2)$$

где k_0 — весовой коэффициент, указывающий на какой части площадки с размерами Δx и Δy в окрестности узла 0 приложена распределенная нагрузка;

P_0 — сосредоточенная сила в узле 0.

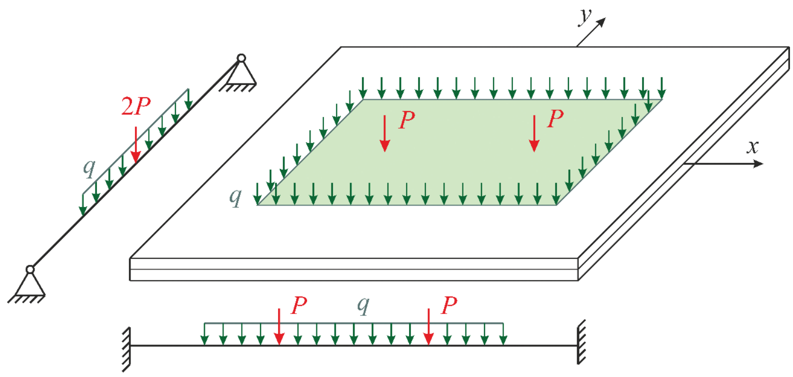


Рис. 1. Пластина

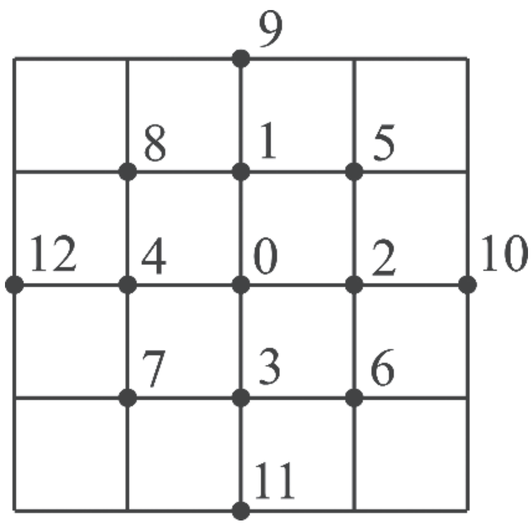
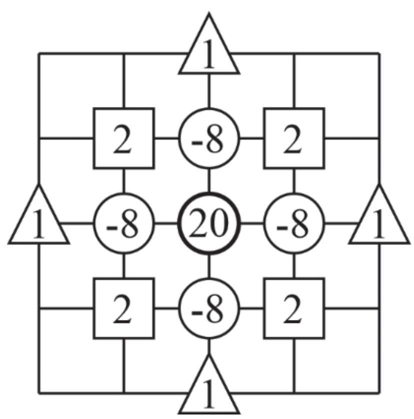


Рис. 2. Сетка



$$=k_0\frac{q}{D}\Delta x^4+\frac{P_0}{D}\Delta x^2$$

Рис. 3. Шаблон

Таких уравнений необходимо записать столько, сколько узловых точек внутри области, ограниченной контуром пластины. Для их записи удобно воспользоваться шаблоном. Шаблон, представленный на рис. 3, — это символическая запись конечно-разностного уравнения (2). Он последовательно накладывается центральной окружностью на все узлы сетки внутри контура пластины, и в левой части уравнений будет сумма прогибов во всех точках, попавших в шаблон с соответствующими коэффициентами, в правой части — слагаемые с нагрузками.

При записи уравнений для узлов вблизи контура пластины в них войдут значения прогибов как в точках на контуре, так и за контуром. Значения прогибов в контурных и в законтурных точках определяются из граничных условий.

Таким образом, задача сводится к определению прогибов во всех узловых точках сетки из решения системы линейных алгебраических уравнений.

После определения значений прогибов пластины во всех узлах сетки определяются внутренние усилия: изгибающие (M_x, M_y) и крутящий (M_{xy}) моменты [5]

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \qquad (3)$$

Уравнения в конечных разностях (3), записанные для центрального узла с номером 0 (см. рис. 2) имеют вид [5]

$$M_{x,0} = -D\left(\frac{w_2 - 2w_0 + w_4}{\Delta x^2} + \mu\frac{w_1 - 2w_0 + w_3}{\Delta y^2}\right),$$

$$M_{y,0} = -D\left(\frac{w_1 - 2w_0 + w_3}{\Delta y^2} + \mu\frac{w_2 - 2w_0 + w_4}{\Delta x^2}\right),$$

$$M_{xy,0} = -D(1-\mu)\frac{w_8 + w_6 - w_7 - w_5}{4\Delta x \Delta y}. \qquad (4)$$

После определения внутренних усилий в узлах сетки (4) вычисляются напряжения. Максимальные напряжения действуют на поверхности пластины и определяются по следующим формулам [5]:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{6M_x}{h^2},$$

$$\sigma_{y,\max} = \frac{6M_y}{h^2},$$

$$\tau_{xy,\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

На основе рассмотренного математического аппарата разработан алгоритм расчета тонких пластин на поперечную нагрузку. По этому алгоритму написана программа для ЭВМ [6], позволяющая определять перемещения, внутренние усилия и напряжения в прямоугольной пластине в широком диапазоне изменения геометрических, физических и силовых параметров с визуализацией результатов расчета.

Для расчета применяется приближенный численный метод конечных разностей, следовательно, точность решения задачи сильно зависит от размеров ячеек сетки Δx и Δy. Применяя программу расчета и уменьшая размеры ячеек, можно получить решение с любой необходимой точностью.

Студенты, выполняя расчетно-графические расчеты (РГР), разрабатывают математическую модель своей пластины и сопоставляют результаты исследований с расчетами на ЭВМ. Анализируя расчеты, они определяют наиболее опасные состояния системы.

Программа имеет интуитивно понятный интерфейс, не требующий специальных инструкций и подготовки (рис. 4). Все обозначения и элементы управления соответствуют общепринятым.

Использование разработанной программы позволяет существенно сократить время расчета пластин при выполнении РГР с получением более точных результатов и анализировать поведение упругой системы в рамках задаваемых геометрических, физических и силовых параметров, т. е. работа переходит в стадию исследования.

Также в лаборатории испытания материалов Уральского федерального университета находятся две лабораторные установки, позволяющие проводить испытания квадратных пластинок: защемленной по контуру на действие равномерно распределенной нагрузки и шарнирно опертой по контуру на действие сосредоточенных сил. Проводится непосредственное измерение прогибов в нескольких точках с помощью индикаторов и определение деформаций и напряжений электротензометрическим методом.

На рис. 4 показано окно программы для ввода исходных данных для расчета пластины. Здесь вводят геометрические размеры, условия закрепления, внешние нагрузки, физические константы материала и параметры сетки для численного расчета конструкции методом конечных разностей.

На рис. 5–8 приведены окна программы для отображения результатов расчета. Здесь выводятся в графическом виде эпюры прогибов и внутренних усилий в различных вертикальных и горизонтальных сечениях.

Для анализа и обработки результатов расчета создается отчет. В отчете в табличном и графическом видах печатаются все исходные данные задачи и результаты расчета во всех узлах сетки: величины прогибов, внутренних усилий, а также максимальных нормальных и касательных напряжений.

Студенты, выполняющие лабораторные работы, наглядно представляют работу пластин на изгиб при действии поперечной нагрузки

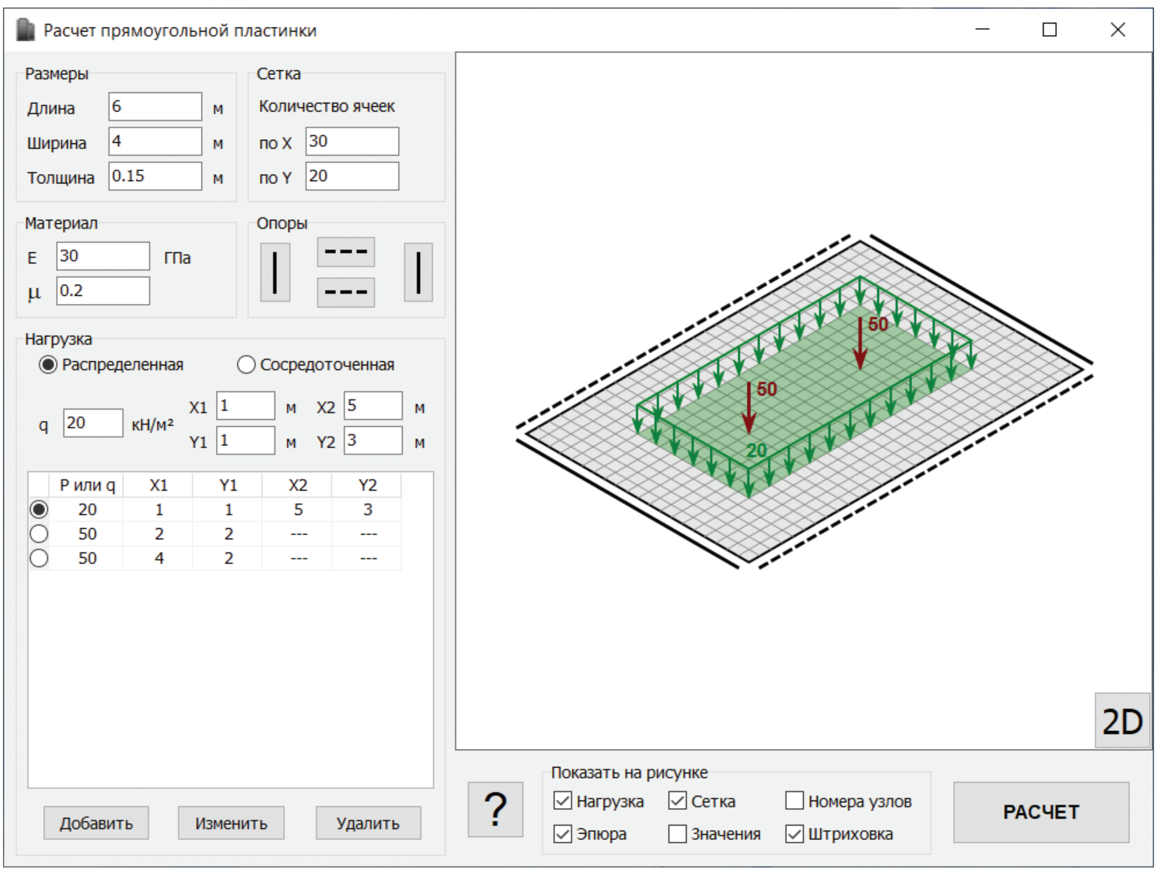


Рис. 4. Окно ввода исходных данных

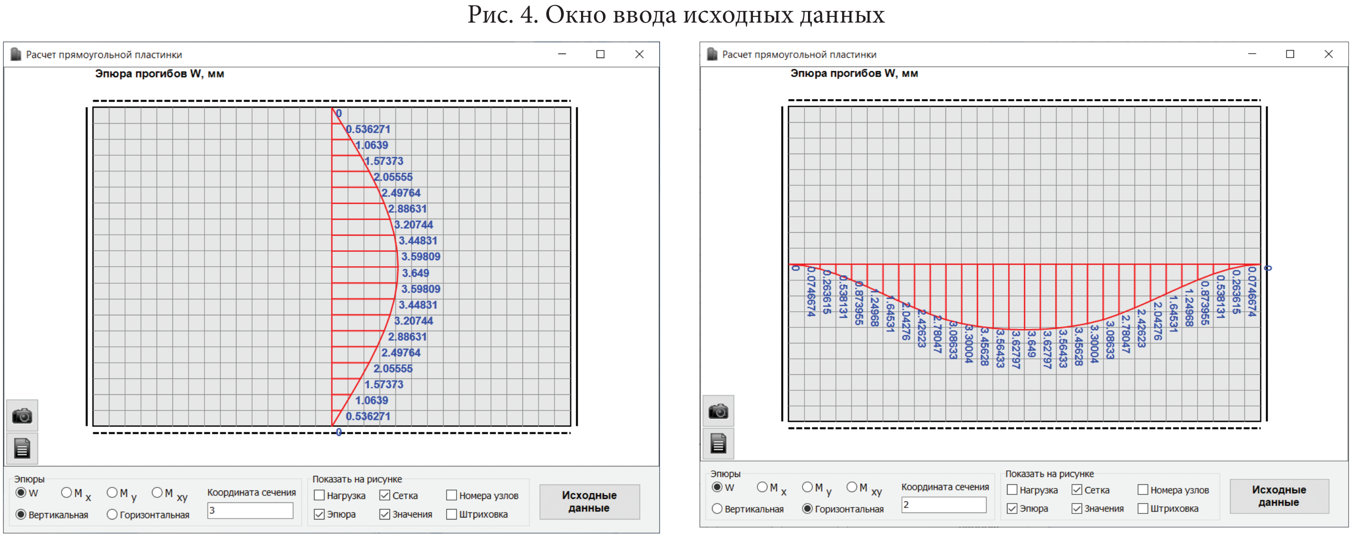


Рис. 5. Эпюры прогибов

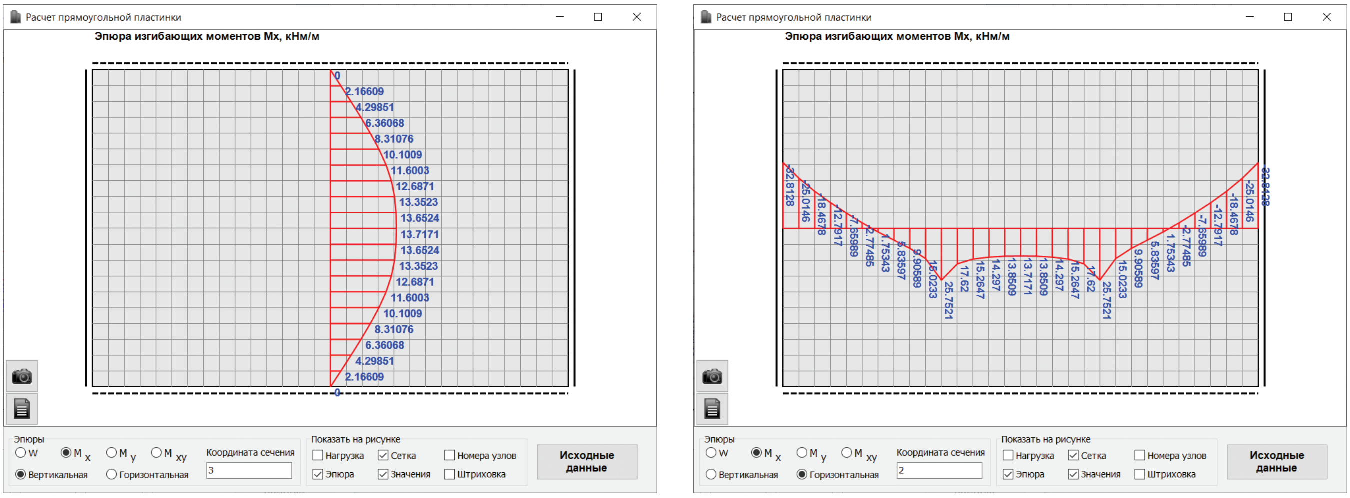


Рис. 6. Эпюры изгибающих моментов M_x

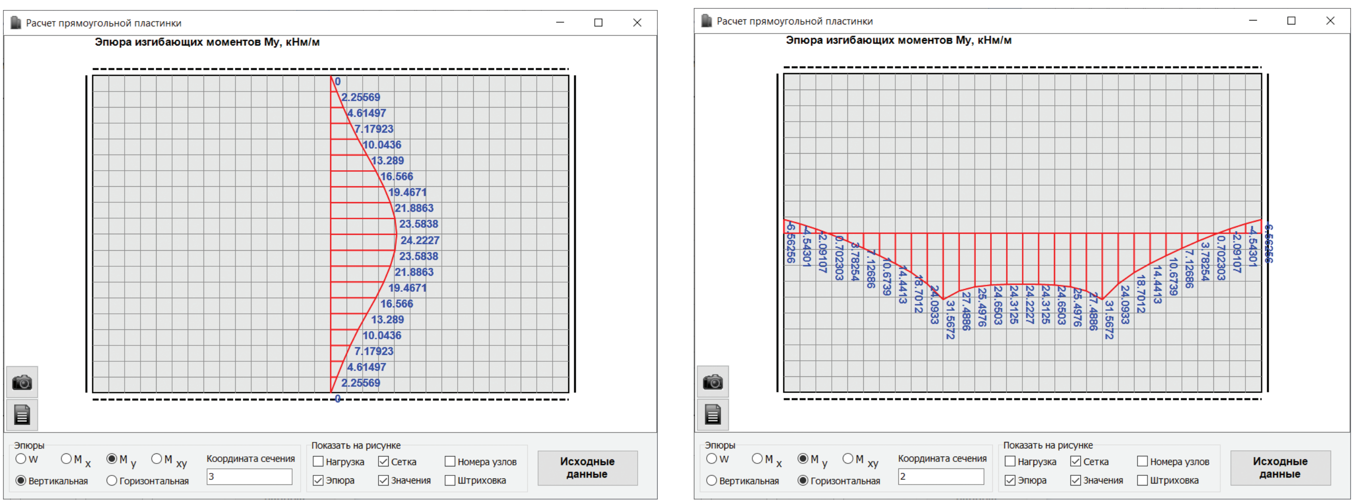


Рис. 7. Эпюры изгибающих моментов M_y

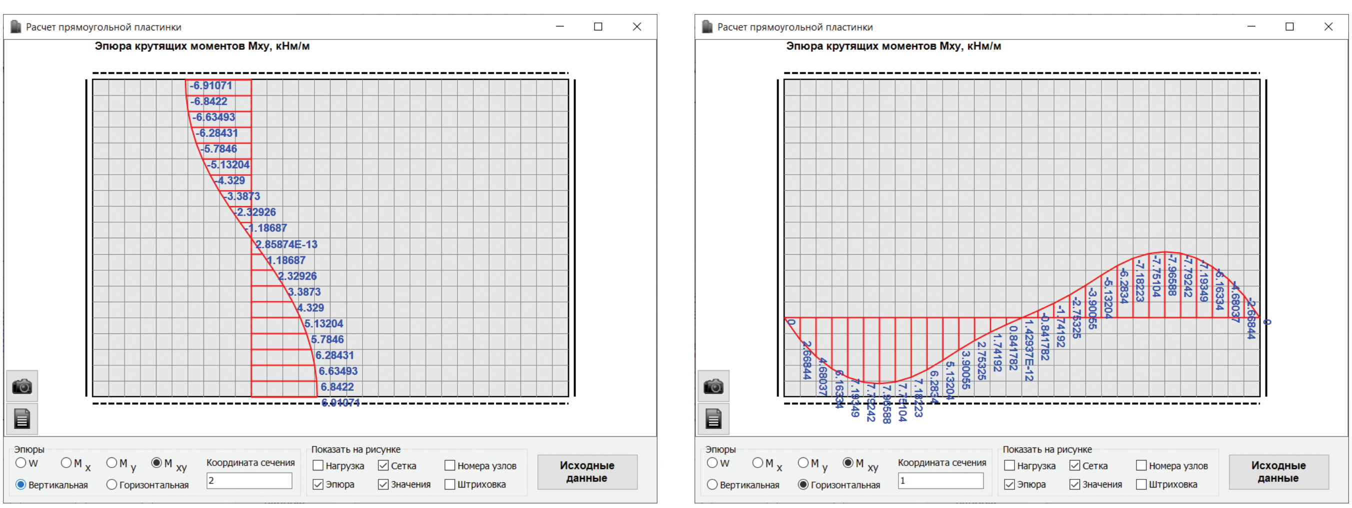


Рис. 8. Эпюры крутящих моментов M_{xy}

и сравнивают результаты эксперимента с теоретическими расчетами.

Таким образом, использование программы в учебном процессе позволяет студентам добиться необходимого решения задачи, осуществляя за ним контроль, и свести к минимуму консультации с преподавателем. Также в данном курсе происходит знакомство с современными теоретическими и экспериментальными методами исследований.

Список литературы

1. *Поляков, А. А.* Организация обучения по курсу «Сопротивление материалов» на основе инновационных образовательных технологий / А. А. Поляков, О. С. Ковалев, И. А. Любимцев. Текст: непосредственный // Известия Уральского федерального университета. Сер. 1: Проблемы образования, науки и культуры. 2012. № 3 (104). С. 20–25.
2. *Ковалев, О. С.* Дисциплина «Сопротивление материалов» в системе подготовки студентов к научно-исследовательской работе / О. С. Ковалев, С. В. Чернобородова. Текст: непосредственный // Инновации в профессиональном и профессионально-педагогическом образовании: материалы 25-й Международной научно-практической конференции, Екатеринбург, 7–8 апр. 2020 г. / Рос. гос. проф.-пед. ун-т. Екатеринбург, 2020 г. С. 247–249.
3. *Поляков, А. А.* Плоская задача теории упругости и ее реализация на ЭВМ / А. А. Поляков, Д. Е. Черногубов, И. Ю. Остаточников. Текст: непосредственный // Новые образовательные технологии в вузе: материалы 12-й Международной научно-методической конференции НОТВ-2015, Екатеринбург, 27–30 апр. 2015 г. / Урал. федер. ун-т. Екатеринбург, 2015. С. 276–279.
4. *Свидетельство* 2019612867. Расчет прямоугольной балки-стенки: программа для ЭВМ / Д. Е. Черногубов (RU); правообладатель ФГОУ ВО УрФУ (RU). № 2019611544; заявл. 19.02.19; опубл. 04.03.2019, Бюл. № 3. 1 с. Текст: непосредственный.
5. *Поляков, А. А.* Сопротивление материалов и основы теории упругости: учебник / А. А. Поляков, В. М. Кольцов. 2-е изд., доп. и испр. Екатеринбург: Изд-воУрал. федер. ун-та, 2011. 527 с. Текст: непосредственный.
6. *Свидетельство* 2020667452. Расчет прямоугольной пластины на изгиб: программа для ЭВМ / Д. Е. Черногубов (RU); правообладатель ФГОУ ВО УрФУ (RU). № 2020666489; заявл. 14.12.20; опубл. 23.12.2020, Бюл. № 1. 1 с. Текст: непосредственный.