Оценим теперь длительность заключительной части процесса, соответствующей движению системы (2) по многообразию L (при $u = 0$). Из неравенства (18) следует, что время вхождения решения $z\left(z_{t^*}(\vartheta), t^*, t+\vartheta\right)$ системы (17) в окрестность $\| z_t(\vartheta)\|_{[-\tau,0]} = C\beta^{-p}\|z_{t^*}(\vartheta)\|_{[-\tau,0]}$ не больше, чем $\frac{p\ln\beta}{\beta}$ $(\beta = q\rho,\quad 0 < q < 1)$, где p – некоторое натуральное число. Очевидно, это время (как и сама окрестность) стремится к нулю при $\rho\to\infty$.

Таким образом, в указанном смысле предлагаемый алгоритм управления является квазиоптимальным по быстродействию.

Библиографический список

1. *Геращенко Е. И., Геращенко С. М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М., 1975.

2. *Шиманов С. Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1.

3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

4. *Красовский Н. Н.* О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1.

А. А. Меленцов

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО КЛАССА $W_p^\alpha\left([0,1]^2\right)$ БИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Первый результат по приближению билинейными функциями был получен Е. Шмидтом [1], который в 1907 г. нашел наилучшее приближение периодической функции двух переменных суммами произведений функцией одной переменной в L_2. В. Н. Темляковым в ряде работ (например, [2; 3]) найдены порядки приближения $\tau_{M\Gamma}(F)_p$ классов периодических функций многих переменных билинейными функциями для классов $W_{q,\alpha}^{\bar r}$, $SW_{q,\alpha}^{\bar r}$, $H_q^{\bar r}$ и $NH_q^{\bar r}$ периодических функций, определенных ограничениями на соответствующие частые производные или ограничениями на соответствующие допредельные разности. Такие оценки им получены также в различных смешанных нормах для анизотропных классов Соболева и Никольского в периодическом случае [4].

В работах М.-Б. А. Бабаева [5–7] изучен вопрос о скорости приближения функций соболевского класса $W_p^\alpha\left(I^m\right)$ в метрике $L_q\left(I^m\right)$ билинейными функциями порядка M при $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ и $M\to\infty$.

В работе [8] в теореме 6.1 доказано, что для любых $0\leqslant q\leqslant\infty$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ и любого натурального числа α существует константа $0<C=C(\mathrm{p},\ \mathrm{q},\ \alpha)<\infty$, такая, что для любой функции $f(x)\in W_p^\alpha\left(I^2\right)$ справедливо неравенство

$$E_M\left(f,g\right)_q\leq\frac{C}{M^\alpha}\|f\|_{L_p^\alpha\left(I^2\right)}.$$

$E_M(f,g)_q$ – наилучшее приближение в $L_q([0,1]^2)$ функции f функциями $g(x)=\sum\limits_{s=1}^{M}\varphi_s\left(x_1\right)\psi_s\left(x_2\right)$.

В данной работе приводится конструктивное доказательство того, что оценка теоремы 6.1 в работе [8] при $0\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ точна в смысле порядка относительно $M\to\infty$.

Пусть ∂I^2 – граница квадрата $I^2=[0,1]\times[0,1]$ и функция $f^*(x)=f^*(x,x^2)\in W_p^\alpha(I^2)$ такая, что предельные граничные значения всех ее производных до порядка α равны нулю:

$$D^\tau f\left(x\right)\Big|_{\partial I^2}\equiv0\ \left(0\leqslant|\tau|\leqslant\alpha\right).\qquad(1)$$

Будем считать, что $f^*\left(x\right)\notin G_1$, т. е. $f^*\left(x\right)\neq\varphi\left(x_1\right)\psi\left(x_2\right)$ ни при каких φ и ψ из $L_q[0,1]$ (точнее, $mes\left\{\left(x_1,x_2\right)\in I^2:f^*\left(x\right)\neq\varphi\left(x_1\right)\psi\left(x_2\right)\right\}>0$ для $\forall\varphi\left(x_1\right),\psi\left(x_2\right)\in L_q\left(I\right)$). Ясно, что $f^*(x)$ существует. Например $f^*\left(x\right)=\sin\left(x_1\left(1-x_1\right)x_2\left(1-x_2\right)\right)^{\alpha+1}$.

Тогда $E_1\left(f^*,g\right)_q=\varepsilon_0\left(f^*\right)>0$.

Напомним, что $E_1\left(f^*, g\right)_q = \inf_{\varphi,\psi\in L_q(I)}\left\| f^*(x_1, x_2) - \varphi(x_1)\psi(x_2)\right\|_{L_q(I^2)}$.

Пусть M натуральное и $M>1$. Через $f_M(x_1,x_2)$ обозначим функцию, которая на каждом прямоугольнике Π_{ji}, $j = 1, 2, \ldots, M$; $i = 1, 2, \ldots, M$; определяется формулой $c_{ji}f^*\left(M\left(x_1 - \frac{j-1}{M}\right), M\left(x_2 - \frac{i-1}{M}\right)\right)$, т. е.

$$f_M(x_1, x_2) = \left\{c_{ji}f^*\left(M\left(x_1 - \frac{j-1}{M}\right), M\left(x_2 - \frac{i-1}{M}\right)\right)\right\} \quad \text{для} \quad (x_1, x_2)\in\Pi_{ji},$$

$j = 1, 2, \ldots, M$; $i = 1, 2, \ldots, M$.

Здесь $\Pi_{ji} = \left\{(x_1, x_2): \frac{j-1}{M} \leqslant x_1 \leqslant \frac{j}{M};\ \frac{i-1}{M} \leqslant x_2 \leqslant \frac{i}{M}\right\}$, константы $c_{ji}\neq 0$ выберем позднее.

Так как $f^*(x_1, x_2)\in W_p^u(I^2)$ и выполняются граничные условия (1), то $f_M(x_1, x_2)\in W_p^u(I^2)$.

Пусть наилучшее приближение $E_1(f)_{q(I^2)}$ достигается. Тогда существуют функции $\varphi^*(x_1)$, $\psi^*(x_2)$, такие, что

$$E_1\left(f^*, g\right)_q = \left\| f^*(x_1, x_2) - \varphi^*(x_1)\,\psi^*(x_2)\right\|_{L_q(I^2)} = \varepsilon_0\left(f^*\right) > 0.$$

Функцию $f_M(x_1, x_2)$ можно записать в виде

$$f_M(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} c_{ji}\chi_{\Pi_{ji}}(x_1, x_2) f^*\left(M\left(x_1 - \frac{j-1}{M}\right), M\left(x_2 - \frac{i-1}{M}\right)\right), \quad (2)$$

где $\chi_{\Pi_{ji}}(x_1, x_2)$ – характеристическая функция квадрата Π_{ji},

$c_{ji}\chi_{\Pi_{ji}}(x_1, x_2) = \chi_j(x_1)\chi_i(x_2)$, а $\chi_j(x_1)$, $\chi_i(x_2)$ – характеристические функции отрезков $\left[\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right]$ и $\left[\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M}\right]$ соответственно.

Далее, функция

$$g_M(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} c_{ji}\chi_j(x_1)\varphi^*\left(M\left(x_1 - \frac{j-1}{M}\right)\right)\chi_i(x_2)\psi^*\left(M\left(x_2 - \frac{i-1}{M}\right)\right) \quad (3)$$

принадлежит классу билинейных функций G_M, так как, положив

$$\varphi_i(x_1)=\sum_{j=1}^{M}c_{ji}\chi_j(x_1)\varphi^*\left(M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)\right)$$

и

$$\psi_i(x_2)=\chi_i(x_2)\,\psi^*\left(M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)\right),$$

имеем

$$\varphi_i(x_1)\psi_i(x_2)\in G_M.$$

Если бы строки $\overline{c_i}=\left(c_{1i},c_{2i},...,c_{Mi}\right)$ были пропорциональны одной, например, первой, строке, т. е. при некоторых $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_M$ было бы $\overline{c_i}=\lambda_i\overline{c_1}$ ($i=2, \ldots, M$), то мы имели бы

$$g_M(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\lambda_i c_{j1}\chi_j(x_1)\varphi^*\left(M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)\right)\chi_i(x_2)\psi^*\left(M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}c_{j1}\chi_i(x_1)\varphi^*\left(M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)\right)\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\chi_i(x_2)\,\psi^*\left(M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)\right)=\varphi(x_1)\psi(x_2),$$

т. е. функция $g_M(x_1, x_2)\in G_1$. Сформулированное условие на числа $\{c_{ji}\}$ равносильно условию, что ранг матрицы

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{M1} \\ \ldots & \ldots \\ c_{1M} & c_{MM} \end{pmatrix}$$

равен 1, $rankC = 1$.

Аналогичным образом можно показать, что условие $rankC = r$ ($r = 2, 3, \ldots, M$) эквивалентно тому, что функция (3) $g_M(x_1, x_2)\in G_r$. В частности, если числа c_{ji} выберем так, чтобы строки (столбцы) матрицы C были линейно независимые, то получим функцию $g_M(x_1, x_2)$, принадлежащую классу G_M и не принадлежащую классу G_r ни при каком $r<M$. При этом, естест-

венно, мы требуем, чтобы функции $\varphi^*\left(M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)\right)$ и $\psi^*\left(M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)\right)$ были не эквивалентны 0 на интервалах $\left(\frac{j-1}{M},\frac{j}{M}\right)$ и $\left(\frac{i-1}{M},\frac{i}{M}\right)$ соответственно, что равносильно тому, что $\varphi^*(x_1)$, $\Psi^*(x_2)$ отличны от нулевого элемента пространства $L_q(0,1)$.

Так как на каждом квадрате Π_{ji}

$$\left\|f_M(x_1,x_2)-g_M(x_1,x_2)\right\|_{L_q(\Pi_{ji})}=$$

$$=\left\|c_{ji}f^*\left(M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)\right)-c_{ji}\varphi^*\left(M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)\right)\right\|_{L_q(\Pi_{ji})},$$

то после замены переменных $M\left(x_1-\frac{j-1}{M}\right)=x_1'$, $M\left(x_2-\frac{i-1}{M}\right)=x_2'$ получим:

$$\left\|f_M(x_1,x_2)-g_M(x_1,x_2)\right\|_{L_q(\Pi_{ji})}=\frac{|c_{ji}|}{M^{2/q}}\left\|f^*(x_1',x_2')-\varphi^*(x_1)\psi^*(x_2)\right\|_{L_q(I^2)}=$$

$$=\frac{|c_{ji}|}{M^{2/q}}E_1(f^*,g)_q=\frac{|c_{ji}|}{M^{2/q}}\varepsilon_0(f^*).$$

Отсюда получаем оценку при $0<q<\infty$:

$$E_M(f_M,g)_q\geq\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\inf_{\varphi,\psi\in L_q}\int_{\Pi_{ji}}\left|f_M(x)-\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\right|^p dx_1dx_2\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{|c_{ji}|^q}{M^2}\varepsilon_0^q(f^*)\right)^{1/q}=\frac{\varepsilon_0(f^*)}{M^{2/q}}\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}|c_{ji}|^q\right)^{1/q},$$

т. е. для построенной функции $f_M(x_1,x_2)\in W_p^u(I^2)$

$$E_M(f_M, g)_q \geqslant \frac{\varepsilon_0(f^*)}{M^{2/q}} \left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^q \right)^{1/q}.$$

Вычислим полунорму $\|f_M\|_{L_p^\alpha(I^2)}$ полученной функции $f_M \in W_p^\alpha(I^2)$.

Из (2) имеем при $1 \leqslant p < \infty$:

$$\|f_M\|_{L_p^\alpha(I^2)} = \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \int_{I^2} |D^\tau f_M(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \int_{\Pi_{ji}} |D^\tau f_M(x)|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \int_{\Pi_{ji}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2}} c_{ji} f^* \left(M\left(x_1 - \frac{j-1}{M}\right), M\left(x_2 - \frac{i-1}{M}\right) \right) \right|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \int_{\Pi_{ji}} \left| M^{\tau_1+\tau_2} c_{ji} \frac{\partial^\alpha}{\partial (x_1')^{\tau_1} \partial (x_2')^{\tau_2}} f^*(x_1', x_2') \right|^p dx \right)^{1/p},$$

где $x_1' = M\left(x_1 - \frac{j-1}{M}\right), \quad x_2' = M\left(x_2 - \frac{i-1}{M}\right)$.

Отсюда после замены переменных в последних интегралах получаем:

$$\|f_M\|_{L_p^\alpha(I^2)} = M^\alpha \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^p \int_{I^2} |D^\tau f^*(x_1', x_2')|^p \frac{dx'}{M^2} \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{M^\alpha}{M^{2/p}} \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \int_{I^2} |D^\tau f^*(x_1', x_2')|^p dx_1' dx_2' \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^p \right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\|f_M\|_{L_p^\alpha(I^2)} = \frac{M^\alpha}{M^{2/p}} \left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^p \right)^{1/p} \|f\|_{L_p^\alpha(I^2)}.$$

В итоге получаем, что

$$\sup_{\substack{f \in W_p^\alpha(I^2) \\ \|f\|_{L_p^\alpha(I^2)} > 0}} \frac{E_M(f, g)_q}{\|f\|_{L_p^\alpha(I^2)}} \geq \frac{E_M(f_M, g)_q}{\|f\|_{L_p^\alpha(I^2)}} = \frac{1}{M^{\alpha + \frac{2}{q} - \frac{2}{p}}} \frac{\varepsilon(f^*)}{\|f^*\|_{L_p^\alpha(I^2)}} \frac{\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^q \right)^{1/q}}{\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^p \right)^{1/p}}. \qquad (4)$$

Коэффициенты c_{ji} пока произвольные, с единственным ограничением, что строки $\overline{c_i} = (c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{Mi})$ ($i = 1, 2, \ldots, M$) линейно независимые. Будем выбирать их так, чтобы при заданном M и выбранной функции f правая часть здесь была возможно большей.

Положим

$$\sup_{|c_{ji}|} \frac{\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^q\right)^{1/q}}{\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^p\right)^{1/p}} = \overline{k_M},$$

где sup берется по всем линейно независимым строкам $\overline{c_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$.

Пусть k_M – это наименьшая константа в неравенстве

$$\left(\sum_{l=1}^{M^2} a_l^q\right)^{1/q} \leqslant k_M \left(\sum_{l=1}^{M^2} a_l^p\right)^{1/p} \quad (q \leqslant p).$$

Полагая в точном неравенстве разных метрик [9, с. 41]

$$\left(\sum_{l=1}^{n} |a_l|^q\right)^{1/q} \leqslant n^{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{l=1}^{n} |a_l|^p\right)^{1/p} \quad (q \leqslant p)$$

n равным M^2, получаем $k_M = M^{2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)}$.

Правда, неравенство это достигается, когда $|a_1| = |a_2| = \ldots |a_n|$, или в нашем случае, когда $|c_{ji}| = |c_{11}|$ при всех допустимых (j, i). Но ясно, что можно выбрать c_{ji} так, что

а) ранг матрицы $C = (c_{ji})$ равен M и

б) $$\frac{\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^q\right)^{1/q}}{\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} |c_{ji}|^p\right)^{1/p}} \geqslant \frac{k_M}{2} = \frac{1}{2} M^{2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)}.$$

В итоге будем иметь $\overline{k_M} \geqslant \frac{1}{2} M^{2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)}$.

На самом деле можно доказать, что $\overline{k_M} = k_M$, но для наших целей достаточно последнего неравенства.

Подставляя такие c_{ji} в конструкцию функции $f_M(x_1, x_2)$ и в оценку (4), получаем:

$\sup\limits_{f \in W_p^{\alpha}(I^2)} \dfrac{E_M(f,g)_q}{\|f\|_{L_p^{\alpha}(I^2)}} \geqslant \dfrac{C_1}{M^{\alpha}}$, где константа $C_1 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\varepsilon_0(f^*)}{\|f^*\|_{L_p^{\alpha}(I^2)}} > 0$ не зависит от M.

Тем самым доказано, что оценка $E_M(f,g)_q \leqslant \dfrac{C_2}{M^{\alpha}} \|f\|_{L_p^{\alpha}(I^2)}$ теоремы 6.1 в работе [7] при $0<q\leqslant p<\infty$ точна в смысле порядка относительно $M \to \infty$.

Рассуждения в случае, когда $q = \infty$ и (или) $p = \infty$, аналогичны приведенным.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Н. И. Черных за постановку задачи и большую помощь в работе[1].

Библиографический список

1. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. I // Math. Ann 1906/07. V. 63.

2. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178.

3. *Темляков В. Н.* О наилучших билинейных приближениях периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1986. Т. 2, № 2.

4. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187.

5. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в L_p при $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2$ // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 1.

6. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса W_p^r билинейными формами в L_p при $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2 \leqslant \infty$ // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05–01–00409.

7. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов W_p^r функций многих переменных билинейными формами в L_p при $2 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып 1.

8. *Меленцов А. А.* Приближения функций класса $W_p^u\left([0,1]^2\right)$ билинейными функциями // Изв. Урал. ун-та. № 30. Математика, механика. Вып. 6.

9. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948.