Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ СДВИГАМИ ОДНОЙ ФУНКЦИИ

Одним из способов построения базисов всплесков различных пространств периодических функций является периодизация базисов всплесков $\left\{2^{j/2}\psi\left(2^j x+k\right): k\in Z,\ j\in Z\right\}$ пространства $L^2(R)$ на числовой оси R (например, [1; 2]). На R пространства

$$W_j=\left\{\sum c_k\psi\left(2^j x+k\right):\left(c_k\right)\in l^2(Z)\right\}$$

образуют кратно-масштабное разложение пространства $L^2(R)$

$$L^2(R)=\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j,$$

а о пространствах V_j $\left(V_j=\ldots\oplus W_{j-2}\oplus W_{j-1}\right)$ говорят, что они образуют кратно-разрешающий анализ пространства $L^2(R)$. Последнее означает [2], что

$$V_j\subset V_{j+1}\quad(j\in Z),\quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j=\{0\},\quad \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j}=L^2(R)$$

и что выполняются свойства

$$V_{j+1}=\left\{f(2x): f(x)\in V_j\right\},$$

$$f(x)\in V_j \Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{2^j}\right)\in V_j .$$

Кроме того, обычно предполагается, что пространство V_0 поражается сдвигами одной функции в том смысле, что существует $\varphi(x)\in L^2(R)$, такая, что система $\{\varphi(x+k): k\in Z\}$ – ортонормированный базис V_0. Тогда автоматически система $\left\{2^{j/2}\varphi\left(2^j x+k\right): k\in Z\right\}$ будет ортонормированным базисом пространства V_j $(j\in Z)$, а условия вложения $V_j\subset V_{j+1}$ $(j\in Z)$, эквивалентны тому, что найдется последовательность чисел $(\tilde{\varphi}_k) \in l^2(Z)$, такая, что

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum \tilde{\varphi}_k \varphi(x-k). \tag{1}$$

Функция $\varphi(x)$ называется масштабирующей функцией. Глубоким результатом теории всплесков является теорема о том, что тогда функция

$$\psi(x) = 2\sum(-1)^k \bar{\tilde{\varphi}}_k \varphi(2x+k+1) \tag{2}$$

порождает ортонормированные базисы $\left\{2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right) : k \in Z\right\}$ пространств $W_j \ (j \in Z)$. К сожалению не все эти свойства наследуются после периодизации. Будем рассматривать 1-периодизацию $Pe\, f(x) = \sum_{v \in Z} f(x+v)$. Обозначим через $\hat{f}(\omega)$ преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \int_R f(x) e^{-2\pi i x\omega} dx.$$

Известно, что если масштабирующая функция еще и суммируема на R, то непрерывная функция $\hat{f}(\omega)$ удовлетворяет условиям $|\hat{\varphi}(0)| = 1$, $\hat{\varphi}(k) = 0 \ (k \in Z, k \neq 0)$. Обозначим через $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$ пространства из $L^2[0,1)$, получающиеся 1-периодизацией функций из $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$ соответственно. Тогда $PeV_j = \{\text{const}\}$ при $j \leqslant 0$, а при $j \geqslant 0$

$$\tilde{V}_j =: PeV_j = Lin\left\{\Phi_{j,k}(x) = \Phi_{j,0}\left(x + \frac{k}{2^j}\right) : \ k = 0,1,\ldots,2^j - 1\right\},$$

$$\tilde{W}_j =: PeW_j = Lin\left\{\Psi_{j,k}(x) = \Psi_{j,0}\left(x + \frac{k}{2^j}\right) : \ k = 0,1,\ldots,2^j - 1\right\},$$

где

$$\Phi_{j,0} = Pe2^{j/2}\varphi\left(2^j x\right) = 2^{-j/2}\sum_{v \in Z}\hat{\varphi}\left(\frac{v}{2^j}\right)e^{2\pi i v x},$$

$$\Psi_{j,0} = Pe2^{j/2}\varphi\left(2^j x\right) = 2^{-j/2}\sum_{\nu\in Z}\hat{\psi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)e^{2\pi i\nu x}.$$

При этом, полагая $\Phi_0(x) \equiv 1$, $\tilde{V}_0 = \{c : c \in C\}$ будем иметь:

$$L^2([0,1)) = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus ..., \quad \tilde{V}_j = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{W}_0 \oplus ... \oplus \tilde{W}_{j-1} \in \tilde{V}_j,$$

$$\overline{\bigcup_0^\infty \tilde{V}_j} = L^2([0,1)), \quad \bigcap_{j=0}^\infty \tilde{V}_j = \tilde{V}_0, \quad f(x)\in\tilde{V}_j \Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{2^j}\right)\in\tilde{V}_j,$$

где знак $\oplus$ означает прямую (ортогональную) сумму подпространств. Однако, теперь $\Phi_{j+1,k}(x) \neq c\Phi_{j,k}(2x)$, $\Psi_{j+1,k}(x) \neq c\Psi_{j,k}(2x)$, в отличие от $\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi\left(2^j x + k\right)$ и $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j x + k\right)$ и, следовательно, теперь

$$\tilde{V}_{j+1} \neq d_2\tilde{V}_j, \ \tilde{W}_{j+1} \neq d_2\tilde{W}_j, \ \left((d_2 f)(x) = f(2x)\right).$$

Свойства (1) и (2) частично сохранились в виде: для любого $j \in Z_+$

$$\Phi_{j,k}(x) = \sum_{s=0}^{2^{j+1}-1}\tilde{\varphi}_{j,s}\Phi_{j+1,s+2k}(x), \quad \Psi_{j,k}(x) = \sum_{s=0}^{2^{j+1}-1}\tilde{\psi}_{j,s}\Psi_{j+1,s+2k}(x),$$

откуда вытекают вложения $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$, $\tilde{W}_j \subset \tilde{W}_{j+1}$, а от свойств $V_{j+1} = d_2V_j$, $W_{j+1} = d_2W_j$ остался лишь такой след:

$$\Phi_{j,k}(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{j+1,k}(x) + \Phi_{j+1,k+2^j}(x)\right),$$

$$\Psi_{j,k}(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{j+1,k}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{j+1,k+2^j}(x),$$

который лишь обеспечивает (строгие) вложения: $d_2\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$, $d_2\tilde{W}_j \subset \tilde{W}_{j+1}$.

Отсюда видно, что в периодическом случае операция сжатия уже не играет такой роли, как в $L^2(R)$. Поэтому естественно попытаться построить разложения пространства $L^2[0,1)$ 1-периодических функций, аналогичные разложениям пространства $L^2(R)$, но опираясь только на операторы двоично-рационального сдвига. Более того, желая упростить вычисления значений элементов будущих базисов, в основу мы положим линейные комбинации сдвигов только одной функции. При этом получатся базисы всплесков, отличные от тех, что описаны выше.

Пусть $g(x)$ – непрерывная на R 1-периодическая функция, $\Delta_j = \left\{ x_{j.k} = \frac{k}{2^j}, k \in Z \right\}$ – сетка на R с шагом $h_j = \frac{1}{2^j}$, при $k = 0, 1, \dots 2^j - 1$, образующая разбиение полуинтервала $[0,1)$. Далее считаем

$$\tilde{V}_j = Lin\left\{ g\left(x - k/2^j\right) : k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \right\} \quad (j = 0, 1, \dots). \tag{3}$$

Ясно, что пространство $\tilde{V}_j$ инвариантно относительно сдвигов с шагом $h_j = \frac{1}{2^j}$. Так как $\Delta_j \subset \Delta_{j+1}$, то $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$, а для равенства $\overline{\bigcup \tilde{V}_j} = L^2[0,1)$ необходимо, чтобы линейное многообразие $V = Lin\left\{ g\left(x - k/2^j\right) : j \in Z_+, \quad k \in [2,0) \cap Z \right\}$ было всюду плотным в $L^2[0,1)$.

Лемма 1. Пусть $\{t_v\}_{v=0}^{\infty} \subset [0,1)$ – множество точек, плотное в $[0,1]$. Для того, чтобы линейное многообразие $V = \left\{ \sum_{k=0}^{n} c_v g\left(x - t_v\right) : n \in Z_+, \ c_v \in C \right\}$ было всюду плотным в $L^2[0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье $\hat{g}_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k x g(x)} dx$ функции $g(x)$ были отличны от нуля.

Условие, что $g(x)$ – непрерывная 1-периодическая функция, здесь и далее несущественно, вместо него можно было предполагать, что $g \in L^2[0,1)$.

Лемма 1, вероятно известна, так как по формулировке перекликается с известной теоремой Винера [3] об аппроксимации в $L(R)$ функциями из $Lin\left\{ f_u\left(x + \lambda_{u.p}\right) \right\}$, но только ее доказательство здесь совсем простое. Для полноты изложения приведем его полностью.

Обозначим через $\tilde{V}$ замыкание V в $L^2[0,1)$. Пусть при некотором $k \in Z$ $\hat{g}_k = 0$, т. е. $g(x) \perp e^{2\pi i k x}$ в $L^2[0,1)$. Тогда в силу периодичности $\forall t_v \ g\left(x - t_v\right) \perp e^{2\pi i k x}$, и, следовательно, $V \perp e^{2\pi i k x}$, откуда $\tilde{V} \neq L^2[0,1)$. Пусть, обратно, $\tilde{V} \neq L^2[0,1)$. Тогда найдется $h(x) = L^2[0,1)$, $h(x) \perp V$, $h(x) \neq 0$. Если $h(x) = \sum \hat{h}_k e^{2\pi i k x}$, то для любого t_v

$$\left(h(x), g\left(x - t_v\right)\right) = \sum_{k \in Z} \hat{h}_k \overline{\hat{g}}_k e^{2\pi i k t v} = 0.$$

Так как $(\hat{h}_k),(\hat{g}_k)\in l^2(Z)$, то ряд $\sum_{k\in Z}\hat{h}_k\overline{\hat{g}}_k e^{2\pi ikt}$ сходится абсолютно, представляет собой непрерывную функцию, обращающуюся в ноль на множестве $\{t_v\}$, всюду плотном на периоде. Следовательно, эта функция $\equiv 0$, откуда вытекает, что для любого $k\in Z$ будет $\hat{h}_k\hat{g}_k=0$, и так как существует k_0 с $\hat{h}_{k_0}\neq 0$ (ибо $h\neq 0$ в $L^2[0,1)$), то $\hat{g}_{k_0}=0$. Лемма доказана.

Пусть далее $g(x)$ – 1-периодическая функция из $L^2[0,1)$, удовлетворяющая условию леммы 1: $\forall n\ \hat{g}_n\neq 0$. Докажем, что тогда размерность пространства $\tilde{V}_j$, определяемого формулой (3), равна 2^j. Допустим противное, что найдутся числа c_0, c_1, …, c_{2^j-1}, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}c_k g\left(x-x_{j,k}\right)=0 \text{ в } L^2[0,1).$$

Так как n-й коэффициент Фурье функции $g(x-x_{j,k})$ равен $\hat{g}_n e^{-2\pi inx_{j,k}}$, то тогда

$$\hat{g}_n\sum_{k=0}^{2^j-1}c_k e^{-2\pi ink/2^j}=0.$$

Применяя обратное дискретное преобразование Фурье, находим

$$2^j\hat{g}_n c_n=0\Rightarrow c_n=0\quad\left(n=0,1,\ldots,2^j-1\right).$$

Из этого противоречия и из (3) следует, что для подпространств $\tilde{V}_j$ и $\tilde{W}_j=\tilde{V}_{j+1}\dot{-}\tilde{V}_j$, где $\tilde{V}_j$, $\tilde{V}_{j+1}$ определяются по функции $g(x)$ формулами (3), имеют место равенства:

$$\dim\tilde{V}_j=\dim\tilde{W}_j=2^j. \tag{4}$$

Чтобы построить ортонормированный базис 2^j-мерного пространства $\tilde{V}_j$, выпишем сначала условия на функцию $u(x)\in L^2[0,1)$, обеспечивающие ортонормированность системы $\left\{u\left(x-x_{j,k}\right):k=0,1,2,\ldots,2^j-1\right\}$. Следующая лемма представляет собой аналог условия ортонормированности [3] системы $\{\varphi(x-k):k\in Z\}$ в $L^2[R]$.

Договоримся через (f, g) обозначать скалярное произведение, а через $f*g$ – свертку функций f и g из $L^2[0,1)$:

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\bar{g}(t)dt;\ f*g=(f(x-t),\bar{g}(t))=\int_0^1 f(x-t)g(t)dt\ .$$

Для любой функции $u(t)\in L^2[0,1)$ положим $\dot{u}(t)=u(-t)$,

$$h_u(x)=(u*\dot{\bar{u}})(x)=(u(x+t),u(t)).\tag{5}$$

Символом $u^\vee(x_{j,\nu})$ $(\nu\in Z)$ будем обозначать дискретное преобразование Фурье на сетке $\Delta_j=\{x_{j,k}=k/2^j:k\in Z\}$ непрерывной 1-периодической функции $u(x)$ (или дискретной функции $u(x_{j,k})$ $(x_{j,k}\in\Delta_j)$):

$$u^\vee(x_{j,\nu})=(F_ju)(x_{j,\nu})=\sum_{k=0}^{2^j-1}u(x_{j,k})e^{-2\pi ikx_{j,\nu}}\ (\nu\in Z).$$

На $u^\vee(x_{j,\nu})$ можно смотреть как на 1-периодическую функцию дискретной переменной $x_{j,\nu}$ $(\nu\in Z)$ или как на 2^j-периодическую функцию на множестве Z целых чисел. Как известно, тогда

$$u(x_{j,k})=2^{-j}(u^\vee)^\vee(-x_{j,k}).\tag{6}$$

В частности, для $u\in L^2[0,1)$ функция $h_u(x)$ будет непрерывной 1-периодической, и для нее определено дискретное преобразование Фурье на любой сетке Δ_j $(j\in Z_+)$:

$$h_u^\vee(x_{j,\nu})=(F_j(u*\dot{\bar{u}}))(x_{j,\nu})\ (\nu\in Z).$$

Лемма 2. Пусть 1-периодическая функция $u(x)\in L^2[0,1)$. Система функций $\left\{u\left(x-x_{j.k}\right):k=0,1,\ldots,2^j-1\right\}$ является ортонормированной в $L^2[0,1)$ тогда и только тогда, когда $h_u^{\vee}\left(x_{j.\nu}\right)\equiv 1\ (\nu\in Z)$.

Доказательство. В силу (6) условие $h_u^{\vee}\left(x_{j.\nu}\right)\equiv 1$ на Z эквивалентно тому, что

$$h_u\left(x_{j.k}\right)=2^{-j}(1)^{\vee}\left(-x_{j.k}\right)=2^{-j}\sum_{\nu=0}^{2^j-1}1\cdot e^{-2\pi i\nu x_{j.k}}=\delta_{k.0}\left(k=0,1,\ldots,2^j-1\right),$$

а так как $\left(u(x),u\left(x-x_{j.k}\right)=u\left(x+x_{j.k}\right),u(x)\right)=h_u\left(x_{j.k}\right)$, то $h_u^{\vee}\left(x_{j.\nu}\right)\equiv 1\ (\nu\in Z)$ тогда и только тогда, когда $\left(u\left(x-x_{j.l}\right),u\left(x-x_{j.k}\right)\right)=\left(u(x),u\left(x-x_{j.k-l}\right)\right)=\delta_{k.l}$. Лемма доказана.

Пусть $u(t)=\sum\limits_{n\in Z}\hat{u}_n e^{2\pi int}$. Выразим еще условие леммы 2 в терминах коэффициентов Фурье функции $u(x)$. Имеем $\bar{\dot{u}}(t)=\sum\limits_{n\in Z}\bar{\hat{u}}_n e^{2\pi int}$ и, в силу (5),

$$h_u(x)=\sum_{n\in Z}\left|\hat{u}_n\right|^2 e^{2\pi inx},$$

$$h_u^{\vee}\left(x_{j.\nu}\right)=\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{n\in Z}\left|\hat{u}_n\right|^2 e^{2\pi i(n-\nu)k/2^j}=\sum_{n\in Z}\left|\hat{u}_n\right|^2 2^j\delta_{0.r_{\nu.n}},$$

где $r_{\nu.n}$ – целочисленный остаток от деления $n-\nu$ на 2^j. Следовательно, условие $h_u^{\vee}\left(x_{j.\nu}\right)\equiv 1\ (\nu\in Z)$ эквивалентно условию

$$2^j\sum_{\mu\in Z}\left|\hat{u}_{2^j\mu+\nu}\right|^2\equiv 1\ (\nu\in Z). \tag{7}$$

Положим $\|\upsilon\|=\|\upsilon\|_{L^2[0,1)}$, и пусть

$$\upsilon_{j.\nu}(x)=\upsilon_{j.\nu}(x;g)=\sum_{k=0}^{2^j-1}g\left(x-x_{j.k}\right)e^{2\pi i\nu x_{j.k}}\quad\left(\nu=0,\ldots,2^j-1\right). \tag{8}$$

где $\lambda(x)$, $\lambda_1(x)$ – любые вещественнозначные 1-периодические функции. С помощью этих функций для любого $j \in Z_+$ определим функции

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{2^{j/2}} \sum_{\nu=0}^{2^j-1} e^{i\lambda(x_{j,\nu})} \frac{\upsilon_{j,\nu}(x)}{\|v_{j,\nu}\|} = \Phi_j(x,g,\lambda), \tag{9}$$

и

$$\Psi_j(x) = \frac{1}{2^{j/2}} \sum_{\nu=0}^{2^j-1} \frac{\|\upsilon_{j+1,\nu}\| \|\upsilon_{j+1,\nu+2^j}\|}{2\|\upsilon_{j,\nu}\|} \left(\frac{\upsilon_{j+1,\nu}(x)}{\|\upsilon_{j+1,\nu}\|^2} + \frac{\upsilon_{j+1,\nu+2^j}(x)}{\|\upsilon_{j+1,\nu+2^j}\|^2} \right) e^{i\lambda_1(x_{j+1,\nu})}, \tag{10}$$

Теорема. Для любого $j \in Z_+$ система функций $\Phi_{j,k}(x) = \Phi_{j,k}(x - x_{j,k})$ ($k = 0, \ldots, 2^j - 1$), является ортонормированным базисом пространства V_j, а система функций $\Psi_{j,k}(x) = \Psi_{j,k}(x - x_{j,k})$ ($k = 0, \ldots, 2^j - 1$) – ортонормированным базисом пространства W_j ($j \in Z_+$). Любой ортонормированный базис пространства V_j (а также W_j) указанного типа можно получить подходящим выбором функции $\lambda(x)$, ($\lambda_1(x)$).

Доказательство. Из (8) – (10) следует, что при любом ($k = 0, \ldots, 2^j - 1$) $\Phi_{j,k} \in V_j$, $\Psi_{j,k} \in V_{j+1}$ ($k = 0, \ldots, 2^j - 1$). С учетом (4) осталось доказать, что две системы функций являются ортонормированными системами, ортогональными между собой. Тогда система $\Phi_{j,k}$ ($k = 0, \ldots, 2^j - 1$) тем более будет линейно-независимой и, следовательно, будет базисом $\tilde{V}_j$, а из ортогональности этих систем между собой будет вытекать, что система $\{\Psi_{j,k}: k = 0, \ldots, 2^j - 1\} \subset W_j$ по тем же причинам будет базисом W_j.

Проверим ортонормированность системы $\Phi_{j,k}$ ($k = 0, \ldots, 2^j - 1$). Для этого достаточно проверить условия леммы 2 относительно функции $u(x) = \Phi_j(x)$, равносильные условиям (7). Обозначим через $\left(\hat{\upsilon}_{j,\nu}\right)_n$ и $\left(\hat{\Phi}_j\right)_n$ n-е коэффициенты Фурье функций $\upsilon_{j,\nu}(x)$ и $\Phi_j(x)$. Имеем из (15)

$$\left(\hat{\upsilon}_{j,\nu}\right)_{2^j\mu+s} = \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{g}_{2^j\mu+s} e^{-2\pi i(s-\nu)x_{j,k}} = 2^j \hat{g}_{2^j\mu+s} \delta_{s,\nu},$$

откуда находим

$$\|\upsilon_{j,\nu}\|^2 = \sum_{\mu\in Z} \sum_{s=0}^{2^j-1} \left| \left(\hat{\upsilon}_{j,\nu}\right)_{2^j\mu+s} \right|^2 = 2^{2j} \sum_{\mu} \left| g_{2^j\mu+s} \right|^2,$$

$$\left(\hat{\Phi}_j\right)_{2^j\mu+s}=\frac{1}{2^{j/2}}\sum_{\nu=0}^{2^j-1}\frac{2^j}{\left\|\upsilon_{j,\nu}\right\|}e^{i\lambda(x_{j,s})}\hat{g}_{2^j\mu+s}\delta_{s,\nu}=2^{j/2}\frac{e^{i\lambda(x_{j,s})}}{\left\|\upsilon_{j,s}\right\|}g_{2^j\mu+s},$$

и, следовательно,

$$2^j\sum_{\mu\in Z}\left|\left(\hat{\Phi}_j\right)_{2^j\mu+s}\right|^2=1.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}-1}e^{2\pi i\left(\nu-s-2^j l\right)k/2^{j+1}}=2^{j+1}\,\delta_{\nu,s}\left(1+(-1)^l\right)/2,$$

для коэффициентов Фурье при гармониках $e^{2\pi i\left(2^j\mu+s\right)x}$ $\left(s=0,1,\ldots,2^{j-1},\mu\in Z\right)$ функций $\upsilon_{j+1,l}(x)$ имеем

$$\left(\upsilon_{j+1,\nu}\right)^{\wedge}_{2^j\mu+s}=2^{j+1}\hat{g}_{2^j\mu+s}\delta_{\nu,s}\left(1+(-1)^{\mu}\right)/2,$$

$$\left(\upsilon_{j+1,\nu+2^j}\right)^{\wedge}_{2^j\mu+s}=2^{j+1}\hat{g}_{2^j\mu+s}\delta_{\nu,s}\left(1+(-1)^{\mu+1}\right)/2,$$

откуда получаем для $\nu=0,1,\ldots,2^j-1$

$$\left\|\upsilon_{j+1,\nu}\right\|^2=2^{2(j+1)}\sum_{\mu=2l\in Z}\left|\hat{g}_{2^j\mu+\nu}\right|^2,$$

$$\left\|\upsilon_{j+1,\nu+2^j}\right\|^2=2^{2(j+1)}\sum_{\mu=2l+1\in Z}\left|\hat{g}_{2^j\mu+\nu}\right|^2,$$

$$\left(\Psi_j\right)^{\wedge}_{2^j\mu+s}=\frac{1}{2}2^{-j/2}e^{i\lambda_1(x_{j+1,s})}\left(A_s\frac{1+(-1)^{\mu}}{2}-B_s\frac{1+(-1)^{\mu}}{2}\right)2^{j+1}\hat{g}_{2^j\mu+s},$$

где A_ν и B_ν – коэффициенты при $\upsilon_{j+1,\nu}(x)$ и $\upsilon_{j+1,\nu+2^j}(x)$ соответственно в формуле (10) для $\Psi_j(x)$. Отсюда находим

$$2^j\sum_{\mu\in Z}\left|\left(\Psi_j\right)^{\wedge}_{2^j\mu+s}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\sum_{\mu=2l\in Z}2^{2(j+1)}A_s^2\left|\hat{g}_{2^j\mu+s}\right|^2+B_s^2\sum_{\mu=2l+1\in Z}2^{2(j+1)}\left|\hat{g}_{2^j\mu+s}\right|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(A_s^2\left\|\upsilon_{j+1,s}\right\|^2+B_s^2\left\|\upsilon_{j+1,s+2^j}\right\|^2\right)=\frac{\left\|\upsilon_{j+1,s+2^j}\right\|^2+\left\|\upsilon_{j+1,s}\right\|^2}{4\left\|\upsilon_{j,s}\right\|^2}=1,$$

что вместе с леммой 2 гарантирует ортонормированность системы $\left\{\Psi_{j.k}(x)=2^{j/2}\Psi_j\left(x-x_{j.k}\right)\ k=0,\ldots,2^j-1\right\}$.

Используя найденные коэффициенты Фурье функций $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(x)$, находим, что

$$\left(\Phi_j\left(x-x_{j.k}\right),\Psi_j(x)\right)=2^{-j-2}\sum_{s=0}^{2^j-1}\sum_{\mu\in Z}e^{i\lambda\left(x_{j.s}\right)-\lambda_1\left(x_{j+1.s}\right)}2^{2(j+1)}\left[A_s\frac{1+(-1)^{\mu}}{2}-B_s\frac{1+(-1)^{\mu}}{2}\right]\left|\hat{g}^j_{2\mu+s}\right|^2=$$

$$=2^{-j-2}\sum_{s=0}^{2^j-1}e^{(\lambda-\lambda_1)}\left(A_s\left\|\upsilon_{j+1.s}\right\|^2-B_s\left\|\upsilon_{j+1.s+2^j}\right\|^2\right)=$$

$$=2^{-j-2}\sum_{s=0}^{2^j-1}e^{(\lambda-\lambda_1)}\frac{\left\|\upsilon_{j+1.s}\right\|\left\|\upsilon_{j+1.s+2^j}\right\|}{\left\|\upsilon_{j.s}\right\|}(1-1)=0.$$

Таким образом, функции $\Phi_{j.k}(x)$ и $\Psi_j(x)$ ортогональны. А так как интегралы от 1-периодической функции по любому отрезку единичной длины совпадают, то все функции $\Psi_{j.k}(x)$ ортогональны пространству V_j (для которого система $\Phi_{j.k}$ ($k=0,\ \ldots,\ 2_j-1$) является базисом). Следовательно, построенные функции $\Psi_{j.k}$ ($k=0,\ \ldots,\ 2_j-1$) лежат в W_j. Из их линейной независимости и формулы (4) вытекает, что они образуют базис пространства W_j ($j\in Z_+$). Теорема доказана.

Так как из определения $W_j=V_j \dot{-} V_{j+1}$, где «$\cdot$» – знак ортогонального дополнения, следует, что пространства W_j ($j\in N$) ортогональны между собой, то функции $\Psi_{j.k}(x)$ и $\Psi_{j'.k}(x)$ с разными индексами j и J' тоже ортогональны. Отсюда, из предположения, что $\forall n\in Z\ \hat{g}_n\neq 0$ и леммы 1 вытекает следующее утвеждение.

Следствие. Система функций $\left\{\Phi_0(x),\Psi_{j.k}(x):\ k=0,\ldots,2^j-1,\ j\in N\right\}$ является ортонормированным базисом всего пространства $L^2[0,1)$, где $\Phi_0(x)=g(x)/\|g\|$.

Для его обоснования осталось заметить, что $\Phi_0(x)$ – базис одномерного пространства $V_0=\left\{cg(x):c\in C\right\}$[1].

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05–01–00409.

Библиографический список

1. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Ортогональные базисы в пространстве L^2 периодических функций, порожденные трансляциями функций // Школа по теории функций «Озерск-99», 16–19 апр. 1999 г. Озерск, 1999.

2. *Offin D., Oskolkov K.* A note orthonormal polynomials bases and Wavelets // Constructive Approx. 1993. V. 9.

3. *Meyer Y.* Ondelettes et operateurs, v.1, Ondelettes // Actualites Mathematiques. 1990. Paris, Herman.

Л. С. Чебыкин

ПОСТРОЕНИЕ ПОЗИЦИОННОГО КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной работе предлагается способ построения квазиоптимального по быстродействию управления в линейной динамической системе с запаздыванием времени в объекте управления для случая, когда некоторые собственные значения основной матрицы системы имеет отрицательные действительные части, достаточно большие по абсолютной величине. Задача синтеза управления для исходной системы с запаздыванием сводится к построению оптимального по быстродействию управления для конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений более низкого порядка. Решение опирается на метод разделения движений [1] и метод канонического представления движений линейных систем с последействием [2].

Пусть управляемый процесс описывается линейной системой с запаздыванием времени

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bu, \quad (|u| \le 1), \tag{1}$$

где $A = \{a_{kj}\}$, $B = \{b_{kj}\}$ – постоянные матрицы размерности $n \times n$, $b = \{b_k\}$ – постоянный n-мерный вектор-столбец, x – n-вектор фазовых координат объекта; u – скаляр, обозначающий управляющее воздействие; $\tau = \text{const} > 0$ – величина запаздывания.