**Библиографический список**

1. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Ортогональные базисы в пространстве $L^2$ периодических функций, порожденные трансляциями функций // Школа по теории функций «Озерск-99», 16–19 апр. 1999 г. Озерск, 1999.

2. *Offin D., Oskolkov K.* A note orthonormal polynomials bases and Wavelets // Constructive Approx. 1993. V. 9.

3. *Meyer Y.* Ondelettes et operateurs, v.1, Ondelettes // Actualites Mathematiques. 1990. Paris, Herman.

**Л. С. Чебыкин**

# ПОСТРОЕНИЕ ПОЗИЦИОННОГО КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной работе предлагается способ построения квазиоптимального по быстродействию управления в линейной динамической системе с запаздыванием времени в объекте управления для случая, когда некоторые собственные значения основной матрицы системы имеет отрицательные действительные части, достаточно большие по абсолютной величине. Задача синтеза управления для исходной системы с запаздыванием сводится к построению оптимального по быстродействию управления для конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений более низкого порядка. Решение опирается на метод разделения движений [1] и метод канонического представления движений линейных систем с последействием [2].

Пусть управляемый процесс описывается линейной системой с запаздыванием времени

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bu, \quad (|u| \le 1), \tag{1}$$

где $A = \{a_{kj}\}$, $B = \{b_{kj}\}$ – постоянные матрицы размерности $n \times n$, $b = \{b_k\}$ – постоянный $n$-мерный вектор-столбец, $x$ – $n$-вектор фазовых координат объекта; $u$ – скаляр, обозначающий управляющее воздействие; $\tau = \text{const} > 0$ – величина запаздывания.

При определенном управлении $u(t)$ движение $x(t)$ системы (1) для $t \geqslant t_0$ определяется предысторией $x(t_0 + \vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ процесса. Поэтому в качестве элемента траектории, соответствующего моменту времени $t$, удобно принять отрезок траектории $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta) = \{x_k(t + \vartheta);\ -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0;\ k = 1, \ldots, n\}$.

Известно, что при решении задач синтеза по принципу обратной связи для систем с запаздыванием управляющее воздействие $u$ следует искать в виде некоторого функционала $u[x_t(\vartheta)]$, определенного на кривых $x_t(\vartheta)$ [3; 4].

Ниже рассматривается задача синтеза управления $u[x_t(\vartheta)]$, обеспечивающего по возможности быстрейшее успокоение системы (1). Управление $u$ будет формироваться в данный момент $t$ на основании информации о всей кривой $x(t + \vartheta)$ на предыдущем отрезке времени $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$. Определяются условия на параметры системы (1), при которых возможна такая стабилизация движений.

Согласно [3], в функциональном пространстве $C_{1[-\tau,0]}$ дифференцируемых функций $x_t(\vartheta) = \{x_{kt}(\vartheta);\ -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0;\ k = 1, \ldots, n\}$ с метрикой $\left\| x(\vartheta) \right\|_{[-\tau,0]} = \sup\left\{ \left| x_1(\vartheta) \right|, \ldots, \left| x_n(\vartheta) \right| \text{ при } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0 \right\}$ системе (1) будет соответствовать эквивалентная система дифференциально-операторных уравнений

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Px_t(\vartheta) + R(b)u, \tag{2}$$

где

$$Px_t(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_t(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0, \\ Ax_t(0) + Bx_t(-\tau), & \vartheta = 0; \end{cases}$$

$$R(b) = \begin{cases} 0, & -\tau \leqslant \vartheta < 0, \\ b, & \vartheta = 0. \end{cases}$$

Системе (1) или, что то же самое, системе (2) с операторной правой частью, отвечает характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left[ A - \lambda E + Be^{-\lambda\tau} \right] = 0. \tag{3}$$

Пусть $\rho$ – достаточно большое положительное число. Предполагается, что характеристическое уравнение (3) имеет конечное число $N = N(\rho)$ корней $\lambda_i$, расположенных правее прямой $\mathrm{Re}\lambda = -\rho$ на комплексной плоскости $\lambda$. Для упрощения выкладок ограничимся случаем простых корней $\lambda_i (i = 1, \ldots, N)$ характеристического уравнения. Расположим все корни в порядке убывания действительных частей: $\mathrm{Re}\lambda_1 \geqslant \mathrm{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots \mathrm{Re}\lambda_N \geqslant \ldots$ .

Выделим из системы (2) конечномерную подсистему, соответствующую корням $\lambda_i (i = 1, \ldots, N)$, применяя метод канонического разложения решений систем с запаздыванием [2].

Системе уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau)$$

может быть сопоставлена сопряженная система уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A'y(t) - B'y(t + \tau). \tag{4}$$

В пространстве функций $y_t(\vartheta) = y(t + \vartheta)$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau$ системе (4) соответствует следующая система линейных «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью:

$$\frac{dy(\vartheta)}{dt} = -P^* y_t(\vartheta), \tag{5}$$

где

$$-P^* y_t(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dy_t(\vartheta)}{d\vartheta}, & 0 < \vartheta \leqslant \tau, \\ -A'y_t(0) - B'y_t(\tau), & \vartheta = 0. \end{cases}$$

Составим так называемое «скалярное» произведение двух векторов $x(\vartheta)$, $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$ и $y(\vartheta)$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau$:

$$\big(x(\vartheta), y(\vartheta)\big) = x'(0)y'(0) + \int_{-\tau}^{0} x'(\eta)B'y(\eta + \tau)d\eta.$$

Построим систему собственных векторов оператора $P$, соответствующих выделенным корням $\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Для этого рассмотрим уравнения:

$$\left(P-\lambda_i J\right)x^{(i)}(\vartheta)=0; \quad -\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0; \quad i=1,\dots,N. \tag{6}$$

Здесь символом $J$ обозначен тождественный оператор: $Jx(\vartheta) = x(\vartheta)$.

Разрешая уравнения (6), найдем, что при $-\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0$ $x^{(i)}(\vartheta)$ имеет вид:

$$x^{(i)}(\vartheta)=\left\{x_k^{(i)}(\vartheta);\ k=1,\dots,n\right\},\ x^{(i)}(\vartheta)=d^{(i)}e^{\lambda_i\vartheta},\ -\tau\leqslant\vartheta<0\ \left(i=1,\dots,N\right).$$

В силу непрерывности вектор-функций $x^{(i)}(\vartheta)$ ($i = 1, \dots, N$) будем иметь: $d^{(i)} = x^{(i)}(0)$.

При $\vartheta = 0$ из (6) получим (при каждом $i$) систему алгебраических однородных уравнений для определения $x^{(i)}(0)$:

$$\left(A-\lambda_i E+Be^{-\lambda_i\tau}\right)x^{(i)}(0)=0. \tag{7}$$

Поскольку $\lambda_i$ является корнем характеристического уравнения (3), то ранг матрицы $(A - \lambda_i E + Be^{-\lambda_i\tau})$ меньше $n$, и, следовательно, система (7) имеет нетривиальное решение.

По предположению, $\lambda_i$ – простой корень уравнения (3), т. е. $\left.\dfrac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i}\neq 0$. Тогда нетрудно показать, что среди всех миноров $n$ – 1-го порядка определителя $\Delta(\lambda_i)$ найдется по крайней мере один, отличный от нуля. Откуда следует, что ранг матрицы $(A - \lambda_i E + Be^{-\lambda_i\tau})$ равен $n - 1$. Обозначим через $\Delta_{kj}$ алгебраическое дополнение элементу, стоящему в пересечении $k$-й строки и $j$-й колонки в определителе $\Delta(\lambda)$. Согласно сказанному, для любого корня $\lambda_i$ ($i = 1, \dots, N$) можно указать два номера $l_i$ и $h_i$, такие, что алгебраическое дополнение $\Delta_{l_i h_i}$ элемента $\Delta(\lambda_i)$, стоящего на пересечении $l_i$-й строки и $h_i$-го столбца, будет отлично от нуля.

Решение системы (7) может быть записано формулами

$$x^{(i)}(0)=\left\{x_k^{(i)}(0);\ k=1,\dots,n\right\},$$

$$x_k^{(i)}(0)=q^{(i)}\ \Delta_{l_i k}(\lambda_i)\ \left(k=1,\dots,n\right),$$

где $q(i) \neq 0$ – некоторая константа.

Обратимся теперь к сопряженной системе (4) (или (5)). Характеристическое уравнение ее имеет вид

$$\Delta^*(\mu) \equiv \det\left[A' + \mu E + B'e^{\mu\tau}\right] = 0. \tag{8}$$

Легко заметить, что если $\lambda_j$ – корень уравнения (3), то $\mu_j = -\lambda_j$ является корнем уравнения (8). Корни $\lambda_j$ и $\mu_j$ имеют одинаковую кратность, а матрицы $\left[A - \lambda_j E + Be^{-\lambda_j\tau}\right]$ и $\left[A' + \mu_j E + B'e^{\mu_j\tau}\right]$ имеют одинаковый ранг.

Построим систему собственных векторов оператора $-P^*$, соответствующих корням $\mu_i = -\lambda_i$ ($i = 1, \ldots, N$). Для этого рассмотрим уравнения

$$\left(-P^* + \lambda_i J\right)y^{(i)}(\vartheta) = 0; \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau; \quad i = 1,\ldots,N.$$

Отсюда находим $y^{(i)}(\vartheta) = y^{(i)}(0)e^{-\lambda_i\vartheta}$; $0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau$; $(i = 1,\ldots,N)$.

Для определения $y^{(i)}(0)$ (при каждом $i$) будем иметь систему алгебраических однородных уравнений

$$\left(A' - \lambda_i E + B'e^{-\lambda_i\tau}\right)y^{(i)}(0) = 0. \tag{9}$$

Так как матрица $\left[A' - \lambda_i E + B'e^{-\lambda_i\tau}\right] = \left[A - \lambda_i E + Be^{-\lambda_i\tau}\right]'$, то ранг ее равен $n - 1$.

Частное решение системы (9) может быть выбрано в виде

$$y^{(i)}(0) = \left\{y_k^{(i)} = \Delta_{khi}(\lambda_i); \quad k = 1,\ldots,n\right\}.$$

Константу $q^{(i)}$ (для каждого $i \in \overline{I,N}$) определим из условия

$$\left(x^{(i)}(\vartheta), y^{(i)}(\vartheta)\right) = \begin{cases} 1, & i = \sigma, \\ 0, & i \neq \sigma, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\left(x^{(i)}(\vartheta), y^{(\sigma)}(\vartheta)\right) = \left(x^{(i)'}(0)y^{(\sigma)}(0)\right) + \int_{-\tau}^{0} x^{(i)'}(\eta)B'y^{(\sigma)}(\eta + \tau)\,d\eta,$$

$$x^{(i)}(\vartheta)=x^{(i)}(0)e^{\lambda_i\vartheta}=\left\{x_k^{(i)}(0)e^{\lambda_i\vartheta};k=1,...,n\right\}=\left\{q^{(i)}\Delta_{l,k}(\lambda_i)e^{\lambda_i\vartheta};k=1,...,n\right\};$$
$$-\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0;(i=1,...,N);$$
$$y^{(\sigma)}(\vartheta)=y^{(\sigma)}(0)e^{-\lambda_\sigma\vartheta}=\left\{y_k^{(\sigma)}(0)e^{-\lambda_\sigma\vartheta};k=1,...,n\right\}=\left\{\Delta_{kh_\sigma}(\lambda_i)e^{-\lambda_\sigma\vartheta};k=1,...,n\right\};$$
$$0\leqslant\vartheta\leqslant\tau;(\sigma=1,...,N).$$

Нетрудно проверить, что условие (10) при $i\neq\sigma$ выполняется для произвольного значения $q^{(i)}$. Для того, чтобы удовлетворить условию $(x^{(i)}(\vartheta), y^{(i)}(\vartheta))=1$, необходимо положить

$$q^{(i)}=-\left(\Delta_{l_i h_i}\frac{d\Delta(\lambda_i)}{d\lambda}\right)^{-1},$$

где $\dfrac{d\Delta(\lambda_i)}{d\lambda}=\left.\dfrac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i}=-\sum_{k=1}^{n}\left[\Delta_{kk}(\lambda_i)+\tau e^{-\lambda_i\tau}\sum_{j=1}^{n}b_{jk}\Delta_{jk}(\lambda_i)\right]\neq 0.$

Рассмотрим $N$ линейных функционалов, соответствующих выделенным корням $\lambda_i$ (1, …, $N$):

$$\begin{aligned}f_i\left[x_t(\vartheta)\right]&=\left(x_t(\vartheta),y^{(i)}(\vartheta)\right)\equiv x_t'(0)y^{(i)}(0)+\int_{-\tau}^{0}x_t'(\eta)B'y^{(i)}(\eta+\tau)d\eta=\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\Delta_{kh_i}(\lambda_i)\left[x_{kt}(0)+\int_{-\tau}^{0}e^{-\lambda_i(\eta+\tau)}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{k_j}x_{jt}(\eta)\right)d\eta\right]\right]\ (i=1,...,N).\end{aligned}\tag{11}$$

Условия $f_i[x_t(\vartheta)]=0$ (1, …, $N$) определяют подпространство $L$ в линейном нормированном пространстве $C_{1[-\tau,0]}$.

Всякий произвольный элемент $x_t(\vartheta)\in C_{1[-\tau,0]}$ представим в виде

$$x_t(\vartheta)=z_t(\vartheta)+\sum_{i=1}^{N}y_i(t)x^{(i)}(\vartheta),\ z_t(\vartheta)\in L.\tag{12}$$

Коэффициенты $y_i(t)$ выбираются из условия $z_t(\vartheta)\in L$. Для этого должны быть выполнены условия

$$f_i\left[z_t(\vartheta)\right]=f_i\left[x_t(\vartheta)\right]-\sum_{\sigma=1}^{N}y_\sigma(t)\left(x^{(\sigma)}(\vartheta),y^{(i)}(\vartheta)\right)=0\ (i=1,...,N).$$

Отсюда, учитывая условие (10), находим

$$y_i(t)=f_i\left[x_t(\vartheta)\right]=\left(x_t(\vartheta),y^{(i)}(\vartheta)\right). \tag{13}$$

Формулы (12), (13) определяют однозначно разложение произвольного элемента $x_t(\vartheta)\in C_{1[-\tau,0]}$ на два элемента $z_t(\vartheta)\in L$ и $y_t(\vartheta)=x_t(\vartheta)-z_t(\vartheta)=\sum_{i=1}^{N}y_i(t)x^{(i)}(\vartheta)$, принадлежащего подпространству $C_{1[-\tau,0]}-L$ [2]. Последнее подпространство конечномерно и имеет базис $\left\{x^{(i)}(\vartheta);\quad i=1,...,N\right\}$.

Заметим, что при наличии комплексных корней $\lambda_i$ в формулу (12) будут входить комплексные слагаемые $y_i(t)x^{(i)}(\vartheta)$. Однако, так как каждому комплексному $y_i(t)x^{(i)}(\vartheta)$ в сумме (12) будет отвечать сопряженное слагаемое, то вся сумма в формуле (12) действительна. Поэтому $z_t(\vartheta)$ всегда действительный элемент $C_{1[-\tau,0]}$.

В результате указанного расщепления система (2) может быть заменена следующими эквивалентными системами:

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=\lambda_i y_i(t)+f_i\left[R(b)\right]u\ \ (i=1,...,N); \tag{14}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt}=Pz_t(\vartheta)+\left\{R(b)-\sum_{i=1}^{N}f_i\left[R(b)\right]x^{(i)}(\vartheta)\right\}u \tag{15}$$

$$f_i\left[z_t(\vartheta)\right]=0\ \ (i=1,...,N).$$

Здесь $f_i\left[R(b)\right]=\sum_{k=1}^{N}\Delta_{kh_i}(\lambda_i)b_k\quad(i=1,...,N)$,

$$Pz_t(\vartheta)=\begin{cases}\dfrac{dz_t(\vartheta)}{d\vartheta}=\left\{\dfrac{dz_{kt}(\vartheta)}{d\vartheta};\quad k=1,...,n\right\}, & -\tau\leqslant\vartheta<0,\\ Az_t(0)+Bz_t(-\tau), & \vartheta=0.\end{cases}$$

Система (14) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений $N$-го порядка с постоянными коэффициентами (в канонической форме). Здесь $y_i(t)$ – компоненты вектора $y_t(\vartheta)=\sum_{i=1}^{N} y_i(t)x^{(i)}(\vartheta)$ – определяются формулами (11), (13).

Можно показать, что решение системы (15) с начальной вектор-функцией $z_{t_0}(\vartheta)\in L\ \left(f_i\left[z_{t_0}(\vartheta)\right]=0,\ i=1,\dots,N\right)$ для всех $t\geqslant t_0$ принадлежит подпространству $L\left(f_i\left[z_t(\vartheta)\right]=0,\ i=1,\dots,N\right)$.

Если некоторые из корней $\lambda_i$ ($i=1,\ \dots,\ N$) являются комплексными, то в соответствующих уравнениях системы (14) следует произвести дополнительную замену переменных с тем, чтобы все уравнения стали вещественными. Пусть в результате приведения к вещественной форме система (14) имеет вид:

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt}=G\tilde{y}(t)+hu, \tag{16}$$

где компоненты векторов $\tilde{y}(t)=\{\ \tilde{y}_i(t);\quad i=1,\dots,N\ \}$, $h=\{\ h_i;\ i=1,\dots,N\}$ и ($N\times N$) – матрицы $G$ легко могут быть установлены по виду системы (14).

Будем предполагать в дальнейшем, что система (16) вполне управляема, т. е. выполняется следующее условие:

$$\det\left[h\,Gh\dots G^{N-1}h\right]\neq 0.$$

Предлагается следующий алгоритм формирования управления $u$ для полной системы (2) (или (1)).

На первом этапе в качестве управляющего воздействия выбираем оптимальный по быстродействию закон стабилизации $u_N^*\left(\tilde{y}(t)\right)$ для системы $N$-го порядка (22), приводящий изображающую точку ее из произвольного начального состояния (принадлежащего области управляемости) в нулевое положение за минимальное время. Это соответствует приведению траектории $x_t(\vartheta)$ системы (2), рассматриваемой в функциональном пространстве $C_{1[-\tau,0]}$, на многообразие $L: f_i[x_t(\vartheta)]=0$, ($i=1,\ \dots,\ N$). Заметим, что при этом управление $u$ имеет вид функционала ($u[x_t(\vartheta)]$), определенного на кривой $x_t(\vartheta)$, $-\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0$.

По окончании процесса сведения изображающей точки системы (16) в нулевое положение управление отключим (положим $u = 0$). Начиная с этого момента $t^*$, движение системы (2) описывается операторным уравнением

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Pz_t(\vartheta),\ f_i\left[z_{t^*}(\vartheta)\right] = 0,\ (i = 1,\dots,N), \tag{17}$$

$$\left(z_{t^*}(\vartheta) = x_{t^*}(\vartheta)\right)$$

и, следовательно, при всех $t \geqslant t^*$ будет оставаться на многообразии $L$, т. е. $f_i\left[z_t(\vartheta)\right] = 0,\quad (i = 1,\dots, N)$ для всех $t \geqslant t^*$.

Решение системы (17) $z_t(\vartheta) = z\left(z_{t^*}(\vartheta), t^*, t + \vartheta\right)$ с произвольной начальной функцией $z_{t^*}(\vartheta) \in L$ при всех $t \geqslant t^*$ удовлетворяет неравенству

$$\| z_t(\vartheta)\|_{[-\tau,0]} = \left\| z\left(z_{t^*}(\vartheta), t^*,\ t + \vartheta\right)\right\|_{[-\tau,0]} \leqslant Ce^{-\beta(t-t^*)} \| z_{t^*}(\vartheta) \|_{[-\tau,0]}, \tag{18}$$

где $C$, $\beta$ – положительные числа, не зависящие от выбора $z_{t^*}(\vartheta); \beta = q\rho,\ 0 < q < 1$ [2]. Таким образом, норма всякого решения $z_t(\vartheta)$ убывает по закону экспоненты со сколь угодно большим показателем, если число $\rho > 0$ выбрано достаточно большим по величине.

Обсудим вопрос о близости описанного алгоритма управления к оптимальному по быстродействию. Предварительно зададимся некоторой начальной вектор-функцией $x_{t_0}(\vartheta) \in C_{1[-\tau,0]}$ системы (2).

Обозначим через $t^0 - t_0$ оптимальное время успокоения системы (2). Нетрудно показать, что справедливо неравенство

$$t^* - t_0 \leqslant t^0 - t_0,$$

где $t^* - t_0$ – длительность перевода вектора $x_t(\vartheta)$ системы (2) на многообразие $L$ с помощью управления $u_N^*\left(\tilde{y}(t)\right)$.

Оценим теперь длительность заключительной части процесса, соответствующей движению системы (2) по многообразию $L$ (при $u = 0$). Из неравенства (18) следует, что время вхождения решения $z\left(z_{t}.(\vartheta), t^{*}, t+\vartheta\right)$ системы (17) в окрестность $\| z_{t}(\vartheta)\|_{[-\tau,0]} = C\beta^{-p}\|z_{t}.(\vartheta)\|_{[-\tau,0]}$ не больше, чем $\frac{p\ln\beta}{\beta}$ $(\beta = q\rho,\quad 0 < q < 1)$, где $p$ – некоторое натуральное число. Очевидно, это время (как и сама окрестность) стремится к нулю при $\rho\to\infty$.

Таким образом, в указанном смысле предлагаемый алгоритм управления является квазиоптимальным по быстродействию.


### Библиографический список

1. *Геращенко Е. И., Геращенко С. М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М., 1975.

2. *Шиманов С. Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1.

3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

4. *Красовский Н. Н.* О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1.



**А. А. Меленцов**


## О ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО КЛАССА $W_p^{\alpha}\left([0,1]^2\right)$ БИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Первый результат по приближению билинейными функциями был получен Е. Шмидтом [1], который в 1907 г. нашел наилучшее приближение периодической функции двух переменных суммами произведений функцией одной переменной в $L_2$. В. Н. Темляковым в ряде работ (например, [2; 3]) найдены порядки приближения $\tau_{M\Gamma}(F)_p$ классов периодических функций многих переменных билинейными функциями для классов $W_{q,\alpha}^{\bar r}$, $SW_{q,\alpha}^{\bar r}$, $H_q^{\bar r}$ и $NH_q^{\bar r}$ периодических функций, определенных ограничениями