

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

В. Н. Стариков

Мичуринский государственный педагогический институт

Аналогии, обсуждаемые в докладе, могут использоваться при изучении и преподавании соответствующих тем в школе и вузе, в том числе и с использованием ЭВМ.

Ламинарное течение жидкости по трубе, описываемое законом Пуазейля (точнее, Хагена–Пуазейля [1, С. 206]), и постоянный электрический ток в проводнике, описываемый законом Ома, относятся к явлениям переноса, между которыми можно установить электрогидродинамические аналогии.

Возьмем закон Ома [2, с. 149–150] в дифференциальной форме $i = E/\sigma$ или $i = E/\sigma$, или $i = -(\Delta\phi/\Delta r)/\sigma$, или $i = \text{grad } \phi/\sigma$, где i , E , ϕ и σ – соответственно плотность тока, напряженность, потенциал поля и удельное сопротивление в проводнике. Аналогично закон Пуазейля имеет вид $v = -(\Delta p/\Delta r)/(a^2/8\eta)$ или $v = -(\text{grad } p)/(a^2/8\eta)$, где v , p и η – соответственно скорость, давление и вязкость жидкости в трубе радиуса a , r – радиус-вектор. Дифференциальная форма законов Ома и Пуазейля позволяет применять их к бесконечно малым участкам проводника и трубы. Но если проводник – цилиндр длиной b и с поперечным сечением S , то, выбрав направление r вдоль оси OX – оси проводника, закон Ома упрощается так: $I/S = (U/b)/\sigma$ или $I = U/R$, где $i = I/S$, $\Delta\phi = U$, $\Delta r = \Delta x = b$, $I = \Delta q/\Delta t$, $R = \sigma b/S$; I , U и R – соответственно сила тока, напряжение и сопротивление в проводнике.

Аналогично, если труба – цилиндр длиной b с поперечным сечением S , то, выбрав направление r вдоль оси OX – оси трубы, закон Пуазейля упрощается: $v = (\Delta p/\Delta x)/(a^2/8\eta)$ или $Q/S = (\Delta p/b)/(a^2/8\eta)$, где $Q = Sv = S(\Delta x/\Delta t) = \Delta V/\Delta t$, $\Delta V = S\Delta x$; Q – объемный расход жидкости в трубе или объем ΔV жидкости, прошедшей по трубе за время Δt , ΔV – объем цилиндра длиной Δx и поперечного сечения S . Закон Пуазейля $Q/S = (\Delta p/b)/(a^2/8\eta)$ или $Q/S = (\Delta p/b)(S/8\pi\eta)$ для объемного расхода жидкости Q можно переписать для массового расхода жидкости $Q_m = \rho Q = \rho \Delta V/\Delta t = \Delta m/\Delta t$, где ρ и Δm – соответственно постоянная плотность и масса жидкости объемом ΔV , $S = \pi a^2$ – поперечное сечение трубы радиуса a . В этом случае имеем $Q_m = \rho Q = \Delta p(\rho S^2/8\pi\eta b) = \Delta p/r$, где $r = 8\pi\eta b^2/mS$ – гидродинамическое сопротивление жидкости, m – масса жидкости, содержащейся в цилиндрической трубе сечения S и длиной b .

Обозначив символом «~» слово «аналогично», проведем электрогидродинамические аналогии между законами Ома и Пуазейля: $I \sim Q_m$, $\Delta\phi = U \sim \Delta p$, $i \sim Q_m/S$, $R \sim r$, $\sigma \sim \eta$. Эта аналогия распространяется дальше. Известно первое правило Кирхгофа [2, С. 136–137]: алгебраическая сумма сил тока в узле разветвления равна нулю: $\sum I_i = 0$. Гидродинамический аналог этого правила (уравнение неразрывности струи [3, С. 70]) гласит: массовый расход жидко-

сти с постоянной плотностью в трубе не меняется, т. е. $Q_m = \rho S v = \text{const.}$ Иными словами, сколько по трубам втекает до их разветвления в узле, столько же жидкости и вытекает после разветвления. Если вектору скорости жидкости v_i в i -ой трубе сечением S_i придать одно из двух возможных направлений тока по трубе, то алгебраическая сумма $\sum \rho S_i v_i = 0$ в месте разветвления (в узле). Второе правило Кирхгофа или закон сохранения энергии [2, С. 137–140] в упрощенном виде гласит: общее падение напряжения U на концах неразветвленного участка последовательно соединенных проводников $R_1, R_2, \dots, R_n$ равно сумме падений напряжений на каждом из проводников, т. е. $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n$. Ток I на этом участке (см. правило 1) постоянен (одинаков). Гидродинамический аналог этого правила таков: общая разность давлений Δp на концах неразветвленного участка последовательно соединенных труб с сопротивлениями $r_1, r_2, \dots, r_n$ равно сумме падений давлений (напоров) в каждой из труб [4, С. 173, формула (5)–(78), т. е. $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n = Q_m r_1 + Q_m r_2 + \dots + Q_m r_n$. Массовый расход Q_m на каждом участке (см. правило 1) постоянен (одинаков). Интересно, что формулы общего сопротивления последовательно и параллельно соединенных электрических проводников соответственно $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ и $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n$ автоматически переходят в формулы общего гидродинамического сопротивления жидкости последовательно и параллельно соединенных труб соответственно $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ и $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + \dots + 1/r_n$, если в последнем случае учесть, что падение давления (напора) Δp во всех параллельно соединенных трубах одинаково [4, С. 173, формула 5–80].

Отметим, что электрогидродинамическая аналогия неполная, ибо формулы $R = \sigma b/S$ и $r = 8\pi\eta b^2/mS$ для сопротивлений R и r , похожие математически, различны по своему физическому содержанию. Однако если аналогию сделать полной, то, с одной стороны, электронному газу, подчиняющемуся не закону Ома, а закону типа Пуазейля, соответствует плотное состояние электронного газа, которое не достигается в обычных металлах. Оно, видимо, может достигаться в плазме. С другой стороны, обычному очень разреженному «электронному газу» в проводниках, подчиняющемуся закону Ома, соответствует полный гидродинамический аналог – очень разреженный реальный газ (почти вакуум). Этот очень разреженный реальный газ будет описываться законом – полным аналогом закона Ома. Мы его назовем законом Ома-Пуазейля, хотя его называют законом Кнудсена [5, с. 110, формула (3.11)]. Он получается из следующих аналогий: $I/S = (U/b)/\sigma$, $I = U/R$, $R = \sigma b/S$, $I \sim Q_m$, $U \sim \Delta p$, $R \sim r$, $\sigma \sim (p/\rho)^{1/2}$ и имеет вид $Q_m = \Delta p/r$, где $r = 3b/(4a^3(2\pi\rho/p)^{1/2})$ – гидродинамическое сопротивление капиллярной трубки радиуса a и длиной b , в которой находится газ плотностью ρ при давлении p , Δp – разность давлений на концах капилляра. Из уравнения состояния идеального газа $pV = mRT/M$ следует, что σ пропорционально $(p/\rho)^{1/2}/a = (p/(mV))^{1/2}/a = (RT/M)^{1/2}/a$, т. е. при радиусе a , пропорциональном абсолютной температуре

T , реальное удельное омическое сопротивление проводника $\sigma \sim (p/\rho)^{1/2}/a = CT^{-1/2}/T = CT^{-1/2}$ растет обратно пропорционально корню квадратному из его абсолютной температуры T и обратно пропорционально корню квадратному из молярной массы M его «электронного газа». Реально же функцию $y = Cx^{-1/2}$, $C = \text{const}$ при $x > 1$ можно считать постоянной [6, С. 314, рис. 245]. Известно, что $\sigma_{\text{ост}}$ проводников практически не зависит от температуры, т. е. найденное нами σ , видимо, $\sigma_{\text{ост}}$ – остаточное сопротивление, хотя есть еще $\sigma_{\text{ид}}$ – сопротивление идеальной решетки металла, зависящее от температуры [7, С. 437].

Если формулу $r = 3b/(4a^3(2\pi\rho/p)^{1/2})$ сравнить с формулой $R = \sigma b/S$ (r аналогично R) и опустить безразмерный множитель $3/4(2\pi)^{1/2}$, то πa^2 – площадь поперечного сечения круглого капилляра радиуса a аналогична площади поперечного сечения S цилиндрического проводника, $1/(a(\rho/p)^{1/2}) = (p/\rho)^{1/2}/a$ аналогична удельному электрическому сопротивлению σ . Если формулу $r = 3b/(4a^3(2\pi\rho/p)^{1/2}) = 3b^2m/(4abmS(2\rho/\pi p)^{1/2})$ при $S = \pi a^2$ для разреженного кнудсеновского газа в капилляре сравнить с формулой $r = 8\pi\eta b^2/mS$ для обычного пуазейлевского газа или жидкости в капилляре, то величина $m/(ab(\rho/p)^{1/2})$ разреженного газа аналогична динамической вязкости η обычного газа или жидкости, где m , ρ и p – соответственно масса, плотность и давление разреженного газа в капилляре длиной b и радиуса a .

Заметим, что обычно число Кнудсена определяют в виде $Kn = \lambda/l$, где λ – средняя длина свободного пробега молекул газа, l – характерный размер обтекаемого тела или трубы (например, диаметр трубы), а число Рейнольдса $Re = \rho v l / \eta$, где ρ , v и η – соответственно плотность, скорость и вязкость газа или жидкости в трубе [8, С. 668]. Однако, введя понятие толщины пограничного слоя [1, С. 205, формула 183] в жидкости или газе $D = (\eta l / \rho v)^{1/2}$, число Re можно переписать в аналогичном виде $Re = l^2/D^2$. Отсюда видно, что целесообразнее было бы вводить или число $(Re)^{-1/2}$ или число $(Kn)^{-2}$.

Литература

1. Поль Р. В. Механика, акустика, учение о теплоте. М.: Наука, 1957.
2. Телеснин Р. В., Яковлев В. Ф. Курс физики. Электричество. М.: Просвещение, 1969.
3. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А.. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования. М.: Наука, 1984.
4. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л.: Энергия, ЛО, 1970.
5. Радченко И. В. Молекулярная физика. М.: Наука, 1965.
6. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1976.
7. Егоров В. С., Хлюстиков И. Н. Электрические свойства металлов и сплавов // Физические величины: Справочник / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. С. 437–454.
8. Вишневецкий С. Л. Подобия критерии // Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров Том 3. М.: Большая Российск. Энциклопедия, 1992. С. 668–669.