Библиографический список

1. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М., 1980.
2. *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constructive approx. 1993. V. 9.

А. А. Меленцов

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ЗАМЕНОЙ ЯДРА КЛАССА W_p^α БИЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ*

Задача приближения функции двух переменных билинейными функциями рассматривалась многими авторами [1 – 10]. Мы предлагаем конструктивный метод построения аппроксимирующих билинейных функций, обеспечивающих наилучший порядок уклонения в метрике L_q функций $f(x_1, x_2)$, принадлежащих соболевскому классу W_p^α, от билинейных функций $g_M(x_1,x_2)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_1)\psi_s(x_2)$ и оценки этого уклонения [5].

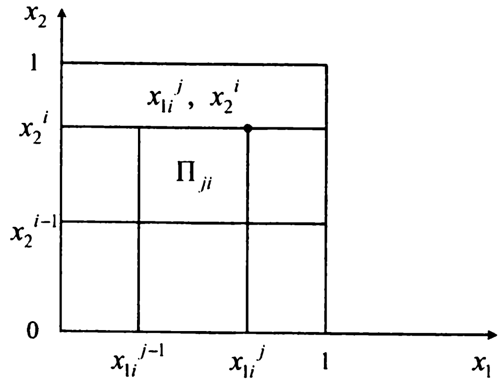
Благодаря конструктивному способу получения оценки, этот метод может быть использован при решении интегральных уравнений.

Пусть на квадрате $[0,1]\times[0,1]=I^2$, $I=[0,1]$ задана функция $f(x_1,x_2)\in W_p^\alpha(I^2)$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$, α – натуральное число. Через G_M обозначим множество всех билинейных функций вида $g_M(x)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x_1)\psi_s(x_2)$, где $\varphi_s(x_1),\psi_s(x_2)\in L_q[0,1]$. Тогда ясно, что $G_M\subset L_q(I^2)$. Через $E_M(f,g)$ обозначим $\inf\left\{\|f-g_M\|_{lq(I^2)}:g_M\in G_M\right\}$.

Разобъем квадрат на N полос прямыми $x^2=x_2^i$, $i=1,\ldots,n-1$. Каждую полосу разобъем на прямоугольники таким образом: Π_{Ji} – прямоугольник,

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05–01–00409.

выделенный из i-й полосы прямыми $x_1 = x_{1i}^{j-1}, x_1 = x_{x1}^{j}, j = 1, \ldots, N_i \left(x_{1i}^{Ni} = 1\right)$ (рисунок).



На каждом прямоугольнике построим билинейную форму в виде многочлена степени $l = \alpha - 1$ вида

$$P_{\Pi ji} = \sum_{0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant l} C_{k_1 k_2}^{ji} x_1^{k_1} x_2^{k_2}.$$

При любом разбиении такая кусочно-полиномиальная функция будет функцией класса G_M при $M = N(l+1)$. При доказательстве теоремы 6.1 найден алгоритм построения почти оптимального разбиения для любой функции $f(x_1, x_2) \in W_p^{\alpha}\left(I^2\right)$ [5]. В качестве многочлена на каждой ячейке разбиения Π_{ji} можно брать любой хорошо аппроксимирующий функцию многочлен степени l по совокупности переменных. Например, отрезок ряда Тейлора или многочлен, предложенный М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяк [4]. Эти многочлены могут быть использованы при решении интегральных уравнений методом замены ядра на вырожденное. Для получения оценки приближенного решения интегрального уравнения используем оценку

$$E_M(f, g) \leqslant \frac{C}{M^{\alpha}} \left\| f \right\|_{L_p^{\alpha}(I^2)} \tag{1}$$

из теоремы 6.1 приближения функции f соболевского класса $W_p^\alpha(I^2)$ билинейными функциями $g \in G_M$, где

$$\|f\|_{L_p^\alpha(I^2)} = \left(\sum_{k_1+k_2=\alpha} \iint_{I^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} f(x_1,x_2) \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s) y(s) ds + f(x),$$

где функция $K(x,s)$ принадлежит соболевскому классу $W_p^\alpha(I^2)$.

По функции $f(x_1,x_2) = K(x_1,x_2)$ построим билинейную функцию

$$T_M(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k_2=0}^{l} \varphi_{k_2,i}(x_1) \psi_{k_2,i}(x_2),$$

положив

$$\varphi_{k_2,i}(x_1) = \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k_1=0}^{l-k_2} \chi_{[x_{1,i}^{j-1}, x_{1,i}^{j}]}(x_1) C_{k_1,k_2}^{j,i} x_1^{k_1}, \quad \psi_{k_2,i}(x_2) = \chi_{[x_{2,i}^{j-1}, x_{2,i}^{j}]}(x_2) x_2^{k_2},$$

где $C_{k_1 k_2}^{j,i}$ – коэффициенты полинома $P_{11j,i}$, $\chi_{[a,b]}(\xi)$ – характеристическая функция отрезка $[a,b]$. Упорядочим двухиндексные последовательности $\{\varphi_{k_2,i}(x_1)\}_{i,k_2}$ и $\{\psi_{k_2,i}(x_2)\}_{i,k_2}$, где $i = 1, 2, \ldots, N$; $k_2 = 0, 1, \ldots, l$, в линейные последовательности, обозначив их через $\{\varphi_i(x_1)\}_{i=1}^{M}$, $\{\psi_i(x_2)\}_{i=1}^{M}$ $(M = N(l+1))$. Возвращаясь к переменным (x, s), получим билинейную функцию

$$\overline{K}(x,s) = T_M(x,s),$$

аппроксимирующую ядро $K(x,s)$ в $L_q(I^2)$ с погрешностью

$$\left\|K(x,s)-\overline{K}(x,s)\right\| \leqslant \frac{C}{M^{\alpha}}\left\|K(x,s)\right\|_{L_p^{\alpha}(I^2)}.$$

Заменим ядро $K(x,s)$ на вырожденное

$$\overline{K}(x,s)=\sum_{i=1}^{M}\varphi_i(x)\psi_i(s).$$

Через $\overline{y}(x)$ обозначим решение приближенного уравнения:

$$\overline{y}(x)=\lambda\int_0^1 \overline{K}(x,s)\overline{y}(s)ds+f(x).$$

Оценим уклонение $y-\overline{y}=\lambda\int_0^1\left(K\cdot y-\overline{K}\cdot\overline{y}\right)ds$ точного решения от приближенного в пространстве $L_q[0,1]$. Под интегралом добавим и вычтем слагаемое $K\cdot\overline{y}$, получим

$$\left\|y-\overline{y}\right\|_q=\left(\int_0^1\left|y-\overline{y}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=|\lambda|\left(\int_0^1\left|\int_0^1 K(y-\overline{y})\,ds+\int_0^1(K-\overline{K})\cdot\overline{y}\,ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Минковского

$$\left(\int_0^1\left|x(t)+y(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\int_0^1\left|x(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left|y(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

для $\left\|y-\overline{y}\right\|_q$ получим оценку

$$\left\|y-\overline{y}\right\|_q\leqslant|\lambda|\left(\int_0^1\left|\int_0^1 K(y-\overline{y})\,ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+|\lambda|\left(\int_0^1\left|\int_0^1(K-\overline{K})\cdot\overline{y}\,ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|K|\,\left|y-\overline{y}\right|ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left|K-\overline{K}\right|\,\left|\overline{y}\right|ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее, используя неравенство Гельдера

$$\left| \int_0^1 x(t)y(t)\,dt \right| \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^r\,dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |y(t)|^q\,dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$, получим

$$\|y-\overline{y}\|_q \leqslant |\lambda| \left\{ \int_0^1 \left(\left(\int_0^1 |K|^r\,ds \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |y-\overline{y}|^q\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} +$$

$$+|\lambda| \left\{ \int_0^1 \left(\left(\int_0^1 |K-\overline{K}|^q\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\overline{y}|^r\,ds \right)^{\frac{1}{r}} \right)^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$=|\lambda| \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^1 |K|^r\,ds \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_0^1 |y-\overline{y}|^q\,ds \right) dx \right\}^{\frac{1}{q}} + |\lambda| \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^1 |K-\overline{K}|^q\,ds \right) \left(\int_0^1 |\overline{y}|^r\,ds \right)^{\frac{q}{r}} dx \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$=|\lambda| \left(\int_0^1 |y-\overline{y}|^q\,ds \cdot \int_0^1 \left(\int_0^1 |K|^r\,ds \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} + |\lambda| \left(\left(\int_0^1 |\overline{y}|^r\,ds \right)^{\frac{q}{r}} \cdot \int_0^1 \int_0^1 |K-\overline{K}|^q\,ds\,dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Итак, $\|y-\overline{y}\|_q \leqslant |\lambda| \left(\|y-\overline{y}\|_q \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K|^r\,ds \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} + \|\overline{y}\|_r \cdot \|K-\overline{K}\|_{L_q(I^2)} \right).$

Отсюда, собирая слагаемые с $\left\|y-\overline{y}\right\|_q$, получим

$$\left\|y-\overline{y}\right\|_q\left(1-|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|K|^r\,ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)\leqslant|\lambda|\left\|\overline{y}\right\|_r\cdot\left\|K-\overline{K}\right\|_{L_q(I^2)}.$$

Таким образом, при $1-|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|K|^r\,ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}>0$ справедливо неравенство

$$\left\|y-\overline{y}\right\|_q\leqslant\frac{|\lambda|\,\left\|\overline{y}\right\|_r\cdot\left\|K-\overline{K}\right\|_{L_q(I^2)}}{1-|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|K|^r\,ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}}.\tag{2}$$

Из (2) и (1) вытекает теорема.

Теорема. Если $1-|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|K|^r\,ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}>0$, то существует константа C, зависящая только от p, q и α, такая, что

$$\left\|y-\overline{y}\right\|_q\leqslant\frac{|\lambda|\,\left\|\overline{y}\right\|_r\cdot\frac{C}{M^{\alpha}}\left\|K\right\|_{L_p^{\alpha}(I^2)}}{1-|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|K|^r\,ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Заметим, что при $q=r=2$ условие на λ в этой теореме – обычное условие, налагаемое для существования и единственности решения.

Если под интегралом $\lambda\int_0^1 (k\cdot y-\bar{k}\cdot\bar{y})\,ds$ добавить и вычесть слагаемое $\bar{k}\cdot y$, то после аналогичных выкладок получим оценку

$$\| y-\bar{y}\|_q \leqslant \frac{|\lambda|\,\|y\|_r\cdot\dfrac{C}{M^{\alpha}}\|K\|_{L_p^{\alpha}(J^2)}}{1-|\lambda|\left\{\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 |\bar{k}|^r\,ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right\}^{\frac{1}{q}}}, \qquad (3)$$

которую целесообразно использовать для выбора параметра M, обеспечивающего требуемую точность восстановления точного решения, в случаях, когда известна априорная оценка нормы неизвестного точного решения. Оценка данной теоремы – это априорная оценка погрешности замены точного решения приближенным решением, когда последнее уже найдено.

Библиографический список

1. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в L_p при $1\leqslant q\leqslant p\leqslant 2$ // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 1.

2. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в L_p при $1\leqslant q\leqslant 2\leqslant p\leqslant\infty$ // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198.

3. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов W_p^a функций многих переменных билинейными формами в L_p при $2\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1.

4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^a // Мат. сб. 1967. Т. 73 (115).

5. *Меленцов А. А.* Приближения функций класса $W_p^a\left([0,1]^2\right)$ билинейными функциями // Изв. Урал. ун-та. 2004. № 30. Вып. 6.

6. *Мирошин Н. В., Хромов В. В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5.

7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИРАН. 1986. Т. 178.

8. *Темляков В. Н.* О наилучших билинейных приближениях периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 2.

9. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. МИРАН. 1989. Т. 187.

10. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. 1906/07. Vol. 63.