

математики); на 5-м курсе – освоение программирования в MathCAD, а также знакомство с пакетами компьютерной алгебры (Matematica, Derive, Maple V);

- *математическое моделирование*: на 1-м курсе – знакомство со структурой и порядком построения математической модели; построение простых моделей средствами пакетов Microsoft Excel и MathCAD; на 5-м курсе – решение задач моделирования, описываемых дифференциальными уравнениями, системами уравнений и т. п. с выбором того программного средства, в котором модель реализуется оптимальным образом.

На математическом факультете УрГПУ разрабатываются учебно-методические пособия, призванные реализовать преемственность в рамках выделенных содержательных линий. Заканчивается разработка материалов, обеспечивающих одну из перечисленных линий – освоение специализированных математических пакетов. Часть, предназначенная для 1-го курса, уже прошла апробацию и внедрена в учебный процесс факультетов математики и информатики; материалы для 5-курса готовятся к публикации.

О КВАДРАТНОМ УРАВНЕНИИ С ПАРАМЕТРАМИ

В. Н. Стариков

Мичуринский государственный педагогический институт

Предлагаемый ниже в сокращенной форме материал может преподаваться на спецкурсах по математике в вузах и на подготовительных отделениях вузов, в том числе и с использованием ЭВМ (компьютерный курс).

Крамор [1, С. 6–7, следствие 1 из теоремы 5] утверждает, что для того, чтобы оба корня x_1 и x_2 квадратного уравнения с параметрами (КУСП) $ax^2 + bx + c = 0$ лежали в интервале (M, A) , необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a^{-1}f(M, a, b, c) > 0, \\ a^{-1}f(A, a, b, c) > 0, \\ -b/a \in A(2M, 2A), \\ a \neq 0, \end{cases}$$

где $f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$, дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Анализ показывает, что, хотя сама теорема 5 верна, следствие 1 из теоремы 5 не является достаточным условием даже тогда, когда в указанную выше систему мы добавили очевидное условие $(x_1 + x_2)/2 = -b/2a \in (M, A)$ (без последнего условия нельзя, например, получить правильный ответ $a \in [0; 4)$ в задаче: при каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ имеет оба корня $x_1, x_2 \in [-2; 6]$?) вместо неправильного ответа по следствию 1 из теоремы 5 $a \in [0; 4) \cup (9, \infty)$.

Заметим, что указанное выше следствие 1 из теоремы 5 по сути является шестым, седьмым и восьмым случаями КУСП, рассмотренными ранее [2]. Первое, четвертое и пятое неравенства системы выше указаны там, но вместо второго и третьего неравенств дано другое неравенство не на языке функции $f(x, a, b, c)$. Кроме того, ранее [3] рассмотрены три возможных подхода к следствию 1 из теоремы 5, где отмечается, что указанная выше система (так называемый второй подход) не универсальна, хотя обычно дает верные результаты, т. е. по сути отмечается, что эта система не является достаточным условием.

Рассмотрим более общий случай, чем следствие 1 из теоремы 5, который, кстати, дает не только необходимое, но и достаточное условие для данного типа КУСП. Пусть чтобы оба корня x_1 и x_2 для КУСП $f(x, a, b, c) = 0$, $f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$ таковы, что $x_1 \in (M_1, A_1)$ и $x_2 \in (M_2, A_2)$, $M_1 < A_1$, $M_2 < A_2$. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -b/a \in (M_1 + M_2, A_1 + A_2)$, $x_1 x_2 = c/a$.

Пусть $M = \min(M_1, M_2)$, $A = \max(A_1, A_2)$.

Тогда $x_1 - M \in (M_1 - M, A_1 - M)$, $x_1 - A \in (M_1 - A, A_1 - A)$, $x_2 - M \in (M_2 - M, A_2 - M)$, $x_2 - A \in (M_2 - A, A_2 - A)$, $(x_1 - M)(x_2 - M) = x_1 x_2 - M(x_1 + x_2) + M^2 = c/a + M \cdot b/a + M^2 = a^{-1}f(M, a, b, c) \in ((M_1 - M)(M_2 - M), (A_1 - M)(A_2 - M)) = (0; (A_1 - M)(A_2 - M))$, где по определению $(M_1 - M)(M_2 - M) = 0$.

Аналогично $(A - x_1)(A - x_2) = A^2 - A(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = A^2 + Ab/a + c/a = a^{-1}f(A, a, b, c) \in ((A - A_1)(A - A_2), (A - M_1)(A - M_2)) = (0; (A - M_1)(A - M_2))$, где по определению $(A - A_1)(A - A_2) = 0$. Итак, имеем одновременное обобщение и уточнение следствия 1 из теоремы 5 в виде теоремы: для того, чтобы оба корня x_1 и x_2 для КУСП $f(x, a, b, c) = 0$, $f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$, $M_1 < A_1$, $M_2 < A_2$ принадлежали интервалам $x_1 \in (M_1, A_1)$ и $x_2 \in (M_2, A_2)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ a^{-1}f(M, a, b, c) \in (0; (A_1 - M)(A_2 - M)), \\ a^{-1}f(A, a, b, c) \in (0; (A - M_1)(A - M_2)), \\ -b/a \in A(2M, 2A), \\ a \neq 0. \end{array} \right.$$

Доказательство этой теоремы фактически дано выше. В частности, в случае следствия 1 из теоремы 5 имеем $M_1 = M_2 = M$, $A_1 = A_2 = A$. Тогда последняя система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ a^{-1}f(M, a, b, c) \in (0; (A - M)^2), \\ a^{-1}f(A, a, b, c) \in (0; (A - M)^2), \\ -b/a \in A(2M, 2A), \\ a \neq 0. \end{array} \right.$$

Сравнивая последнюю систему с самой первой, видим, что условия вида $a^{-1}f(M, a, b, c) > 0$ и $a^{-1}f(A, a, b, c) > 0$ дают лишь необходимость, а их уточнение в виде $a^{-1}f(M, a, b, c) \in (0; (A-M)^2)$ и $a^{-1}f(A, a, b, c) \in (0; (A-M)^2)$ дают уже достаточность.

Заметим, что второе неравенство последней системы фактически доказано ранее в [3] в виде $C/A \in (0; (h_2 - h_1)^2)$, где в наших обозначениях $C/A = a^{-1}f(M, a, b, c)$, $h_1 = M$, $h_2 = A$. Там же приведено первое и доказано четвертое неравенство последней системы.

В приложении приведено доказательство теорем 1–5 из [1]. Использованные при этом обозначения взяты из [3] и отличаются от обозначений выше, заимствованных для удобства сравнения из [1]. Кроме того, $f'(x_0, a, b, c)$ означает производную функции $f(x, a, b, c)$ по x при $x = x_0$, а условие $f'(x_0, a, b, c) = 0$ означает локальный экстремум у функции $f(x, a, b, c)$ при $x = x_0$, т. е. координату вершины параболы (графика функции $f(x, a, b, c)$). Кроме того, в доказательствах использован факт, что следующие пары выражений C/A и AC , B/A и AB имеют одинаковый знак.

Приложение

Для квадратного уравнения с параметрами (КУСП) $f(x, a, b, c) = 0$, где $f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$, x_1 и x_2 – действительные корни КУСП; $ax^2 + bx + c = 0$, известна теорема Виета (ТВ): $x_1 + x_2 = -b/a$ и $x_1 x_2 = c/a$. Используемое ниже условие $b^2 - 4ac = D \geq 0$, означает, что два корня КУСП действительны, различны или, возможно, равны. В [1. С. 4-9] даны без доказательства необходимые и достаточные условия для анализа КУСП в виде теорем 1–5. Ниже часть условий доказана.

Теорема 1 о том, что $x_1 > 0$, $x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = c/a > 0$, $x_1 + x_2 = -b/a > 0$, а также то, что $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $D \geq 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = c/a > 0$, $x_1 + x_2 = -b/a < 0$, $D \geq 0$, основана на ТВ и свойствах числовых неравенств.

Теорема 2 о том, что $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $D \geq 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = c/a < 0$, $D \geq 0$, а также то, что $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $|x_1| < x_2$, $D \geq 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = c/a < 0$, $x_1 + x_2 = -b/a > 0$, $D \geq 0$, и то, что $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $|x_1| > x_2$, $D \geq 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = c/a < 0$, $x_1 + x_2 = -b/a < 0$, $D \geq 0$, основана на ТВ и свойствах числовых неравенств, включая неравенства с модулями. Пусть x_0 – некоторое действительное число.

Теорема 3 о том, что $x_1 < x_2 < x_0$, $D \geq 0 \Leftrightarrow af(x_0, a, b, c) > 0$, $af'(x_0, a, b, c) = a(2ax_0 + b) > 0$, $D \geq 0$. **Доказательство.** Для $t = x - x_0$ имеем КУСП $f(x, a, b, c) = f(t + x_0, a, b, c) = a(t + x_0)^2 + b(t + x_0) + c = At^2 + Bt + C = 0$, где $A = a$, $B = f'(x_0, a, b, c) = 2ax_0 + b$, $C = f(x_0, a, b, c) = ax_0^2 + bx_0 + c$. Пусть $t_1 = x_1 - x_0$ и $t_2 = x_2 - x_0$ – действительные корни КУСП $f(t, A, B, C) = 0$, где $f(t, A, B, C) = At^2 + Bt + C$, причем $D_1 = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac = D \geq 0$. По условию теоремы 3: $x_1 < x_2 < x_0 \Leftrightarrow x_1 - x_0 < x_2 - x_0 < 0 \Leftrightarrow t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow t_1 < 0$, $t_2 < 0$. Отсюда в силу теоремы 1: $t_1 < 0$, $t_2 < 0$, $D_1 = D \geq 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 = C/A > 0$, $t_1 + t_2 = -B/A < 0$, $A = a \neq 0$, $D_1 = D \geq 0 \Leftrightarrow AC > 0$, $-AB < 0$, $A = a \neq 0$, $D \geq 0 \Leftrightarrow AC = af(x_0, a, b, c) = a(ax_0^2 + bx_0 + c) > 0$, $-AB = -a f'(x_0, a, b, c) = -a(2ax_0 + b) < 0$, $D =$

$b^2-4ac \geq 0$. Итак, $a(ax_0^2+bx_0+c)>0$, $a(2ax_0+b)>0$, $b^2-4ac \geq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4 о том, что $x_1 < x_0 < x_2$, $D \geq 0 \Leftrightarrow af(x_0, a, b, c) < 0$, $D \geq 0$, доказывается аналогично с использованием теоремы 2. **Доказательство.** Пусть $t = x - x_0$ имеем КУСП $f(x, a, b, c) = f(t+x_0, a, b, c) = a(t+x_0)^2 + b(t+x_0) + c = At^2 + Bt + C = 0$, где $A = a$, $B = f'(x_0, a, b, c) = 2ax_0 + b$, $C = f(x_0, a, b, c) = ax_0^2 + bx_0 + c$. Пусть $t_1 = x_1 - x_0$ и $t_2 = x_2 - x_0$ – действительные корни КУСП $f(t, A, B, C) = 0$, где $f(t, A, B, C) = At^2 + Bt + C$, причем $D_1 = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac = D \geq 0$. По условию теоремы 4: $x_1 < x_0 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 - x_0 < 0 < x_2 - x_0 \Leftrightarrow x_1 - x_0 < 0$, $x_2 - x_0 > 0 \Leftrightarrow t_1 < 0$, $t_2 > 0$. Отсюда в силу теоремы 2: $t_1 < 0$, $t_2 > 0$, $D_1 = D \geq 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 = C/A < 0$, $A = a \neq 0$, $D_1 = D \geq 0 \Leftrightarrow AC < 0$, $A = a \neq 0$, $D \geq 0 \Leftrightarrow AC = af(x_0, a, b, c) = a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$, $-AB = -a f'(x_0, a, b, c) = -a(2ax_0 + b) > 0$, $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Итак, $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 5 о том, что $x_0 < x_1 < x_2$, $D \geq 0 \Leftrightarrow af(x_0, a, b, c) > 0$, $af'(x_0, a, b, c) = a(2ax_0 + b) < 0$, $D \geq 0$ доказывается аналогично с использованием второй половины теоремы 1. **Доказательство.** Пусть $t = x - x_0$ имеем КУСП $f(x, a, b, c) = f(t+x_0, a, b, c) = a(t+x_0)^2 + b(t+x_0) + c = At^2 + Bt + C = 0$, где $A = a$, $B = f'(x_0, a, b, c) = 2ax_0 + b$, $C = f(x_0, a, b, c) = ax_0^2 + bx_0 + c$. Пусть $t_1 = x_1 - x_0$ и $t_2 = x_2 - x_0$ – действительные корни КУСП $f(t, A, B, C) = 0$, где $f(t, A, B, C) = At^2 + Bt + C$, причем $D_1 = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac = D \geq 0$. По условию теоремы 5: $x_0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 - x_0 < x_2 - x_0 \Leftrightarrow 0 < t_1 < t_2$. Отсюда в силу теоремы 1: $0 < t_1$, $0 < t_2$, $D_1 = D \geq 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 = C/A > 0$, $t_1 + t_2 = -B/A > 0$, $A = a \neq 0$, $D_1 = D \geq 0 \Leftrightarrow AC > 0$, $-AB > 0$, $A = a \neq 0$, $D \geq 0 \Leftrightarrow AC = af(x_0, a, b, c) = a(ax_0^2 + bx_0 + c) > 0$, $-AB = -af'(x_0, a, b, c) = -a(2ax_0 + b) > 0$, $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Итак, $a(ax_0^2 + bx_0 + c) > 0$, $a(2ax_0 + b) < 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$, что и требовалось доказать.

Литература

1. Крамор В. С. Примеры с параметрами и их решение. Пособие для поступающих в вузы. М.: АРКТИ, 2000.
2. Стариков В. Н., Чернышов Г. Л. О квадратном уравнении с параметрами // Научно-методические проблемы преподавания гуманитарных, естественных и математических дисциплин в школе и вузе: Материалы научно-практической конференции преподавателей и студентов МГПИ (22–26 марта 1999 г.). Вып. 5 / Мичуринск. гос. педагогич. ин-т. Мичуринск: МГПИ, 1999. С. 79–80.
3. Стариков В. Н. О квадратном уравнении с параметрами // Новые технологии в образовании: Труды II Международной электронной научной конференции / Воронеж. гос. пед. ун-т. Воронеж: ВГПУ, 2000. С. 51.