2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Меркурий-Пресс, 2000.

3. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

4. Поршнев С. В. Персональный компьютер в вузовском курсе физики // Учебный физический эксперимент в высшей школе 1998. № 2. С. 3–8.

5. Кирьянов Д. В. Самоучитель MathCAD 2001. СПб.: БХВ-Петербург, 2001.

6. Дьяконов В. П. Справочник по MathCAD PLUS 6.0. М.: «СК Прогресс», 1997.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК В ПАКЕТЕ MathCAD

С. В. Поршнев, Р. Е. Рыльцев
Нижнетагильский государственный педагогический институт

Модели линейных цепочек, совершающих вынужденные колебания, применяются в различных областях физики: физике твердого тела, радиофизике и т. п. Отмеченные обстоятельства определяют целесообразность рассмотрения данных моделей в соответствующих курсах физики. Однако, несмотря на то, что общие методы решения данной задачи известны [1], их практическая реализация сопряжена с рядом трудностей. Прежде всего, аналитическое решение данной задачи удается найти только при условии, что система обладает определенной симметрией [2]. Но даже в этом случае решение ищется лишь в установившемся режиме и для частот, далеких от резонанса. Для переходных процессов при резонансных частотах хотя и удается найти аналитическое решение для малого количества осцилляторов (2–3), но оно оказывается настолько громоздким, что для его анализа приходится применять ПК. Очевидно, что для исследования таких систем представляется целесообразным использовать численные методы.

Рис.1

В данной работе описывается методика использования пакета MathCAD для моделирования движения колебательной системы, состоящей из N шариков равной массы, связанных друг с другом пружинками одинаковой жесткости (рис.1), под действием периодической вынуждающей силы $f(t) = A\cos(\gamma t)$, приложенной к крайнему шарику.

Уравнения движения шариков имеют вид:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2(2x_1 - x_2) = A\cos(\gamma t),$$

$$\ddot{x}_i + \omega_0^2(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) = 0, \qquad i = 2\ldots N-1 \quad (1)$$

$$\ddot{x}_N + \omega_0^2(2x_N - x_{N-1}) = 0, \qquad \text{где } \omega_0^2 = k/m.$$

Для численного интегрирования системы уравнений движения (1) нами использовался метод Эйлера – Кромера [3] решения систем дифференциальных уравнений (СДУ) (рис. 2).

$$
\mathrm{euler}(N, m, k, R0, V0, T_{fin}, Np, F, A, \Omega) := \left|
\begin{array}{l}
\Delta t \leftarrow \dfrac{T_{fin}}{Np} \\
S_{0,0} \leftarrow 0 \\
K \leftarrow 1 \\
\text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
S_{0,K} \leftarrow R0_i \\
S_{0,K+1} \leftarrow V0_i \\
K \leftarrow K+2
\end{array} \right. \\
x \leftarrow R0 \\
vel \leftarrow V0 \\
\text{for } j \in 1..Np \\
\quad \left| \begin{array}{l}
t \leftarrow \Delta t \cdot j \\
a_0 \leftarrow -\dfrac{k_0}{m_0} \cdot x_0 - \dfrac{k_1}{m_0} \cdot (x_0 - x_1) + \dfrac{F[\Delta t \cdot (j-1), A, \Omega]}{m_0} \\
\text{for } n \in 1..N-2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } N > 2 \\
\quad a_n \leftarrow \dfrac{-k_n}{m_n} \cdot (x_n - x_{n-1}) - \dfrac{k_{n+1}}{m_n} \cdot (x_n - x_{n+1}) \\
a_{N-1} \leftarrow -\dfrac{k_N}{m_{N-1}} \cdot x_{N-1} - \dfrac{k_{N-1}}{m_{N-1}} \cdot (x_{N-1} - x_{N-2}) \\
\text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
vel_i \leftarrow vel_i + a_i \cdot \Delta t \\
x_i \leftarrow x_i + vel_i \cdot \Delta t
\end{array} \right. \\
S_{j,0} \leftarrow t \\
K \leftarrow 1 \\
\text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
S_{j,K} \leftarrow x_i \\
S_{j,K+1} \leftarrow vel_i \\
K \leftarrow K+2
\end{array} \right.
\end{array} \right. \\
S
\end{array}
\right.
$$

Рис. 2. Функция, возвращающая численное решение СДУ (1), представляющее собой матрицу размерности 2N×Np. Аргументы функции: N – число шариков в цепочке, m – вектор масс, k – вектор жесткостей пружин, R0 – вектор начальных координат, V0 – вектор начальных скоростей, T_{fin} – предел интегрирования по времени, Np – число разбиений временного интервала, F – вынуждающая сила, A – амплитуда вынуждающей силы, $\Omega = k_i/m_i$.

Пример обращения к функции:

Задание числа тел, образующих цепочку, N, масс тел m_i, коэффициентов жесткости пружин k_i и начальных условий.

$$N := 5$$
$$i := 0..N-1 \quad i1 := 0..N$$
$$R0_i := 0 \quad V0_i := 0$$
$$m_i := 1 \quad k_{i1} := 1$$

Вычисление и заполнение матрицы $w_{ab}{}^2 = k_a/m_b$.

$$\alpha := 0..N \quad \beta := 0..N-1$$
$$\Omega_{\alpha,\beta} := \frac{k_\alpha}{m_\beta}$$

Определение параметров численного решения СДУ:

***Ω**, T, A* - соответственно частота, период и амплитуда вынуждающей силы;
T – интервал времени, в пределах которого производится вычисление;
Np – число разбиений отрезка 0..*T*.

$$A := 1$$

$$F(t, A, \Omega) := A \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

$$T0 := \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \quad Np := 2^{16} - 1 \quad T := 50 \cdot T0$$

Численное решение СДУ.

$$M := \mathrm{euler}(N, m, k, R0, V0, T, Np, F, A, \Omega)$$

С целью проверки правильности работы программы была проведена ее апробация на системе из трех шариков, совершающих свободные колебания. Выбор данной системы определен возможностью расчета ее параметров аналитически. Точность численных решений контролировалась путем проверки закона сохранения механической энергии при отсутствии вынуждающей силы. (Программа для вычисления энергии приведена на рис. 3) Обобщая результаты тестирования данной программы, можно заключить, что она вполне адекватно описывает поведение рассматриваемой системы.

$$
En(N,m,k,M) := \left|
\begin{array}{l}
K \leftarrow \mathrm{rows}(M) - 1 \\
K1 \leftarrow 0 \\
\text{for } j \in 0..N-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..K \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
E_i \leftarrow \dfrac{m_0 \cdot (M_{i,2})^2}{2} + k_0 \cdot \dfrac{(M_{i,1})^2}{2} + \dfrac{k_1 \cdot (M_{i,1} - M_{i,3})^2}{4} \quad \text{if } j = 0 \\
E_i \leftarrow \dfrac{m_{N-1} \cdot (M_{i,2N})^2}{2} + \dfrac{k_N \cdot (M_{i,2N-1})^2}{2} + \dfrac{k_{N-1} \cdot (M_{i,2 \cdot N-1} - M_{i,2 \cdot N-3})^2}{4} \quad \text{if } j = N-1 \\
E_i \leftarrow \dfrac{m_j \cdot \left[M_{i,2 \cdot (j+1)}\right]^2}{2} + \dfrac{k_j \cdot (M_{i,2 \cdot j+1} - M_{i,2 \cdot j-1})^2}{4} + \dfrac{k_{j+1} \cdot (M_{i,2 \cdot j+1} - M_{i,2 \cdot j+3})^2}{4} \quad \text{if } 0 < j < N-1
\end{array}
\right. \\
En_{K1} \leftarrow E \\
K1 \leftarrow K1 + 1
\end{array}
\right. \\
En
\end{array}
\right.
$$

Рис. 3. Функция, возвращающая матрицу размерности NxNp, содержащую значение полной механической энергии шариков в каждый момент времени. Пример обращения к функции $E00 := En(N, m, k, M)$.

Необходимость прибегнуть к программированию вызвана тем, что в MathCAD, как впрочем и в других пакетах, при использования встроенных функций решения СДУ требуется задавать вектор-функцию, возвращающую значения старших производных, которая, во-первых, достаточно громоздка, во-вторых, при изменении числа шариков ее требуется определять заново. Тем самым мы лишаемся возможности полностью автоматизировать вычисления, что затрудняет дальнейший анализ. Использование языка программирования пакета MathCAD позволяет избежать этих трудностей.

Система (1) является системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Как известно, общее решение такой системы является суммой общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной. Решение однородной системы возможно найти стандартным методом: нахождение собственных чисел и собственных векторов системы, определение неизвестных постоянных из начальных условий и т. д. [1]. Процедура численного нахождения собственных чисел и собственных векторов матриц хорошо алгоритмизируется и представлена в виде встроенных функций во многих математических пакетах, в том числе и в пакете MathCAD.

Ниже представлен фрагмент документа для нахождения собственных чисел и собственных векторов системы.

Заполнение матрицы **B** системы.

$$B := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N-1 \\ \quad\quad A_{i,j} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \begin{array}{|l} \text{if } i = 0 \\ \quad \begin{array}{|l} A_{0,0} \leftarrow \Omega_{0,0} + \Omega_{1,0} \\ A_{0,1} \leftarrow -\Omega_{1,0} \end{array} \\ \text{if } 0 < i < N-1 \\ \quad \begin{array}{|l} A_{i,i-1} \leftarrow -\Omega_{i,i} \\ A_{i,i} \leftarrow \Omega_{i,i} + \Omega_{i+1,i} \\ A_{i,i+1} \leftarrow -\Omega_{i+1,i} \end{array} \\ \text{if } i = N-1 \\ \quad \begin{array}{|l} A_{i,i-1} \leftarrow -\Omega_{i,i} \\ A_{i,i} \leftarrow \Omega_{i,i} + \Omega_{i+1,i} \end{array} \end{array} \\ A \end{array}$$

Нахождение собственных частот нормальных колебаний.

$\Theta := \overrightarrow{\sqrt{\text{eigenvals}\,(B)}}$

Вычисление матрицы, столбцы которой есть собственные векторы матрицы **B**.

$\Xi := \text{eigenvecs}(B)$

В том случае, когда задача о собственных колебаниях решена для нахождения частного решения СДУ в установившемся режиме, можно использовать метод разложения по собственным формам [4].

Согласно этому методу, частное решение СДУ представляется в виде

$$\tilde{X}_s = \tilde{A}_s \exp(i\gamma t), \text{ где } \tilde{A}_s = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\tilde{f}_\alpha \Xi_{s\alpha}}{\omega_\alpha^2 - \gamma^2}, \tag{2}$$

а коэффициенты разложения $\tilde{f}_\alpha$ удовлетворяют равенству

$$\tilde{f}_\alpha = \frac{\Xi_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{F}}}{\Xi_\alpha \cdot \mathbf{M}\Xi_\alpha}, \tag{3}$$

где Ξ_α – вектор нормальных колебаний, $\tilde{\mathbf{F}}_\alpha$ – вектор внешних сил, записанный в комплексной форме.

При нулевых начальных условиях, то есть при $x_i(0) = 0$, $\dot{x}_i(0) = 0$ начальные фазы колебаний всех шариков, следовательно, и мнимые части комплексных амплитуд $\tilde{A}_s$, также будут равны нулю.

Наибольший интерес представляет случай, когда частота вынуждающей силы совпадает с одной из собственных частот. В этом случае в системе с одной степенью свободы наступает резонанс, при котором амплитуда колебаний увеличивается со временем по линейному закону. Для резонансного возбуждения какой-либо моды колебаний в системе с большим числом степеней свободы необходимо не только обеспечить резонансное соотношение между частотой этой моды и частотой внешней силы, но и создать такие условия, чтобы воздействие силы на разные элементы системы не оказалось взаимно скомпенсированным. При невыполнении данных условий в исследуемой системе, возбуждаемой на одной из собственных частот, резонировать будет только часть шариков. Например, как видно из формулы (2), шарик с номером s будет резонировать на частоте ω_α если $\tilde{f}_\alpha \Xi_{s\alpha} \neq 0$. Таким образом, вычислив матрицу $\mathbf{R}_{s\alpha} = \tilde{f}_\alpha \Xi_{s\alpha}$, мы сможем без численного решения СДУ сделать выводы о поведении системы при $\gamma = \omega_\alpha$. Для вычисления **R** достаточно дополнить документ следующим фрагментом.

Заполнение диагональной матрицы масс и вектора внешних сил.

$M := \mathrm{diag}(m)$

$F_i := 0$

$F_0 := 1$

Вычисление элементов транспонированной матрицы $\mathbf{R}^T$.

$$H_i := \frac{\Xi^{\langle i \rangle} \cdot F}{\Xi^{\langle i \rangle} \cdot \left(M \cdot \Xi^{\langle i \rangle} \right)}$$

```
R := | for i ∈ 0.. N − 1
     |   for j ∈ 0.. N − 1
     |     S[i,j] ← H[i]·Ξ[j,i]
     | S
```

Используя программу для решения уравнений движения и формулы (2) и (3), мы провели исследование движения системы, представленной на рис. 1, для различного числа шариков. Рассмотрим случай $N = 3$. Элементы матрицы **R** для удобства транспонированы, то есть по горизонтали изменяется номер шарика, по вертикали – номер собственной частоты.

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.354 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.25 & -0.354 & 0.25 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Без непосредственных расчетов можно утверждать, что

1) Амплитуды $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_3$ резонируют на всех трех собственных частотах;

2) При $\gamma = \omega_2$ амплитуда $\tilde{A}_2$ резонировать не будет;

3) При $\gamma = \omega_2$ крайние шарики будут колебаться в противофазе, а их амплитуды будут расти с одинаковой скоростью, так как при резонансе можно пренебречь общим решением однородной СДУ и рассматривать только частное решение неоднородной (2).

Утверждения 1–3 подтверждаются численным решением уравнений движения (1). Результаты расчетов приведены на рис. 4.

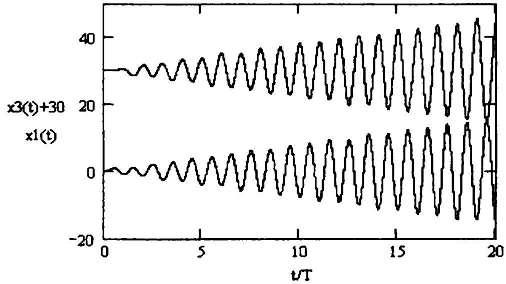

Рис. 4а. Графики зависимостей x_1 (t) и x_3 (t) при N = 3, $\gamma = \omega_2$. Для удобства графики смещены вдоль оси ординат

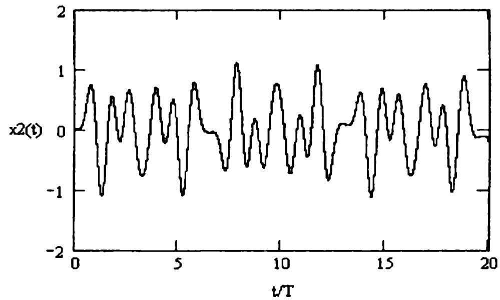

Рис.4.б. График зависимости x_2(t) при N = 3, $\gamma = \omega_2$

Анализируя поведение системы при различных значениях N, можно сделать ряд общих выводов.

1. Из рис. 4а видно, что для $N = 3$ при резонансе амплитуда колебаний растет со временем по линейному закону. В общем случае это утверждение не справедливо, амплитуда может расти и более сложным образом (рис. 5). Тем не менее, всегда можно оценить среднюю скорость ее возрастания. Для этих целей из вектора $x_i(t_i)$ произведем выборку значений, соответствующих локальным максимумам затем по методу наименьших квадратов проведем аппроксимирующую прямую kx + b (рис. 6). Угол наклона данной прямой характеризует среднюю скорость возрастания амплитуды при резонансе и пропорционален соответствующему элементу матрицы **R**. Ниже представлен способ

вычисления локальных максимумов и построения аппроксимирующей кривой в пакете MathCAD.

Программа, осуществляющая выборку локальных максимумов координат из матрицы M для n-го шарика.

$$
\mathrm{Max}(A,n) := \left|
\begin{array}{l}
j \leftarrow 0 \\
i \leftarrow 1 \\
\text{while } i \le Np - 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{if } \left(A_{i,2\cdot n+1} > A_{i-1,2\cdot n+1}\right) \wedge \left(A_{i,2\cdot n+1} > A_{i+1,2\cdot n+1}\right) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
M_{j,0} \leftarrow A_{i,0} \\
M_{j,1} \leftarrow A_{i,2\cdot n+1} \\
j \leftarrow j + 1
\end{array}
\right. \\
i \leftarrow i + 1 \\
M
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

$$Mx0 := \mathrm{Max}(M,0)$$

Вычисление параметров аппроксимирующей прямой по методу наименьших квадратов для первого шарика.

$$k := \mathrm{slope}\left[(Mx0)^{\langle 0\rangle}, Mx0^{\langle 1\rangle}\right] \quad k := \mathrm{intercept}\left[(Mx0)^{\langle 0\rangle}, Mx0^{\langle 1\rangle}\right]$$

$$j := 0..\,\mathrm{rows}(Mx0) - 1 \qquad x_j := j\cdot\frac{\max(Mx0)}{\mathrm{rows}(Mx0)}$$

Построение огибающей и аппроксимирующей кривых (см. рис. 6).

2. Появление нулевых членов в матрице R возможно только при нечетном значении N. (Другими словами, при четном N все шарики резонируют на любой из собственных частот.)

3. При нечетном значении N существуют такие собственные частоты, на которых каждый n-й шарик не резонирует. Значение n может быть различным от 2 до N/2 – 1. (Например из матрицы **R** для N = 5 видно, что при $\gamma = \omega_\alpha$ и $\gamma = \omega_3$ резонируют все шарики, кроме среднего (то есть n = N/2 –1 = 3), а при $\gamma = \omega_2$, n = 2, то есть каждый второй шарик не резонирует.)

$$
R^T = \begin{pmatrix}
0.25 & 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 \\
0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \\
0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 & -0.25 \\
0.083 & -0.144 & 0.167 & -0.144 & 0.083 \\
0.083 & 0.144 & 0.167 & 0.144 & 0.083
\end{pmatrix}
$$

4. При четных значениях N элементы матрицы **R** симметричны либо антисимметричны относительно середины цепочки, а при нечетных – относи-

тельно среднего шарика. Это означает, что на любой из собственных частот симметричные шарики резонируют либо синфазно, либо в противофазе, причем скорость возрастания амплитуды у них одинакова (см. пункт 1).

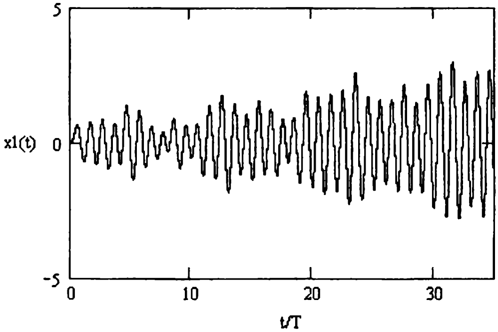

Рис. 5. График зависимости $x_1(t)$ при $N = 5$, $\gamma = \omega_4$

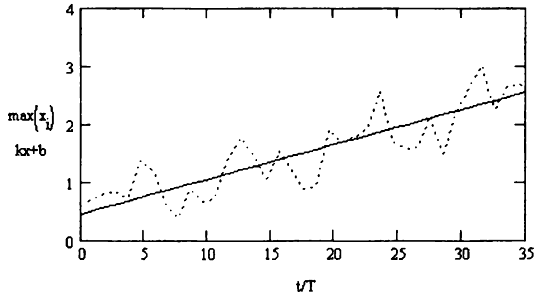

Рис. 6. Локальные максимумы зависимости $x_1(t)$ и аппроксимирующая прямая при $N = 5$, $\gamma = \omega_4$

Литература.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 2001.
2. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1969.
3. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Ч 1. М.: Мир, 1990.
4. Кандидов В. П., Капцов Г. Н., Харламов А. А. Решение и анализ задач линейной теории колебаний. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1976.