

РАЗДЕЛ 1. РАЗРАБОТКА СОДЕРЖАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНО- ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС И ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ

УДК 372.851

В. Ю. Бодряков

V. Yu. Bodryakov

ФГБОУ ВО «Уральский государственный
педагогический университет», Екатеринбург

Russian State Pedagogical University, Ekaterinburg

bodryakovyu@yandex.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ И ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКИХ УМЕНИЙ СТУДЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ УЧЕБНО-АДАПТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

FORMATION OF RESEARCH AND SUBJECT-METHODOLOGICAL SKILLS OF STUDENTS WHEN SOLVING LEARNING-ADAPTED PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS

Аннотация. Обсуждаются перспективы формирования исследовательских и предметно-методических умений студентов при решении учебно-адаптированных задач прикладной математики. Показано, что задачи из класса задач о преследовании являются подходящим дидактическим средством для достижения цели.

Abstract. The prospects are discussed for developing students' research and subject-methodological skills when solving educationally adapted problems of applied mathematics. It is shown that problems from the class of pursuit problems are a suitable didactic tool for achieving the aim.

Ключевые слова: задачи о преследовании; обучение математике; формирование исследовательских и предметно-методических умений; учебно-адаптированные задачи.

Key words: pursuit problems; teaching mathematics; formation of research and subject-methodological skills; educational-adapted tasks.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства просвещения Российской Федерации по теме «Формирование исследовательских и предметно-методических умений учителей математики и информатики с применением цифровых лабораторных работ и симуляторов».

Уровень математической подготовки школьников и абитуриентов вузов снижается год от года. Одной из главных является проблема мотивации

обучающихся к изучению предмета, доказательности практической полезности математики в реальной жизни. Методисты-исследователи настойчиво ищут способы повышения мотивации школьников и студентов к изучению предмета [5; 7; 9–11]. Опыт автора показывает, что лабораторные работы по математике (ЛРМ) хорошо подходят для решения проблемы [2–4]. ЛРМ вызывают эмоциональный интерес обучающихся и с удовольствием выполняются ими. Однако в палитре педагога должны быть и другие учебные инструменты.

Целью статьи является обсуждение перспектив формирования исследовательских и предметно-методических умений студентов при решении учебно-адаптированных задач прикладной математики (в классе задач о преследовании в $2D$ и $3D$ пространствах).

Под задачами прикладной математики понимаются задачи, вытекающие из проблем реального мира, решаемые на страницах научных изданий профессиональными математиками-прикладниками. Задачей педагогов-методистов является грамотная адаптация профессионально решаемых задач к уровню математической подготовленности студентов. Учебно-адаптированные задачи из класса задач о преследовании в системе «хищник–жертва», подкрепленные компьютерными симуляциями, являются подходящим дидактическим средством для достижения цели работы [1; 6; 8; 11]. С учетом краткого формата статьи, ограничимся представлением задач о преследовании в евклидовом $2D$ и $3D$ пространстве с произвольными начальными углами прицеливания.

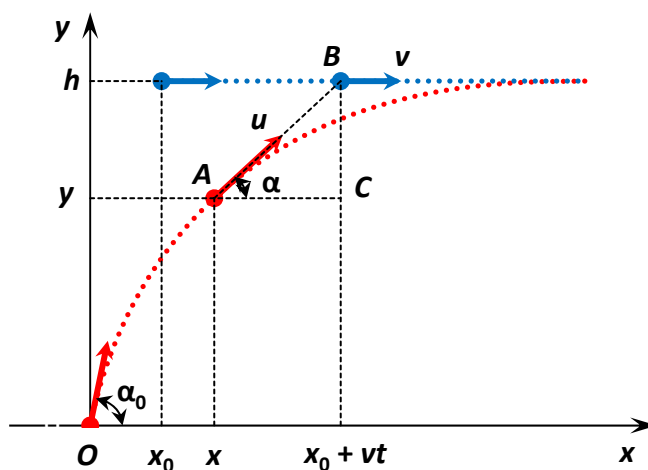


Рис. 1. Кривая преследования с начальным углом прицеливания α_0

Постановка $2D$ задачи. Объект B (жертва) движется параллельно оси Ox с постоянной скоростью v из начальной точки $B_0(x_0, h)$. Объект A (хищник) движется из начальной точки $O(0, 0)$ с постоянной скоростью u так, что вектор $\mathbf{u}$ все время направлен на точку B (рис. 1). Начальный угол прицеливания равен $0 < \alpha_0$

$< 180^\circ$. Найти уравнение $y(x)$ траектории движения хищника (кривую преследования), другие существенные характеристики преследования.

Кривая преследования $2D$ [1]. Уравнения движения объекта B :

$$x_B = x_0 + vt = h \operatorname{ctg} \alpha_0 + vt; \quad y_B = h. \quad (1)$$

Из рис. 1 очевидна следующая система соотношений:

$$\frac{h-y}{x_0+vt-x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \equiv y'. \quad (2)$$

Начальные условия для объекта A суть:

$$y(t=0) = x(t=0) = 0; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (3)$$

Отметим также, что $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + y'^2}$, откуда $\frac{dx}{dt} = \frac{u}{\sqrt{1+y'^2}}$. После дифференцирования по времени выр. (2), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{h-y}{y'} &= x_0 + vt - x, \\ -\frac{y'^2 + (h-y)y''}{y'^2} &= v \frac{dt}{dx} - 1. \end{aligned}$$

После преобразований получаем математическую модель задачи о преследовании в форме дифференциального уравнения II порядка (ДУ-II):

$$-k(h-y)y'' = y'^2 \sqrt{1+y'^2}, \quad (4)$$

где параметр $k = u/v$. ДУ-II (4) специального вида интегрируется путем понижения порядка с помощью подстановки $\frac{dy}{dx} = p = p(y)$.

Результат решения может быть представлен в форме параметрически заданной кривой преследования (уравнения траектории хищника), $0 \leq \zeta \leq 1$:

$$x(\zeta) = \frac{h}{2} \left[\frac{1-\zeta^{\frac{1}{1-k}}}{1-\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha_0}{2} - \frac{1-\zeta^{\frac{1}{1+k}}}{1+\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right]; \quad y(\zeta) = h(1-\zeta).$$

Координаты жертвы и время преследования есть, соответственно,

$$\begin{aligned} x_B(\zeta) &= x_0 + \frac{h}{2k} \left[\frac{1-\zeta^{\frac{1}{1-k}}}{1-\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1-\zeta^{\frac{1}{1+k}}}{1+\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right]; \quad y_B(\zeta) = h. \\ t(\zeta) &= \frac{h}{2u} \left[\frac{1-\zeta^{\frac{1}{1-k}}}{1-\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1-\zeta^{\frac{1}{1+k}}}{1+\frac{1}{k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right]; \quad T = t(\zeta=0) = \frac{hu}{u^2-v^2} \frac{k + \cos \alpha_0}{k \sin \alpha_0}. \end{aligned}$$

После того как студенты освоили решение задачи о преследовании в евклидовом $2D$ пространстве, подкрепив в рамках ЛРМ теоретические знания компьютерными симуляциями собственной разработки, резонно перейти к рассмотрению задачи о преследовании в $3D$ пространстве.

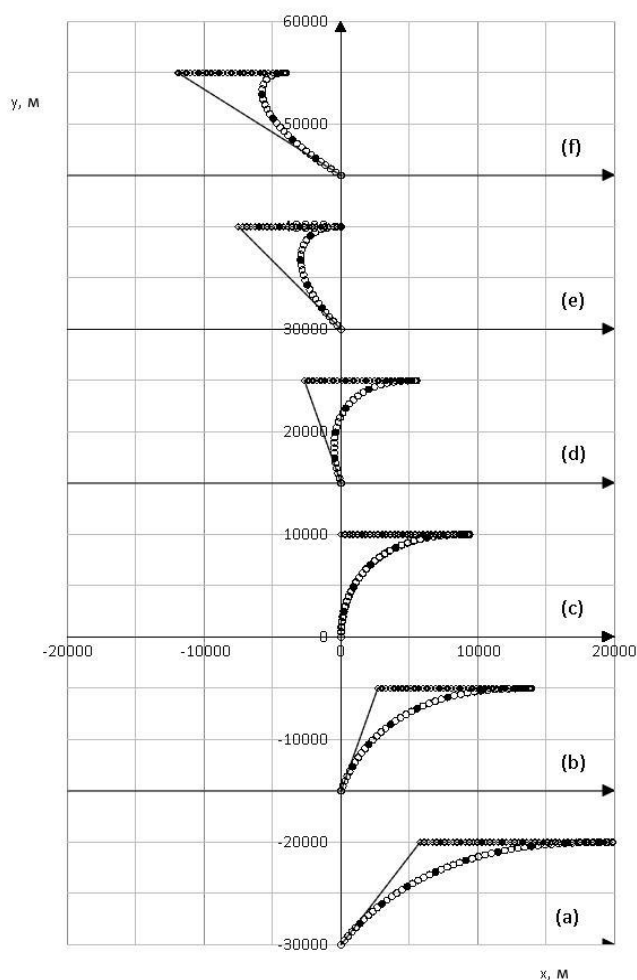


Рис. 2. 2D кривые преследования при различных начальных углах прицеливания: (a) $\alpha_0 = 60^\circ$; (b) 75° ; (c) 90° ; (d) 105° ; (e) 127° ; (f) 140° . Белые кружки и белые ромбы –посекундные положения хищника и жертвы, соответственно. Черные кружки и черные ромбы –положения хищника и жертвы через каждые 5 с. Прямые –начальные линии визирования. Каждая диаграмма смещена относительно соседней на 15000 м по оси ординат. Значения параметров: $v = 300$ м/с; $u = 500$ м/с; $h = 10000$ м.

Постановка 3D задачи. Объект B (жертва) движется параллельно оси Ox евклидова 3D-пространства $Oxyz$ с постоянной скоростью v из начальной точки $B_0(x_0, y_0, z_0 = h)$. Объект A (хищник) движется из начальной точки $O(0, 0, 0)$ с постоянной скоростью u так, что вектор $\mathbf{u}$ все время направлен на объект B . Начальный угол прицеливания α_0 , отсчитываемый от плоскости Oxy (угол возвышения), лежит в пределах $0 \leq \alpha_0 \leq 90^\circ$; начальный угол прицеливания φ_0 , отсчитываемый от оси Ox в плоскости Oxy (азимутальный угол), $-180^\circ \leq \varphi_0 \leq 180^\circ$. Найти уравнение кривой преследования $z(x, y)$, другие характеристики преследования.

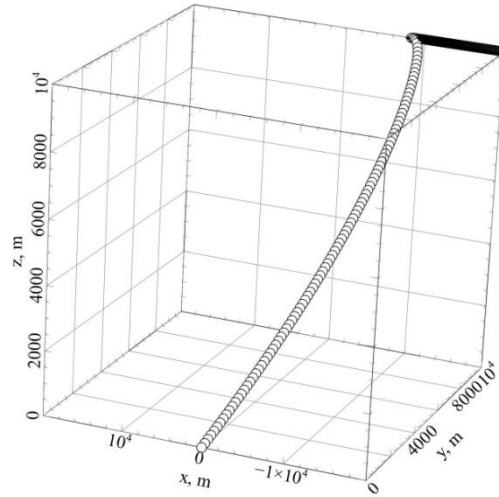


Рис. 2. 3D кривая преследования при начальных координатах жертвы $(x_0, y_0, z_0) = (-20000, 10000, 10000)$. Кружки отражают движение хищника, треугольники – жертвы.

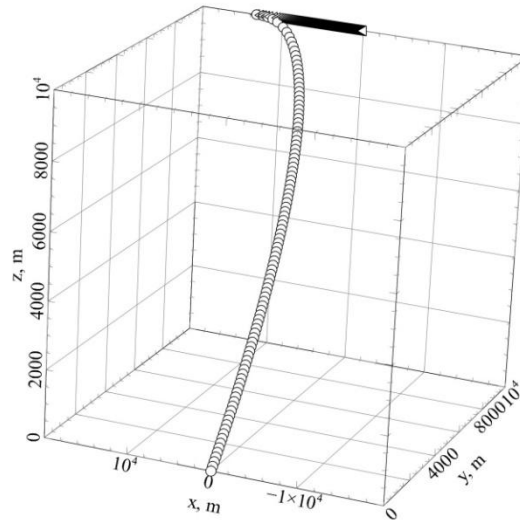


Рис. 3. То же, что на рис. 2 при $(x_0, y_0, z_0) = (0, 10000, 10000)$.

Задача о преследовании в 3D пространстве может быть путем преобразования пространства сведена к решению 2D задачи о преследовании. Уравнения движения хищника $(x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta))$, $0 \leq \zeta \leq 1$:

$$x = \frac{h}{2} \left[\frac{1 - \zeta^{\frac{1}{k}}}{1 - \frac{1}{k}} \frac{1 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} - \frac{1 - \zeta^{\frac{1}{k}}}{1 + \frac{1}{k}} \frac{1 - \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} \right];$$

$$y = h(1 - \zeta) \operatorname{ctg} \alpha_0 \sin \varphi_0; \quad z = h(1 - \zeta).$$

Уравнения движения жертвы $(x_B(\zeta), y_0, z_0)$:

$$x_B(\zeta) = x_0 + \frac{h}{2k} \left[\frac{1 - \zeta^{\frac{1}{1-k}}}{1 - \frac{1}{k}} \frac{1 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} + \frac{1 - \zeta^{\frac{1}{1+k}}}{1 + \frac{1}{k}} \frac{1 - \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} \right]; \quad z_B = h.$$

Выборочные результаты компьютерных расчетов для случая $2D$ задачи о преследовании приведены на рис. 2; для случая $3D$ – на рис. 3 и рис. 4. Варьируемые параметры: в случае $2D$ – начальный угол α_0 ; в случае $3D$ – начальные координаты жертвы x_0 и y_0 .

Комментарий. Несомненно, что класс задач о преследовании в различных постановках обладает большим дидактическим и прикладным потенциалом [1, 11]. Задача о преследовании хищником жертвы в рамках выбранной адаптированной постановки может быть рассмотрена и решена в рамках курса «Дифференциальных уравнений» или подходящих курсов по выбору. Ни на каком этапе решения не требуются знания, выходящие за пределы стандартной вузовской математики. Вместе с тем, для прохождения всего пути требуются немалые интеллектуальные усилия от обучающихся, грамотно направляемые педагогом. Таким образом, задача о преследовании лежит, по Выготскому, в зоне ближайшего развития студентов-математиков старших курсов педагогического университета, и потому активно способствует их профессиональному развитию в качестве учителей-предметников. По В. А. Тестову [7], целостность содержания обучения достигается при динамическом балансе компонент его триады: фундаментальности, гуманистической ориентации и практической направленности; и класс задач о преследовании обеспечивает гармоничное сочетание этих компонент.

Педагогический эксперимент. Автором был задуман и проведен пилотный педагогический эксперимент для иллюстрации справедливости вышесказанного. Экспериментальная группа – студенты предвыпускного 4 курса заочного отделения гр. Мат-2031з (16 чел., возраст $29,1 \pm 9,4$ лет), обучающиеся по направлению подготовки «44.03.01 – Педагогическое образование. Математика». Дисциплина – курс по выбору «Избранные вопросы высшей математики для формирования исследовательских и творческих способностей». В рамках лекционной части курса студентам было представлено общее решение задачи о преследовании в системе хищник – жертва в евклидовом $2D$ пространстве для произвольного начального угла прицеливания [1]. На практических занятиях по дисциплине были актуализированы предметные знания студентов по математическому анализу (дифференциальное и интегральное исчисление) и дифференциальным уравнениям. В ходе эксперимента студентам для специального случая задачи о преследовании ($\alpha_0 = 90^\circ$, $u = v$) было предложено самостоятельно получить точные выражения для траектории (кривой преследования) в форме параметрически

заданных координат хищника $(x(\zeta); y(\zeta))$ и жертвы $(x_B(\zeta); y_B(\zeta) = h)$; найти расстояние между хищником и жертвой $\rho(\zeta)$ в процессе преследования и минимальное расстояние $\rho_{\min}$; выяснить, на каком этапе преследования будет достигнуто это минимальное расстояние. Время выполнения работы – 2 учебных часа. За исключением двух отсутствующих студентов, на проверку были сданы все работы, ни одна работа не получила неудовлетворительной оценки. Отличных оценок также не было, так как никто из студентов не получил правильных ответов на все поставленные вопросы. Оценки «хорошо» и «удовлетворительно» распределились поровну, в зависимости от степени продвижения студентов. Выявились следующие учебные дефициты студентов: невнимательность при проведении алгебраических преобразований, отсутствие культуры пошаговой проверки результатов своих учебных действий, ошибки при интегрировании, неразвитость культуры исследования зависящей от параметра функции.

Заключение. Проведенное в рамках рефлексивного этапа обсуждение результатов со студентами позволило сделать вывод о перспективности предлагаемого подхода к формированию исследовательских и предметно-методических умений обучающихся при решении учебно-адаптированных задач прикладной математики, – на примере задачи о преследовании. Подобные задачи вполне могут служить основой для учебно-исследовательских проектов хорошо подготовленных и мотивированных школьников (под руководством подготовленных учителей), быть темами студенческих курсовых и выпускных квалификационных работ. Вместе с тем, чтобы полноценно раскрыть дидактический потенциал подхода, необходимо обеспечить достаточно высокий уровень предметных знаний обучающихся по математическому анализу, дифференциальным уравнениям, основам математического моделирования. Желательно дополнение аналитического рассмотрения задачи о преследовании компьютерными симуляциями, – для визуализации результатов модельных теоретических расчетов.

Список литературы

1. Бодряков В. Ю. Задача о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания / В. Ю. Бодряков // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. № 11. С. 35-46.
2. Бодряков В. Ю. Усвоение фундаментальных математических понятий в процессе выполнения лабораторных работ по математике / В. Ю. Бодряков // Математика в школе. 2023. № 7. С. 20-28.
3. Бодряков В. Ю. Формирование межпредметной функциональной грамотности обучающихся в период летнего отдыха / В. Ю. Бодряков // Математика в школе. – 2024. – № 2. – С. 54-62.

4. Бодряков В. Ю. Цифровые лабораторные работы по математике как современный инструмент формирования обучающегося - исследователя / Бодряков В. Ю., Быков А. А. // Педагогическое образование в России. 2022. № 3. С. 148-159.
5. Кузовкова А. А. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности / А. А. Кузовкова, Р. Ф. Мамалыга, В. Ю. Бодряков // Математика в школе. 2018. № 2. С. 35-42.
6. Силагадзе З. К. Задача преследования зайца волком как упражнение элементарной математики / З. К. Силагадзе, О. И. Чашина // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2010. Т. 5. № 2. С. 111–115.
7. Тестов В. А. Основные задачи развития математического образования / В. А. Тестов // Образование и наука. 2014. № 4. С. 3-17.
8. Barton J. C. On pursuit curves / J. C. Barton, C.J. Eleizer // J. Austral. Soc. Ser. B. 2000. V. 41. № 3. P. 358-371.
9. Fuqoha A. A. N. Motivation in mathematics learning / A. A. N. Fuqoha, B. Budiyo, D. Indriati // Pancaran Pendidikan. 2018. V. 7. №. 1. P. 202-209.
10. Star J. R. Studying technology-based strategies for enhancing motivation in mathematics / J. R. Star, J. A. Chen, M. W. Taylor, et al. // Int. J. of STEM Education. –2014. –V. 1. –№ 7. –P. 1-19.
11. Utz W. R. Pursuit problems for independent study / W. R. Utz // The American Mathematical Monthly. –1975. –V. 82. –№ 4. –P. 398-399.