Емельянов А.А., Бурмистров С.В., Медведев А.В., Петухов А.А.
ГОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет», Екатеринбург

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Основные уравнения асинхронного двигателя в векторной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{U}_S = \vec{I}_S \cdot R_S + \frac{d\vec{\Psi}_S}{dt}; & (1) \\ \vec{U}_R = \vec{I}_R \cdot R_R + \frac{d\vec{\Psi}_R}{dt}; & (2) \\ \vec{\psi}_S = L_S \cdot \vec{I}_S + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_R; & (3) \\ \vec{\psi}_R = L_S \cdot \vec{I}_R + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_S. & (4) \end{cases} \quad (*)$$

Сделаем существенное замечание по полученным обобщенным векторам. В уравнении (1) векторы $\vec{U}_S$, $\vec{I}_S$, $\vec{\psi}_S$записаны в неподвижной системе координат статора, но в некоторых задачах их необходимо привести к системе координат связанных с ротором. Рассмотрим схему преобразования одного из векторов, например, $\vec{U}_S$из одной системы координат в другую. Поясним это преобразование на следующем рис.1.

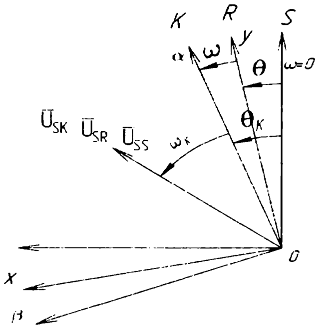

Рис.1. Система координат S, R, K.:

S – неподвижная система координат статора $\omega = 0$; $R[y; x]$ – система координат, связанная с ротором. $K[\alpha; \beta]$ – произвольная система координат. $\theta_к$ - угол сдвига к S и $\omega_к = \frac{d\theta_к}{dt}$. $\vec{U}_{SS}$ – обобщенный вращающийся вектор напряжения.

Связь между векторами в разных системах координат:

$$\begin{cases} \vec{U}_{SK} = \vec{U}_{SR} \cdot e^{j\theta} = \vec{U}_{SK} \cdot e^{j\theta_K}; \\ \vec{U}_{SR} = \vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta} = \vec{U}_{SK} \cdot e^{j(\theta_K - \theta)}; \\ \vec{U}_{SK} - \vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta_K} - \vec{U}_{SK} \cdot e^{j(\theta_K - \theta)}. \end{cases}$$

Система уравнений (*) примет следующий вид:

$$\vec{U}_{SS} = \vec{I}_{SS} \cdot R_S + \frac{d\vec{\Psi}_{SS}}{dt}, \qquad (1)$$

где $\vec{U}_{SS}$, $\vec{I}_{SS}$, $\vec{\psi}_S$ – записаны в не подвижной системе координат статора S.

$$\vec{U}_{RR} = \vec{I}_{RR} \cdot R_R + \frac{d\vec{\Psi}_{RR}}{dt}, \qquad (2)$$

где $\vec{U}_{RR}$, $\vec{I}_{RR}$, $\vec{\psi}_{RR}$ – обобщённые вектора роторных величин в роторной системе координат R.

$$\vec{\psi}_{SS} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{RR}, \qquad (3)$$

где $\vec{\psi}_{SS}$, $\vec{I}_{SS}$, – вектор потокосцепления и ток статора в неподвижной системе координат S, а $\vec{I}_{RR}$ – в роторной системе координат сдвинутой в неподвижной системе на угол θ.

$$\vec{\psi}_{RR} = L_R \cdot \vec{I}_{RR} + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_{SS}, \qquad (4)$$

где $\vec{\psi}_{RR}$, $\vec{I}_{RR}$, – вектор потокосцепления и ток ротора в роторной системе координат R, а $\vec{I}_{SS}$ – в неподвижной системе координат S.

Рассмотрим приведение вышеприведённых уравнений к неподвижной системе координат статора. Первое уравнение уже записано в статорной системе координат, поэтому показываем процесс приведения следующего уравнения. Для этого умножим обе части уравнения на $e^{j\theta}$:

$$\vec{U}_{RR} \cdot e^{j\theta} = \vec{I}_{RR} \cdot e^{j\theta} \cdot R_R + e^{j\theta} \cdot \frac{d\vec{\Psi}_{RR}}{dt}.$$

В соответствии с вышерассмотренной схемой приведения векторов из одной системы координат в другую, получим:

$$\vec{U}_{RR} \cdot e^{j\theta} = \vec{U}_{RS} \text{ и } \vec{I}_{RR} \cdot e^{j\theta} = \vec{I}_{RS}.$$

Выражение $\frac{d\vec{\Psi}_{RR}}{dt}$ преобразуем к следующему виду:

$$\frac{d\vec{\psi}_{RR}}{dt} = \frac{d(\vec{\psi}_{RS} \cdot e^{-j\theta})}{dt} = e^{-j\theta} \cdot \frac{d\vec{\psi}_{RS}}{dt} - j \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{\psi}_{RS} \cdot e^{-j\theta}.$$

Окончательно $\vec{U}_{RS} = \vec{I}_{RS} \cdot R_R + e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta} \cdot \frac{d\vec{\Psi}_{RS}}{dt} - j\omega \cdot \vec{\psi}_{RS} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{j\theta}$.

$$\boxed{\vec{U}_{RS} = \vec{I}_{RS} \cdot R_R + \frac{d\vec{\Psi}_{RS}}{dt} - j\omega \cdot \vec{\psi}_{RS}}.$$

В выражении $\vec{\psi}_{SS} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{RR}$ представим: $\vec{I}_{RR} = \vec{I}_{RS} \cdot e^{-j\theta}$, тогда

$$\vec{\psi}_{SS} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{RS} \cdot e^{-j\theta},$$

$$\boxed{\vec{\psi}_{SS} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} + L_m \cdot \vec{I}_{RS}}. \qquad (3)$$

В уравнении (4) умножим правую и левую часть на $e^{j\theta}$:

$$\vec{\psi}_{RR} = L_R \cdot \vec{I}_{RR} + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_{SS},$$

$$\vec{\psi}_{RR} \cdot e^{j\theta} = L_R \cdot \vec{I}_{RR} \cdot e^{j\theta} + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{SS},$$

$$\boxed{\vec{\psi}_{RS} = L_R \cdot \vec{I}_{RS} + L_m \cdot \vec{I}_{SS}}. \qquad (4)$$

Окончательно математическая модель в статорной системе координат имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{U}_{SS} = \vec{I}_{SS} \cdot R_S + \dfrac{d\vec{\psi}_{SS}}{dt}; \\ \vec{U}_{RS} = \vec{I}_{RS} \cdot R_R + \dfrac{d\vec{\psi}_{RS}}{dt} - j\omega \cdot \vec{\psi}_{RS}; \\ \vec{\psi}_{SS} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} + L_m \cdot \vec{I}_{RS}; \\ \vec{\psi}_{RS} = L_R \cdot \vec{I}_{RS} + L_m \cdot \vec{I}_{SS}. \end{cases}$$

Выполним приведение уравнений к роторной системе. Умножим обе части уравнения (1) на $e^{-j\theta}$:

$$\vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta} = \vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta} \cdot R_S + e^{-j\theta} \cdot \frac{d\vec{\psi}_{SS}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{\psi}_{SS}}{dt} = \frac{d(\vec{\psi}_{SR} \cdot e^{-j\theta})}{dt} = e^{j\theta} \cdot \frac{d\vec{\psi}_{SR}}{dt} + j \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{\psi}_{SR} \cdot e^{j\theta},$$

$$\boxed{\vec{U}_{SR} = \vec{I}_{SR} \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_{SR}}{dt} + j\omega \cdot \vec{\psi}_{SR}}. \qquad (1)$$

Второе уравнение переписываем без изменений, т.к. оно уже записано в роторной системе координат:

$$\boxed{\vec{U}_{RR} = \vec{I}_{RR} \cdot R_R + \frac{d\vec{\psi}_{RR}}{dt}}. \qquad (2)$$

В третьем уравнении умножим обе части на $e^{-j\theta}$:

$$\vec{\psi}_{SS} \cdot e^{-j\theta} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta} + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_{RR},$$

$$\boxed{\vec{\psi}_{SR} = L_S \cdot \vec{I}_{SR} + L_m \cdot \vec{I}_{RR}}. \qquad (3)$$

В уравнении (4) выразим $\vec{I}_{SS} = \vec{I}_{SR} \cdot e^{j\theta}$, тогда

$$\vec{\psi}_{RR} = L_R \cdot \vec{I}_{RR} + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_{SR} \cdot e^{j\theta},$$

$$\boxed{\vec{\psi}_{RR}=L_R\cdot\vec{I}_{RR}+L_m\cdot\vec{I}_{SR}}. \qquad (4)$$

Окончательно в роторной системе координат математическое описание имеет вид:

$$\begin{cases}\vec{U}_{SR}=\vec{I}_{SR}\cdot R_S+\dfrac{d\vec{\psi}_{SR}}{dt}+j\omega\cdot\vec{\psi}_{SR}; & (1)\\ \vec{U}_{RR}=\vec{I}_{RR}\cdot R_R+\dfrac{d\vec{\psi}_{RR}}{dt}; & (2)\\ \vec{\psi}_{SR}=L_S\cdot\vec{I}_{SR}+L_m\cdot\vec{I}_{RR}; & (3)\\ \vec{\psi}_{RR}=L_R\cdot\vec{I}_{RR}+L_m\cdot\vec{I}_{SR}. & (4)\end{cases}$$

Приведение системы уравнений к системе координат вращающейся с (произвольной скоростью) $\omega_к$ выполняется следующим образом. Первое уравнение умножаем на $e^{-j\theta_к}$ и сразу выражаем $\vec{\psi}_{SS}=\vec{\psi}_{SK}\cdot e^{j\theta}$:

$$(\vec{U}_{SS}\cdot e^{-j\theta_к})=(\vec{I}_{SS}\cdot e^{-j\theta_к})\cdot R_S+e^{-j\theta_к}\frac{d(\vec{\psi}_{SK}\cdot e^{j\theta})}{dt},$$

$$\vec{U}_{SK}=\vec{I}_{SK}\cdot R_S+e^{-j\theta_к}\cdot e^{j\theta_к}\cdot\frac{d\vec{\psi}_{KS}}{dt}+j\frac{\theta_к}{dt}\cdot\vec{\psi}_{SK}\cdot e^{-j\theta_к}\cdot e^{j\theta_к},$$

$$\boxed{\vec{U}_{SK}=\vec{I}_{SK}\cdot R_S+\frac{d\vec{\psi}_{KS}}{dt}+j\frac{\theta_к}{dt}\cdot\vec{\psi}_{SK}}$$

Второе уравнение умножаем на $e^{-j(\theta_к-\theta)}$:

$$(\vec{U}_{RR}\cdot e^{-j(\theta_к-\theta)})=(\vec{I}_{RR}\cdot e^{-j(\theta_к-\theta)})\cdot R_{RR}+e^{-j(\theta_к-\theta)}\cdot\frac{d(\vec{\psi}_{RK}\cdot e^{j(\theta_к-\theta)})}{dt},$$

$$\vec{U}_{RK}=\vec{I}_{RK}\cdot R_{RR}+e^{-j(\theta_к-\theta)}\cdot e^{j(\theta_к-\theta)}\cdot\frac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt}+j\cdot(\frac{\theta_к}{dt}-\frac{\theta}{dt})\cdot\vec{\psi}_{RK}\cdot e^{-j(\theta_к-\theta)}\cdot e^{j(\theta_к-\theta)}$$

$$\boxed{\vec{U}_{RK}=\vec{I}_{RK}\cdot R_{RR}+\frac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt}+j\cdot(\omega_к-\omega)\cdot\vec{\psi}_{RK}}$$

Третье уравнение умножаем на $e^{-j\theta_к}$, тогда

$$\vec{\psi}_{SS}\cdot e^{-j\theta_к}=L_{SS}\cdot\vec{I}_S\cdot e^{-j\theta_к}+L_m\cdot e^{j\theta}\cdot\vec{I}_{RR}\cdot e^{-j\theta_к},$$

т.к. $\vec{I}_{RR}\cdot e^{-j(\theta_к-\theta)}=\vec{I}_{RK}$, то

$$\boxed{\vec{\psi}_{SK}=L_{SS}\cdot\vec{I}_{SK}+L_m\cdot\vec{I}_{RK}}$$

Четвертое уравнении умножаем на $e^{-j(\theta_к-\theta)}$, тогда

$$\vec{\psi}_{RR}\cdot e^{-j(\theta_к-\theta)}=L_S\cdot(\vec{I}_{RR}\cdot e^{-j(\theta_к-\theta)})+L_m\cdot e^{-j\theta}\cdot(\vec{I}_{SS}\cdot e^{-j\theta_к})\cdot e^{j\theta},$$

$$\boxed{\vec{\psi}_{RK}=L_S\cdot\vec{I}_{RK}+L_m\cdot\vec{I}_{SK}}$$

Для системы координат вращающейся с произвольной скоростью ω_K полная система уравнений:

$$\begin{cases}\vec{U}_{SK} = \vec{I}_{SK} \cdot R_S + \dfrac{d\vec{\psi}_{KS}}{dt} + j\dfrac{\theta_K}{dt} \cdot \vec{\psi}_{SK}; & (1)\\ \vec{U}_{RK} = \vec{I}_{RK} \cdot R_{RR} + \dfrac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\omega_K - \omega) \cdot \vec{\psi}_{RK}; & (2)\\ \vec{\psi}_{SK} = L_{SS} \cdot \vec{I}_{SK} + L_m \cdot \vec{I}_{RK}; & (3)\\ \vec{\psi}_{RK} = L_S \cdot \vec{I}_{RK} + L_m \cdot \vec{I}_{SK}; & (4)\\ M - M_C = j \cdot \dfrac{d\omega_M}{dt}; & (5)\\ M = \dfrac{3}{2} \cdot p \cdot k \cdot M_{od} \cdot (\vec{\psi}_{RK} \cdot \vec{I}_{SK}). & (6)\end{cases}$$

Зададим базовые величины (параметры):

$$U_б = \sqrt{2} \cdot U_1;\ I_б = \sqrt{2} \cdot I_1;\ \omega_б = \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314\frac{1}{c},$$

где U_1 - номинальные действующее фазное напряжение двигателя; I_1 - номинальный фазный ток двигателя.

$$R_б = \frac{U_б}{I_б};\ L_б = \frac{U_б}{\omega_б \cdot I_б};\ \psi_б = \frac{U_б}{\omega_б};\ M_б = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \frac{U_б \cdot I_б}{\omega_б};\ t_б = \frac{1}{\omega_б}.$$

Обозначим относительные величины (параметры):

$$\frac{\bar{U}}{U_б} = \bar{u};\ \frac{I}{I_б} = \bar{i};\ \frac{\Psi}{\Psi_б} = \bar{\psi};\ \frac{\omega_K}{\omega_б} = \alpha_k;\ \frac{\omega_m}{\omega_б} = \nu;\ \omega = p \cdot \omega_m,$$

где ω_m – механическая скорость вращения вала; p - число пар полюсов.

$$r_S = \frac{R_S}{R_б};\ r_R = \frac{R_R}{R_б};\quad x_S = \frac{\omega_б \cdot L_S}{R_б};\quad x_R = \frac{\omega_б \cdot L_R}{R_б};\quad x_m = \frac{\omega_б \cdot L_m}{R_б};\quad \bar{T}_m = \frac{J \cdot \omega_б^2}{M_б};$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_m} = \omega_б \cdot t$$

В уравнении (1) сделаем следующие преобразования, обе части разделим на $U_б$:

$$\left[\frac{\bar{U}_{SK}}{U_б}\right] = \left[\frac{R_S \cdot I_б}{U_б}\right] \cdot \left[\frac{\bar{I}_{SK}}{I_б}\right] + \frac{d\left[\frac{\psi_{KS} \cdot \omega_б}{U_б}\right]}{d[t \cdot \omega_б]} + j\left[\frac{\omega_K}{\omega_б}\right] \cdot \left[\frac{\bar{\psi}_{SK} \cdot \omega_б}{U_б}\right].$$

В квадратных скобках выделены соответствующие относительные величины.

$$\boxed{\bar{u}_S = r_S \cdot \bar{i}_S + \frac{d\bar{\psi}_S}{d\bar{t}} + j \cdot \alpha_k \cdot \bar{\psi}_S}$$

Аналогичные преобразования произведем во втором уравнении:

$$\left[\frac{\bar{U}_{RK}}{U_б}\right] = \left[\frac{R_{RR} \cdot I_б}{U_б}\right] \cdot \left[\frac{\bar{I}_{RK}}{I_б}\right] + \frac{d\left[\frac{\psi_{RK} \cdot \omega_б}{U_б}\right]}{d[t \cdot \omega_б]} + j \cdot \left[\frac{(\omega_K - p \cdot \omega_m)}{\omega_б}\right] \cdot \left[\frac{\bar{\psi}_{RK} \cdot \omega_б}{U_б}\right],$$

$$\boxed{\bar{u}_R = r_R \cdot \bar{i}_R + \frac{d\bar{\psi}_R}{d\bar{t}} + j \cdot (\alpha_k - \nu \cdot p) \cdot \bar{\psi}_R}$$

Для уравнения (3), умножим обе части уравнения на $\frac{\omega_б}{U_б}$:

$$\left[\frac{\bar{\psi}_{SK}\cdot\omega_б}{U_б}\right]=\left[\frac{\omega_б\cdot L_{SS}\cdot I_б}{U_б}\right]\cdot\left[\frac{\bar{I}_{SK}}{I_б}\right]+\left[\frac{\omega_б\cdot L_m\cdot I_б}{U_б}\right]\cdot\left[\frac{\bar{I}_{RK}}{I_б}\right],$$

$$\boxed{\bar{\psi}_S = x_S\cdot\bar{i}_S + x_m\cdot\bar{i}_R}$$

Аналогично в уравнении (4), умножим обе части на $\frac{\omega_б}{U_б}$:

$$\left[\frac{\bar{\psi}_{RK}\cdot\omega_б}{U_б}\right]=\left[\frac{\omega_б\cdot L_R\cdot I_б}{U_б}\right]\cdot\left[\frac{\bar{I}_{RK}}{I_б}\right]+\left[\frac{\omega_б\cdot L_m\cdot I_б}{U_б}\right]\cdot\left[\frac{\bar{I}_{SK}}{I_б}\right],$$

$$\boxed{\bar{\psi}_R = x_R\cdot\bar{i}_R + x_m\cdot\bar{i}_S}.$$

В уравнении (5) обе части разделим на $M_б$:

$$\left|\frac{M}{M_б}\right|-\left|\frac{M_c}{M_б}\right|=\left|J\frac{\omega_б\cdot\omega_б}{M_б}\right|\cdot\frac{d\left[\frac{\omega_m}{\omega_б}\right]}{d[t\cdot\omega_б]},$$

$$\boxed{m - m_c = T_m\cdot\frac{d\nu}{d\tau}}.$$

Опуская вывод получим:

$$\boxed{m = k_R\cdot M_{od}\cdot(\bar{\psi}_R\cdot\bar{i}_S)},$$

где $k_R=\frac{x_m}{x_R}$

Рассмотрим асинхронный двигатель с К.З. ротором ($\bar{u}_R = 0$), кроме того, т.к. $m\sim\bar{\psi}_R\cdot\bar{i}_S$ исключим из системы уравнений $\bar{\psi}_S$ и $\bar{i}_R$.

$$\begin{cases}\bar{u}_S = r_S\cdot\bar{i}_S+\dfrac{d\bar{\psi}_S}{d\tau}+j\cdot\alpha_k\cdot\bar{\psi}_S; & (1)\\ 0 = r_R\cdot\bar{i}_R+\dfrac{d\bar{\psi}_R}{d\tau}+j\cdot(\alpha_k-\nu\cdot p)\cdot\bar{\psi}_R; & (2)\\ \bar{\psi}_S = x_S\cdot\bar{i}_S + x_m\cdot\bar{i}_R; & (3)\\ \bar{\psi}_R = x_R\cdot\bar{i}_R + x_m\cdot\bar{i}_S. & (4)\end{cases}$$

Из уравнения (4) выразим $\bar{i}_R$ тогда,

$$\bar{i}_R=\frac{1}{x_R}\cdot\bar{\psi}_R-\frac{x_m}{x_R}\cdot\bar{i}_S.$$

Подставим $\bar{i}_R$ в (3) уравнение:

$$\bar{\psi}_S = x_S\cdot\bar{i}_S + x_m\cdot\left(\frac{1}{x_R}\cdot\bar{\psi}_R-\frac{x_m}{x_R}\cdot\bar{i}_S\right)=\left(x_S-\frac{x_m^2}{x_R}\right)\cdot\bar{i}_S+\frac{x_m}{x_R}\cdot\bar{\psi}_R.$$

Обозначим $x_S-\frac{x_m^2}{x_R}=x_S'$ и $\frac{x_m}{x_R}=k_R$, тогда

$$\boxed{\bar{\psi}_S = x_S'\cdot\bar{i}_S + k_R\cdot\bar{\psi}_R}$$

В уравнении (2) исключим $\bar{i}_R$:

$$0=r_R\cdot\left(\frac{1}{x_R}\cdot\bar{\psi}_R-\frac{x_m}{x_R}\cdot\bar{i}_S\right)+\frac{d\bar{\psi}_R}{d\tau}+j\cdot(\alpha_k-\nu\cdot p)\cdot\bar{\psi}_R.$$

$$0 = \frac{r_R}{x_R} \cdot \overline{\psi}_R - r_R \cdot \frac{x_m}{x_R} \cdot \overline{i}_S + \frac{d\overline{\psi}_R}{d\overline{t}} + j \cdot (\alpha_k - \nu \cdot p) \cdot \overline{\psi}_R.$$

Обозначим $\frac{x_R}{r_R} = \overline{T}_R$, $\frac{x_m}{x_R} = k_R$, тогда

$$0 = \frac{1}{\overline{T}_R} \cdot \overline{\psi}_R - r_R \cdot k_R \cdot \overline{i}_S + \frac{d\overline{\psi}_R}{d\overline{t}} + j \cdot (\alpha_k - \nu \cdot p) \cdot \overline{\psi}_R.$$