МАТЕМАТИКА

Л. Е. Гуляева

ПРИМЕНЕНИЕ ВСПЛЕСКОВ К РЕШЕНИЮ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

Рассмотрим пространство L_2 1-периодических функций, суммируемых с квадратом на отрезке единичной длины. Данный отрезок для удобства будем обозначать $T\left(T=[0,1]\right)$. Скалярное произведение функций $f(t), g(t) \in L_2(T)$ определено как $(f,g)=\int\limits_T f(t)\overline{g(t)}dt$, где $-$ $\overline{g(t)}$ – функция комплексно-сопряженная к $g(t)$. Пространство функций на отрезке T с абсолютно непрерывными производными до порядка $n-1$ включительно обозначим через $A^n(T)$. Хорошо известно, что если $f \in A^n(T)$, то $f^{(n)}(t)$ определена почти всюду на T и суммируема.

Будем искать решение краевой задачи

$$\begin{cases} (Ly)(t)=f(t), \\ y^{(k)}(0)=y^{(k)}(1), \\ k=0,1,\dots,n-1, \end{cases} \tag{1}$$

где $(Ly)(t)=\sum\limits_{s=0}^{n} a_s y^{(s)}(t)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными вещественными коэффициентами, причем $a_n \neq 0$. Здесь и далее будем считать, что $f(t)$ – периодическая функция из $L_2(T)$. Решение $y(t)$ будем считать принадлежащим множеству $L_2(T)\cap A^n(T)$. Дальнейшие рассуждения будем вести в предположении, что краевая задача имеет решение, причем единственное.

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05–01–00409.

Кратко опишем метод Бубнова-Галеркина [1] в случае применения полных ортогональных систем функций. Возьмем в пространстве $L_2(T)$ полную систему 1-периодических n раз непрерывно дифференцируемых ортогональных функций $\{p_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Ясно, что они удовлетворяют краевым условиям (1), т. е. $p_\nu^{(k)}(0)=p_\nu^{(k)}(1)$, $k=0,1,\ldots,n-1, \nu\in Z$. Пространство обобщенных полиномов $P_m=\sum\limits_{\nu=1}^{m}c_\nu p_\nu(t)$, где c_ν – произвольные коэффициенты, обозначим через P_m. Заметим, что последовательность пространств P_m является возрастающей по вложению и $\overline{\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}P_m}=L_2(T)$. Далее, пусть $\{q_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ – полная линейно-независимая система функций из $L_2(T)$. Аналогично обозначим через Q_m множество обобщенных полиномов $Q_m=\sum\limits_{\mu=1}^{m}d_\mu q_\mu(t)$ по системе $\{q_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ периодических функций.

В методе Бубнова-Галеркина приближенное решение краевой задачи (1) ищется в виде $y_m\in P_m$, $y_m(t)=\sum\limits_{\nu=1}^{m}c_\nu p_\nu(t)$ из условия, что для любой функции $g[t]\in Q_m$

$$((Ly_m)(t)-f(t),g(t))=0, \tag{2}$$

или в более удобном виде:

$$((Ly_m)(t),g(t))=(f(t),g(t)),(g(t)\in Q_m).$$

Подставляя в (2) выражения для y_m и $g(t)$, перепишем эти условия в виде

$$\sum_{\nu=1}^{m}c_\nu\sum_{\mu=1}^{m}d_\mu\left(Lp_{\nu.}\, q_\mu\right)=\sum_{\mu=1}^{m}d_\mu\left(f(t),q_\mu\right). \tag{3}$$

Таким образом, условие (3) означает, что для любого набора $\{d_\mu\}_{\mu=1}^{m}$ вещественных чисел выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{m} d_\mu \left(\sum_{\mu=1}^{m} c_\nu \left(Lp_\nu, q_\mu\right) - \left(f(t) q_\mu\right) \right) = 0.$$

Выберем коэффициенты d_μ следующим образом:

$$d_1=1,\ d_2=0,\ \ldots,\ d_m=0,$$

$$d_1=0,\ d_2=1,\ \ldots,\ d_m=0,$$

$$d_1=0,\ d_2=0,\ \ldots,\ d_m=1,$$

тогда получим $\sum_{\mu=1}^{m} c_\nu \left(Lp_\nu, q_\mu\right) = \left(f(t), q_\mu\right),\ \mu = 1, \ldots, m$, или более подробно

$$\begin{cases} c_1\left(Lp_1, q_1\right) + c_2\left(Lp_2, q_1\right) + \ldots + c_m\left(Lp_m, q_1\right) = \left(f, q_1\right), \\ c_1\left(Lp_1, q_2\right) + c_2\left(Lp_2, q_2\right) + \ldots + c_m\left(Lp_m, q_2\right) = \left(f, q_2\right), \\ \ldots \\ c_1\left(Lp_1, q_m\right) + c_2\left(Lp_2, q_m\right) + \ldots + c_m\left(Lp_m, q_m\right) = \left(f, q_m\right). \end{cases} \tag{4}$$

Получена система m линейных уравнений с неизвестными c_1, c_2, …, c_m, для определения приближенного решения $y_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu p_\nu$ по методу Бубнова-Галеркина.

В общем случае нельзя утверждать, что определитель системы (4) отличен от нуля и она имеет единственное решение. Наша цель – упростить поиск коэффициентов c_1, c_2, …, c_m путем выбора подходящих систем функций $\{p_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ и $\{q_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$.

Пусть $\varphi(x)$ – ортогональная в $L_2(-\infty, +\infty)$ масштабирующая функция, $\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\nu)\varphi(t)dt = \delta_\nu,\ \nu \in Z$, порождающая кратно-масштабный анализ пространства $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е. для любой функции $f(x) \in L_2(R)$справедливо представление

$$f(x) = \lim_{j \to +\infty} \sum_{\nu \in Z} f_{j,\nu} \varphi_{j,\nu}(x),$$

где $\left\{\varphi_{j,\nu}(x) = 2^{j/2}\varphi\left(2^j x + \nu\right) : \nu \in Z\right\}$ – ортонормированная система функций $f_{j,\nu} = \int_R f(t)\varphi_{j,\nu}(t)dt$. Будем считать $\varphi(t)$ вещественной функцией, $\varphi(t) \in L_2(R) \cap A^n(R)$, $R = (-\infty, +\infty)$ и по каждой системе $\left\{\varphi_{j,l}(t) = 2^{j/2}\varphi\left(2^j t + l\right) : l = 0, \dots, 2^j - 1\right\}$, $j = 1, 2, \dots$ построим соответствующую ей, ортонормированную в пространстве $L_2(T)$ систему функций. Для этого проведем 1-периодизацию $\varphi_{j,l}(t)$, т. е. определим 1-периодические функции $\Phi_{j,l}(t) = (\mathrm{Pe})_1 \varphi_{j,l}(t) = \sum_{\eta \in Z} 2^{j/2}\varphi\left(2^{j/2}(t + \eta) + l\right)$, $\left(j = 0, 1, 2, \dots, l = 0, \dots, 2^j - 1\right)$. Поскольку $\Phi_{j,l}(t)$получена периодизацией ортонормированной масштабирующей функции $\varphi_{j,l}(x)$ на R, то система $\Phi_{j,l}(t), l = 0, \dots, 2^j - 1$ будет ортонормированной на T [2].

Зададим последовательность подпространств $V_j = \left\{\sum_{l=0}^{2j} c_l \Phi_{j,l}(t)\right\}$ пространства $L_2(T)$. Данная последовательность является возрастающей по вложению и $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j} = L_2(T)$ [2]. Ясно, что для функции $\Phi_{j,l}(t)$ выполняются краевые условия (1). Таким образом, в качестве подпространств P_m удобно взять подпространства V_j, считая $m = 2^j$ и выбирая в качестве базисных элементов p_ν функции $\Phi_{j,\nu}(t)$, $\nu = 0, 1, \dots, 2^{j-1}$, тогда приближенное решение y_m будем искать в виде

$$y_m = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \Phi_{j,\nu}(t).$$

Ясно, что система (4) относительно неизвестных (c_1, c_2, …, c_m) наиболее просто решается в случае, когда матрица системы – единичная матрица. Далее конструируется система функций $\{q_\mu(t)\}$, порождающая такую матрицу.

Определим Q_m. Сопряженный оператор для оператора $(Ly)(t)$ на $L_2(T)\cap A^n(T)$ обозначим через $(L^*y)(t)$. Он определяется условием: для любых функций $g(t),y(t)\in L_2(T)\cap A^n(T)$ выполнено равенство $(Ly,g)=(y,L^*g)$. Раскрывая скалярное произведение (Ly,g)с помощью интегрирования по частям, получаем

$$(Ly,g)=\int_T\sum_{s=0}^{n}a_sy^{(s)}(t)\overline{g(t)}dt=\sum_{s=0}^{n}a_s\int_T\overline{g(t)}y^{(s)}(t)dt=\sum_{s=0}^{n}a_s\int_T\overline{g(t)}d\left(y^{(s-1)}(t)\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}a_s\left[\overline{g(t)}y^{(s-1)}(t)|_T-\int_T\left(\overline{g(t)}\right)'y^{(s-1)}(t)dt\right].$$

Интегрируя по частям $(n-1)$ еще раз и учитывая, что функции $g(t)$, $y(t)$ и их производные 1-периодические, получаем

$$(Ly,g)=\int_T\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+1}a_s\left(\overline{g(t)}\right)^{(s)}y(t)dt=\int_T y(t)\overline{\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+1}a_sg^{(s)}(t)}dt=$$

$$=\left(y,\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+1}a_sg^{(s)}(t)\right).$$

Следовательно,

$$(L^*g)(t)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+1}a_sg^{(s)}(t). \tag{5}$$

Для оператора $(L^*y)(t)$ обозначим обратный через $(L^*)^{-1}y(t)$ и построим систему функций

$$(L^*)^{-1}\Phi_{j,l}(t)=\xi_{j,l}(t)\left(l=0,1,\dots,2^j-1\right).$$

Из определения обратного оператора следует, что каждая функция $\xi_{j,l}(t)$ определяется как решение краевой задачи

$$\begin{cases}L^*\xi_{j,l}(t)=\Phi_{j,l}(t),\\ \xi_{j,l}^k(0)=\xi_{j,l}^k(1),\\ k=0,1,\dots,n-1.\end{cases} \tag{6}$$

Зададим теперь Q_m, положив $Q_m = Lin\left\{\left(L^*\right)^{-1}\Phi_{j,l} : l = 0, \ldots, 2^j - 1\right\}$, и в качестве базисных элементов Q_m возьмем $q_\mu = \xi_{j,\mu}, \mu = 0, \ldots, 2^j - 1$.

Таким образом, система линейных уравнений (4) при выбранных $\{p_\nu\}$, $\{q_\mu\}$ и $m = 2^j$ примет вид

$$\begin{cases} c_0\left(L\Phi_{j,0}, \xi_{j,0}\right) + c_1\left(L\Phi_{j,1}, \xi_{j,0}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(L\Phi_{j,m-1}, \xi_{j,0}\right) = \left(f, \xi_{j,0}\right), \\ c_0\left(L\Phi_{j,0}, \xi_{j,1}\right) + c_1\left(L\Phi_{j,1}, \xi_{j,1}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(L\Phi_{j,m-1}, \xi_{j,1}\right) = \left(f, \xi_{j,1}\right), \\ \qquad \ldots \\ c_0\left(L\Phi_{j,0}, \xi_{j,m-1}\right) + c_1\left(L\Phi_{j,1}, \xi_{j,m-1}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(L\Phi_{j,m-1}, \xi_{j,m-1}\right) = \left(f, \xi_{j,m-1}\right). \end{cases}$$

Воспользуемся определением сопряженного оператора. Получим

$$\begin{cases} c_0\left(\Phi_{j,0}, L^*\xi_{j,0}\right) + c_1\left(\Phi_{j,1}, L^*\xi_{j,0}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(\Phi_{j,m-1}, L^*\xi_{j,0}\right) = \left(f, \xi_{j,0}\right), \\ c_0\left(\Phi_{j,0}, L^*\xi_{j,1}\right) + c_1\left(\Phi_{j,1}, L^*\xi_{j,1}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(\Phi_{j,m-1}, L^*\xi_{j,1}\right) = \left(f, \xi_{j,1}\right), \\ \\ c_0\left(\Phi_{j,0}, L^*\xi_{j,m-1}\right) + c_1\left(\Phi_{j,1}, L^*\xi_{j,m-1}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(\Phi_{j,m-1}, L^*\xi_{j,m-1}\right) = \\ = \left(f, \xi_{j,m-1}\right). \end{cases}$$

Из (6) имеем

$$\begin{cases} c_0\left(\Phi_{j,0}, \Phi_{j,0}\right) + c_1\left(\Phi_{j,1}, \Phi_{j,0}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(\Phi_{j,m-1}, \Phi_{j,0}\right) = \left(f, \xi_{j,0}\right), \\ c_0\left(\Phi_{j,0}, \Phi_{j,1}\right) + c_1\left(\Phi_{j,1}, \Phi_{j,1}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(\Phi_{j,m-1}, \Phi_{j,1}\right) = \left(f, \xi_{j,1}\right), \\ \qquad \ldots \\ c_0\left(\Phi_{j,0}, \Phi_{j,m-1}\right) + c_1\left(\Phi_{j,1}, \Phi_{j,m-1}\right) + \ldots + c_{m-1}\left(\Phi_{j,m-1}, \Phi_{j,m-1}\right) = \left(f, \xi_{j,m-1}\right). \end{cases}$$

Поскольку система функций $\Phi_{j.l}(t)$ ортонормированная на T, то $(\Phi_{j.l},\Phi_{j.r})=\delta_{l.r}$, система вырождается в систему

$$\begin{cases} c_0=(f,\xi_{j.0}), \\ c_1=(f,\xi_{j.1}), \\ \ldots \\ c_{m-1}=(f,\xi_{j.m-1}). \end{cases}$$

Следовательно, однозначно определены коэффициенты разложения по базису P_m для приближенного решения (6) и $y_m=\sum_{\nu=0}^{m-1}(f,\xi_{j.l})\Phi_{j.\nu}(t)$.

Из приведенных рассуждений видно также, что по ортонормированной системе $\{\Phi_{j.l}(t): l=0,1,\ldots,2^j-1\}$ в работе построены две биортогональные системы функций

$$\{u_{i.l}(t)=L\Phi_{j.l}(t): l=0,1,\ldots,2^j-1\}$$

и

$$\{\nu_{i.l}(t)=(L^*)^{-1}\Phi_{j.l}(t): l=0,1,\ldots,2^j-1\},$$

порождающие два биортогональных кратно-масштабных анализа пространства $L_2(T)$, по которым обычным образом можно построить биортогональные базисы

$$\{\tilde{u}_{i.l}: j=0,1,\ldots,\ \ l=0,1,\ldots,2^j-1\}$$

$$\{\nu_{i.l}: j=0,1,\ldots,\ \ l=0,1,\ldots,2^j-1\}$$

всплесков пространства $L_2(T)$. При этом, меняя дифференциальный оператор L, будем получать все новую и новую пару биортогональных систем и биортогональных базисов $L_2(T)$.

Библиографический список

1. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М., 1980.

2. *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constructive approx. 1993. V. 9.

А. А. Меленцов

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ЗАМЕНОЙ ЯДРА КЛАССА W_p^α БИЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ*

Задача приближения функции двух переменных билинейными функциями рассматривалась многими авторами [1 – 10]. Мы предлагаем конструктивный метод построения аппроксимирующих билинейных функций, обеспечивающих наилучший порядок уклонения в метрике L_q функций $f(x_1, x_2)$, принадлежащих соболевскому классу W_p^α, от билинейных функций $g_M(x_1,x_2)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_1)\psi_s(x_2)$ и оценки этого уклонения [5].

Благодаря конструктивному способу получения оценки, этот метод может быть использован при решении интегральных уравнений.

Пусть на квадрате $[0,1]\times[0,1]=I^2$, $I=[0,1]$ задана функция $f(x_1,x_2)\in W_p^\alpha(I^2)$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$, α – натуральное число. Через G_M обозначим множество всех билинейных функций вида $g_M(x)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_1)\psi_s(x_2)$, где $\varphi_s(x_1),\psi_s(x_2)\in L_q[0,1]$. Тогда ясно, что $G_M\subset L_q(I^2)$. Через $E_M(f,g)$ обозначим $\inf\left\{\|f-g_M\|_{lq(I^2)}:g_M\in G_M\right\}$.

Разобъем квадрат на N полос прямыми $x^2=x_2^i$, $i=1,\ldots,n-1$. Каждую полосу разобъем на прямоугольники таким образом: Π_{Ji} – прямоугольник,

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05–01–00409.