ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ КАК МЕТОДА НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О БИЛЬЯРДНОМ ШАРЕ

С. В. Поршнев, Л. М. Ставцева
Нижнетагильский государственный педагогический институт

В соответствие с обязательным минимумом содержания образования линия «Формализация и моделирование» является одной из содержательных линий базового курса информатики. Знакомство с моделированием как методом научного познания раскрывается в ходе построения компьютерной модели, проведения компьютерного эксперимента и анализа его результатов, формирования «понятия адекватности модели», нахождения области ее применимости. Практические навыки использования метода моделирования и усвоение вышеперечисленных понятий формируются в ходе решения задач с постепенно возрастающим уровнем сложности.

При изучении метода моделирования в школьном курсе информатики для показа универсальности метода моделирования рекомендуется знакомство с задачами из различных областей человеческой деятельности. Здесь мы разделяем подход Е. К. Хеннера и А. П. Шестакова состоящий в том, что знакомство с методом моделирования целесообразно начинать именно с задач, наполненных физическим содержанием, так как к моменту изучения компьютерного моделирования школьникам уже известен целый ряд математических моделей из курса физики. Поэтому описание физических явлений с помощью математического языка является для них естественным и не должно вызывать принципиальных трудностей.

Рассмотрим основные этапы построения компьютерной модели.

На первом этапе создается физическая модель изучаемого явления; проводится ранжирование факторов, влияющих на поведение исследуемой системы. При этом в учебном процессе следует рассматривать модели, содержательные с физической точки зрения, в которых используется математический аппарат, адекватный знаниям учащихся. Построение физической модели является необходимой предпосылкой для создания адекватной математической модели.

На втором этапе осуществляется реализация математической модели средствами компьютера.

На третьем этапе проводится вычислительный эксперимент с целью выявления наиболее значимых взаимосвязей и параметров модели. Здесь особенно важно дать физическую интерпретацию полученных результатов, оценить физический смысл и правомерность тех допущений, которые были введены при упрощении математической модели.

В качестве примера реализации метода компьютерного моделирования в учебном процессе рассмотрим задачу о движении бильярдного шара. Цель моделирования состоит в описании траектории движения шара. При этом мы будем считать шар материальной точкой, положение которой описывается координатами на плоскости. В данной модели входными параметрами будут начальное положение шара, величина скорости и ее направление, задаваемое углом между вектором скорости и положительным направлением к оси *Ox*. Рассматриваемая модель движения относится к динамическим моделям, в которых состояние объекта меняется во времени.

Из формул, описывающих зависимость проекций радиус-вектора материальной точки при прямолинейном равномерном движении, получим:

$$x = x_0 + v_x \cdot \Delta t, \qquad (1)$$
$$y = y_0 + v_y \cdot \Delta t$$

где v_x и v_y – составляющие скорости материальной точки до удара.

Из (1) видно, что траектория есть прямая линия, угол наклона которой к оси абсцисс равен α. При отражении от борта, параллельного оси *Oy*, составляющие скорости примут вид $v_x = -v_x$, $v_y = v_y$, а при отражении от борта параллельного оси *Ox*: $v_y = -v_y$, $v_x = v_x$, при этом модуль скорости в предположении об абсолютно упругом ударе остается постоянным.

Разложим вектор скорости раскладывается на две составляющие v_x и v_y:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$
$$v_y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot$$

При моделировании на компьютере будем рассматривать положение движущейся точки через заданные дискретные промежутки времени, т. е. использовать разностную модель движения. В данной модели непрерывное движение заменяется последовательностью отдельных равномерных прямолинейных отрезков, координаты концов которых определяются в соответствии с (1):

$$x_{i+1} = x_i + v_x \cdot \Delta t$$
$$y_{i+1} = y_i + v_y \cdot \Delta t\,'$$

где x_i, y_i – координаты начала отрезка, x_{i+1}, y_{i+1} – координаты конца отрезка.

Для вычисления траектории движения шара можно использовать следующий алгоритм:

1) задать входные параметры:

– координаты, описывающие начальное положения шара – x_0, y_0;

– начальное значение модуля скорости – v_0;

– угол между вектором скорости и осью абсцисс – α;

2) задать промежуток времени – Δt;

3) найти значения составляющих вектора скорости относительно осей *Ox* и *Oy* – v_x, v_y;

4) найти значения координат точки – *x*,*y* в конечной точке промежутка времени;

5) проверить условия достижения шара стенок бильярда;

6) если какая-либо граница достигнута, то отразить вектор скорости от соответствующей границы;

7) повторить шаги 5 и 6 требуемое число раз.

Документ пакета MathCAD, реализующий описанный алгоритм, состоит из следующих блоков:

1. Задание угла между вектором скорости и осью абсцисс:

$$\alpha := \frac{\pi}{6}$$

2. Задание начального значения модуля скорости:

$$v_0 := 0.5$$

3. Задание текста программы, возвращающей матрицу значений координат точки в процессе движения:

```
D := | x_0 ← 0
     | y_0 ← 0
     | vx ← v_0·cos(α)
     | vy ← v_0·sin(α)
     | Δt ← 0.3
     | for i ∈ 0..100
     |   | y_{i+1} ← y_i + vy·Δt
     |   | x_{i+1} ← x_i + vx·Δt
     |   | vy ← −vy  if  y_{i+1} ≥ 5
     |   | vy ← −vy  if  y_{i+1} ≤ 0
     |   | vx ← −vx  if  x_{i+1} ≥ 5
     |   | vx ← −vx  if  x_{i+1} ≤ 0
     |   | augment(x, y)
```

Задание начального положения шара в заданной системе координат

Задание составляющих скорости относительно осей Ox и Oy

Задание промежутка времени

Нахождение координат точек шара на i-том шаге

Изменение направление скорости шага в случае, если он достиг горизонтальных границ поля

Изменение направление скорости шага в случае, если он достиг вертикальных границ поля

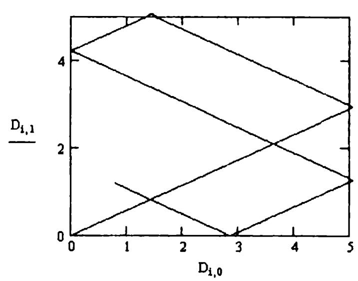

Рис. 1. Траектория движения шара

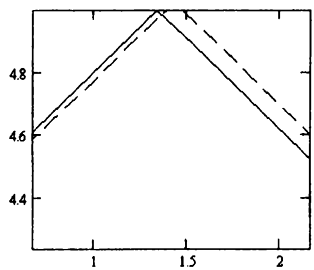

Рис. 2. Увеличенный участок траектории шара при $\Delta t = 0.3$ (пунктирная линия) и $\Delta t = 0.05$ (сплошная линия)

Из рис. 1 хорошо видно, что точка, в которой происходит поворот шара, выходит за стенки бильярдного стола (поэтому точка удара и точка отражения оказываются смещенными относительно друг друга). Данную погрешность можно несколько уменьшить, изменив промежуток времени (рис. 2).

Для устранения обнаруженной погрешности описанного алгоритма необходимо внести в программу следующие изменения. Как видно из рис. 3 при отражении шара от правой вертикальной границы бильярда в качестве координат x_{i+1}, y_{i+1} нужно использовать координаты точки С. Соответствующий фрагмент программы представлен на рис. 4. Аналогично проводятся вычисления координат точек и вектора скорости при отражении от других границ.

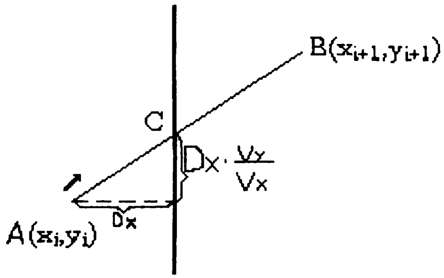

Рис. 3

$$
\begin{aligned}
&\text{if } x_{i+1} \ge 5\\
&\quad x_{i+1} \leftarrow 5\\
&\quad Dx \leftarrow 5 - x_i\\
&\quad y_{i+1} \leftarrow y_i + Dx\cdot\frac{vy}{vx}\\
&\quad vx \leftarrow -vx\\
&\quad vy \leftarrow vy
\end{aligned}
$$

Рис. 4

Фрагмент траектории, вычисленной в соответствии с модифицированным алгоритмом, представлен на рис. 5.

Рис. 5. Траектория движения при $\Delta t = 0.3$ с модифицированным (сплошная линия) и не модифицированным алгоритмами (точечная линия)

```
Dk := | x_0 ← 0
      | y_0 ← 0
      | vx ← v_0·cos(α)
      | vy ← v_0·sin(α)
      | Δt ← 0.1
      | for i ∈ 0..400
      |     y_{i+1} ← y_i + vy·Δt
      |     x_{i+1} ← x_i + vx·Δt
      |     if y_{i+1} ≥ 5
      |         y_{i+1} ← 5
      |         Dy ← 5 − y_i
      |         x_{i+1} ← x_i + Dy·vx/vy
      |         vy ← −k·vy
      |     if x_{i+1} ≥ 5
      |         x_{i+1} ← 5
      |         Dx ← 5 − x_i
      |         y_{i+1} ← y_i + Dx·vy/vx
      |         vx ← −k·vx
      |         vy ← vy
      |     if x_{i+1} ≤ 0
      |         x_{i+1} ← 0
      |         Dx ← 0 − x_i
      |         y_{i+1} ← y_i + Dx·vy/vx
      |         vx ← −k·vx
      |         vy ← vy
      |     if y_{i+1} ≤ 0
      |         y_{i+1} ← 0
      |         Dy ← 0 − y_i
      |         x_{i+1} ← x_i + Dy·vx/vy
      |         vy ← −k·vy
      |     augment(x,y)
```

Рис. 6

```
z := | i ← 0
     | x_i ← 0
     | y_i ← 0
     | vx ← v_0·cos(α)
     | vy ← v_0·sin(α)
     | Δt ← 0.1
     | while |vx| > 0.2·10^-1 ∧ |vy| > 0.2·10^-1
     |     i ← i + 1
     |     y_i ← y_{i−1} + h·vy·Δt
     |     x_i ← x_{i−1} + h·vx·Δt
     |     if y_i ≥ 5
     |         y_i ← 5
     |         Dy ← 5 − y_{i−1}
     |         x_i ← x_{i−1} + Dy·vx/vy
     |         vy ← −k·vy
     |     if x_i ≥ 5
     |         x_i ← 5
     |         Dx ← 5 − x_{i−1}
     |         y_i ← y_{i−1} + Dx·vy/vx
     |         vx ← −k·vx
     |     if x_i ≤ 0
     |         x_i ← 0
     |         Dx ← 0 − x_{i−1}
     |         y_i ← y_{i−1} + Dx·vy/vx
     |         vx ← −k·vx
     |     if y_i ≤ 0
     |         y_i ← 0
     |         Dy ← 0 − y_{i−1}
     |         x_i ← x_{i−1} + Dy·vx/vy
     |         vy ← −k·vy
     | augment(x,y)
```

Рис. 7

После внесения изменений в программу можно приступить непосредственно к моделированию процесса движения бильярдного шара. Описанный выше алгоритм применим к случаю, когда движение происходит без учета силы трения и удар является абсолютно упругим.

Для моделирования движения шара, испытывающего в процессе движения не абсолютно упругие соударения со стенками, необходимо внести дополнения в описанную выше программу. Будем считать, что при не абсолютно упругом ударе изменяется только составляющая скорости, перпендикулярная границе бильярда, а составляющая скорости, параллельная границе бильярда, остается неизменной:

$$v_x = -kv_x,$$
$$v_y = v_y,$$

при отражении от вертикальной границы,

$$v_y = -kv_y,$$
$$v_x = v_x,$$

при отражении от горизонтальной границы, где k – коэффициент потери скорости после удара. Текст модифицированной программы представлен на рис. 6. Программа, в которой дополнительно учитывается сила сухого трения, действующая на материальную точку в процессе ее движения, представлена на рис. 7.

Созданные программы позволяют вычислить траектории движения, используя одинаковый шаг по времени для каждого случая и провести их визуализацию.

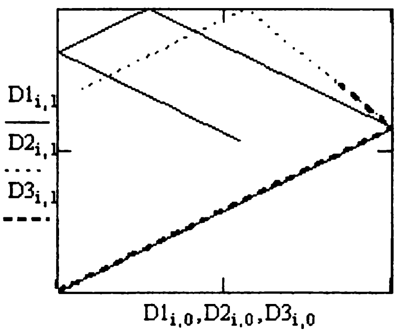

Рис. 8. Траектории движения шаров: абсолютно упругий удар (сплошная линия), не абсолютно упругий удар (точечная линия), не абсолютно упругий удар с учетом силы трения (жирная пунктирная линия)

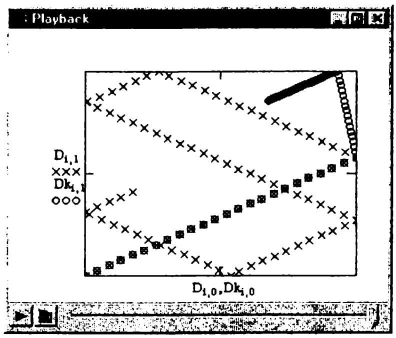

Рис. 9. Траектории движения шара при абсолютно упругом и не абсолютно упругом ударе

Из рис. 8 видно, что в третьем случае (не абсолютно упругий удар с учетом силы трения) шар движется наиболее медленно. Это можно наглядно продемонстрировать, если построить динамическую картинку движения шара. Создание анимационного клипа в пакете MathCAD осуществляется следующей последовательностью действий: 1) вызов окна создания анимационного клипа; 2) задание количества кадров анимационного клипа; 3) старт процесса создания анимационного клипа. После создания анимационного клипа на экране появится окно стандартного AVI – проигрывателя (рис. 9), в котором можно сразу просмотреть анимационный клип или сохранить его на диске в виде AVI-файла для последующего использования. Из рис. 9 видно, что траектории движения шара при абсолютно упругом и не абсолютно упругом ударе, которые до удара совпадали, после удара расходятся.

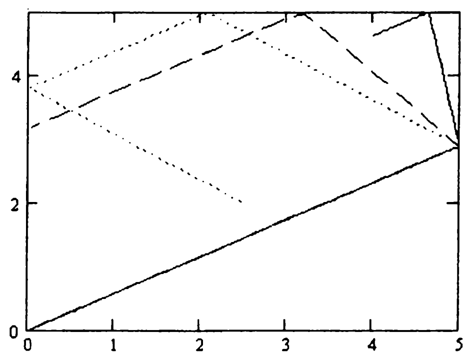

Рис. 10. Траектории движения шара при k = 0.1(сплошная линия), k = 0.5 (пунктирная линия), k = 0.8 (точечная линия)

Описанные программы позволяют точно проанализировать влияние параметра *k* на вид траектории движения. Например, из рис. 10 видно, что чем больше значение коэффициента *k*, тем большим оказывается угол отражения шара.

Таким образом, описанные выше программы позволяют выполнить моделирование движения шара в бильярде. Последовательное прохождение учащимися всех этапов моделирования позволяет сформировать у них понятие о моделировании, продемонстрировать общие методы познания, способы учебной деятельности.